MSTAT : Travaux pratiques

Yassine Jamoud, Samy Haffoudhi

28 novembre 2021

Introduction

Dans cet exercice nous considérons un moteur à courant continu commandé par la tenson d'induit $u(t)$. La position angulaire du rotor $\theta(t)$ est mesurée par un codeur incrémental à $L = 521$ lignes par tour, fournissant une mesure $y(t)$ de $\theta(t)$. $\Omega(t)$ est la vitesse de rotation. On cherche alors à estimer en ligne $\theta(t)$ et $\Omega(t)$ connaissant $u(t)$ et $(y(t)$.

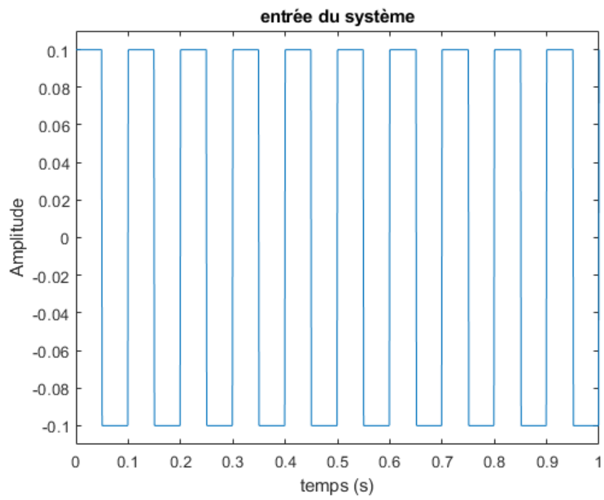
6 Filtrage de Kalman

6.1 Synthèse de l'entrée du système

$u(t)$ est un créneau centré de période $\Delta = 100$ ms, d'amplitude crête à crête $A = 0{,}1$ V. Ce signal est échantillonné à la période $T_e = 1$ ms. Programmons une fonction Matlab permettant de synthétiser cette entrée échantillonnée pour une durée D.

```
function u = entree(D,A,Delta,Te)
    n = round(D/Te);
    u = zeros(n);
    t = 0:Te:D;
    u = A * square(2 * pi * t / Delta);
    u = u';
end
```

FIGURE 1 – Entrée du système



6.2 Modélisation et simulation du système

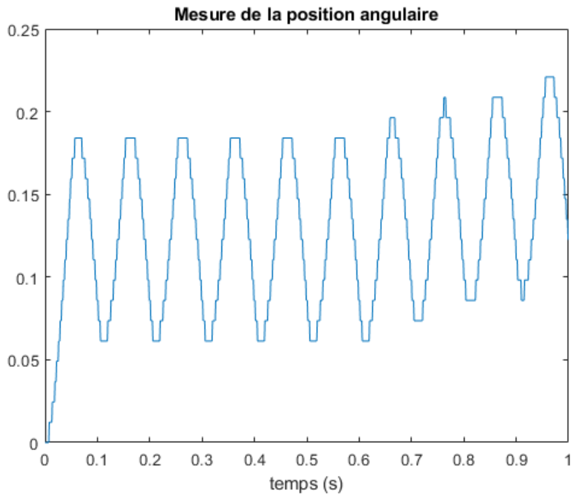
a. Programmons le simulateur :

```
function [y,x] = simule(u,G,T,Te,L,x1)
    A = [0 1; 0 -1/T];
    B = [0; G/T];
    C = [1 0];
    D = [0];
    [Ad,Bd,Cd,Dd] = c2dm(A,B,C,D,Te, 'zoh');

    x = [x1'];
    y = zeros(length(u),1);
    for i = 1:length(u)-1
```

```
            x = [x; (Ad*x(i,:)'+Bd*u(i))'];
            y(i) = Cd*x(i,:)'+Dd*u(i);
        end
        n = length(u);
        y(n) = Cd*x(n,:)'+Dd*u(n);
        y = round(y*L/2/pi)*2*pi/L;
end
```

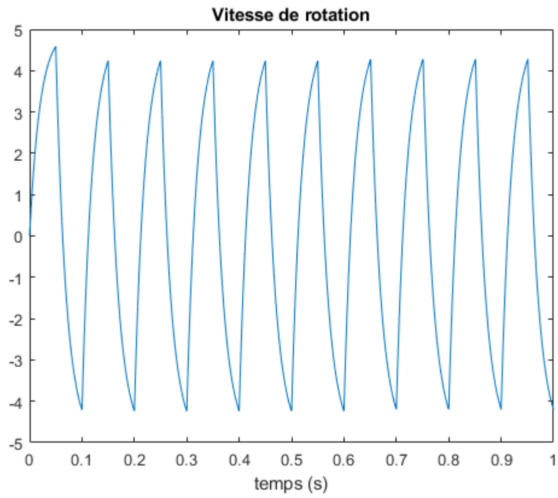
b. Testons alors ce simulateur avec $G = 50$ rad.$s^{-1}.N^{-1}$ et $T = 20$ ms. On obtient les tracés suivants :

FIGURE 2 – Mesure de la position angulaire



On dérivant y, on obtient :

FIGURE 3 – Vitesse de rotation



6.3 Estimation par filtrage de Kalman

a. Écrivons la représentation d'état stochastique du modèle du systèe d'entré u_n et de sortie y_n :

$$\begin{cases} y_n &= H_n X_n + h_n + w_n \\ X_{n+1} &= F_n X_n + f_n + v_n \end{cases}$$

Avec,

— $h_n = 0$
— $H_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
— $C_{w_n,w_n} = r$
— $F_n = \tilde{A}$
— $f_n = \tilde{B}$
— $C_{v_n,v_n} = q$

b. r correspond à la variance du bruit de mesure blanc du codeur incrémental. On propose alors une valeur correspond à la variance d'une variable suivant la loi uniforme sur $[0, 2\pi/L]$ étant donné la précision du codeur incrémental à L lignes par tour :

$$r = \frac{(2\pi/L)^2}{12}$$

c. Le moteur est non alimenté et à l'arrêt avant le premier instant d'échantillonnage mais nous disposons d'aucune information sur la position angulaire initiale.

On propose alors étant donné ces connaissances :

$$\begin{cases} \hat{X}_{1/O} & = 0 \\ P_{1/0} & = \frac{2\pi}{12} \end{cases}$$

d. Programmons le filtre de Kalman optimal :

```
function xe = kal(y,u,G,T,Te,L,x1_0,P1_0,q)
    A = [0 1; 0 -1/T];
    B = [0; G/T];
    C = [1 0];
    D = [0];
    [Ad,Bd,Cd,Dd] = c2dm(A,B,C,D,Te, 'zoh');

    r = (2*pi/L)^2/12;
    xe = zeros(2,length(u));

    for i=1:length(u)
        y1_0 = Cd*x1_0;
        Cxy = P1_0*Cd';
        Cyy = Cd*P1_0*Cd'+r;
        x1_0 = x1_0+Cxy*Cyy^-1*(y(i)-y1_0);
        xe(:,i) = x1_0;
        P1_0 = P1_0-Cxy*Cyy^-1*Cxy';
        x1_0 = Ad*x1_0+ Bd*u(i);
        P1_0 = Ad*P1_0*Ad'+Bd*q*Bd';
    end

    xe = xe';
end
```

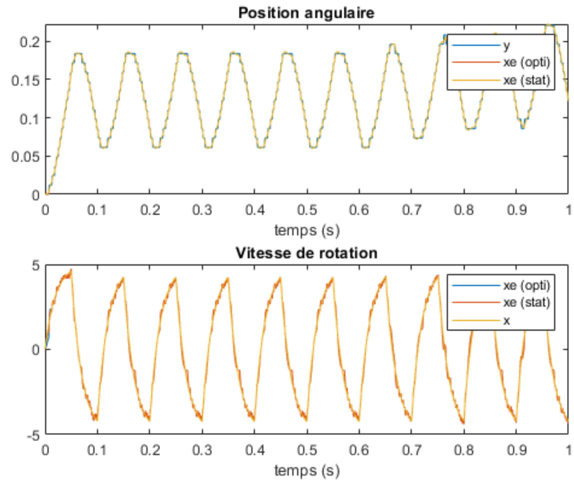
Et le filtre de Kalman statique :

```
function xe = kal(y,u,G,T,Te,L,x1_0,P1_0,q)
    A = [0 1; 0 -1/T];
    B = [0; G/T];
    C = [1 0];
    D = [0];
    [Ad,Bd,Cd,Dd] = c2dm(A,B,C,D,Te, 'zoh');

    r = (2*pi/L)^2/12;
```

```
    xe = zeros(2,length(u));
    gain = dlqe(Ad, Bd, Cd, q, r);
    for i=1:length(u)
        y1_0 = Cd*x1_0;
        Cxy = P1_0*Cd';
        Cyy = Cd*P1_0*Cd'+r;
        x1_0 = x1_0+gain*(y(i)-y1_0);
        xe(:,i) = x1_0;
        P1_0 = P1_0-Cxy*Cyy^-1*Cxy';
        x1_0 = Ad*x1_0+ Bd*u(i);
        P1_0 = Ad*P1_0*Ad'+Bd*q*Bd';
    end

    xe = xe';
end
```

e. Pour le cas d'un système parfaitement modélisé :

FIGURE 4 – Estimations (système parfaitement modélisé)



Pour une modélisation imprécise :

FIGURE 5 – Estimations (modélisation imprécise)