Mines 2017 - Option informatique
Un corrigé

1 Langages et automates

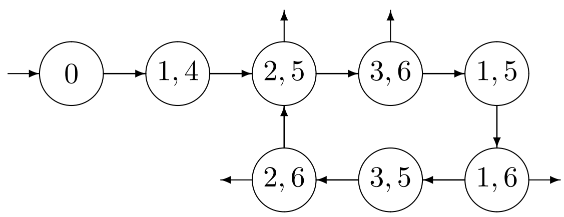
1. $L(\alpha, \beta)$ est fini si et seulement si $\alpha = 0$. De plus, $L(0, \beta) = \{a^\beta\}$ est de cardinal 1.
2. Le langage reconnu par l'automate proposé est $L(4, 2)$.
3. On a cette fois $L_2 = L(3, 2) \cup L(2, 3)$.
4. La table de transition de A_2 est la suivante :

	0	1	2	3	4	5	6
a	$1,4$	2	3	1	5	6	5

La table du déterminisé est alors (en ne faisant apparaître que les états accessibles)

	0	$1,4$	$2,5$	$3,6$	$1,5$	$2,6$	$3,5$	$1,6$
a	$1,4$	$2,5$	$3,6$	$1,5$	$2,6$	$3,5$	$1,6$	$2,5$

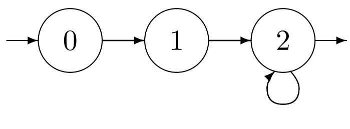
0 est l'état initial et les états terminaux sont ceux contenant 2 ou 6, c'est à dire $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(2, 6)$ et $(1, 6)$. On vérifie que tous les états son co-accessibles, c'est à dire que l'automate est émondé. L'automate est le suivant :



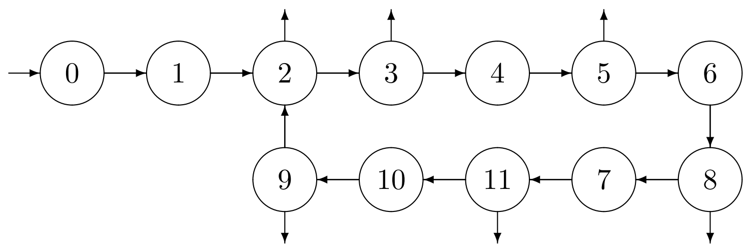
5. Le langage reconnu par A_3 est la réunion des langages des mots menant de l'état initial à chacun des états terminaux :

$$L_3 = L(6, 2) \cup L(6, 3) \cup L(6, 5) \cup L(6, 7)$$

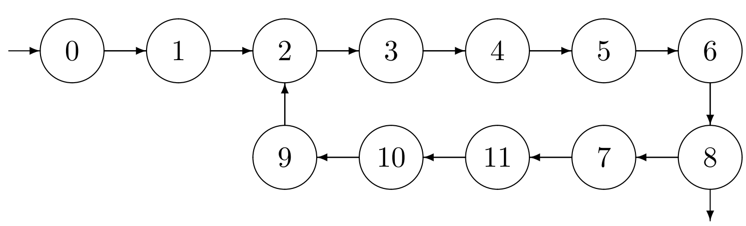
6. L'automate suivant reconnaît $L(1, 2)$ et est de la forme F :



7. On peut envisager une construction comme en questions 3 et 4. Je propose



8. On change les états terminaux

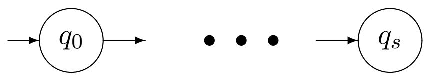


Le langage reconnu par cet automate montre que

$$L(2,3) \cap L(5,2) = L(10,7)$$

Remarque : on pourrait retrouver mathématiquement ce résultat en cherchant les entiers a et b tels que $2a+3 = 5b+2$, ce qui amène à l'équation diophantienne $5b - 2a = 1$.

9. Soit A un automate déterministe émondé dont la fonction de transition est notée δ (c'est une application définie d'une partie de $Q \times \{a\}$ dans Q où Q est l'ensemble des états).
Notons q_0 l'état initial de A. Distinguons deux cas.
   - Si on peut définir la suite $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $q_{i+1} = \delta(q_i, a)$ (pour chaque état atteint, il existe un successeur), ce qui revient à dire (puisque l'automate est émondé et que tous les états sont donc accessibles) que l'automate est complet.
   Comme Q est fini, il existe deux q_i égaux. Notons s le premier s tel que $q_{s+1} \in \{q_0, \dots, q_s\}$ (s existe avec l'hypothèse faite).
   Il existe $r \in \{0, \dots, s\}$ tel que $q_{s+1} = q_r$. L'automate est alors de la forme F avec les mêmes notations que celles qui suivent la question 5.
   - Sinon, on note s le premier entier tel que q_s n'a pas de successeur. L'automate est alors le suivant (sans les états terminaux)

   Notons que puisque l'automate est émondé, q_s doit être terminal. Dans ce cas, le langage est fini et son cardinal égal au nombre des états terminanux.

   Si le langage reconnu est infini, on est forcément dans le premier cas et l'automate est de la forme F.

   On se donne maintenant un automate de la forme F. Adoptons les notations de l'énoncé dans le dessin qui suit la question 5. Si aucun des états $q_r, \dots, q_s$ n'est terminal alors un mot reconnu est de longueur $\leq r-1$ et le langage reconnu est fini. Sinon, en notant q_i avec $r \leq i \leq s$ un état terminal, tout mot du type $a^{i+k(s-r+1)}$ est reconnu et le langage est infini. Une CNS pour que le langage soit infini est donc qu'il existe un état terminal au moins parmi $q_r, \dots, q_s$.

10. On vient de voir que si L est rationnel unaire infini, il est le langage reconnu par un automate de la forme F et, avec les notations précédentes, qu'il contient $L(s-r+1, i)$.

11. Supposons, par l'absurde, que L soit rationnel. L est infini car $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} - u_n > u_1 - u_0 \geq 0$ est donc $u_{n+1} > u_n$ (les a^{u_n} pour $n \geq 1$ sont donc deux à deux distincts). La question précédente donne l'existence de $\alpha \geq 1$ et $\beta > 0$ tels que $L(\alpha, \beta) \subset L$.
Les mots de L (sauf a^{u_0}) classés par longueur strictement croissante sont $a^{u_1}, a^{u_2}, \dots$. Comme $(u_{n+1} - u_n)$ est strictement croissante, on a par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geq n$$

   A partir d'un certain rang n, on aura $u_{n+1} - u_n \geq \alpha + 1$. Il n'existe donc qu'un nombre fini de couples (m, m') de mots de l tels que $|m| - |m'| = \alpha$. ceci contredit à l'évidence $L(\alpha, \beta) \subset L$.

12. $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ est le terme général d'une suite strictement croissante positive. De plus, (n^2) est une suite d'entiers positifs ou nuls. La question précédente indique que $\{a^{n^2} /\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel.