BOUTALEB 21112734
NEHLIL 21113646

EXERCICE 3 :

3.a) Dans l'algorithme de Karger-Stein, on fait des contractions jusqu'à ce qu'il reste $\frac{\#V}{\sqrt{2}} + 1$ sommets, ceci veut dire que :

$$\text{nbr contractions} = \#V - \frac{\#V}{2} - 1$$

Ces contractions ont une complexité de $O(n^2)$ puisqu'on utilise la matrice d'adjacence du graphe pour les réaliser.

On note aussi le fait qu'on fait dans cet algorithme 2 appels récursifs sur un graphe multivarié de taille $= \frac{\#V}{\sqrt{2}} + 1$, d'où vient la récursion suivante :

$$T(n) = \underbrace{2}_{\text{2 appels récursifs}} \times \underbrace{T\left(\left[\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right]\right)}_{\text{Temps d'exec sur un graphe de taille } \frac{n}{\sqrt{2}}+1} + \underbrace{O(n^2)}_{\text{les } n - \frac{n}{\sqrt{2}} - 1 \text{ contractions}}$$

et $\quad T(n) = O(1)$ si $n \leq 6$.

n étant la taille du graphe $G(V, E)$.

* Deduction de $T(n) = O(n^2 \log n)$.

$$T(n) = O(n^2) + 2T\left(\left\lceil 1 + \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil\right)$$

(i) ......
$$\simeq n^2 + 2 \times \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{n}{\sqrt{2}^2}\right)^2 + 8 \times \left(\frac{n}{\sqrt{2}^3}\right)^2 + \cdots$$

$$= n^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}^2} + \frac{4}{\sqrt{2}^4} + \frac{8}{\sqrt{2}^6} + \frac{16}{\sqrt{2}^8} + \cdots\right)$$

$$= n^2 \times \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{8}{8} + \frac{16}{16} + \cdots\right)$$

(ii)
$$\simeq n^2 \log(n)$$

(i) : 1. Pour simplifier les calculs, on a ignoré les constantes égales à "1", donc : $T\left(\left\lceil 1 + \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil\right) \simeq T\left(\left\lceil \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil\right) \simeq T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$

2. On essaye d'écrire les 1ers termes des équations en faisant un petit déroulement récursif, ainsi :

$$T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) = O\left(\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 2T\left(\frac{n}{\sqrt{2}^2}\right)$$

$$T\left(\frac{n}{\sqrt{2}^2}\right) = O\left(\left(\frac{n}{\sqrt{2}^2}\right)^2\right) + 2T\left(\frac{n}{\sqrt{2}^3}\right)$$

... etc

Puis, on multiplie chaque terme par le produit des coefficients, puisque ceci est un déroulement recursif.

(ii) : Soit T l'arbre de récursion de l'algorithme de Karger-Stein. T est forcément un arbre binaire puisqu'il y a 2 appels récursif par itération, et chaque noeud correspond à un résultat de contraction partielle.
On peut déduire que la hauteur de l'arbre est donc $O(\log n)$, puisque à chaque niveau, on fait la récursion sur un arbre de taille environ $\frac{n}{\sqrt{2}}$, sachant que le graphe du niveau en dessus est de taille n. D'où vient

$$1 + \frac{2}{\sqrt{2}^2} + \frac{2^2}{\sqrt{2}^4} + \frac{2^3}{\sqrt{2}^6} + \cdots \simeq \log(n).$$

- On peut aussi déduire que $T(n) = O(n^2 \log n)$ en utilisant le théorème maître (Master theorem), qui dit

$$\text{Si } T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d) \qquad \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 1 \\ d \geq 0 \end{array}$$

$$\text{alors } T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } d > \log_b a \\ O(n^d \log n) & \text{si } d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } d < \log_b a \end{cases}$$

Dans notre cas : $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $d = 2$

$$\log_{\sqrt{2}}(2) = \frac{\log(2)}{\log(\sqrt{2})} = \frac{\log(2)}{\frac{1}{2}\log(2)} = 2 \times 1 = 2 = d$$

$\Rightarrow T(n) = O(n^2 \log n)$ CQFD.

3.b) Montrer que $P(n) \geqslant 1 - \left(1 - \frac{1}{2} P\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)^2$

3.b.1) - $P(n)$ est la probabilité de succès de l'algorithme, càd la probabilité que l'algorithme retourne une coupure minimale du graphe G de taille $\underline{\underline{n}}$.

Supposons que $(S_1, V \setminus S_1)$ la coupe minimale de G_1, est une coupe minimale de G, et modélisons cet évènement par une probabilité :

$P((S_1, V \setminus S_1)$ est une coupe minimale de $G)$

$\geqslant P(G_1$ a comme coupe min celle de G $\underline{\underline{\text{ET}}}$ KargerStein (G_1) retourne une coupe minimale$)$

$= P(G_1$ a comme coupe min celle de $G) \times$

$P($ KargerStein (G_1) retourne une coupe min de $G_1)$

grâce à l'indépendance entre les deux évènements

(i) • Analyse de $P(G_1$ a comme coupe min celle de $G)$
qui est aussi égale à $P(G_2$ a comme coupe min celle de $G)$:

D'après l'énoncé, et d'après la Figure 2, il est clair que la probabilité de succès de cet algorithme lorsque le nombre de sommets restants est de l'ordre de $\frac{n}{\sqrt{2}}$, est au moins $\frac{1}{2}$. $\Rightarrow$ $P[G_1$ (ou G_2) a comme coupe min celle de $G] \geqslant \frac{1}{2}$

(ii) • Analyse de $P($ KargerStein $(G_1$ ou $G_2)$ retourne une coupe min de G_1 ou $G_2)$

Celle-ci est la probabilité de succès de l'algorithme de Karger-Stein sur un graphe de taille $\frac{n}{\sqrt{2}} + 1$.

de (i) et (ii) on a :

$P(G_1$ a comme coupe min celle de $G) \times P($ KargerStein (G_1) retourne une coupe min de $G_1) \geqslant \frac{1}{2} P\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right)$ I

• Notons P_E la probabilité que l'algorithme de KargerStein se trompe :

P_E = P(KargerStein ne retourne pas une coupe min de G)

= P($(S_1, V\setminus S_1)$ n'est pas une coupe min de G **ET**

$(S_2, V\setminus S_2)$ n'est pas une coupe min de G)

= P[$(S_1, V\setminus S_1)$ n'est pas coupe min de G] ×

P[$(S_2, V\setminus S_2)$ n'est pas coupe min de G]

= (1 - P[$(S_1, V\setminus S_1)$ est une coupe min de G])

× (1 - P[$(S_2, V\setminus S_2)$ est une coupe min de G])

$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{2} P\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)^2$$

en utilisant l'inégalité obtenu à I

$$\longrightarrow \quad P(n) = 1 - P_E \geqslant 1 - \left(1 - \frac{1}{2} P\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)^2$$

3.c). Prouver que $P(n) = \Omega\left(\frac{1}{\log n}\right)$

Rappel de Ω : Étant donné une fonction $f(n)$, $\Omega(f(n))$ est l'ensemble des fonctions $g(n)$ tq $\exists\ c > 0$ et n_0 un entier non négatif, tq $\forall n > n_0$, $g(n) \geqslant c \times f(n)$. càd $f(n)$ est une borne inf de $\Omega(f(n))$ $\Rightarrow$ Il faut verifier que $P(n) \geqslant \frac{1}{\log n}$

1). $\forall n \leqslant 6$: $P(n) = 1 \geqslant \frac{1}{\log n}$

à noter ici qu'on assume que $n > 1$ car la division par 0 n'a pas de sens.

2)- Supposons par induction que $P(n') \geq \frac{1}{\log n'}$

pour tout $n' < n$, alors :

$$P(n) \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{2} P\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)^2 = 1 - \left(1 - P\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right) + \frac{1}{4} P\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right)^2\right) = P\left(1 + \frac{n}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4} P\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 1\right)^2$$

$$\simeq P\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4} P\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \frac{1}{\log\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)} - \frac{1}{4\left(\log\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\log n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4\left(\log n - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{4\left(\log n - \frac{1}{2}\right)^2 - \log(n) + \frac{1}{2}}{4\left(\log n - \frac{1}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{4 \log n - 3}{4\left((\log n)^2 - \log n\right) + 1}$$

$$= \frac{1}{\log n} + \frac{1 - 1/\log n}{4\log^2 n - 4\log n + 1} \geqslant \frac{1}{\log n}$$

$$\Rightarrow P(n) = \Omega\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

CQFD