Universidad del Valle de Guatemala
Análisis y Diseño de Algoritmos - Sección 10
Christopher Sandoval 13660
17/03/2020

Tarea 2

Computabilidad: máquinas de Turing

1. **Defina una máquina de Turing que compute la función característica:**

$$C_A(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \in A \\ 1 \ si \ x \notin A \end{cases}$$

Demuestre que funciona tal como se demostró el funcionamiento de la máquina de Turing para sumar.

$q_1 1 B q_2$
$q_2 B q_3 q_4$
$q_3 B R q_5$
$q_5 1 B q_3$
$q_4 B R q_6$
$q_6 1 B q_4$
$q_6 B 1 q_4$

La máquina de Turing funciona de la siguiente forma. Primero encuentra el 1 sobrante del input de la máquina y lo convierte a un B, dejando el valor en 1s correspondiente a la entrada. Luego al encontrarse en el B que acabamos de cambiar entra a una cuádrupla condicional donde se cambia al estado q_3 si el número corresponde a uno en el arreglo o q_4 si no corresponde. El estado q_3 procede a borrar todos los 1s de la cinta, en cambio el estado q_4 borra todos y al final incluye uno para que la cinta termine con un solo 1.

2. **Sea una función de proyección una función que devuelve el i-ésimo elemento en una secuencia de n elementos, para i y n dados (cada combinación distinta de i y:**

$$U^n_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$$

   a. **Diseñe una máquina de Turing que compute la función cuando n=6 e i=3.**
   b. **Diseñe una máquina de Turing que compute esta función para cualesquiera n e i tales que $1 \leq i \leq n$. Nota: puede sólo hacer este inciso y demostrar que funciona con los números requeridos en el inciso anterior. Esto puede resultarle un poco más difícil pero también más eficiente.**

$q_1 1Bq_2$
$q_2 BRq_1$
$q_1 BRq_3$
$q_3 1Bq_4$
$q_4 BRq_3$
$q_3 BRq_5$
$q_5 1Bq_5$
$q_5 BRq_6$
$q_6 1Rq_6$
$q_6 BRq_7$
$q_7 1Bq_8$
$q_8 BRq_7$
$q_7 BRq_9$
$q_9 1Bq_{10}$
$q_{10} BRq_9$
$q_9 BRq_{11}$
$q_{11} 1Bq_{12}$
$q_{12} BRq_{11}$

Cómo funciona la máquina es que durante q_1 y q_2 nos encontramos en el primer número y esos estados se encargan de borrar todos los 1s de dicho número. Luego se pasa al siguiente número al que corresponden los estados q_3 y q_4 y realiza las mismas operaciones. Al llegar al tercer número primero se borra el primer 1 con q_5 y después con q_6 se mueve a la derecha hasta llegar a un B sin cambiar ninguno de los 1s de ese número. Al llegar al cuarto número se repite lo que se hizo con los primeros dos números y sigue igual hasta llegar al sexto número donde después de borrar todos sus 1s se detiene la máquina

Para hacer que esta máquina pueda borrar cualquier número del arreglo solo hay que volver dinámica la cantidad de veces que se hace la borrada de 1s antes de llegar al número elegido así como la cantidad de veces que se hace después del número elegido.

3. **Defina una máquina de Turing de la misma forma que Arora, et. al. (es decir, puede tener más de una cinta, al menos una cinta de input y una de output/trabajo, describe una función de transición, etc.). Esta máquina debe efectuar la suma de dos números binarios. Recuerde incluir en su definición al alfabeto, los estados y la función de transición. La máquina toma en cuenta la suma de dos números con diferente longitud.**

Para el alfabeto necesitamos un símbolo que nos indica que no se ha hecho ninguna lectura: ? y los símbolos que utilizamos comúnmente.

Alfabeto: {?,B,0,1}

Para los estados necesitamos uno que nos permita copiar el valor hacia la segunda cinta q_{copia}, uno que nos indique que estamos listos para hacer la suma q_{listo}, uno que realice la suma q_{suma} y uno que se encargue de los procesos de carry si se llegan a necesitar $q_{carry.}$

Estados: {q_0,q_{copia},q_{listo}, q_{suma},q_{carry},q_{final}}

Acciones: {L,R,S}

Funcion de transicion: Al x E → Al x E x Ac

4. **Explique cómo podría simular el funcionamiento de una máquina de Turing de múltiples cintas con una de una única cinta. Una máquina de Turing de múltiples cintas tiene un lector para cada cinta, y maneja, en cada paso de una computación, un único estado. En cada paso, la máquina lee el símbolo bajo cada lector y, en base a los símbolos leídos, opera escribiendo en alguna(s) cinta(s), y/o moviendo algún(os) lector(es) de forma independiente.**

   Lo que se hace es poner una única cinta compuesta, donde se leen o escriben varios valores en cada ciclo de lectura/escritura. Cada valor compuesto se puede expresar de la forma [v1,v2, … , vn] y se agregaría cada una de estas tuplas al alfabeto de la máquina. En cada uno de los ciclos se hace una lectura completa de esta tupla y se ejecuta como en una máquina de turing normal.

5. **Considere una máquina de Turing que tiene una única cinta, pero k lectores sobre ella. Puede haber varios lectores sobre la misma casilla de la cinta. En cada paso:**
   a. **Los lectores tienen el símbolo bajo sí.**
   b. **Todos los lectores escriben un símbolo (no necesariamente el mismo) en su respectiva casilla.**
   c. **Se mueven los lectores de forma independiente a la derecha o a la izquierda.**

   Para hacer este cambio lo que hay que hacer es agarrar esta máquina de turing y dividir la cinta en múltiples cintas para que cada lector tenga su cinta propia. Cuando ya esté en ese estado entonces podemos realizar la conversión del inciso anterior, donde se utilizara solo una cinta con valor compuesto y se expresara cada elemento del alfabeto en una tupla que contiene todos los valores de la cinta compuesta.