

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Отчет о прохождении преддипломной практики

студента 4 курса 7 группы

Джиги Александра Олеговича

специальность "прикладная математика"

Руководитель практики:

*Дудин Александр Николаевич*

доктор физико-математических наук,  
профессор

Минск 2019

# Реферат

Ключевые слова: СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ, СИСТЕМА  $MAP|G|1$ , ПЕРЕХОДНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ, КРИТЕРИЙ ЭРГОДИЧНОСТИ, СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. Объектом исследования является система массового обслуживания типа  $MAP|G|1$  с генерацией энергии. Цель работы – изучить систему, описать модель и исследовать ее поведение в различных случаях. Найдены переходные вероятности системы. Построена матрица переходных вероятностей. Найдено условие эргодичности.

Ключавия слова: СИСТЭМА МАСАВАГА АБСЛУГОЎВАННЯ, СИСТЭМА  $MAP | G | 1$ , ПЕРАХОДНЫЯ ІМАВЕРНАСЦІ, КРЫТЭРЫЙ ЭРГАДЗІЧНАСЦІ, СТАЦЫЯНАРНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ ІМАВЕРНАСЦЕЎ.

Аб'ектам даследавання з'яўляецца сістэма масавага абслугоўвання тыпу  $MAP|G|1$  з генерацыяй энергіі. Мэта работы - вывучыць сістэму, апісаць мадэль і даследаваць яе паводзіны ў розных выпадках. Знойдзеныя пераходныя імавернасці сістэмы. Пабудавана матрыца пераходных імавернасцеў. Знойдзена ўмова эргодзічнасці.

Key words: QUEUEING SYSTEM,  $MAP | G | 1$  SYSTEM, TRANSITION PROBABILITIES, ERGODICITY CRITERION, STATIONARY DISTRIBUTION OF PROBABILITIES.

The object of the study is a queuing system of the  $MAP|G|1$  type with the generation of energy. The aim of the work is to study the system, describe the model and investigate its behavior in various cases. The transition probabilities of the system are found. A matrix of transition probabilities is constructed. The ergodicity condition is found. parameters.

# Содержание

<b>1</b>	<b>МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ <math>MAR G 1</math> С ГЕНЕРАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ</b>	<b>5</b>
1.1	Математическая модель . . . . .	5
1.2	Необходимые обозначения . . . . .	7
1.3	Переходные вероятности . . . . .	9
<b>2</b>	<b>ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</b>	<b>12</b>
2.1	Матрица вероятностей переходов . . . . .	12
2.2	Вид матриц $V_j$ . . . . .	12
2.3	Вид матриц $Y_j$ . . . . .	14
<b>3</b>	<b>СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</b>	<b>14</b>
3.1	Критерий эргодичности системы . . . . .	14
3.2	Матрично-аналитический метод для нахождения стационарного распределения вероятностей цепи Маркова (метод М. Ньютса) . .	16
<b>4</b>	<b>АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ</b>	<b>20</b>
4.1	Необходимые обозначения . . . . .	20
4.2	Численные характеристики системы . . . . .	20
4.3	Среднее количество запросов в системе . . . . .	21
4.4	Среднее количество единиц энергии в буфере . . . . .	23
4.5	Вероятность отсутствия запросов в системе . . . . .	25
4.6	Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере . . . . .	27
4.7	Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере . . . . .	29
4.8	Вывод по итогам анализа характеристик производительности . .	31
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>32</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Математические модели систем массового обслуживания (СМО) широко применяются для исследования и оптимизации процессов в различных физических, экономических, производственных, административных, медицинских, военных и других системах. Объектом исследования в теории СМО являются ситуации, когда имеется некоторый ограниченный ресурс и множество запросов на удовлетворения потребности в этом ресурсе. Примерами могут служить кассы в магазинах, аэропортах, вокзалах и т.д.; терминалы в транспортных системах; банкоматы, инфокиоски и точки оплаты с использованием пластиковых карт; таблицы и индексы реляционных баз данных; ресурсы медицинских, экстренных и аварийных служб; средства радиолокации и противовоздушной обороны; авторизационные серверы в банках, контактные, справочные и информационные центры и т.д. Ограниченность ресурса и случайный характер потока запросов приводят к отказу или задержке в удовлетворении запросов. Стремление уменьшить вероятность этих отказов и длительность задержек и явилось побуждающим мотивом развития теории СМО. С точки зрения используемого математического аппарата, теория СМО может быть классифицирована как прикладная ветвь теории вероятностей, а более точно, теории случайных процессов. Классическая теория СМО основана на использовании известных результатов из теории цепей Маркова с непрерывным временем (и, в частности, теории процессов гибели и размножения) и дискретным временем, теории марковских, полумарковских, линейчатых и близких к ним процессов. Все эти процессы являются одномерными или двумерными (где вторая компонента является непрерывной, носит вспомогательный характер и предназначена для получения марковского процесса).

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАР|G|1 С ГЕНЕРАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

## 1.1 Математическая модель

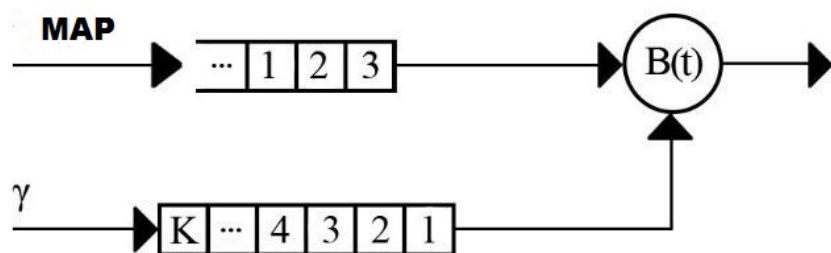
Поступление единиц энергии подчинено пуассоновскому процессу с параметром  $\gamma$ . Запросы поступают *МАР* - потоком под управлением неприводимой ЦМ с параметром  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , с непрерывным временем. Время пребывания цепи  $\nu_t$  в некотором состоянии  $\nu$  имеет показательное распределение с параметром  $\lambda_\nu$ . После того, как время пребывания процесса в этом состоянии истекло, с вероятностью  $p_l(\nu, \nu')$  процесс  $\nu_t$  переходит (перескакивает) в некоторое состояние  $\nu'$  и генерируется группа из  $l$  запросов,  $l = 0, 1$ . При этом  $p_0(\nu, \nu) = 0$ . Для *МАР*-потока невозможно определить считающую функцию как в стационарном пуассоновском (как безусловную вероятность), поскольку число запросов, поступивших за интервал времени длиной  $t$  зависит от состояния управляющего процесса  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , в момент начала этого интервала. Но можно вычислить вероятности  $P_{\nu, \nu'}(l, t)$  (за время  $t$  поступит  $l$  запросов и  $\nu_t = \nu'$  при условии  $\nu_0 = \nu$ ).

Вероятность поступления 0 запросов за время  $t$  имеет вид  $P(0, t) = e^{D_0 t}$ . Здесь  $D_k$  – квадратные матрицы порядка  $W + 1$ , элементы которых определяются следующим образом:

$$(D_0)_{\nu, \nu'} = \begin{cases} -\lambda_\nu, & \nu = \nu', \\ \lambda_\nu p_0(\nu, \nu'), & \nu \neq \nu', \end{cases}$$
$$(D_k)_{\nu, \nu'} = \lambda_\nu p_k(\nu, \nu'), k \geq 1,$$

$$D(z) = D_0 + D_1 z.$$

Запросы поступают в прибор в порядке FIFO. Время обслуживания прибора имеет функцию распределения  $B(t)$ .



Для обслуживания одного запроса необходима одна единица энергии. Единица энергии берется сразу после того, как запрос поступит на обслуживание. Если же буфер для хранения энергии пуст, то система переходит в режим ожидания до тех пор, пока не поступит единица энергии. Если буфер энергии заполнен, то поступающие единицы энергии теряются.

## 1.2 Необходимые обозначения

Вероятность поступления в буфер  $k$  единиц энергии за время  $t$ :

$$\phi_k(t) = \frac{(\gamma t)^k}{k!} e^{-\gamma t}, k \geq 0.$$

Вероятность поступления в буфер не менее  $k$  единиц энергии за время  $t$ :

$$\hat{\phi}_k(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \phi_i(t), k \geq 0.$$

Матрица вероятностей поступления  $i$  заявок и  $k$  единиц энергии за время обслуживания одной заявки:

$$\Phi(i, k) = \int_0^{\infty} P(i, t) \phi_k(t) dB(t), i \geq 0, k \geq 0.$$

Матрица вероятностей поступления  $i$  заявок и не менее  $k$  единиц энергии за время обслуживания одной заявки:

$$\hat{\Phi}(i, k) = \int_0^{\infty} P(i, t) \hat{\phi}_k(t) dB(t), i \geq 0, k \geq 0.$$

Матрица вероятностей того, что за время отсутствия единиц энергии в буфере поступит  $n$  запросов:

$$N(n) = \int_0^{\infty} P(n, t) \gamma e^{-\gamma t} dt.$$

Матрица вероятностей того, что за время отсутствия запросов поступит  $n$  единиц энергии:

$$M(n) = \int_0^{\infty} e^{D_0 t} \phi_n(t) D_1 dt = \int_0^{\infty} e^{D_0 t \frac{(\gamma t)^n}{n!}} e^{-\gamma I t} D_1 dt = \gamma^n (-D_0 + \gamma I)^{-(n+1)} D_1.$$

Матрица вероятностей того, что за время отсутствия запросов в буфере поступит не менее  $m$  единиц энергии:

$$\hat{M}(m) = \sum_{n=m}^{\infty} M(n).$$

Матрица  $P(n, t)$  это матрица вероятности что за время  $tn$  запросов. Матрицы  $P(n, t)$ ,  $n > 1$ , в принципе, могут быть вычислены через матричную ПФ  $P(z, t)$ , имеющую вид  $P(z, t) = e^{D(z)t}$ , следующим образом:

$$P(n, t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n P(z, t)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, n \geq 0.$$

Однако, вычисление матриц  $P(n, t)$  в аналитическом виде по этой формуле возможно только в редких случаях. В общем виде они вычисляются с помощью процеду, основанной на идее униформизации марковского процесса, которая состоит в следующем.

Если  $H$  – инфинитезимальный генератор ЦМ с непрерывным временем, то справедливо представление:

$$e^{Ht} = e^{ht(L-I)} = e^{-ht} e^{htL} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-ht} \frac{(ht)^j}{j!} L^j,$$

где

$$h = \max_{i=\overline{0,W}} (-H)_{ii}, \quad L = I + h^{-1}H.$$

Матрица  $L$  является матрицей одношаговых переходных вероятностей некоторой вспомогательной ЦМ с дискретным временем. Весьма полезным свойством представления является мультипликативность членов суммы, представление их в виде произведения скалярной функции от аргумента  $t$  и матрицы, не зависящей от  $t$ .

Нетрудно видеть, что аналогичное разложение, с поправкой на то, что  $L$  – субстохастическая матрица, может быть применено к матричной экспоненте в случае, когда  $H$  – матрица, у которой недиагональные элементы неотрицательны, диагональные – отрицательны и суммы по строкам – отрицательны или равны нулю. В частности, такое разложение справедливо для матричной экспоненты  $e^{D_0 t}$ .

Обозначим  $\tilde{\theta} = \max_{i=\overline{0,W}} (-D_0)_{ii}$ . Тогда  $P(0, t) = e^{D_0 t}$  можно представить в виде

$$P(0, t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\tilde{\theta} t} \frac{(\tilde{\theta} t)^j}{j!} K_0^{(j)},$$

где

$$K_0^{(j)} = (I + \tilde{\theta}^{-1} D_0)^j.$$

По аналогии, будем искать остальные матрицы  $P(n, t), n \geq 1$ , в



виде

$$P(n, t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\tilde{\theta}t} \frac{(\tilde{\theta}t)^j}{j!} K_n^{(j)}, \quad n \geq 1,$$

где  $K_n^{(j)}$ ,  $n \geq 1, j \geq 0$ , – некоторые матрицы. Матрицы  $K_n^j$  удовлетворяют следующей системе рекуррентных соотношений:

$$K_0^{(0)} = I, \quad K_n^{(0)} = O, \quad n \geq 1,$$

$$K_0^{(j+1)} = K_0^{(j)}(I + \tilde{\theta}^{-1}D_0),$$

$$K_n^{(j+1)} = \tilde{\theta}^{-1}K_{n-1}^{(j)}D_1 + K_n^{(j)}(I + \tilde{\theta}^{-1}D_0), \quad n \geq 1, \quad j \geq 0.$$

Усечение бесконечной суммы можно произвести после того, как член суммы окажется по норме меньше наперед заданного малого положительного числа. Следует также учитывать, что первые несколько значений при вычислении матриц  $K_n^{(j)}$  могут равняться нулевым матрицам.

### 1.3 Переходные вероятности

Данный процесс является немарковским. Для его исследования применим метод вложенных ЦМ. Будем рассматривать поведение СМО  $(i_t, k_t)$ , в моменты  $t_n$ ,  $n \geq 1$  окончания обслуживания запросов, а именно, рассмотрим процесс  $\epsilon_n = \{i_n, k_n, \nu_n\}$  – трехмерный процесс, где  $i_n = i_{t_n+0}$ ,  $k_n = k_{t_n-0}$ ,  $\nu_n = \nu_{t_n}$ . Данный процесс является трехмерной цепью Маркова. Введем матрицу

$$P \{(i, k) \rightarrow (j, k')\},$$

$(\nu\nu')$ -й элемент которой есть вероятность одношагового перехода:

$$\begin{aligned} & P \{(i, k, \nu) \rightarrow (j, k', \nu')\} = \\ & = P \{i_{n+1} = j, k_{n+1} = k', \nu_{n+1} = \nu' | i_n = i, k_n = k, \nu_n = \nu\} \end{aligned}$$

Введем стационарные вероятности

$$\pi(i, k, \nu') = \lim_{n \rightarrow \infty} P \{i_n = i, k_n = k, \nu_n = \nu'\},$$

$$i \geq 0, k \in [0, K], \nu \in [0, W],$$

которые объединим в вектора

$$\boldsymbol{\pi}(i, k) = (\pi(i, k, 0), \dots, \pi(i, k, W), k \in [0, K],$$

которые, в свою очередь, образуют вектор стационарных вероятностей:

$$\boldsymbol{\pi}_i = (\boldsymbol{\pi}(i, 1), \dots, \boldsymbol{\pi}(i, K)), i \geq 0.$$

Нахождение переходных вероятностей в частных случаях проводится путем анализа поведения цепи Маркова между моментами  $t_n$  и  $t_{n+1}$  и использования формулы полной вероятности.

### Лемма

Матрицы  $P \{(i, k) \rightarrow (j, k')\}$  вычисляются следующим образом:

$$P \{(0, 0) \rightarrow (j, k')\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \Phi(j-n, k') \\ + N(0) \sum_{m=0}^{k'} M(m) \Phi(j, k'-m), j \geq 0, k' = \overline{0, K-2};$$

$$P \{(0, 0) \rightarrow (j, K-1)\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \Phi(j-n, K-1) \\ + N(0) \left[ \sum_{m=0}^{K-1} M(m) \Phi(j, K-1-m) + \hat{M}(K) \Phi(j, 0) \right], j \geq 0;$$

$$P \{(0, 0) \rightarrow (j, K)\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \hat{\Phi}(j-n, K) \\ + N(0) \left( \sum_{m=0}^{K-1} M(m) \hat{\Phi}(j, K-m) + \hat{M}(K) \hat{\Phi}(j, 1) \right), j \geq 0.$$

$$P \{(0, k) \rightarrow (j, K-1)\} = \sum_{m=0}^{K-k} M(m) \Phi(j, K-k-m) +$$

$$+\hat{M}(K-k+1)\Phi(j,0), j \geq 0, k = \overline{1, K};$$

$$P \{(0, k) \rightarrow (j, k')\} = \sum_{m=0}^{k'-k+1} M(m)\Phi(j, k' - k + 1 - m),$$

$$j \geq 0, k = \overline{1, K}, k' = \overline{k-1, K-2}.$$

$$P \{(0, k) \rightarrow (j, K)\} = \sum_{m=0}^{K-k} M(m)\hat{\Phi}(j, K - k + 1 - m) +$$

$$\hat{M}(K - k + 1)\hat{\Phi}(j, 1), j \geq 0, k = \overline{1, K}.$$

$$P \{(i, 0) \rightarrow (j, k')\} = \sum_{n=0}^{j-i+1} N(n)\Phi(j - i + 1 - n, k'),$$

$$i \geq 1, j \geq i - 1, k' = \overline{0, K-1}.$$

$$P \{(i, 0) \rightarrow (j, K)\} = \sum_{n=0}^{j-i+1} N(n)\hat{\Phi}(j - i + 1 - n, K), i \geq 1, j \geq i - 1.$$

$$P \{(i, k) \rightarrow (j, k')\} = \Phi(j - i + 1, k' - k + 1),$$

$$i \geq 1, j \geq i - 1, k' = \overline{k-1, K-1}, k = \overline{1, K}.$$

$$P \{(i, k) \rightarrow (j, K)\} = \hat{\Phi}(j - i + 1, K - k + 1), i \geq 1, j \geq i - 1,$$

$$k = \overline{1, K}.$$

## 2 ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### 2.1 Матрица вероятностей переходов

Матрица  $P$  вероятностей одношаговых переходов рассматриваемого процесса имеет следующую форму  $P = (P_{i,j})_{i,j \geq 0}$ . Можно показать, что матрицы  $P_{i,j}$  не зависят от  $i$  и  $j$ , а зависят только от  $j - i$ . Тогда обозначим матрицы  $(P_{i,j})_{i=0, j \geq 0}$  как  $V_j$ , элементами которых будут переходные вероятности  $P\{(0, k) \rightarrow (j, k')\}$ , где  $k, k' \in [0, K]$ . Заметим, что для  $i \geq 1$  выполняется следующее:

$$(P_{i,j-i+1}, j \geq 0) = (P_{ij}), j \geq 0.$$

Матрицы  $P_{i,i+j-1}, i \neq 0, j \geq 0$ , в свою очередь, обозначим как  $Y_j$ , элементами которых будут переходные вероятности  $P\{(1, k) \rightarrow (j, k')\}$ , где  $k, k' \in [0, K]$ . Матрица вероятностей одношаговых переходов  $P$  имеет следующую структуру:

$$P = \begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & \dots \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & \dots \\ 0 & Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots \\ 0 & 0 & Y_0 & Y_1 & Y_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Матрицу, имеющие такую структуру, называют блочной верхне-Хессенберговой. Величина скачка вниз компоненты  $i_n$  за один шаг не превосходит единицы.

### 2.2 Вид матриц $V_j$

Матрицы  $V_j$  имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} v_{00}^j & v_{01}^j & v_{02}^j & v_{03}^j & \dots & v_{0K}^j \\ v_{10}^j & v_{11}^j & v_{12}^j & v_{13}^j & \dots & v_{1K}^j \\ 0 & v_{21}^j & v_{22}^j & v_{23}^j & \dots & v_{2K}^j \\ 0 & 0 & v_{32}^j & v_{33}^j & \dots & v_{3K}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_{KK}^j \end{bmatrix}$$

Где  $v_{kk'}^j$  находятся следующим образом:

$$a) v_{0k'}^j = P \{(0, 0) \rightarrow (j, k')\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \Phi(j-n, k') + \\ + N(0) \sum_{m=0}^{k'} M(m) \Phi(j, k'-m), j \geq 0, k' = \overline{0, K-1},$$

$$b) v_{kk'}^j = P \{(0, k) \rightarrow (j, k')\} = \sum_{m=0}^{k'-k+1} M(m) \Phi(j, k'-k+1-m), \\ j \geq 0, k = \overline{1, K}, k' = \overline{k-1, K-1},$$

$$c) v_{kK}^j = P \{(0, k) \rightarrow (j, K)\} = \sum_{m=0}^{K-k} M(m) \hat{\Phi}(j, K-k+1-m) + \\ + \hat{M}(K-k+1) \hat{\Phi}(j, 1), j \geq 0, k = \overline{1, K}.$$

$$d) v_{0K}^j = P \{(0, 0) \rightarrow (j, K)\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \hat{\Phi}(j-n, K) + \\ + N(0) \left( \sum_{m=0}^{K-1} M(m) \hat{\Phi}(j, K-m) + \hat{M}(K) \hat{\Phi}(j, 1) \right), j \geq 0.,$$

$$e) v_{0(K-1)}^j = P \{(0, 0) \rightarrow (j, K-1)\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \Phi(j-n, K-1) \\ + N(0) \left[ \sum_{m=0}^{K-1} M(m) \Phi(j, K-1-m) + \hat{M}(K) \Phi(j, 0) \right], j \geq 0,$$

$$f) v_{k(K-1)}^j = P \{(0, k) \rightarrow (j, K-1)\} = \sum_{m=0}^{K-k} M(m) \Phi(j, K-k-m) + \\ + \hat{M}(K-k+1) \Phi(j, 0), j \geq 0, k = \overline{1, K}$$

Проанализировав вид  $v_{kk'}^j$  сделаем вывод, что, начиная со второй строки, элементы не зависят от  $k$  и  $k'$ , а зависят только  $k' - k$ .

## 2.3 Вид матриц $Y_j$

Матрицы  $Y_j$  имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} y_{00}^j & y_{01}^j & y_{02}^j & y_{03}^j & \cdots & y_{0K}^j \\ y_{10}^j & y_{11}^j & y_{12}^j & y_{13}^j & \cdots & y_{1K}^j \\ 0 & y_{21}^j & y_{22}^j & y_{23}^j & \cdots & y_{2K}^j \\ 0 & 0 & y_{32}^j & y_{33}^j & \cdots & y_{3K}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{KK}^j \end{bmatrix}$$

Где  $y_{kk'}^j$  находятся следующим образом:

$$a) P \{(i, 0) \rightarrow (j, k')\} = \sum_{n=0}^{j-i+1} N(n) \Phi(j-i+1-n, k'), i \geq 1, j \geq i-1, k' = \overline{0, K-1}.$$

$$b) P \{(i, 0) \rightarrow (j, K)\} = \sum_{n=0}^{j-i+1} N(n) \hat{\Phi}(j-i+1-n, K), i \geq 1, j \geq i-1.$$

$$c) P \{(i, k) \rightarrow (j, k')\} = \Phi(j-i+1, k'-k+1), i \geq 1, j \geq i-1, k' = \overline{k-1, K-1}, k = \overline{1, K}.$$

$$d) P \{(i, k) \rightarrow (j, K)\} = \hat{\Phi}(j-i+1, K-k+1), i \geq 1, j \geq i-1, k = \overline{1, K}.$$

Проанализировав вид  $y_{kk'}^j$  сделаем вывод, что, начиная со второй строки, элементы не зависят от  $k$  и  $k'$ , а зависят только  $k' - k$ .

## 3 СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### 3.1 Критерий эргодичности системы

Условие эргодичности можно трактовать следующим образом - условие, при котором система способна уменьшать число заявок в системе, когда она перегружена, т.е. среднее число заявок, поступающих за время обслуживания одной заявки, должно быть меньше единицы.

Введем матричные ПФ  $V(z) = \sum_{i=0}^{\infty} V_i z^i$ ,  $Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i z^i$ , где  $V_j = P_{0,i+j-1} Y_j = P_{i,i+j-1}$   
 $Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j z^j = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z^j P(j, t) \frac{(\gamma t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t) =$   
 $= \int_0^{\infty} e^{D(z)t} \phi_k(t) dB(t)$ , где  $D(z) = D_0 + D_1 z$

### Теорема

Пусть ЦМ  $\epsilon_n = \{i_n, k_n, \nu_n\}$ , с матрицей переходных вероятностей  $P$  является неприводимой и аperiодической, матрицы  $Y(1)$  и  $V(1)$  являются стохастическими и неприводимыми и выполняются неравенства  $V'(1) < \infty$  и  $Y'(1) < \infty$ . Для того, чтобы ЦМ  $\epsilon_n$ ,  $n \geq 1$ , была эргодичной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$[det(zI - Y(z))]'_{z=1} > 0 \quad (1)$$

### Следствие

Неравенство (1) эквивалентно следующему неравенству:

$$\vec{y} \sum_{k=1}^{\infty} k Y_k(1) e < 1,$$

где вектор  $\vec{y}$  удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \vec{y} \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(1) = \vec{y} \\ \vec{y} e = 1. \end{cases}$$

Пусть вектор  $y$  имеет вид

$$y = \theta \otimes u \quad (2)$$

где  $\theta$  - вектор стационарного распределения процесса  $MAR \nu_t$ ,  $t \geq 0$ , и  $u = (u_1, u_2, \dots, u_K)$ . Найдем вектор  $u$ . Компоненты вектора  $u$  удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} u_k = u_0 \phi_k + \sum_{s=1}^{k+1} u_s \phi_{k+1-s}, k = \overline{0, K-1}, \\ u_K = u_0 \hat{\phi} K + \sum_{s=1}^K u_s \phi_{K+1-s}. \end{cases}$$

Решим эту систему, представив  $u_k$  следующим образом:

$$\begin{cases} u_k = u_0 \psi_k \\ u_0 = (\sum_{k=0}^K \psi_k)^{-1}, \end{cases}$$

Где  $\psi_{k+1}$ :

$$\psi_{k+1} = (\psi_k - \phi_k - \sum_{s=1}^k \psi_s \phi_{k+1-s}) \phi_0^{-1}, k = \overline{0, K-1}, \psi_0 = 1$$

После подстановки  $u$  и  $y$  получаем условие эргодичности:

$$\lambda T + u_0 \frac{\lambda}{\gamma} < 1,$$

где  $T$  это время обслуживания одной заявки.

Условие существования стационарного режима в системе совпадает с условием эргодичности вложенной цепи Маркова.

### 3.2 Матрично-аналитический метод для нахождения стационарного распределения вероятностей цепи Маркова (метод М. Ньютса)

Краеугольным понятием в подходе М. Ньютса является понятие фундаментального периода. Фундаментальный период — это интервал времени с момента, когда значение счетной компоненты равно  $i$ , до первого момента, когда значение этой компоненты станет равным  $i-1$ ,  $i \geq 1$ . Из определения ЦМ типа  $MAP|G|1$  следует, что длина фундаментального периода не зависит от значения  $i$ .

Обозначим  $G(z)$  матричную ПФ,  $(k, k')$ -й элемент которой есть ПФ числа переходов, осуществленных ЦМ за фундаментальный период, который закончился, когда значение конечной компоненты есть  $k'$  при условии, что в момент начала фундаментального периода значение конечной компоненты равнялось  $k$ ;  $k, k' = \overline{0, K}$ . Используя факты из теории марковских процессов восстановления, можно показать, что матрица  $G(z)$  удовлетворяет уравнению

$$G(z) = z \sum_{j=0}^{\infty} Y_j G^j(z). \quad (1)$$



Обозначим через  $G^{(i)}$  матрицу вероятностей переходов компоненты  $k_n$  за время первого достижения первой компонентой  $i_n$  значения  $i$ , начиная с  $i + 1$ .

Используя формулу полной вероятности, нетрудно убедиться, что матрицы  $G^{(i)}, i \geq 0$ , удовлетворяют уравнениям

$$G^{(i)} = P_{i+1,i} + \sum_{l=i+1}^{\infty} P_{i+1,l} G^{(l-1)} G^{(l-2)} \dots G^{(i)}, i \geq 0. \quad (2)$$

Учитывая квазитеплицевость рассматриваемой ЦМ, можно заключить, что матрицы  $G^{(i)}, i \geq 0$ , не зависят от  $i$ . Пусть все они равны некоторой матрице  $G$ . Тогда из (2) можно заключить, что матрица  $G$ , удовлетворяет уравнению

$$G = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j G^j. \quad (3)$$

Отметим, что уравнение (1) автоматически следует из уравнения (3), поскольку из определения матриц  $G$  и  $G(z)$  следует, что  $G(1) = G$ .

Обозначим через  $\pi_i, i \geq 0$ , векторы стационарных вероятностей исходной ЦМ  $\xi_n, n \geq 1$ .

$$\pi_j = \sum_{i=0}^j \pi_i \bar{P}_{i,j}, i \geq 0, \quad (4)$$

где матрицы  $\bar{P}_{i,j}$  задаются уравнениями

$$\bar{P}_{i,j} = P_{i,j} + \sum_{l=j+1}^{\infty} P_{i,l} G^{l-j}, j \geq i. \quad (5)$$

Из (4) следует, что векторы  $\pi_i, i \geq 0$ , стационарных вероятностей можно представить в виде

$$\pi_i = \pi_0 \Phi_i, i \geq 0, \quad (6)$$

где матрицы  $\Phi_i, i \geq 0$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\Phi_0 = I, \Phi_l = \left( \bar{P}_{0,l} + \sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i \bar{P}_{i,l} \right) (I - \bar{P}_{l,l})^{-1}, l \geq 1. \quad (7)$$

Соотношения (6) определяют векторы  $\pi_i, i \geq 0$ , стационарных вероятностей с точностью до неизвестного пока вектора  $\pi_0$ . Этот вектор можно вычислить через аппарат векторных ПФ или по формуле (8). Однако, предположим еще одну процедуру для подсчета вектора  $\pi_0$ .

Из уравнений (4) при  $j = 0$  получаем:

$$\pi_0(I - \bar{P}_{0,0}) = 0. \quad (8)$$

Домножением соотношения (5) справа на вектор  $e$  несложно убедиться, что матрица  $\bar{P}_{0,0}$  - стохастическая. По построению эта матрица является неприводимой, поэтому ранг системы (8) на единицу меньше размерности вектора  $\pi_0$ . Значит, система (8) определяет вектор  $\pi_0$  с точностью до некоторой константы. Следовательно, если нам удастся получить еще одно, неоднородное, уравнение для компонент вектора  $\pi_0$ , то полученная система будет иметь единственное решение. Такое уравнение легко получается из (6) и условия нормировки и имеет вид:

$$\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i e = 1. \quad (9)$$

Подводя итог, сформулируем следующий алгоритм нахождения векторов  $\pi_i, i \geq 0$ , стационарных вероятностей:

1. Находим матрицу  $G$  как решение нелинейного матричного уравнения (3).
2. Вычисляем матрицы  $\bar{P}_{i,l}$  по формулам (5).
3. Вычисляем матрицы  $\Phi_l$  по рекуррентным формулам (7).

4. Находим вектор  $\pi_0$  как единственное решение системы (8), (9).
5. Ищем необходимое число векторов  $\pi_i$  по формулам (6).

## 4 АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ

### 4.1 Необходимые обозначения

$n$  - количество векторов  $\pi_i$ .

$\pi_i = (\pi(i, 0), \pi(i, 1), \dots, \pi(i, K))$ .

Среднее количество запросов в системе:

$$L = \sum_{i=0}^n i\pi_i e,$$

Среднее количество единиц энергии в буфере:

$$N = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^K k\pi_i(k)e,$$

Вероятность отсутствия запросов в системе:

$$P_0^{custom} = \pi_0 e.$$

Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере:

$$P_0^{energy} = \sum_{i=0}^n \pi_i(0)e.$$

Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере:

$$P_{idle} = \sum_{i=1}^n \pi_i(0)e,$$

.

### 4.2 Численные характеристики системы

Рассмотрим  $MAP$ -поток, который определяется матрицами  $D_0$  и  $D_1$ , имеет среднюю интенсивность  $\lambda = 0.4$  и  $\gamma = 0.3$ . Коэффициент корреляции  $c_{cor} = 0.1724$ ,  $c_{var} = 14.33$ .

$$D_0 = \begin{pmatrix} -0.405780 & 0 \\ 0 & -0.013173 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0.403080 & 0.002700 \\ 0.007338 & 0.005835 \end{pmatrix}$$

### 4.3 Среднее количество запросов в системе

График  $L$  для значений  $k$  (от 1 до  $K$  с шагом 1) и  $T$  (от 0.5 до  $T$  с шагом 0.5).

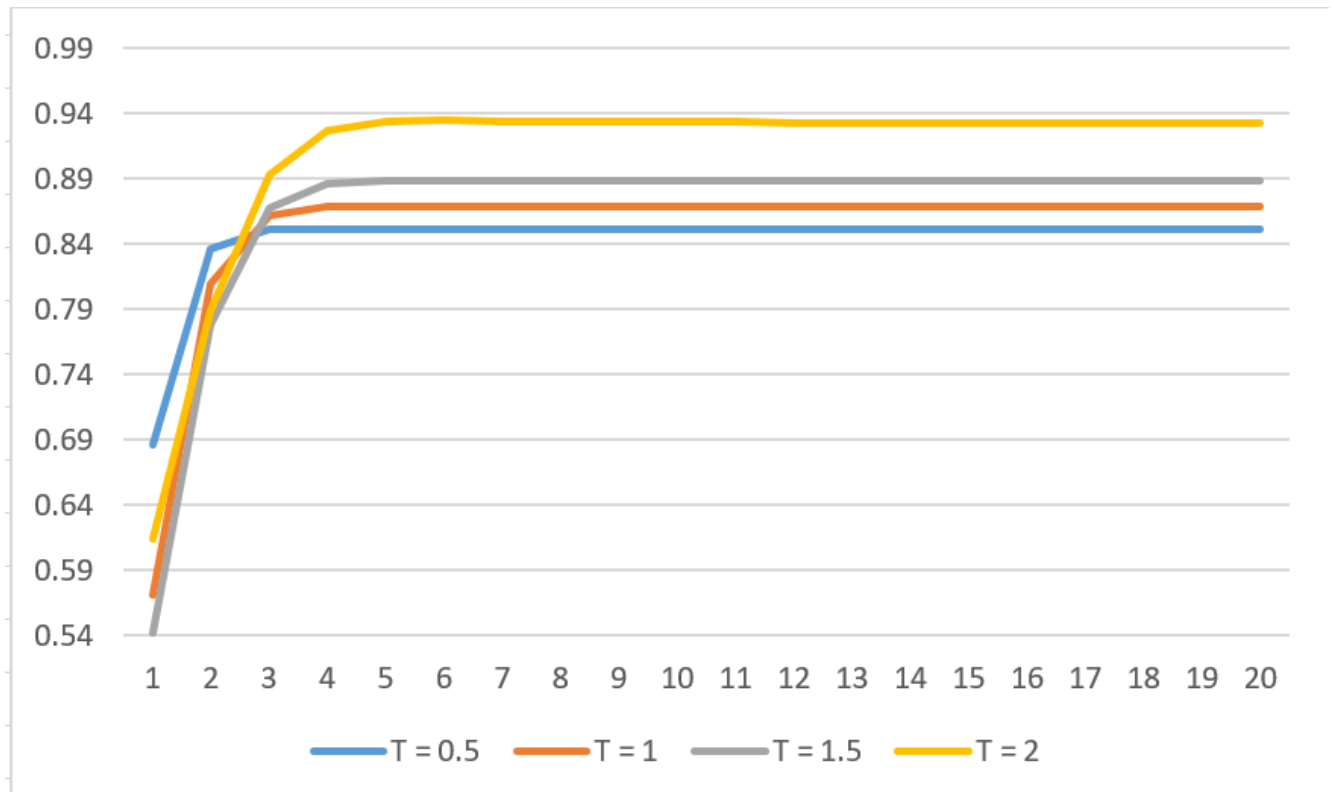


Рис. 1: Среднее количество запросов в системе

Среднее количество запросов в системе увеличивается по мере возрастания времени обслуживания.

Входные данные:

$K : 1, 2, 3, \dots, 20$

$T : 0.5, 1.0, 1.5, 2$

*Accuracy* : 0.001

K	T = 0.5	T = 1	T = 1.5	T = 2
1	0.685642	0.57121	0.541869	0.613704
2	0.835993	0.809755	0.778261	0.788066
3	0.850496	0.861429	0.867488	0.892871
4	0.851328	0.868006	0.886028	0.926803
5	0.851352	0.868548	0.888417	0.933724
6	0.851351	0.868569	0.888531	0.93442
7	0.851351	0.868567	0.888412	0.934073
8	0.851351	0.868567	0.888352	0.933642
9	0.851351	0.868566	0.888348	0.933467
10	0.851351	0.868566	0.888355	0.933201
11	0.851351	0.868566	0.888353	0.93311
12	0.851351	0.868566	0.888352	0.933007
13	0.851351	0.868566	0.888352	0.932946
14	0.851351	0.868567	0.888352	0.932894
15	0.851351	0.868567	0.888352	0.93288
16	0.851351	0.868567	0.888352	0.932863
17	0.851351	0.868567	0.888352	0.932853
18	0.851352	0.868567	0.888352	0.932849
19	0.851352	0.868567	0.888354	0.932846
20	0.851352	0.868567	0.888354	0.932846

#### 4.4 Среднее количество единиц энергии в буфере

График  $N$  для значений  $k$  (от 1 до  $K$  с шагом 1) и  $T$  (от 0.5 до  $T$  с шагом 0.5).

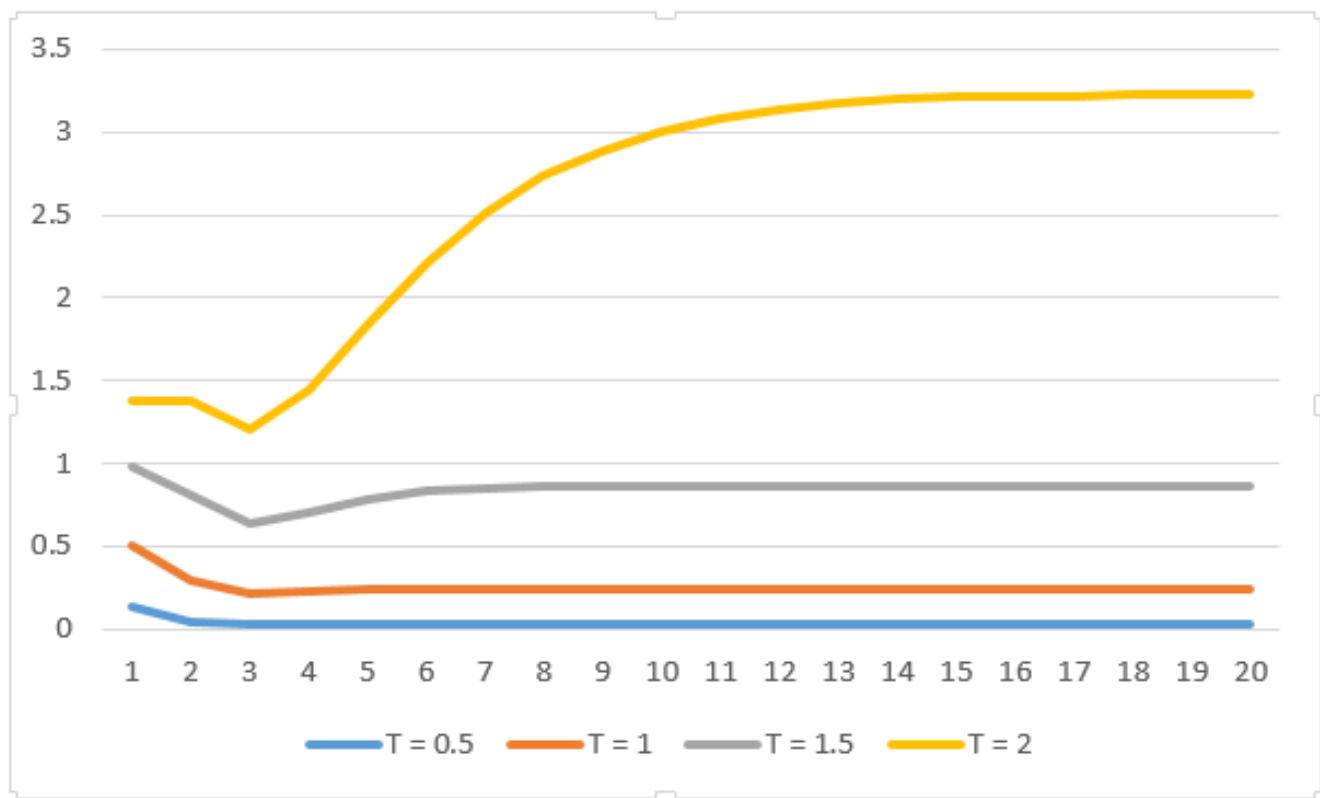


Рис. 2: Среднее количество единиц энергии в буфере

Среднее количество единиц энергии в буфере увеличивается с возрастанием времени обслуживания в системе.

Входные данные:

$K : 1, 2, 3, \dots, 20$

$T : 0.5, 1.0$

*Accuracy* : 0.001

K	T = 0.5	T = 1	T = 1.5	T = 2
1	0.128607	0.506161	0.986709	1.378875
2	0.04016	0.291399	0.80652	1.381191
3	0.030761	0.220481	0.642052	1.204373
4	0.032081	0.229747	0.706023	1.440764
5	0.032149	0.237009	0.786273	1.844072
6	0.032215	0.239092	0.828732	2.214057
7	0.032215	0.239055	0.8505	2.508271
8	0.032215	0.239103	0.860855	2.732456
9	0.032215	0.239113	0.860259	2.88821
10	0.032215	0.239115	0.859332	3.005277
11	0.032215	0.239115	0.859853	3.082155
12	0.032215	0.239115	0.860067	3.134955
13	0.032215	0.239115	0.860153	3.172583
14	0.032215	0.239103	0.860188	3.19633
15	0.032215	0.239103	0.860202	3.208223
16	0.032215	0.239103	0.860207	3.213533
17	0.032215	0.239103	0.860209	3.220132
18	0.032215	0.239103	0.86021	3.224739
19	0.032215	0.239103	0.860009	3.227807
20	0.032215	0.239103	0.860009	3.229725



## 4.5 Вероятность отсутствия запросов в системе

График  $P_0^{custom}$  для значений  $k$  (от 1 до  $K$  с шагом 1) и  $T$  (от 0.5 до  $T$  с шагом 0.5).

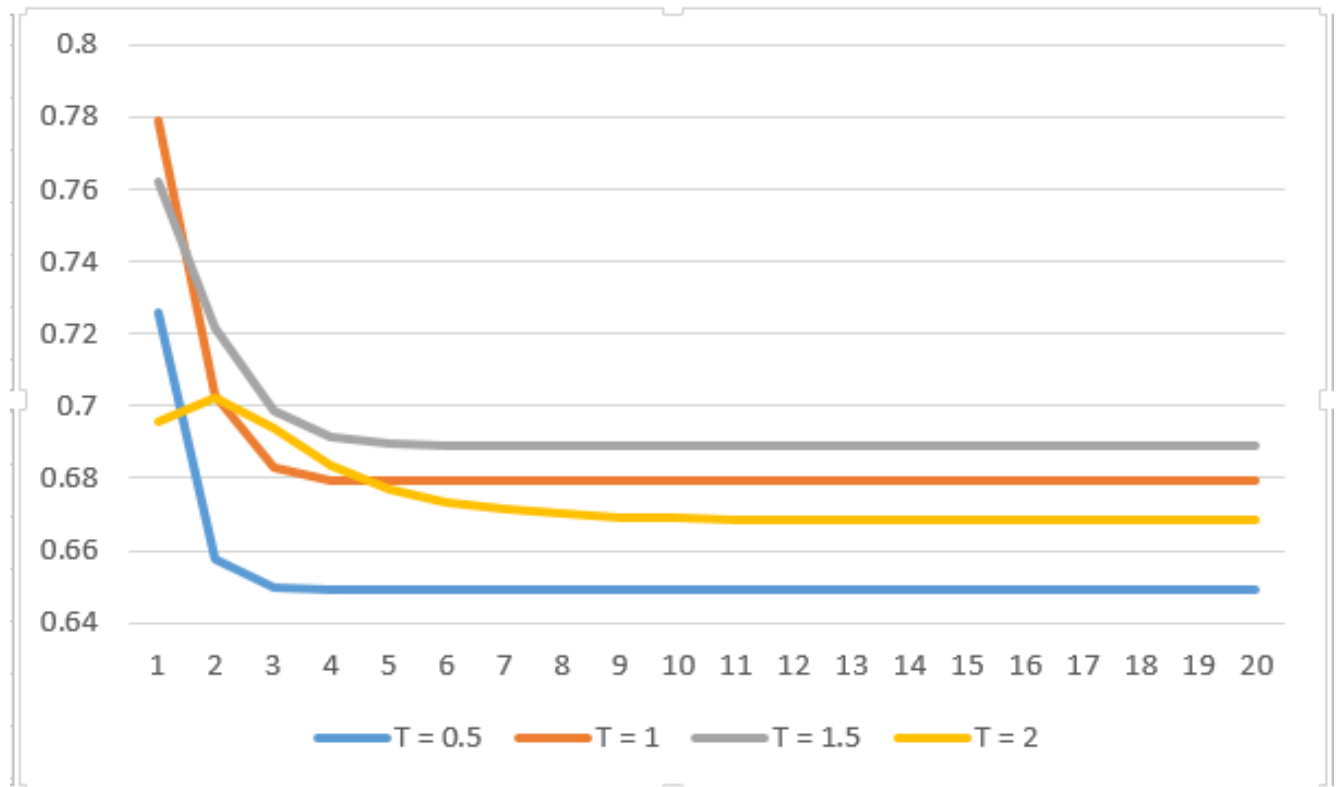


Рис. 3: Вероятность отсутствия запросов в системе

Вероятность отсутствия запросов в системе ведет себя довольно непредсказуемо, по графику видно, что она меньше всего при наименьшем времени обслуживания, возможно не хватает энергии.

Входные данные:

$\lambda : 0.4$

$\gamma : 0.3$

$K : 1, 2, 3, \dots, 20$

$T : 0.5, 1.0$

*Accuracy* : 0.001

K	T = 0.5	T = 1	T = 1.5	T = 2
1	0.726095	0.779231	0.761959	0.69564
2	0.657494	0.703088	0.721596	0.702596
3	0.649736	0.682766	0.698525	0.693991
4	0.649211	0.679563	0.691208	0.68358
5	0.649191	0.679211	0.689398	0.677076
6	0.64919	0.679177	0.688962	0.673433
7	0.64919	0.679181	0.688847	0.671319
8	0.64919	0.679181	0.688815	0.670066
9	0.64919	0.679181	0.688848	0.66926
10	0.64919	0.679181	0.68886	0.66883
11	0.64919	0.679181	0.688859	0.668532
12	0.64919	0.679181	0.688859	0.668398
13	0.64919	0.679181	0.688859	0.668294
14	0.64919	0.679181	0.688858	0.668261
15	0.64919	0.679181	0.688858	0.66826
16	0.64919	0.679181	0.688858	0.66829
17	0.64919	0.679181	0.688858	0.668284
18	0.649189	0.679181	0.688858	0.668277
19	0.649189	0.679181	0.68886	0.668272
20	0.649189	0.679181	0.68886	0.66827

## 4.6 Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере

График  $P_0^{energy}$  для значений  $k$  (от 1 до  $K$  с шагом 1) и  $T$  (от 0.5 до  $T$  с шагом 0.5).

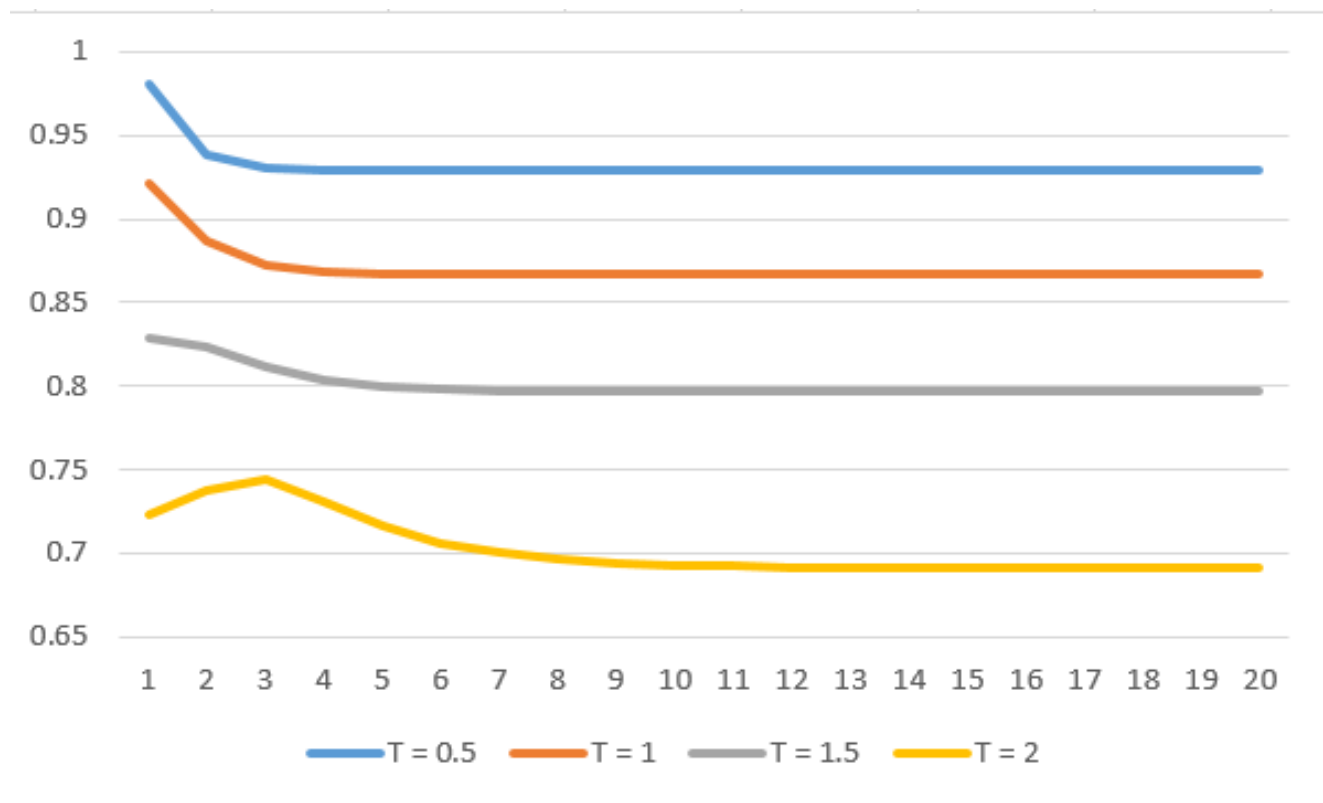


Рис. 4: Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере

Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере увеличивается по мере уменьшения времени обслуживания заявок системой.

**Входные данные:**

$\lambda : 0.4$

$\gamma : 0.3$

$K : 1, 2, 3, \dots, 20$

$T : 0.5, 1.0$

*Accuracy* : 0.001

K	T = 0.5	T = 1	T = 1.5	T = 2
1	0.98065	0.920586	0.828405	0.722965
2	0.938254	0.887253	0.823069	0.73764
3	0.930538	0.871699	0.81184	0.744618
4	0.929723	0.867712	0.802968	0.730353
5	0.929685	0.867043	0.799229	0.715966
6	0.929678	0.866946	0.798022	0.706364
7	0.929678	0.866955	0.797581	0.700326
8	0.929678	0.866954	0.797415	0.69655
9	0.929678	0.866954	0.7975	0.694274
10	0.929678	0.866954	0.797541	0.692846
11	0.929678	0.866954	0.797536	0.691986
12	0.929678	0.866954	0.797534	0.691524
13	0.929678	0.866954	0.797533	0.691193
14	0.929678	0.866955	0.797533	0.691047
15	0.929678	0.866955	0.797533	0.691017
16	0.929678	0.866955	0.797533	0.691072
17	0.929678	0.866955	0.797533	0.691044
18	0.929678	0.866955	0.797533	0.69102
19	0.929678	0.866955	0.79754	0.691005
20	0.929678	0.866955	0.79754	0.690997

#### 4.7 Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере

График  $P_{idle}$  для значений  $k$  (от 1 до  $K$  с шагом 1) и  $T$  (от 0.5 до  $T$  с шагом 0.5).

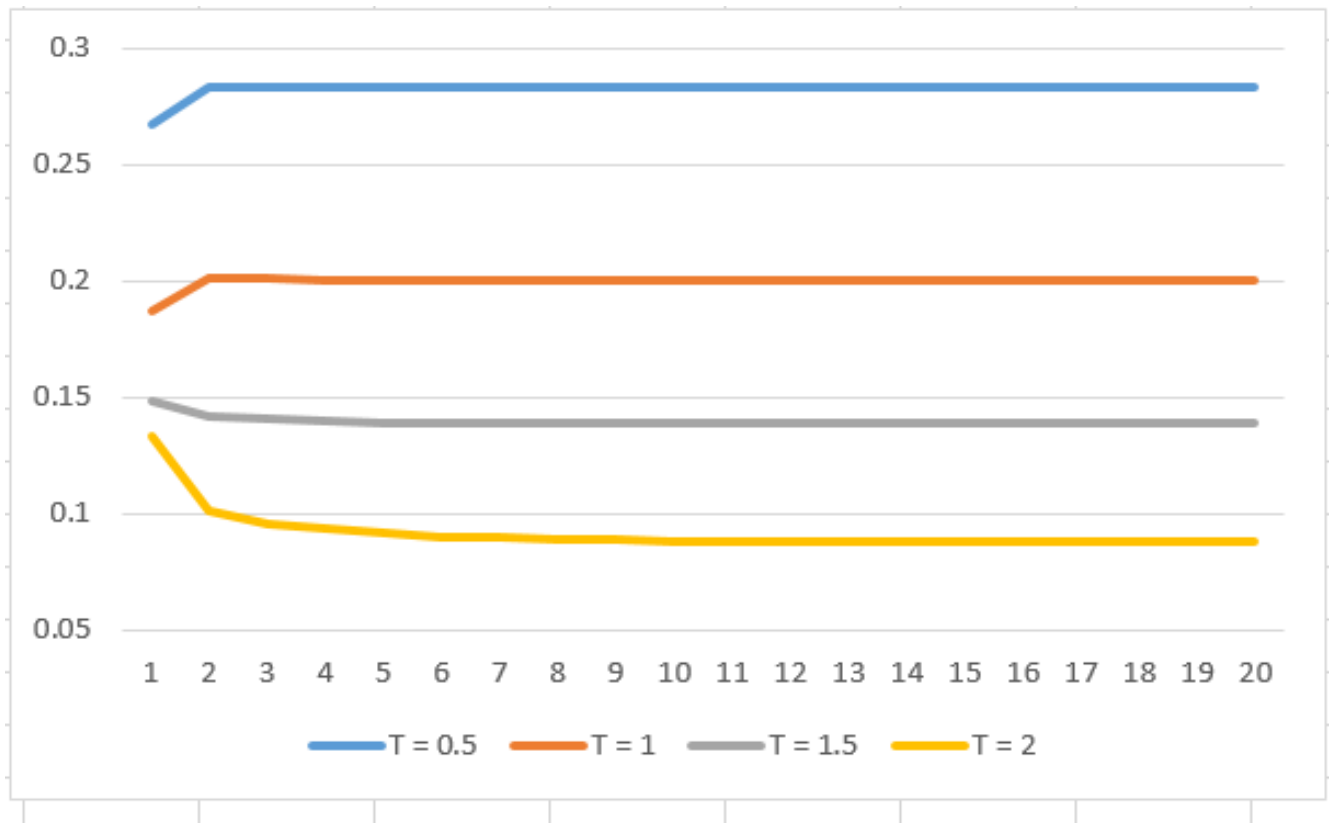


Рис. 5: Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере

Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере возрастает с уменьшением времени обслуживания. Другими словами - единицы энергии потребляются быстрее, что приводит к увеличению шанса простоя системы.

Входные данные:

$\lambda : 0.4$

$\gamma : 0.3$

$K : 1, 2, 3, \dots, 20$

$T : 0.5, 1.0$

*Accuracy* : 0.001

K	T = 0.5	T = 1	T = 1.5	T = 2
1	0.267416	0.18737	0.148672	0.133393
2	0.28379	0.201041	0.142152	0.101552
3	0.283297	0.201051	0.140791	0.095899
4	0.28314	0.200588	0.139663	0.093307
5	0.283131	0.200479	0.139106	0.09142
6	0.283129	0.20046	0.138905	0.090178
7	0.283129	0.200462	0.138828	0.089392
8	0.283129	0.200461	0.138799	0.088897
9	0.283129	0.200461	0.138808	0.0886
10	0.283129	0.200461	0.138814	0.088412
11	0.283129	0.200461	0.138813	0.0883
12	0.283129	0.200461	0.138812	0.088237
13	0.283129	0.200461	0.138812	0.088193
14	0.283129	0.200461	0.138812	0.088173
15	0.283129	0.200461	0.138812	0.088168
16	0.283129	0.200461	0.138812	0.088171
17	0.283129	0.200461	0.138812	0.088167
18	0.28313	0.200461	0.138812	0.088163
19	0.28313	0.200461	0.138813	0.088161
20	0.28313	0.200461	0.138813	0.08816

## 4.8 Вывод по итогам анализа характеристик производительности

Путем сравнения характеристик производительности и выявления особенностей поведения системы можно повысить ее эффективность, повлияв на определенные параметры. Стоит отметить, что увеличение объема буфера энергии далеко не всегда способствует улучшению значения соответствующей характеристики т.к., начиная с определенного значения  $K$ , изменения достаточно малы и это экономически нецелесообразно, т.к не оказывает существенного влияния на работу системы.

Стоит добавить, что при исследовании системы при значениях  $T > 2$  условие эргодичности начинает выполняться только для достаточно больших значений  $K$ .

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения курсовой работы:

1. Исследована система массового обслуживания типа  $MAR|G|1$ .  
Найдены вероятности одношаговых переходов, а так же построена матрица переходных вероятностей. Проверено выполнение условия эргодичности и на основе этого найдено стационарное распределение вероятностей.
2. Разработана программная реализация предложенного метода нахождения стационарного распределения вероятностей на языке программирования Java.
3. На основе программной реализации метода нахождения стационарного распределения вероятностей найдены характеристики производительности искомой системы. Произведен их анализ и сделаны выводы.



## Список литературы

- [1] Klimenok V.I., Dudin A.N. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory // Queueing Systems. 2006. V. 54. P. 245-259.