7)
2.2. $BF(k)$ ist knotensymmetrisch

Bewcis:

Verwende Shuffle-Funktion

$s(u)$: zyklischer Links-shift von u. $s: \{0,1\}^k \to \{0,1\}^k$

$\varphi: V_k \to V_k \quad \varphi((i,u)) = ((i+1) \bmod k, s(u))$

- 2.2. φ ist ein Automorphismus
  - 2.2. φ ist bijektiv
    - 2.2. φ ist injektiv

$(i,u) \neq (j,v) \Rightarrow ((i+1) \bmod k, s(u)) \neq ((j+1) \bmod k, s(v))$

falls $i \neq j \Rightarrow (i+1) \bmod k \neq (j+1) \bmod k$

falls $i = j$: $u \neq v \Rightarrow s(u) \neq s(v)$

$\Rightarrow \varphi$ injektiv $|V_k| = |V_k| \Rightarrow \varphi$ surjektiv $\Rightarrow \varphi$ bijektiv

- 2.2. Kanten werden auf Kanten abgebildet (Kreis- & BF-Kanten)
  - Kreiskanten:

Sei $((i,u), ((i+1) \bmod k, u))$ eine Kreiskante
~~((i+1)mo~~
$\Rightarrow (((i+1) \bmod k, s(u)), ((i+2) \bmod k, s(u)))$ Ist auch eine Kreiskante

(beide haben gleiche geshiftete bits + Levels unterscheiden sich um 1)

- ~~Hypercubeko~~ Butterflykanten:

Sei $((i,u), ((i+1) \bmod k, u(i)))$ eine BF-Kante

Dann ist auch $(((i+1) \bmod k, s(u)), ((i+2) \bmod k, s(u(i))))$
eine BF-Kante. Begründung:
- Die Levels der Knoten unterscheiden sich um 1
- u und $u(i)$ unterscheiden sich ~~um~~ in einer Bitstelle.
  $\Rightarrow$ auch $s(u)$ und $s(u(i))$ unterscheiden sich in einer Stelle (wurden nur geshiftet)

$\Rightarrow$ BF-Kanten werden auch korrekt abgebildet

- 22. Nicht vorhandene Kanten werden nicht auf Kanten abgebildet.

Kanten müssen folgende Eigenschaften erfüllen:
Kreiskanten: gleiche Bitkombination, Levels d. Knoten um 1 verschieden

BF-Kanten: Bitkombinationen unterscheiden sich in einem bit + Levels d. Knoten um 1 verschieden

- kreiskanten: $((i,u), ((\overset{j}{\cancel{i+1}}) \cancel{\bmod k}, \overset{v}{\cancel{u(k)}}))$

$u \neq v \Rightarrow$ Keine Kreiskante $\Rightarrow s(u) \neq s(v) \Rightarrow$ keine kreiskante

j & i nicht um 1 verschieden $(j+1) \bmod k$ & $(i+1) \bmod k$ auch nicht

$\Rightarrow$ keine Kreiskante. (weder vor noch nach Abbildung

- BF-kanten $((i,u), ((\overset{j}{\cancel{i+1}}) \cancel{\bmod k}, v))$

Falls i & j sich nicht um 1 unterscheiden, unterschciden sich auch $(i+1) \bmod k$ & $(j+1) \bmod k$ nicht um 1 Level

$\Rightarrow$ Vor & nach Abbildung keine kante mgl.

Falls u & v sich nich in 1 Stelle unterscheiden (in der i-ten Stelle $v \neq u(i)$) unterscheiden sich auch $s(u)$ und $s(v)$ ~~s(u(i))~~ nicht in der i-ten Stelle (nach Abbildung i+1 te Stelle), also $s(u)$ & $s(v)$ entweder nicht um 1 Stelle unterschiedlich oder nicht in i-ter Stelle

$\Rightarrow$ Vor und nach Abbildung keine BF-kante

φ ist ein Automorphismus

- $\delta_j : V_k \to V_k$; $\delta_j(i,u) = (i, u(j))$ ist bijektiv (Laut VO)

kreiskanten:

$(\delta_j(i,u), \delta_j((i+1) \bmod k, u)) \Rightarrow ((i, u(j)), ((i+1) \bmod k, u(j)) \in E_k$
$\Rightarrow$ kreiskante

BF-kanten:

$(\delta_j(i,u), \delta_j((i+1) \bmod k, u(i))) \Rightarrow ((i, u(j)), ((i+1) \bmod k, u(i)(j))) \in E_k$

kanten unterscheiden sich um 1 Level & 1 bit da δ_j das gleiche bit flippt

$\Rightarrow \delta_j$ ist ein Automorphismus

- (i,u) auf (j,v) abbilden:

φ anwenden bis $j = i$. Position (j, x); $x \neq v$. Jetzt δ_j auf alle bits in x anwenden die ungleich v sind

$\Rightarrow$ bei (j,v) angelangt.