PS Algorithmen für verteilte Systeme

eingereicht von

Baumgartner Dominik, Dafir Samy

Gruppe 1(16:00)

Aufgabe 9:
Betrachte ein beliebiges Entscheidungsproblem P (d.h. es gibt nur Ausgaben der Form YES oder NO). Angenommen, wir haben einen randomisierten Algorithmus A für P mit der folgenden Eigenschaft:

- Für alle Eingaben $x \in P$ gilt $Pr[A(x) = NO] \leq \frac{1}{3}$ und
- für alle Eingaben $x \notin P$ gilt $Pr[A(x) = YES] \leq \frac{1}{3}$.

Zeigen Sie, dass man durch Mehrfachausführung von A die Fehlerwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{n}$ drücken kann.

Wissen, nach einmaligem ausführen ist die Fehlerwahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{3}$ (x in P und NO, x nicht in P und ja). Wenn dieser Algorithmus Mehrfach hintereinander ausgeführt wird, dann hat man für die erste Ausführung eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$, beim 2. mal ausführen ebenfalls eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$, und so weiter. Aufgrund der Unabhängigkeit der Ausführungen können die Fehlerwahrscheinlickeiten miteinander multipliziert werden (ähnlich zum mehrmaligen werfen eines Würfels). Somit ergibt sich nach n-maligen ausführen des Algorithmus eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3^n}$

Aufgabe 10:

Ein Kasino testet einen neuen Typen von Spielautomaten. Für jedes Spiel muss der Spieler eine 1e-Münze einwerfen. Der Automat soll laut Herstellerangaben mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{13}$ Münzen im Wert von 3 Euro ausspucken. Die Spiele seien unabhängig voneinander. Das Kasino stellte überrascht fest, dass die Maschinen während den ersten $n = 10^5$ Spielen insgesamt $v = 10.000$ Euro verloren hatten. Leiten Sie eine Chernoff-Schranke für dieses Ereignis her.

10)

- Schranke über Anzahl gewinner ermittelt

  X: gewinnen / verlieren

  $P[X=1] = \frac{4}{13}$ $\quad P[X=0] = \frac{9}{13}$

  $E(X) = 1 \cdot \frac{4}{13} + 0 \cdot \frac{9}{13} = \frac{4}{13}$

- Gewinnwahrscheinlichkeit für gegebenes Beispiel:

  # Gewinner $\quad 10000 = 2 \cdot a - (100000 - a) \cdot 1$

  $\Rightarrow a = \frac{110000}{3} \approx 36667$

  $\Rightarrow$ Gewinnwahrscheinlichkeit: $\frac{36667}{100000} = 0{,}36667$

- Erwartete # Gewinner

$E(Y) = n \cdot E(X)$ (hier $100000 \cdot \frac{4}{13} = 30769$)

- Chernoff Schranke für Anzahl gewinner:

$$P[Y \geq 0{,}36667 n] \leq \cancel{\left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)} \leq e^{-\frac{\delta^2 \cdot \mu}{3}} = e^{-\frac{\delta^2 \cdot E(X) \cdot n}{3}}$$

$(1+\delta) \cdot \mu = 0{,}36667 \cdot n$

$(1+\delta) \cdot 0{,}30769\, n = 0{,}36667\, n$

$\delta = \frac{0{,}36667}{0{,}30769} - 1 = 0{,}19$

- Schranke Abhängig von Anzahl Spiele

$$P[Y \geq 0{,}36667 \cdot n] \leq e^{-\frac{0{,}19^2 \cdot \frac{4}{13} \cdot n}{3}}$$
$$\leq e^{-3{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot n}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl d Gewinner so von den Erwarteten abweicht, dass ein Verlust wie im Bsp entsteht sinkt mit steigender # Spiele.

  z B 1 Spiel: obere Schranke: 99,6 %

  100000 Spiele: obere Schranke: $\longrightarrow 0$

Es ist also unmöglich, dass die vom Hersteller angegebene Gewinnwahrscheinlichkeit stimmt.