

TD et TP : déconvolution de trains d'impulsions.

Application au contrôle non destructif par ultrasons.

1 Introduction

Le contrôle non destructif (CND) par ultrasons a pour objectif d'inspecter un matériau ou un environnement sans le détruire. Les objectifs sont divers : contrôle des dimensions d'une pièce, détection et caractérisation de défauts, etc. Le but est alors de retrouver une information spatiale (épaisseur, taille de défaut) à partir du signal temporel reçu par le capteur ultrasonore.

En première approximation, le signal reçu y peut être décrit comme la convolution d'une séquence de réflectivité x par la réponse impulsionnelle h du transducteur : $y = h \star x + \text{incertitudes}$, où les incertitudes représentent les erreurs de modélisation et le bruit de mesure. La séquence de réflectivité x traduit des discontinuités d'impédance acoustique dans le matériau sondé, pouvant provenir d'interfaces entre deux milieux de propriétés différentes ou alors de défauts dans le matériau. Lorsque l'on considère des matériaux globalement homogènes, ces discontinuités se retrouvent isolées à certaines positions de la séquence x , qui prend alors la forme d'un train d'impulsions : un ensemble de pics, d'amplitudes et de positions inconnues.

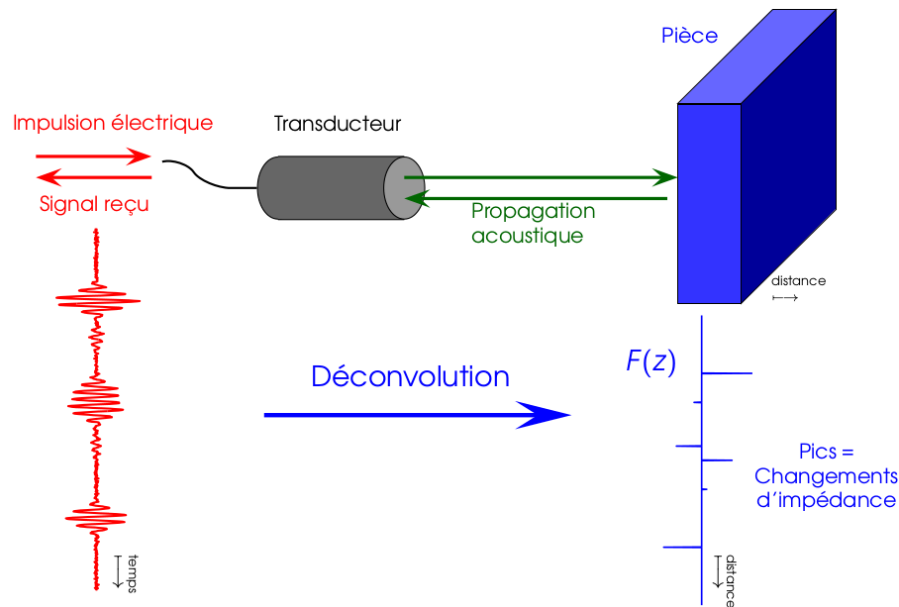


FIGURE 1 – Principe d'un dispositif de contrôle non destructif par ultrasons et objectif de la déconvolution.

2 Modèle direct

À partir de N données $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$, on cherche à estimer un vecteur parcimonieux $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T$, tel que

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

où

- \mathbf{b} est un terme aléatoire de bruit supposé blanc gaussien de loi instantanée $\mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$;
- \mathbf{H} est la matrice de convolution discrète associée à la réponse impulsionnelle finie $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_P]$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ h_P & \dots & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & h_P & \dots & h_1 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0 & h_P \end{bmatrix}$$

L'hypothèse de convolution adoptée ici correspond à un vecteur \mathbf{x} bordé par des zéros, la taille de \mathbf{z} étant liée à celle de \mathbf{x} et de \mathbf{h} par $N = M + P$.

TP *Un exemple de réponse impulsionnelle \mathbf{h} et de séquence \mathbf{x} sont contenus dans le fichier `dataCND.mat`. Écrire en Matlab un script permettant de simuler le problème direct, pour un rapport signal sur bruit donné, avec*

$$RSB_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\|\mathbf{H}\mathbf{x}\|^2}{N\sigma_b^2}.$$

Pour calculer efficacement le produit de convolution, on pourra utiliser la fonction Matlab `conv`.

3 Déconvolution par pénalisation ℓ_1

La déconvolution est un problème inverse mal posé : même si le nombre d'inconnues M est ici inférieur au nombre de données N , l'inversion par moindres carrés :

$$\hat{\mathbf{x}}_{MC} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z} \quad (1)$$

ne fournit pas de solution satisfaisante en présence de bruit dans les données.

TP *Simuler des données avec un rapport signal sur bruit infini et les visualiser. Calculer numériquement la solution obtenue par moindres carrés (1). La représenter conjointement à la séquence recherchée et commenter le résultat.*

TP *Simuler des données avec un rapport signal sur bruit très bon (par exemple 40 dB) et les visualiser. Calculer numériquement la solution obtenue par moindres carrés (1). La représenter conjointement à la séquence recherchée. Commenter le résultat.*

Afin de régulariser l'inversion, on considère la solution $\hat{\mathbf{x}}$ minimisant le critère de moindres carrés pénalisé par la norme ℓ_1 :

$$\hat{\mathbf{x}} \text{ minimise } J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \mu \sum_{m=1}^M |x_m|. \quad (2)$$

La non-différentiabilité de $|u|$ en $u = 0$ permet alors d'obtenir un minimiseur *parcimonieux*, c'est-à-dire comportant des valeurs nulles. Dans le cas général, il n'y a pas de solution analytique et le calcul de $\hat{\mathbf{x}}$ est un problème d'optimisation convexe mais non différentiable. On utilisera ici l'algorithme ISTA (Iterative Soft Thresholding Algorithm) décrit en annexe¹.

TP *Mise en œuvre : écrire en Matlab une séquence implantant le calcul du minimiseur par l'algorithme ISTA.*

TP *Comment calculer approximativement C ? Comment mettre en œuvre les calculs des produits matrice-vecteur de manière efficace sans construire la matrice \mathbf{H} ?*

TP *Évaluer les performances de la méthode sur les données simulées en section 2, pour un rapport signal sur bruit de 40 dB (presque pas de bruit), 20 dB (très bon) et 10 dB (moyen). Choisir empiriquement la valeur de μ fournissant le meilleur résultat.*

1. Cf. I. Daubechies, M. Defrise et C. De Mol, *An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 57, n. 11, 2004.

4 Mesures d'épaisseurs de plaques par ultrasons

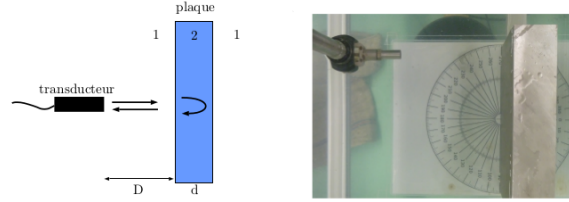


FIGURE 2 – Acquisition de données ultrasonores pour l'évaluation d'une plaque d'aluminium.

Le dispositif et la photo de la figure 2 montrent l'acquisition de mesures ultrasonores permettant de calculer l'épaisseur d'une plaque homogène (d'aluminium sur la photo). Dans ce cas, le signal reçu est composé d'impulsions régulièrement espacées, où le temps de vol entre deux échos correspond à un aller-retour dans la plaque. La figure 3 représente les données obtenues. La déconvolution permet d'associer un temps d'arrivée par écho, et ainsi de remonter à la distance séparant deux échos, de manière potentiellement plus précise que la simple détection des maxima des échos.

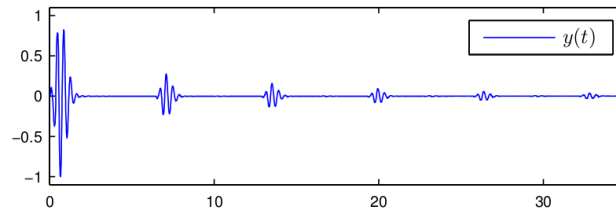


FIGURE 3 – Mesures ultrasonores dans une plaque épaisse.

TP Mettre en œuvre la déconvolution de ces données (fichier `dataplaques.mat`, variable `z1`). La réponse instrumentale sera identifiée avec le début du signal, correspondant au premier écho. Pour un réglage satisfaisant du paramètre de régularisation, en déduire une estimation de l'épaisseur de la plaque. La fréquence d'échantillonnage est de 100 MHz et la vitesse du son dans l'aluminium est $6\,380\text{ m.s}^{-1}$.

Le même dispositif est maintenant appliqué à l'évaluation d'une plaque plus fine, produisant les données de la figure 4. Cette fois, les échos se chevauchent et l'inspection à l'œil n'est plus possible.

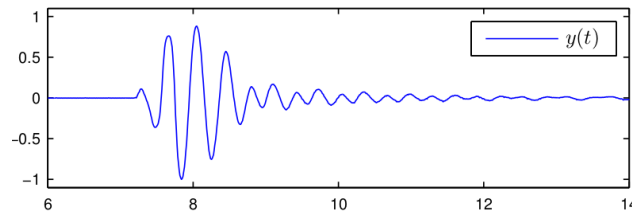


FIGURE 4 – Mesures ultrasonores dans une plaque fine.

TP Mettre en œuvre la déconvolution de ces données (fichier `dataplaques.mat`, variable `z2`). On conservera la réponse instrumentale identifiée sur les données précédentes. En déduire une estimation de l'épaisseur de la plaque (fréquence d'échantillonnage et vitesse du son sont inchangées).

Construction de l'algorithme d'optimisation du critère (2) par approximation majorante séparable.

On souhaite construire un algorithme de minimisation du critère des moindres carrés pénalisé par la norme ℓ_1 ,

$$\hat{\mathbf{x}} \text{ minimise } J(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \mu \sum_{m=1}^M |x_m|.$$

L'objectif est de « se débarrasser » des dépendances couplant les termes x_j et $x_k, k \neq j$ dans la partie quadratique, en construisant une approximation majorante *séparable* en chacun des x_j .

i) On fait intervenir un point courant \mathbf{x}_0 dans la partie quadratique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 &= \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0 + \mathbf{H}\mathbf{x}_0 - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x}_0 - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{H}\mathbf{x}_0 - \mathbf{H}\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|^2 + \mathbf{g}_0^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

en notant $\mathbf{g}_0 = -\mathbf{H}^T(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0)$.

ii) On majore alors le second terme, faisant intervenir les couplages quadratiques en $x_j x_k$, par un terme séparable :

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|^2 \leq \frac{1}{2} C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2,$$

où C est la plus grande valeur propre de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$. En effet, $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ est une matrice symétrique, donc diagonalisable dans une base orthogonale : $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{P}^T \mathbf{D}_\lambda \mathbf{P}$, où \mathbf{D}_λ est une matrice contenant les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$. Alors, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$, en notant $\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{u}$:

$$\|\mathbf{H}\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{u} = (\mathbf{P}\mathbf{u})^T \mathbf{D}_\lambda \mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{D}_\lambda \mathbf{v} = \sum_{m=1}^M \lambda_m v_m^2 \leq C \sum_{m=1}^M v_m^2 = C \|\mathbf{v}\|^2 = C \|\mathbf{u}\|^2,$$

la dernière égalité étant due au fait que la matrice de vecteurs propres \mathbf{P} est orthogonale.

iii) On majore enfin le critère pénalisé :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \mu \|\mathbf{x}\|_1 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0\|^2 + \frac{C}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + \mathbf{r}_0^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mu \|\mathbf{x}\|_1$$

Soit

$$J(\mathbf{x}) \leq K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \text{ avec } K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{m=1}^M \underbrace{\left(\frac{C}{2} (x_m - x_{0m})^2 + r_{0m} (x_m - x_{0m}) + \mu |x_m| \right)}_{q_m(x_m, x_{0m})} + \text{constante.} \quad (3)$$

$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ est une approximation majorante séparable du critère initial en \mathbf{x}_0 . La minimisation du terme de droite est équivalente à la minimisation, variable par variable, de $q_m(x_m, x_{0m})$.

iv) On a vu que

$$\hat{x}_m = \arg \min_{x_m} \frac{1}{2}(z_m - x_m)^2 + \mu|x_m| = S_\mu(z_m),$$

où $S_\mu(z)$ est l'opérateur de seuillage doux :

$$S_\mu(z) = \begin{cases} z + \mu & \text{si } z \leq -\mu \\ 0 & \text{si } -\mu \leq z \leq \mu \\ z - \mu & \text{si } z \geq \mu \end{cases}.$$

On ré-écrit donc $q_m(x_m, x_{0m})$ sous une forme similaire :

$$\begin{aligned} q_m(x_m, x_{0m}) &= \frac{C}{2}(x_m - x_{0m})^2 + r_{0m}(x_m - x_{0m}) + \mu|x_m| \\ &= C \left(\frac{1}{2}(x_m - y_{0m})^2 + \frac{\mu}{C}|x_m| \right) + \text{constante} \end{aligned}$$

avec $y_{0m} = x_{0m} - r_{0m}/C$. On a alors

$$\arg \min_{x_m} q_m(x_m, x_{0m}) = S_{\mu/C}(y_{0m})$$

soit vectoriellement :

$$\arg \min_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = S_{\mu/C}(\mathbf{y}_0), \text{ avec } \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 - \frac{1}{C}\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0 + \frac{1}{C}\mathbf{H}^T(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0).$$

L'algorithme de minimisation du critère J donc :

$$\boxed{\mathbf{x}^{[q+1]} = S_{\mu/C} \left(\mathbf{x}^{[q]} + \frac{1}{C}\mathbf{H}^T(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}^{[q]}) \right)}.$$

où $S_\mu(z)$ est l'opérateur de seuillage doux :

$$S_\mu(z) = \begin{cases} z + \mu & \text{si } z \leq -\mu \\ 0 & \text{si } -\mu \leq z \leq \mu \\ z - \mu & \text{si } z \geq \mu \end{cases}.$$

et C est une constante supérieure ou égale à la plus grande valeur propre de $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$.