

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Исследование системы MАР/G/1 работающей с
использованием энергии, генерируемой в режиме
реального времени

Дипломная работа

Джиги Александр Олегович
студент 4 курса,
специальность "прикладная
математика"

Научный руководитель:
доктор физ-мат наук,
профессор
Дудин Александр Николаевич

Допущена к защите

«__» _____ 2019 г.

Зав. кафедрой теории вероятностей
и математической статистики,
доктор физ.-мат наук, доцент А.Ю. Харин

Минск, 2019

Реферат

Ключевые слова: СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ, СИСТЕМА $MAP|G|1$, ПЕРЕХОДНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ, КРИТЕРИЙ ЭРГОДИЧНОСТИ, СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Объектом исследования является система массового обслуживания типа $MAP|G|1$ с генерацией энергии. Цель работы – изучить систему, описать модель и исследовать ее поведение в различных случаях. Найденны переходные вероятности системы. Построена матрица переходных вероятностей. Найдено условие эргодичности.

Рэфэрат

Ключавыя словы: СІСТЭМА МАСАВАГА АБСЛУГОЎВАННЯ, СІСТЭМА $MAP | G | 1$, ПЕРАХОДНЫЯ ІМАВЕРНАСЦІ, КРЫТЭРЫЙ ЭРГАДЗІЧНАСЦІ, СТАЦЫЯНАРНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ ІМАВЕРНАСЦЕЎ.

Аб'ектам даследавання з'яўляецца сістэма масавага абслугоўвання тыпу $MAP|G|1$ з генерацыяй энергіі. Мэта работы - вывучыць сістэму, апісаць мадэль і даследаваць яе паводзіны ў розных выпадках. Знойдзеныя пераходныя імавернасці сістэмы. Пабудавана матрыца пераходных імавернасцеў. Знойдзена ўмова эргодзічнасці.

Abstract

Key words: QUEUEING SYSTEM, $MAP | G | 1$ SYSTEM, TRANSITION PROBABILITIES, ERGODICITY CRITERION, STATIONARY DISTRIBUTION OF PROBABILITIES.

The object of the study is a queuing system of the $MAP|G|1$ type with the generation of energy. The aim of the work is to study the system, describe the model and investigate its behavior in various cases. The transition probabilities of the system are found. A matrix of transition probabilities is constructed. The ergodicity condition is found.

Содержание

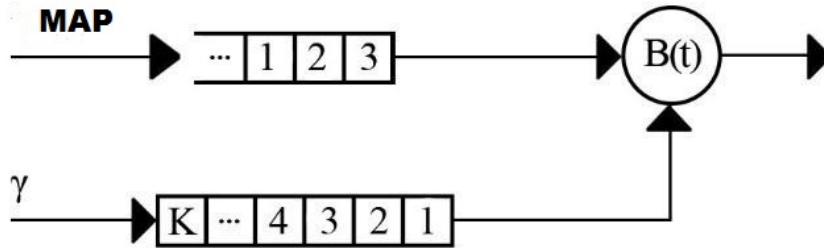
1	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ $MAR G 1$ С ГЕНЕРАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ	5
1.1	Математическая модель	5
1.2	Необходимые обозначения	7
1.3	Переходные вероятности	9
2	ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	12
2.1	Матрица вероятностей переходов	12
2.2	Вид матриц V_j	13
2.3	Вид матриц Y_j	14
3	СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	14
3.1	Критерий эргодичности системы	14
3.2	Матрично-аналитический метод для нахождения стационарного распределения вероятностей цепи Маркова (метод М. Ньютса)	16
3.3	Стационарное распределение в произвольный момент времени .	19
4	АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ	24
4.1	Необходимые обозначения	24
4.2	Численные характеристики системы	25
4.3	Среднее количество запросов в системе	26
4.4	Среднее количество единиц энергии в буфере	28
4.5	Вероятность отсутствия запросов в системе	29
4.6	Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере	32
4.7	Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере	34
4.8	Среднее количество запросов в системе в произвольный момент времени	35
4.9	Вывод по итогам анализа характеристик производительности .	38
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	39

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели систем массового обслуживания (СМО) широко применяются для исследования и оптимизации процессов в различных физических, экономических, производственных, административных, медицинских, военных и других системах. Объектом исследования в теории СМО являются ситуации, когда имеется некоторый ограниченный ресурс и множество запросов на удовлетворения потребности в этом ресурсе. Примерами могут служить кассы в магазинах, аэропортах, вокзалах и т.д.; терминалы в транспортных системах; банкоматы, инфокиоски и точки оплаты с использованием пластиковых карт; таблицы и индексы реляционных баз данных; ресурсы медицинских, экстренных и аварийных служб; средства радиолокации и противовоздушной обороны; авторизационные серверы в банках, контактные, справочные и информационные центры и т.д. Ограниченность ресурса и случайный характер потока запросов приводят к отказу или задержке в удовлетворении запросов. Стремление уменьшить вероятность этих отказов и длительность задержек и явилось побуждающим мотивом развития теории СМО. С точки зрения используемого математического аппарата, теория СМО может быть классифицирована как прикладная ветвь теории вероятностей, а более точно, теории случайных процессов. В настоящее время одним из популярных направлений исследований в теории массового обслуживания является анализ. моделей очередей / инвентаризации, в которых обслуживание клиентов возможно только при условии наличия некоторого дополнительного расходного ресурса (инвентаря). Это направление близко к так называемым сборочным системам или очередям с парными клиентами или очередям такси / пассажиров, где обслуживание клиента требует присутствия некоторых ресурсов. Отсутствие доступного ресурса вызывает временное прерывание процесс обслуживания.

1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ $MAR|G|1$ С ГЕНЕРАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

1.1 Математическая модель



В системе имеется бесконечный буфер запросов, конечный буфер энергии и обслуживающий прибор. Запросы поступают в прибор в порядке FIFO (первым пришел, первым ушел). Время обслуживания прибора имеет функцию распределения $B(t)$.

Для обслуживания одного запроса необходима одна единица энергии. Единица энергии берется сразу после того, как запрос поступит на обслуживание. Если же буфер для хранения энергии пуст, то система переходит в режим ожидания до тех пор, пока не поступит единица энергии. Если буфер энергии заполнен, то поступающие единицы энергии теряются. Поступление единиц энергии подчинено пуассоновскому процессу с параметром γ . Запросы поступают MAR - потоком под управлением неприводимой ЦМ с параметром $\nu_t, t \geq 0$, с непрерывным временем. Время пребывания цепи ν_t в некотором состоянии ν имеет показательное распределение с параметром λ_ν . После того, как время пребывания процесса в этом состоянии истекло, с вероятностью $p_l(\nu, \nu')$ процесс ν_t переходит (перескакивает) в некоторое состояние ν' и генерируется группа из l запросов, $l = 0, 1$. При этом $p_0(\nu, \nu) = 0$. Для MAR -потока невозможно определить считающую функцию как в стационарном пуассоновском (как безусловную вероятность), поскольку число запросов, поступивших за интервал времени длиной t зависит от состояния управляющего процесса $\nu_t, t \geq 0$, в момент начала этого интервала. Но можно вычислить вероятности $P_{\nu, \nu'}(n, t)$ (за время t поступит n запросов и $\nu_t = \nu'$

при условии $\nu_0 = \nu$).

Вероятность поступления 0 запросов за время t имеет вид $P(0, t) = e^{D_0 t}$. Здесь D_k – квадратные матрицы порядка $W + 1$, элементы которых определяются следующим образом:

$$(D_0)_{\nu, \nu'} = \begin{cases} -\lambda_\nu, & \nu = \nu', \\ \lambda_\nu p_0(\nu, \nu'), & \nu \neq \nu', \end{cases}$$

$$(D_k)_{\nu, \nu'} = \lambda_\nu p_k(\nu, \nu'), k \geq 1,$$

$$D(z) = D_0 + D_1 z.$$

1.2 Необходимые обозначения

Вероятность поступления в буфер k единиц энергии за время t :

$$\phi_k(t) = \frac{(\gamma t)^k}{k!} e^{-\gamma t}, k \geq 0.$$

Вероятность поступления в буфер не менее k единиц энергии за время t :

$$\hat{\phi}_k(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \phi_i(t), k \geq 0.$$

Матрица вероятностей поступления i заявок и k единиц энергии за время обслуживания одной заявки:

$$\Phi(i, k) = \int_0^{\infty} P(i, t) \phi_k(t) dB(t), i \geq 0, k \geq 0.$$

Матрица вероятностей поступления i заявок и не менее k единиц энергии за время обслуживания одной заявки:

$$\hat{\Phi}(i, k) = \int_0^{\infty} P(i, t) \hat{\phi}_k(t) dB(t), i \geq 0, k \geq 0.$$

Матрица вероятностей того, что за время отсутствия единиц энергии в буфере поступит n запросов:

$$N(n) = \int_0^{\infty} P(n, t) \gamma e^{-\gamma t} dt.$$

Матрица вероятностей того, что за время отсутствия запросов поступит n единиц энергии:

$$M(n) = \int_0^{\infty} e^{D_0 t} \phi_n(t) D_1 dt = \int_0^{\infty} e^{D_0 t} \frac{(\gamma t)^n}{n!} e^{-\gamma I t} D_1 dt = \gamma^n (-D_0 + \gamma I)^{-(n+1)} D_1.$$

Матрица вероятностей того, что за время отсутствия запросов в буфере поступит не менее m единиц энергии:

$$\hat{M}(m) = \sum_{n=m}^{\infty} M(n).$$

Матрица $P(n, t)$ это матрица вероятности что за время t поступит n запросов. Матрицы $P(n, t)$, $n > 1$, в принципе, могут быть вычислены через матричную ПФ $P(z, t)$, имеющую вид $P(z, t) = e^{D(z)t}$, следующим образом:

$$P(n, t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n P(z, t)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, n \geq 0.$$

Однако, вычисление матриц $P(n, t)$ в аналитическом виде по этой формуле возможно только в редких случаях. В общем виде они вычисляются с помощью процеду, основанной на идее униформизации марковского процесса, которая состоит в следующем.

Если H – инфинитезимальный генератор ЦМ с непрерывным временем, то справедливо представление:

$$e^{Ht} = e^{ht(L-I)} = e^{-ht} e^{htL} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-ht} \frac{(ht)^j}{j!} L^j,$$

где

$$h = \max_{i=\overline{0,W}} (-H)_{ii}, \quad L = I + h^{-1}H.$$

Матрица L является матрицей одношаговых переходных вероятностей некоторой вспомогательной ЦМ с дискретным временем. Весьма полезным свойством представления является мультипликативность членов суммы, представление их в виде произведения скалярной функции от аргумента t и матрицы, не зависящей от t .

Нетрудно видеть, что аналогичное разложение, с поправкой на то, что L – субстохастическая матрица, может быть применено к матричной экспоненте в случае, когда H – матрица, у которой недиагональные элементы неотрицательны, диагональные – отрицательны и суммы по строкам – отрицательны или равны нулю. В частности, такое разложение справедливо для матричной экспоненты $e^{D_0 t}$.

Обозначим $\tilde{\theta} = \max_{i=\overline{0,W}} (-D_0)_{ii}$. Тогда $P(0, t) = e^{D_0 t}$ можно представить в виде

$$P(0, t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\tilde{\theta} t} \frac{(\tilde{\theta} t)^j}{j!} K_0^{(j)},$$

где

$$K_0^{(j)} = (I + \tilde{\theta}^{-1} D_0)^j.$$

По аналогии, будем искать остальные матрицы $P(n, t), n \geq 1$, в

виде

$$P(n, t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\tilde{\theta}t} \frac{(\tilde{\theta}t)^j}{j!} K_n^{(j)}, \quad n \geq 1,$$

где $K_n^{(j)}$, $n \geq 1, j \geq 0$, – некоторые матрицы. Матрицы $K_n^{(j)}$ удовлетворяют следующей системе рекуррентных соотношений:

$$K_0^{(0)} = I, \quad K_n^{(0)} = O, \quad n \geq 1,$$

$$K_0^{(j+1)} = K_0^{(j)}(I + \tilde{\theta}^{-1}D_0),$$

$$K_n^{(j+1)} = \tilde{\theta}^{-1}K_{n-1}^{(j)}D_1 + K_n^{(j)}(I + \tilde{\theta}^{-1}D_0), \quad n \geq 1, \quad j \geq 0.$$

Усечение бесконечной суммы в можно произвести после того, как член суммы окажется по норме меньше наперед заданного малого положительного числа. Следует также учитывать, что при $j < n$ матрица $K_n^{(j)}$ равняется O .

1.3 Переходные вероятности

Процесс $i_t, t \geq 0$ задающий число заявок в системе в момент t является немарковским. Для его исследования применим метод вложенных ЦМ. Будем рассматривать поведение СМО (i_t, k_t) , в моменты t_n , $n \geq 1$ окончания обслуживания запросов, а именно, рассмотрим процесс $\epsilon_n = \{i_n, k_n, \nu_n\}$ – трехмерный процесс, где $i_n = i_{t_{n+0}}$, $k_n = k_{t_{n-0}}$, $\nu_n = \nu_{t_n}$. Данный процесс является трехмерной цепью Маркова. Введем матрицу

$$P \{(i, k) \rightarrow (j, k')\},$$

$(\nu\nu')$ -й элемент которой есть вероятность одношагового перехода:

$$P \{(i, k, \nu) \rightarrow (j, k', \nu')\} =$$

$$= P \{i_{n+1} = j, k_{n+1} = k', \nu_{n+1} = \nu' | i_n = i, k_n = k, \nu_n = \nu\}$$

Введем стационарные вероятности

$$\pi(i, k, \nu') = \lim_{n \rightarrow \infty} P \{i_n = i, k_n = k, \nu_n = \nu'\},$$

$$i \geq 0, k \in [0, K], \nu \in [0, W],$$

которые объединим в вектора

$$\boldsymbol{\pi}(i, k) = (\pi(i, k, 0), \dots, \pi(i, k, W), k \in [0, K],$$

которые, в свою очередь, образуют вектор стационарных вероятностей:

$$\boldsymbol{\pi}_i = (\boldsymbol{\pi}(i, 1), \dots, \boldsymbol{\pi}(i, K)), i \geq 0.$$

Нахождение переходных вероятностей в частных случаях проводится путем анализа поведения цепи Маркова между моментами t_n и t_{n+1} и использования формулы полной вероятности.

Лемма

Матрицы $P \{(i, k) \rightarrow (j, k')\}$ вычисляются следующим образом:

$$P \{(0, 0) \rightarrow (j, k')\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \Phi(j-n, k') \\ + N(0) \sum_{m=0}^{k'} M(m) \Phi(j, k'-m), j \geq 0, k' = \overline{0, K-2};$$

$$P \{(0, 0) \rightarrow (j, K-1)\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \Phi(j-n, K-1) \\ + N(0) \left[\sum_{m=0}^{K-1} M(m) \Phi(j, K-1-m) + \hat{M}(K) \Phi(j, 0) \right], j \geq 0;$$

$$P \{(0, 0) \rightarrow (j, K)\} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \hat{\Phi}(j-n, K) \\ + N(0) \left(\sum_{m=0}^{K-1} M(m) \hat{\Phi}(j, K-m) + \hat{M}(K) \hat{\Phi}(j, 1) \right), j \geq 0.$$

$$P \{(0, k) \rightarrow (j, K-1)\} = \sum_{m=0}^{K-k} M(m) \Phi(j, K-k-m) +$$

$$+\hat{M}(K-k+1)\Phi(j,0), j \geq 0, k = \overline{1, K};$$

$$P\{(0,k) \rightarrow (j,k')\} = \sum_{m=0}^{k'-k+1} M(m)\Phi(j,k'-k+1-m),$$

$$j \geq 0, k = \overline{1, K}, k' = \overline{k-1, K-2}.$$

$$P\{(0,k) \rightarrow (j,K)\} = \sum_{m=0}^{K-k} M(m)\hat{\Phi}(j,K-k+1-m)+$$

$$\hat{M}(K-k+1)\hat{\Phi}(j,1), j \geq 0, k = \overline{1, K}.$$

$$P\{(i,0) \rightarrow (j,k')\} = \sum_{n=0}^{j-i+1} N(n)\Phi(j-i+1-n,k'),$$

$$i \geq 1, j \geq i-1, k' = \overline{0, K-1}.$$

$$P\{(i,0) \rightarrow (j,K)\} = \sum_{n=0}^{j-i+1} N(n)\hat{\Phi}(j-i+1-n,K), i \geq 1, j \geq i-1.$$

$$P\{(i,k) \rightarrow (j,k')\} = \Phi(j-i+1,k'-k+1),$$

$$i \geq 1, j \geq i-1, k' = \overline{k-1, K-1}, k = \overline{1, K}.$$

$$P\{(i,k) \rightarrow (j,K)\} = \hat{\Phi}(j-i+1,K-k+1), i \geq 1, j \geq i-1,$$

$$k = \overline{1, K}.$$

2 ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1 Матрица вероятностей переходов

Матрица P вероятностей одношаговых переходов рассматриваемого процесса имеет следующую форму $P = (P_{i,j})_{i,j \geq 0}$. Можно показать, что матрицы $P_{i,j}$ не зависят от i и j , а зависят только от $j - i$. Тогда обозначим матрицы $(P_{i,j})_{i=0, j \geq 0}$ как V_j , элементами которых будут переходные вероятности $P\{(0, k) \rightarrow (j, k')\}$, где $k, k' \in [0, K]$. Заметим, что для $i \geq 1$ выполняется следующее:

$$(P_{i,j-i+1}, j \geq 0) = (P_{ij}), j \geq 0.$$

Матрицы $(P_{i,i+j-1})_{i \neq 0, j \geq 0}$, в свою очередь, обозначим как Y_j , элементами которых будут переходные вероятности $P\{(1, k) \rightarrow (j, k')\}$, где $k, k' \in [0, K]$. Матрица вероятностей одношаговых переходов P имеет следующую структуру:

$$P = \begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & \dots \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & \dots \\ 0 & Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots \\ 0 & 0 & Y_0 & Y_1 & Y_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Матрицу, имеющие такую структуру, называют блочной верхне-Хессенберговой. Величина скачка вниз компоненты i_n за один шаг не превосходит единицы.

2.2 Вид матриц V_j

Матрицы V_j имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} v_{00}^j & v_{01}^j & v_{02}^j & v_{03}^j & \dots & v_{0K}^j \\ v_{10}^j & v_{11}^j & v_{12}^j & v_{13}^j & \dots & v_{1K}^j \\ 0 & v_{21}^j & v_{22}^j & v_{23}^j & \dots & v_{2K}^j \\ 0 & 0 & v_{32}^j & v_{33}^j & \dots & v_{3K}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_{KK}^j \end{bmatrix}$$

Где $v_{kk'}^j$ находятся следующим образом:

$$a) v_{0k'}^j = P \{ (0, 0) \rightarrow (j, k') \} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \Phi(j-n, k') + \\ + N(0) \sum_{m=0}^{k'} M(m) \Phi(j, k'-m), j \geq 0, k' = \overline{0, K-1},$$

$$b) v_{kk'}^j = P \{ (0, k) \rightarrow (j, k') \} = \sum_{m=0}^{k'-k+1} M(m) \Phi(j, k'-k+1-m), \\ j \geq 0, k = \overline{1, K}, k' = \overline{k-1, K-1},$$

$$c) v_{kK}^j = P \{ (0, k) \rightarrow (j, K) \} = \sum_{m=0}^{K-k} M(m) \hat{\Phi}(j, K-k+1-m) + \\ + \hat{M}(K-k+1) \hat{\Phi}(j, 1), j \geq 0, k = \overline{1, K}.$$

$$d) v_{0K}^j = P \{ (0, 0) \rightarrow (j, K) \} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \hat{\Phi}(j-n, K) + \\ + N(0) \left(\sum_{m=0}^{K-1} M(m) \hat{\Phi}(j, K-m) + \hat{M}(K) \hat{\Phi}(j, 1) \right), j \geq 0.,$$

$$e) v_{0(K-1)}^j = P \{ (0, 0) \rightarrow (j, K-1) \} = M(0) \sum_{n=0}^j N(n) \Phi(j-n, K-1) \\ + N(0) \left[\sum_{m=0}^{K-1} M(m) \Phi(j, K-1-m) + \hat{M}(K) \Phi(j, 0) \right], j \geq 0,$$

$$f) v_{k(K-1)}^j = P \{ (0, k) \rightarrow (j, K-1) \} = \sum_{m=0}^{K-k} M(m) \Phi(j, K-k-m) + \\ + \hat{M}(K-k+1) \Phi(j, 0), j \geq 0, k = \overline{1, K}$$

Проанализировав вид $v_{kk'}^j$ сделаем вывод, что, начиная со второй

строки, элементы не зависят от k и k' , а зависят только $k' - k$.

2.3 Вид матриц Y_j

Матрицы Y_j имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} y_{00}^j & y_{01}^j & y_{02}^j & y_{03}^j & \cdots & y_{0K}^j \\ y_{10}^j & y_{11}^j & y_{12}^j & y_{13}^j & \cdots & y_{1K}^j \\ 0 & y_{21}^j & y_{22}^j & y_{23}^j & \cdots & y_{2K}^j \\ 0 & 0 & y_{32}^j & y_{33}^j & \cdots & y_{3K}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{KK}^j \end{bmatrix}$$

Где $y_{kk'}^j$ находятся следующим образом:

$$a) P \{(i, 0) \rightarrow (j, k')\} = \sum_{n=0}^{j-i+1} N(n) \Phi(j-i+1-n, k'), i \geq 1, j \geq i-1, k' = \overline{0, K-1}.$$

$$b) P \{(i, 0) \rightarrow (j, K)\} = \sum_{n=0}^{j-i+1} N(n) \hat{\Phi}(j-i+1-n, K), i \geq 1, j \geq i-1.$$

$$c) P \{(i, k) \rightarrow (j, k')\} = \Phi(j-i+1, k'-k+1), i \geq 1, j \geq i-1, k' = \overline{k-1, K-1}, k = \overline{1, K}.$$

$$d) P \{(i, k) \rightarrow (j, K)\} = \hat{\Phi}(j-i+1, K-k+1), i \geq 1, j \geq i-1, k = \overline{1, K}.$$

Проанализировав вид $y_{kk'}^j$ сделаем вывод, что, начиная со второй строки, элементы не зависят от k и k' , а зависят только $k' - k$.

3 СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1 Критерий эргодичности системы

Условие эргодичности можно трактовать следующим образом - условие, при котором система способна уменьшать число заявок

в системе, когда она перегружена, т.е. среднее число заявок, поступающих за время обслуживания одной заявки, должно быть меньше единицы.

Введем матричные ПФ $V(z) = \sum_{i=0}^{\infty} V_i z^i$, $Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i z^i$, где

$$V_j = P_{0,i+j-1} Y_j = P_{i,i+j-1}$$

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j z^j = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z^j P(j, t) \frac{(\gamma t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{D(z)t} \phi_k(t) dB(t), \text{ где } D(z) = D_0 + D_1 z$$

Теорема

Пусть ЦМ $\epsilon_n = \{i_n, k_n, \nu_n\}$, с матрицей переходных вероятностей P является неприводимой и апериодической, матрицы $Y(1)$ и $V(1)$ являются стохастическими и неприводимыми и выполняются неравенства $V'(1) < \infty$ и $Y'(1) < \infty$. Для того, чтобы ЦМ ϵ_n , $n \geq 1$, была эргодичной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$[det(zI - Y(z))]'_{z=1} > 0 \quad (1)$$

Следствие

Неравенство (1) эквивалентно следующему неравенству:

$$\vec{y} \sum_{k=1}^{\infty} k Y_k(1) e < 1,$$

где вектор \vec{y} удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \vec{y} \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(1) = \vec{y} \\ \vec{y} e = 1. \end{cases}$$

Пусть вектор y имеет вид

$$y = \theta \otimes u \quad (2)$$

где θ - вектор стационарного распределения процесса $MAP \nu_t$, $t \geq 0$, и $u = (u_1, u_2, \dots, u_K)$. Найдем вектор u . Компоненты вектора u удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} u_k = u_0 \phi_k + \sum_{s=1}^{k+1} u_s \phi_{k+1-s}, k = \overline{0, K-1}, \\ u_K = u_0 \hat{\phi} K + \sum_{s=1}^K u_s \phi_{K+1-s}. \end{cases}$$

Решим эту систему, представив u_k следующим образом:

$$\begin{cases} u_k = u_0 \psi_k \\ u_0 = \left(\sum_{k=0}^K \psi_k \right)^{-1}, \end{cases}$$

Где ψ_{k+1} :

$$\psi_{k+1} = (\psi_k - \phi_k - \sum_{s=1}^k \psi_s \phi_{k+1-s}) \phi_0^{-1}, k = \overline{0, K-1}, \psi_0 = 1$$

После подстановки u и y получаем условие эргодичности:

$$\lambda T + u_0 \frac{\lambda}{\gamma} < 1,$$

где T это время обслуживания одной заявки.

Условие существования стационарного режима в системе совпадает с условием эргодичности вложенной цепи Маркова.

3.2 Матрично-аналитический метод для нахождения стационарного распределения вероятностей цепи Маркова (метод М. Ньютса)

Краеугольным понятием в подходе М. Ньютса является понятие фундаментального периода. Фундаментальный период — это интервал времени с момента, когда значение счетной компоненты равно i , до первого момента, когда значение этой компоненты станет равным $i - 1$, $i \geq 1$. Из определения ЦМ типа $MAP|G|1$ следует, что длина фундаментального периода не зависит от значения i .

Обозначим $G(z)$ матричную ПФ, (k, k') -й элемент которой есть ПФ числа переходов, осуществленных ЦМ за фундаментальный период, который закончился, когда значение конечной компоненты есть k' при условии, что в момент начала фундаментального периода значение конечной компоненты равнялось k ; $k, k' = \overline{0, K}$. Используя факты из теории марковских процессов восстано-

ления, можно показать, что матрица $G(z)$ удовлетворяет уравнению

$$G(z) = z \sum_{j=0}^{\infty} Y_j G^j(z). \quad (1)$$

Обозначим через $G^{(i)}$ матрицу вероятностей переходов компоненты k_n за время первого достижения первой компонентой i_n значения i , начиная с $i+1$.

Используя формулу полной вероятности, нетрудно убедиться, что матрицы $G^{(i)}, i \geq 0$, удовлетворяют уравнениям

$$G^{(i)} = P_{i+1,i} + \sum_{l=i+1}^{\infty} P_{i+1,l} G^{(l-1)} G^{(l-2)} \dots G^{(i)}, i \geq 0. \quad (2)$$

Учитывая квазитеплицевоcть рассматриваемой ЦМ, можно заключить, что матрицы $G^{(i)}, i \geq 0$, не зависят от i . Пусть все они равны некоторой матрице G . Тогда из (2) можно заключить, что матрица G , удовлетворяет уравнению

$$G = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j G^j. \quad (3)$$

Отметим, что уравнение (1) автоматически следует из уравнения (3), поскольку из определения матриц G и $G(z)$ следует, что $G(1) = G$.

Обозначим через $\pi_i, i \geq 0$, векторы стационарных вероятностей исходной ЦМ $\xi_n, n \geq 1$.

$$\pi_j = \sum_{i=0}^j \pi_i \bar{P}_{i,j}, i \geq 0, \quad (4)$$

где матрицы $\bar{P}_{i,j}$ задаются уравнениями

$$\bar{P}_{i,j} = P_{i,j} + \sum_{l=j+1}^{\infty} P_{i,l} G^{l-j}, j \geq i. \quad (5)$$

Из (4) следует, что векторы $\pi_i, i \geq 0$, стационарных вероятностей можно представить в виде

$$\pi_i = \pi_0 \Phi_i, i \geq 0, \quad (6)$$

где матрицы $\Phi_i, i \geq 0$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\Phi_0 = I, \Phi_l = \left(\bar{P}_{0,l} + \sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i \bar{P}_{i,l} \right) (I - \bar{P}_{l,l})^{-1}, l \geq 1. \quad (7)$$

Соотношения (6) определяют векторы $\pi_i, i \geq 0$, стационарных вероятностей с точностью до неизвестного пока вектора π_0 . Этот вектор можно вычислить через аппарат векторных ПФ или по формуле (8). Однако, предположим еще одну процедуру для подсчета вектора π_0 .

Из уравнений (4) при $j = 0$ получаем:

$$\pi_0(I - \bar{P}_{0,0}) = 0. \quad (8)$$

Домножением соотношения (5) справа на вектор e несложно убедиться, что матрица $\bar{P}_{0,0}$ - стохастическая. По построению эта матрица является неприводимой, поэтому ранг системы (8) на единицу меньше размерности вектора π_0 . Значит, система (8) определяет вектор π_0 с точностью до некоторой константы. Следовательно, если нам удастся получить еще одно, неоднородное, уравнение для компонент вектора π_0 , то полученная система будет иметь единственное решение. Такое уравнение легко получается из (6) и условия нормировки и имеет вид:

$$\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i e = 1. \quad (9)$$

Подводя итог, сформулируем следующий алгоритм нахождения векторов $\pi_i, i \geq 0$, стационарных вероятностей:

1. Находим матрицу G как решение нелинейного матричного уравнения (3).
2. Вычисляем матрицы $\bar{P}_{i,l}$ по формулам (5).
3. Вычисляем матрицы Φ_l по рекуррентным формулам (7).
4. Находим вектор π_0 как единственное решение системы (8), (9).
5. Ищем необходимое число векторов π_i по формулам (6).

3.3 Стационарное распределение в произвольный момент времени

Обозначим через \tilde{V}_j матрицу переходных вероятностей марковского процесса $\{i_t, k_t, \nu_t\}, t \geq 0$, с момента начала обслуживания, когда процесс находился в состоянии со значение 0 счетного компонента в произвольный момент, предшествующий следующему обновлению, когда процесс находится в состоянии со значением j счетного компонента.

Пусть также $\tilde{Y}_{i,j}$ будет матрицей переходных вероятностей марковского процесса $\{i_t, k_t, \nu_t\}, t \geq 0$, с момента начала обслуживания, когда процесс находился в состоянии со значением $i > 0$ счетного компонента до произвольного момента, предшествующего следующему обновлению, когда процесс находится в состоянии со значением j счетного компонента.

Обозначим через $p_j, j \geq 0$, стационарное распределение системы в произвольный момент времени.

Лемма 2. Матрицы $\tilde{V}_j, j \geq 0$, считаются следующим образом:

$$\tilde{V}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{V}_{0,0}^0 & \tilde{V}_{0,1}^0 & \tilde{V}_{0,2}^0 & \cdots & \tilde{V}_{0,K-1}^0 & \tilde{V}_{0,K}^0 \\ O & \tilde{V}_{1,1}^0 & \tilde{V}_{1,2}^0 & \cdots & \tilde{V}_{1,K-1}^0 & \tilde{V}_{1,K}^0 \\ O & O & \tilde{V}_{2,2}^0 & \cdots & \tilde{V}_{2,K-1}^0 & \tilde{V}_{2,K}^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & O & \tilde{V}_{K,K}^0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{V}_{k,k'}^0 = \gamma^{k'-k}(\gamma I - D_0)^{-(k'-k+1)}, \quad 0 \leq k \leq k' \leq K-1; \quad (1)$$

$$\tilde{V}_{k,K}^0 = (-D_0)^{-1} - \sum_{l=0}^{K-k-1} \gamma^l (\gamma I - D_0)^{-(l+1)} \quad (2)$$

В случае $j > 0$ матрицы \tilde{V}_j имеют следующую блочную структуру:

$$\tilde{V}_j = \begin{pmatrix} \tilde{V}_{0,0}^j & \tilde{V}_{0,1}^j & \tilde{V}_{0,2}^j & \cdots & \tilde{V}_{0,K-2}^j & \tilde{V}_{0,K-1}^j & \tilde{V}_{0,K}^j \\ \tilde{V}_{1,0}^j & \tilde{V}_{1,1}^j & \tilde{V}_{1,2}^j & \cdots & \tilde{V}_{1,K-2}^j & \tilde{V}_{1,K-1}^j & \tilde{V}_{1,K}^j \\ O & \tilde{V}_{2,1}^j & \tilde{V}_{2,2}^j & \cdots & \tilde{V}_{2,K-2}^j & \tilde{V}_{2,K-1}^j & \tilde{V}_{2,K}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & O & \tilde{V}_{K,K-1}^j & \tilde{V}_{K,K}^j \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{V}_{0,k'}^j = \delta_{0,k'} \gamma N(j) + \left[N(0) \sum_{l=0}^{k'} M(l) \tilde{\Phi}(j-1, k'-l) + \right.$$

$$\left. M(0) \sum_{l=0}^{j-1} N(l) \tilde{\Phi}(j-l-1, k'), \right] \quad (3)$$

$$j \geq 1, 0 \leq k' \leq K-2,$$

$$\tilde{V}_{0,K-1}^j = \delta_{0,K-1} \gamma N(j) +$$

$$+ N(0) \left[\sum_{l=0}^{K-1} M(l) \tilde{\Phi}(j-1, K-1-l) + \hat{M}(K) \tilde{\Phi}(j-1, 0) \right] +$$

$$M(0) \sum_{l=0}^{j-1} N(l) \tilde{\Phi}(j-l-1, K-1), \quad (4)$$

$$0 \leq k' \leq K - 2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{0,K}^j = N(0) & \left[\sum_{l=0}^{K-1} M(l) \tilde{\Phi}(j-1, K-l) \right] + \hat{M}(K) \tilde{\Phi}(j-1, 1) \\ & + M(0) \sum_{l=0}^{j-1} N(l) \tilde{\Phi}(j-l-1, K), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{k,k'}^j &= \sum_{l=0}^{k'-k+1} M(l) \tilde{\Phi}(j-1, k'-k-l+1), \\ k &= \overline{1, K}, k-1 \leq k' \leq K-2. \end{aligned} \quad (6)$$

$$V_{k,K-1}^j = \sum_{l=0}^{K-k} M(l) \tilde{\Phi}(j-1, K-k-l) + \hat{M}(K-k+1) \tilde{\Phi}(j-1, 0), \quad (7)$$

$$k = \overline{1, K}.$$

$$\tilde{V}_{k,K}^j = \sum_{l=0}^{K-k} M(l) \tilde{\Phi}(j-1, K-k-l+1) + \hat{M}(K-k+1) \tilde{\Phi}(j-1, 1), \quad (8)$$

$$k = \overline{1, K},$$

где

$$\tilde{\Phi}(i, k) = \int_0^{\infty} P(i, t) \varphi_k(t) (1 - B(t)) dt \quad i \geq 0, \quad k \geq 0, \quad (9)$$

$$\tilde{\Phi}(i, k) = \int_0^{\infty} P(i, t) \hat{\varphi}_k(t) (1 - B(t)) dt, \quad i \geq 0, \quad k \geq 0. \quad (10)$$

Теперь перейдем к нахождению матриц $\tilde{Y}_{i,j}$. Как это будет видно, матрицы $\tilde{Y}_{i,j}$ зависят от значений i, j только через разницу $j - i$. Обозначим $r = j - i$ и $\tilde{Y}_{i,i+r} = (\tilde{Y}_{k,k'}^r)_{k,k'=0,K}$.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. Матрицы \tilde{Y}_r имеют следующую структуру:

$$\tilde{Y}_r = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_{0,0}^r & \tilde{Y}_{0,1}^r & \tilde{Y}_{0,2}^r & \cdots & \tilde{Y}_{0,K-2}^r & \tilde{Y}_{0,K-1}^r & \tilde{Y}_{0,K}^r \\ \tilde{Y}_{1,0}^r & \tilde{Y}_{1,1}^r & \tilde{Y}_{1,2}^r & \cdots & \tilde{Y}_{1,K-2}^r & \tilde{Y}_{1,K-1}^r & \tilde{Y}_{1,K}^r \\ O & \tilde{Y}_{2,1}^r & \tilde{Y}_{2,2}^r & \cdots & \tilde{Y}_{2,K-2}^r & \tilde{Y}_{2,K-1}^r & \tilde{Y}_{2,K}^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & O & \tilde{Y}_{K,K-1}^r & \tilde{Y}_{K,K}^r \end{pmatrix}, r \geq 0,$$

где

$$\tilde{Y}_{0,k'}^r = \sum_{l=0}^r N(l) \tilde{\Phi}(r-l, k'), k' = \overline{0, K-1}, \quad (11)$$

$$\tilde{Y}_{0,K}^r = \sum_{l=0}^r N(l) \tilde{\Phi}(r-l, K), \quad (12)$$

$$\tilde{Y}_{k,k'}^r = \tilde{\Phi}(r, k' - k + 1), k = \overline{1, K}, k' = \overline{k-1, K-1}, \quad (13)$$

$$\tilde{Y}_{k,K}^r = \tilde{\Phi}(r, K - k + 1), k = \overline{1, K}. \quad (14)$$

Теорема 1. Вектора $\mathbf{p}_j, j \geq 0$, считаются через $\pi_i, i \geq 0$, по формуле

$$\mathbf{p}_j = \pi_0 \tilde{V}_j + \sum_{r=0}^{j-1} \pi_{j-r} \tilde{Y}_r, j \geq 0, \quad (15)$$

Таким образом, векторы $\mathbf{p}_j, j \geq 0$, вычисляются по формуле (15). Единственный вопрос, как вычислить матрицы $\tilde{\Phi}(n, k)$ заданные интегралами (9). Рассмотрим случай **детерминированного распределения** $B(t)$, т.е.,

$$B(t) = \begin{cases} 0, t \leq b_1, \\ 1, t > b_1. \end{cases}$$

Считая интеграл (9), перепишем формулу (9) как

$$\tilde{\Phi}(n, k) = \int_0^{\infty} P(n, t) \varphi_k(t) (1 - B(t)) dt = \int_0^{b_1} P(n, t) \varphi_k(t) dt, \quad (16)$$

Для вычисления интеграла в (16) воспользуемся процедурой униформизации.

Обозначим $h = \max_{i=0, \overline{W}} (-D_0)_{ii}$.

Матрица $P(n, t)$, $n \geq 1$, равна:

$$P(n, t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-ht} \frac{(ht)^j}{j!} K_n^{(j)}, \quad n \geq 0, \quad (17)$$

Подставляя выражение (17) для $P(n, t)$ и выражение для $\varphi_k(t)$ в (16) и упрощая, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(n, k) &= \sum_{j=0}^{\infty} K_n^{(j)} \frac{h^j \gamma^k}{j! k!} \int_0^{b_1} e^{-(h+\gamma)t} t^{j+k} dt = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} K_n^{(j)} \frac{h^j \gamma^k}{j! k!} \left[\frac{(j+k)!}{(h+\gamma)^{j+k+1}} - e^{-b_1(h+\gamma)} \sum_{l=0}^{j+k} \frac{(j+k)!}{l!} \frac{b_1^l}{(h+\gamma)^{j+k-l+1}} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} K_n^{(j)} \frac{h^j \gamma^k}{j! k!} \frac{(j+k)!}{(h+\gamma)^{j+k+1}} \left[1 - e^{-b_1(h+\gamma)} \sum_{l=0}^{j+k} \frac{[b_1(h+\gamma)]^l}{l!} \right] = \\ &= \frac{1}{(h+\gamma)k!} \left(\frac{\gamma}{h+\gamma} \right)^k \sum_{j=0}^{\infty} K_n^{(j)} \frac{(j+k)!}{j!} \left(\frac{h}{h+\gamma} \right)^j + \\ &\quad + \left[1 - e^{-b_1(h+\gamma)} \sum_{l=0}^{j+k} \frac{[b_1(h+\gamma)]^l}{l!} \right]. \end{aligned}$$

4 АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ

4.1 Необходимые обозначения

n - количество векторов π_i , больших по норме наперед заданного малого положительного числа. $\pi_{n+1} < \epsilon$

$\pi_i = (\pi(i, 0), \pi(i, 1), \dots, \pi(i, K))$.

Среднее количество запросов в системе:

$$L = \sum_{i=0}^n i \pi_i e.$$

Среднее количество единиц энергии в буфере:

$$N = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^K k \pi_i(k) e.$$

Вероятность отсутствия запросов в системе:

$$P_0^{custom} = \pi_0 e.$$

Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере:

$$P_0^{energy} = \sum_{i=0}^n \pi_i(0) e.$$

Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии:

$$P_{idle} = \sum_{i=1}^n \pi_i(0) e.$$

Среднее количество запросов в системе в произвольный момент времени:

$$\tilde{L} = \sum_{j=0}^n j p_j e.$$

4.2 Численные характеристики системы

Рассмотрим систему $MAP|G|1$, поток заявок которой определяется матрицами D_0 и D_1 , имеет среднюю интенсивность $\lambda = 0.3$, а интенсивностью потока энергии $\gamma = 0.4$.

$$D_0 = \begin{pmatrix} -0.405780 & 0 \\ 0 & -0.013173 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0.403080 & 0.002700 \\ 0.007338 & 0.005835 \end{pmatrix}$$

Вместе с ней рассмотрим систему $M|G|1$, с интенсивностью потока запросов $\lambda = 0.3$ и интенсивностью потока энергии $\gamma = 0.4$. Точность в системе равна 10^{-6} .

4.3 Среднее количество запросов в системе

График L для значений k (от 1 до 20 с шагом 1) и T (от 0.5 до 2 с шагом 0.5).

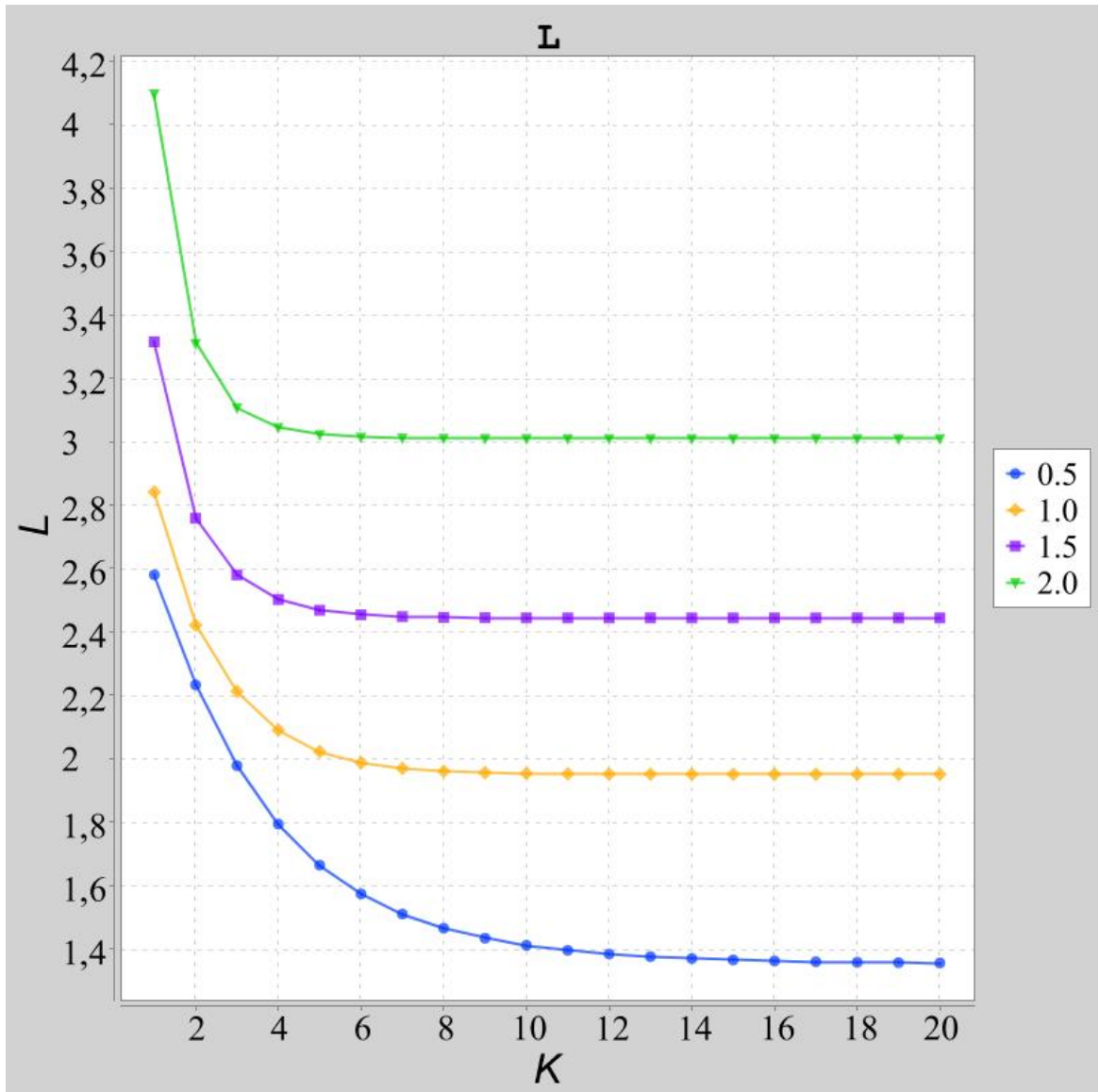


Рис. 1: Среднее количество запросов в системе $MAP|G|1$

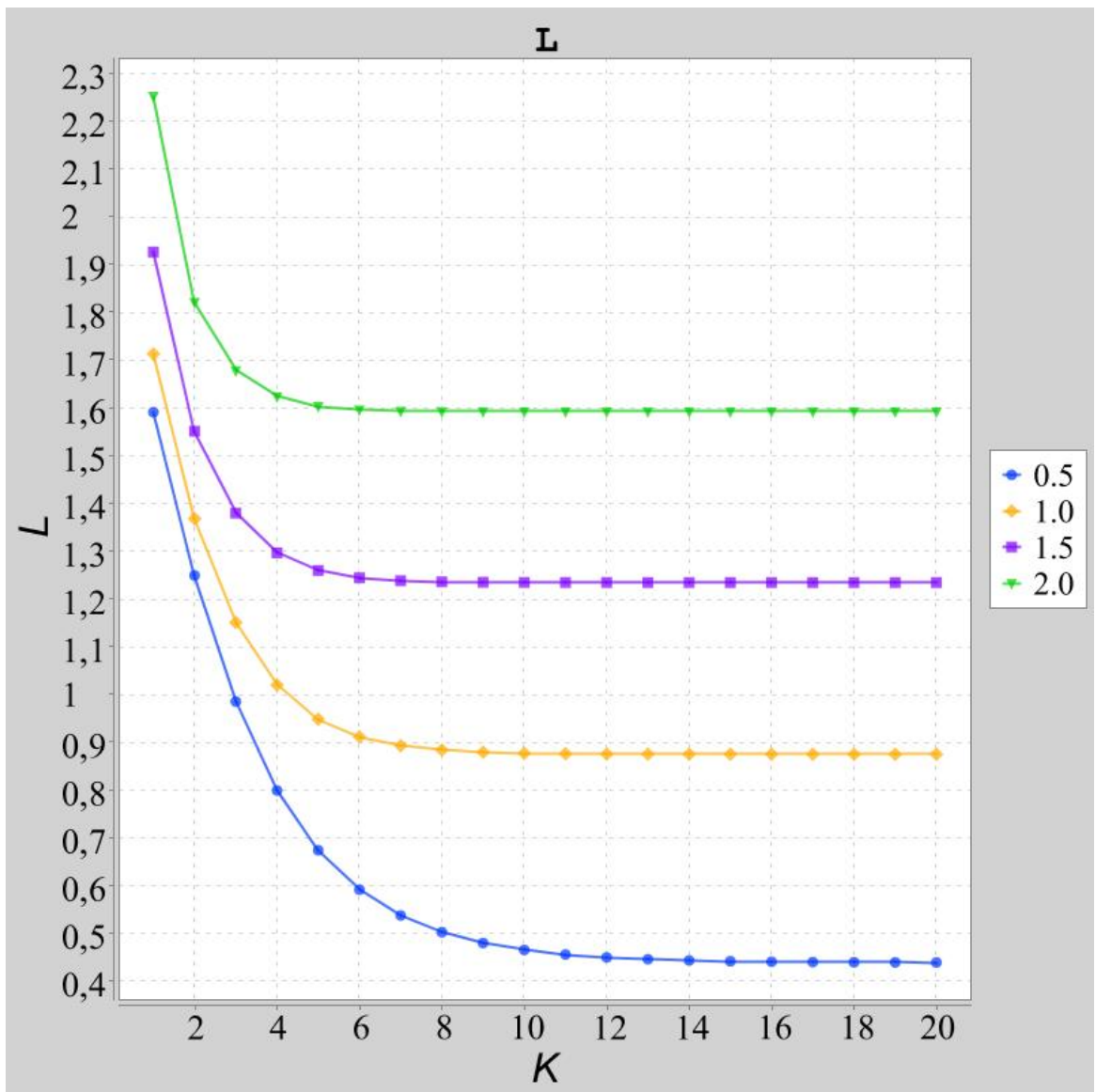


Рис. 2: Среднее количество запросов в системе $M|G|1$

Среднее количество запросов уменьшается с увеличением объема буфера и увеличивается по мере возрастания времени обслуживания.

4.4 Среднее количество единиц энергии в буфере

График N для значений k (от 1 до 20 с шагом 1) и T (от 0.5 до 2 с шагом 0.5).

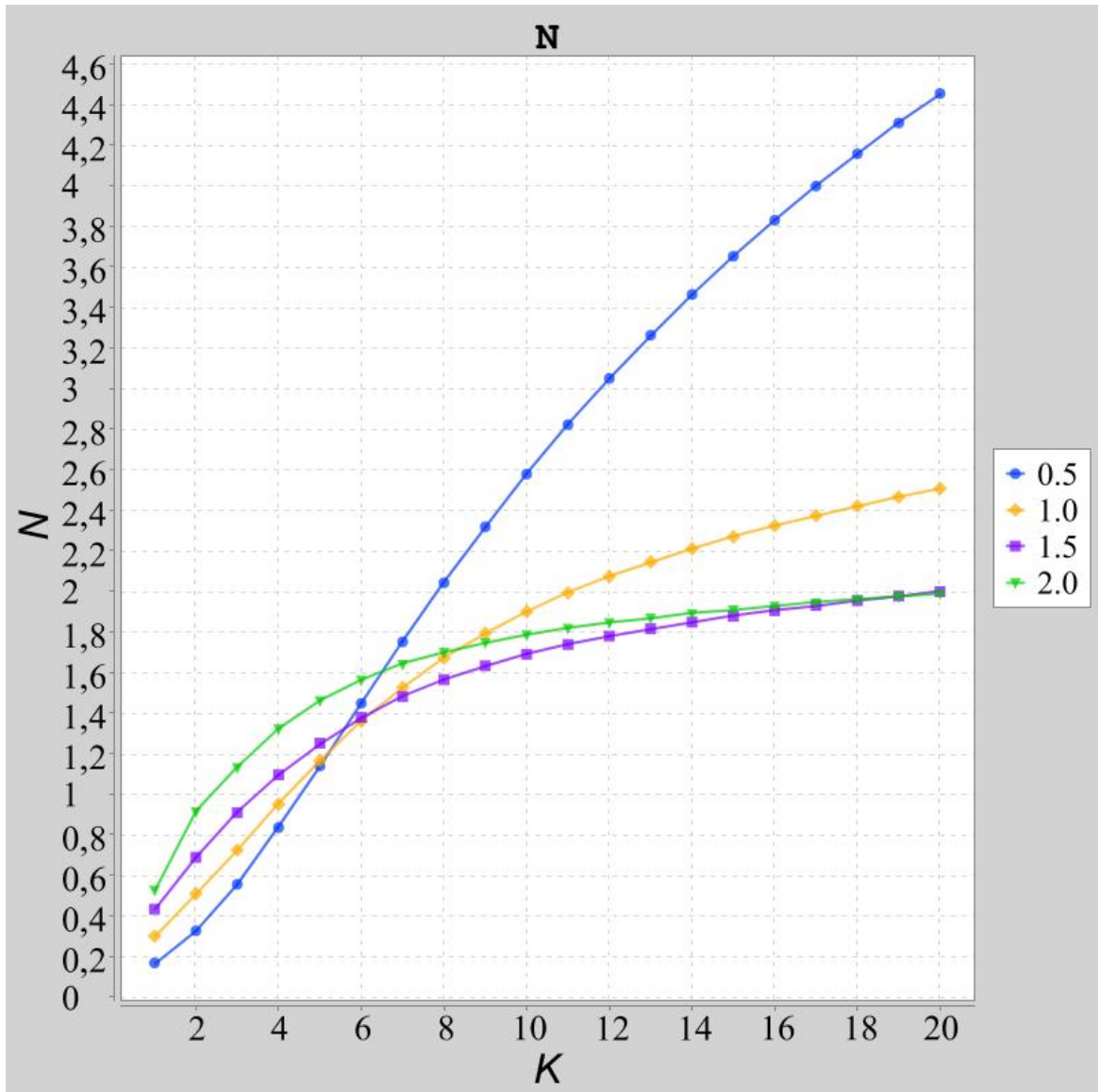


Рис. 3: Среднее количество единиц энергии в буфере в системе $MAP|G|1$

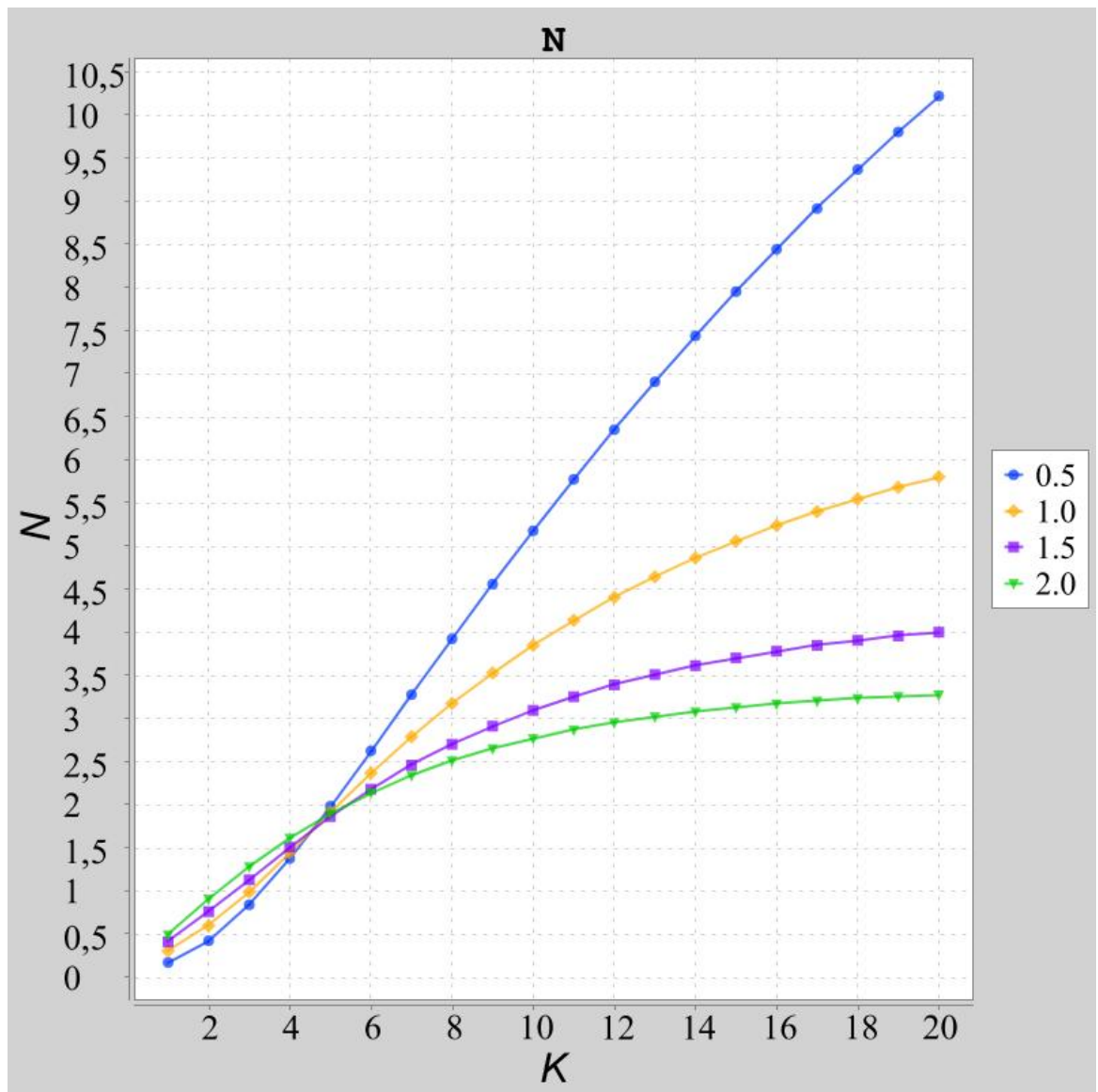


Рис. 4: Среднее количество единиц энергии в буфере в системе $M|G|1$

4.5 Вероятность отсутствия запросов в системе

График P_0^{custom} для значений k (от 1 до 20 с шагом 1) и T (от 0.5 до 2 с шагом 0.5).

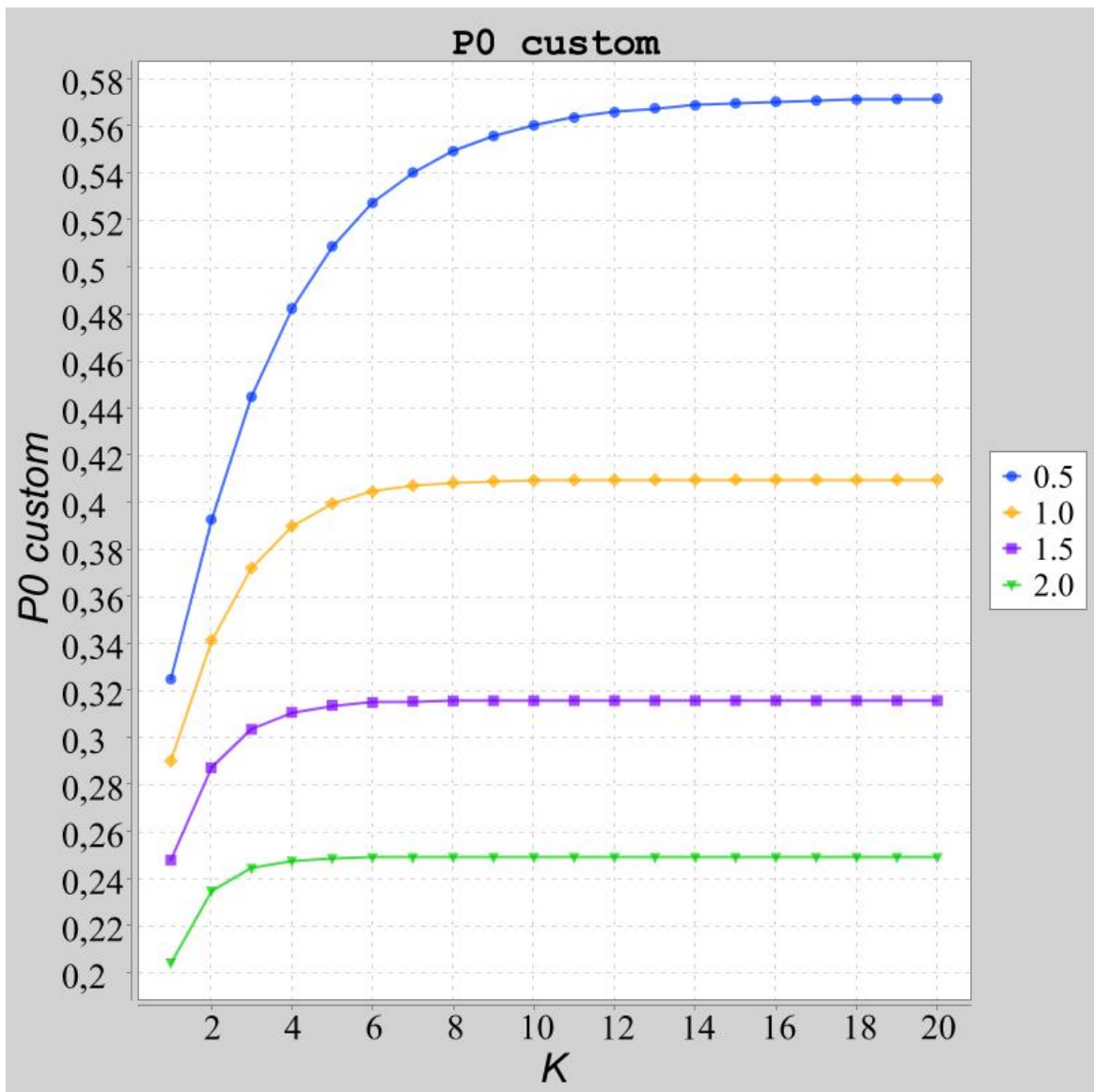


Рис. 5: Вероятность отсутствия запросов в системе $MAP|G|1$

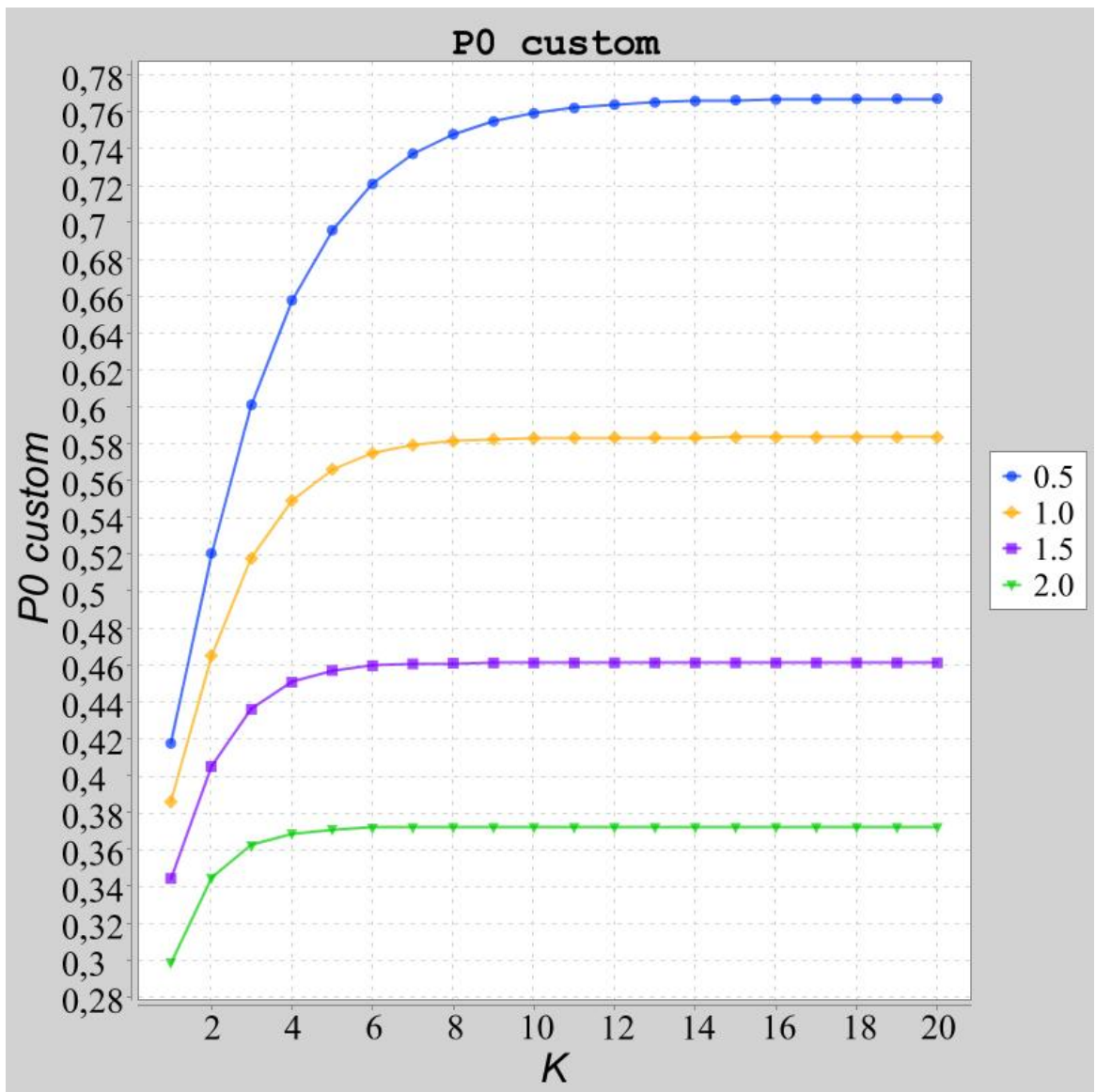


Рис. 6: Вероятность отсутствия запросов в системе $M|G|1$

4.6 Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере

График P_0^{energy} для значений k (от 1 до 20 с шагом 1) и T (от 0.5 до 2 с шагом 0.5).

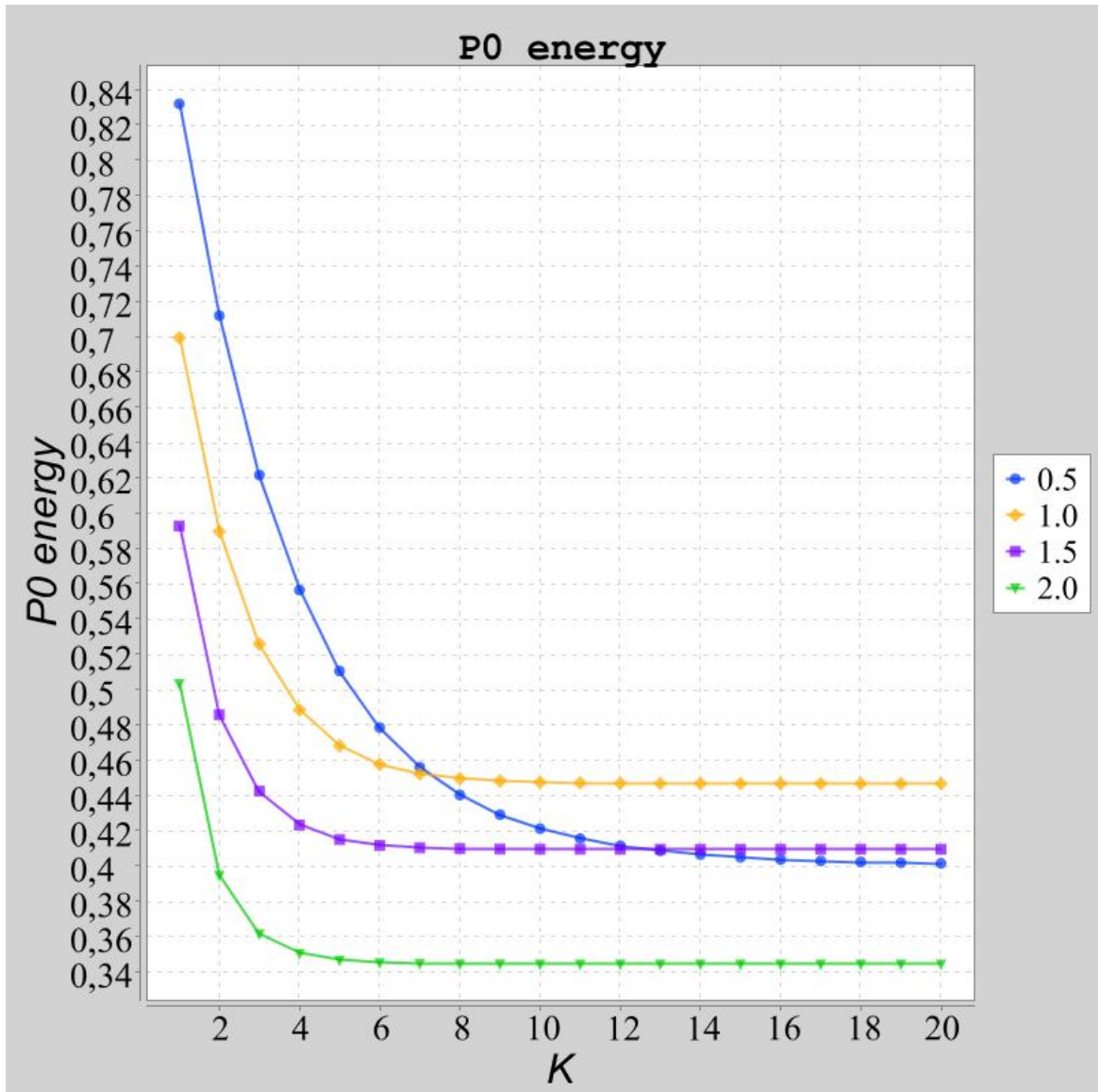


Рис. 7: Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере в системе $MAP|G|1$

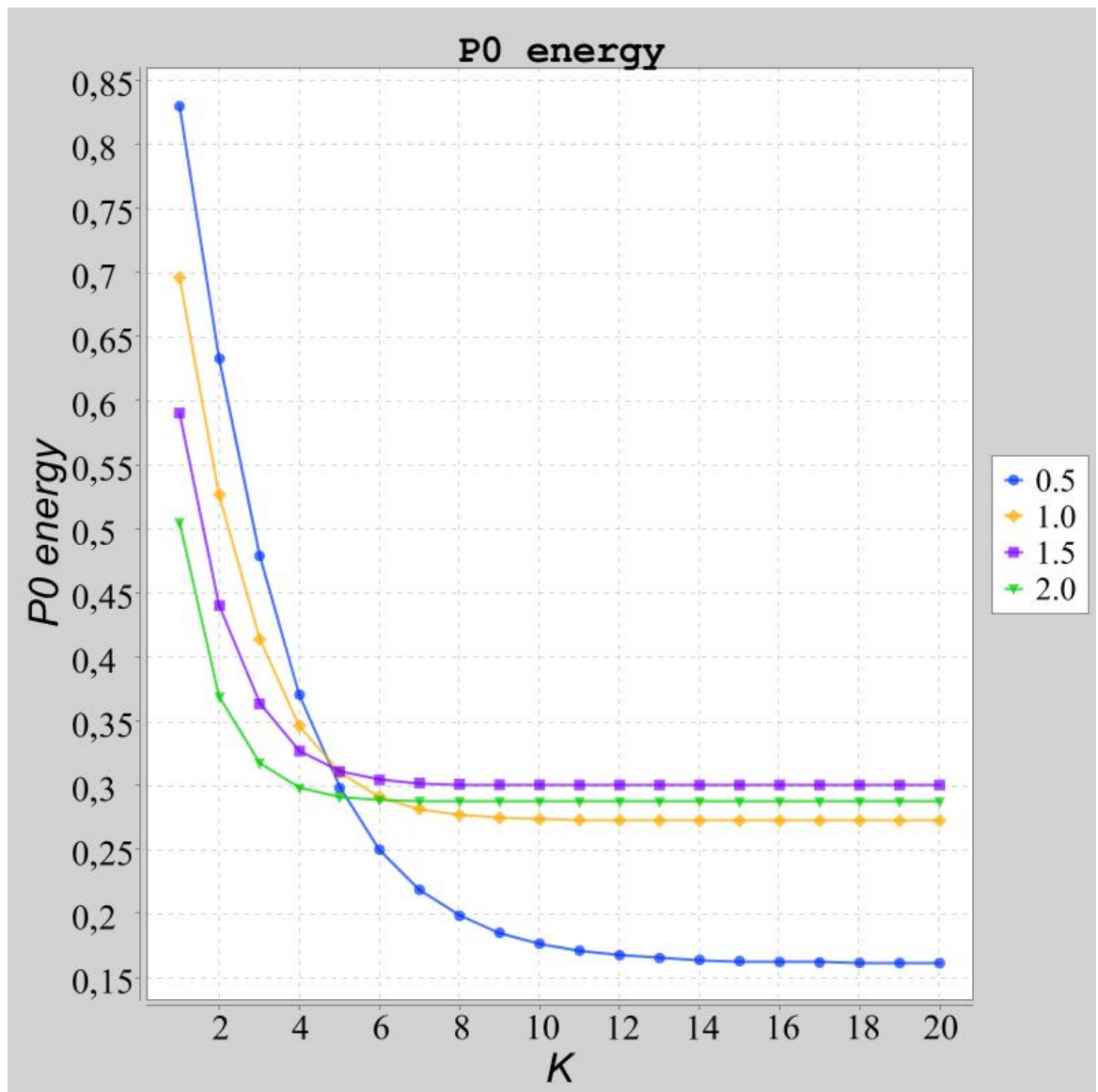


Рис. 8: Вероятность отсутствия единиц энергии в буфере в системе $M|G|1$

4.7 Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере

График P_{idle} для значений k (от 1 до 20 с шагом 1) и T (от 0.5 до 2 с шагом 0.5).

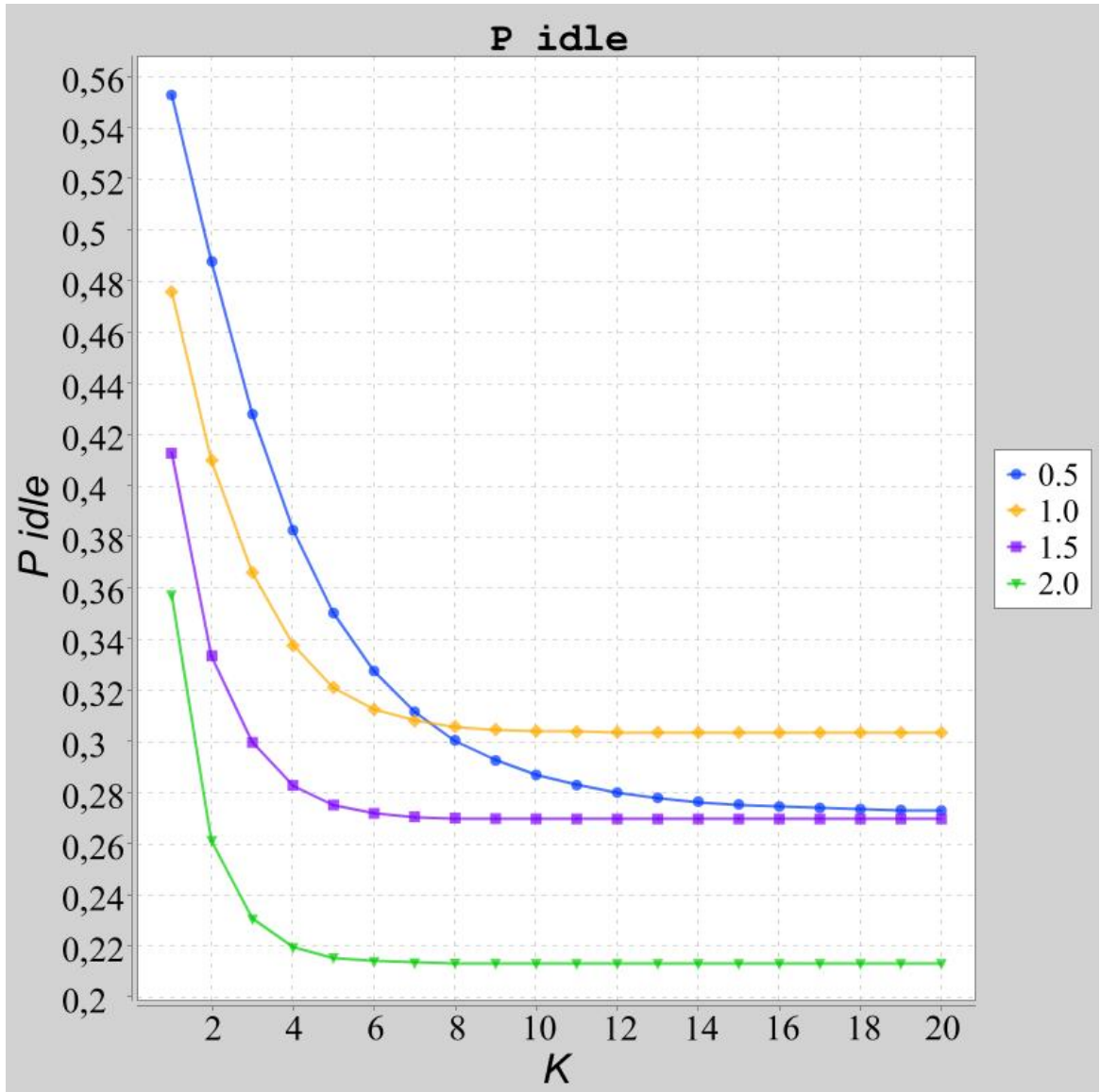


Рис. 9: Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере в системе $MAP|G|1$

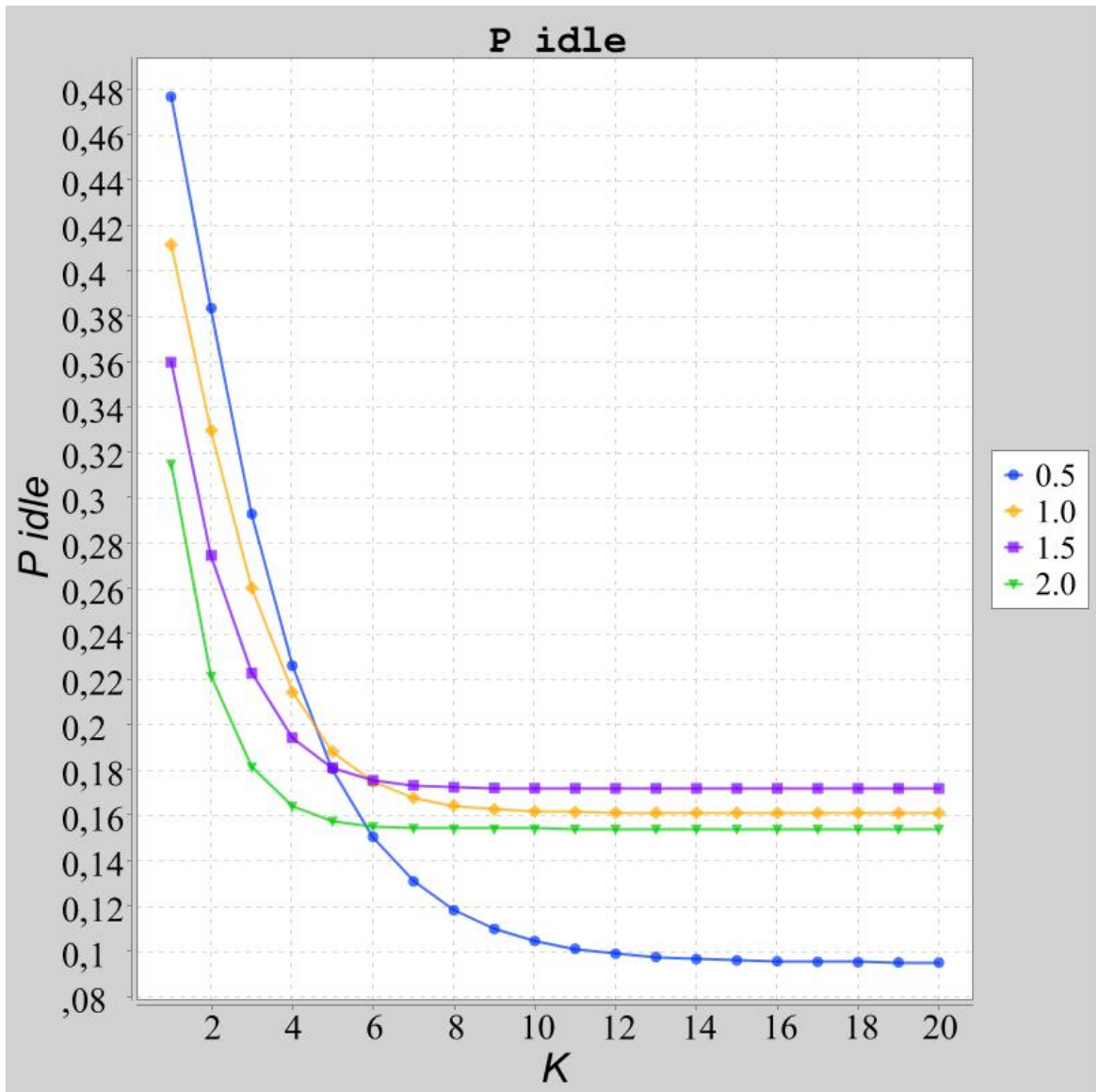


Рис. 10: Вероятность простоя системы по причине отсутствия единиц энергии в буфере в системе $M|G|1$

4.8 Среднее количество запросов в системе в произвольный момент времени

График \tilde{L} для значений k (от 1 до 20 с шагом 1) и T (от 0.5 до 2 с шагом 0.5).

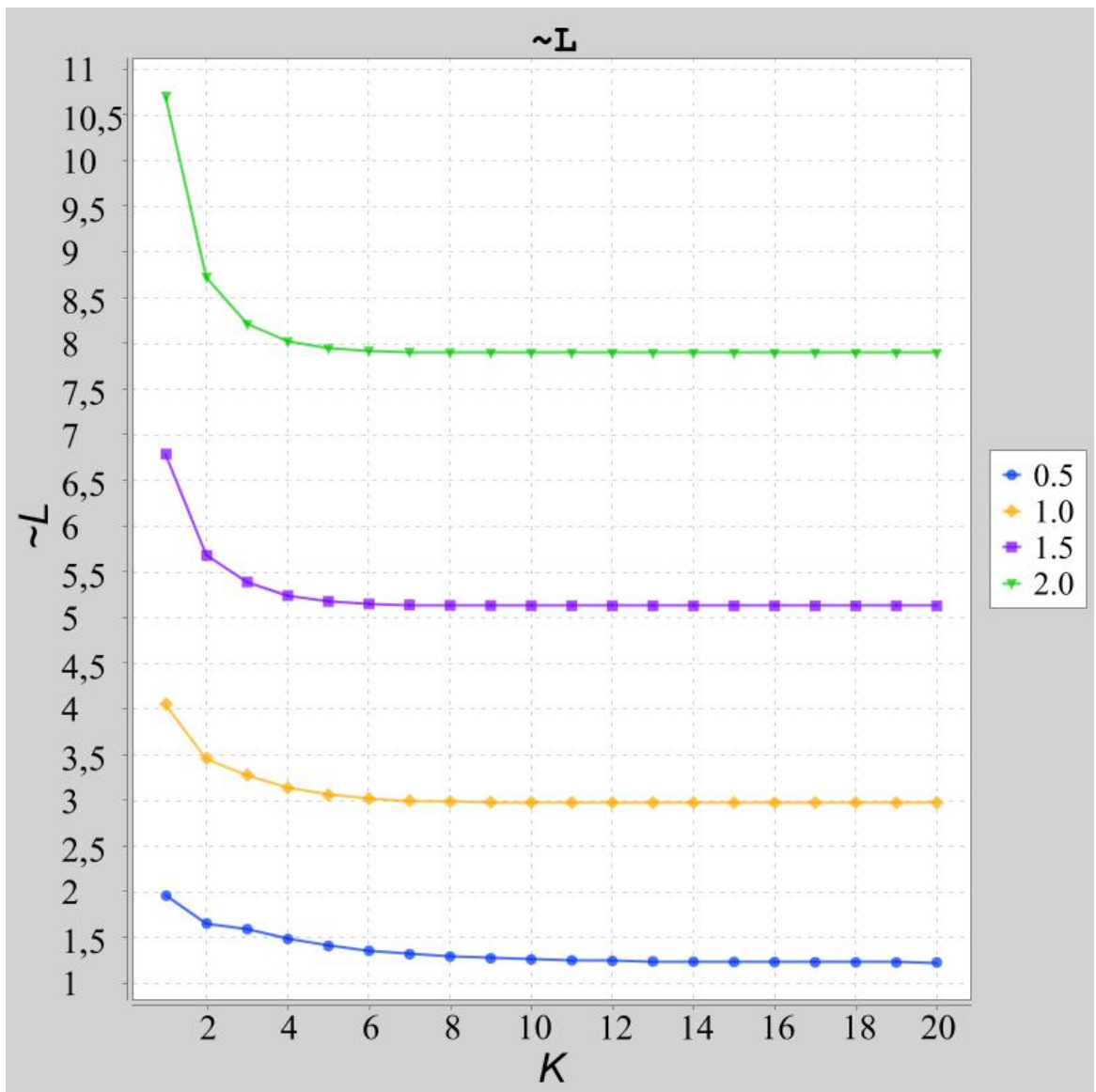


Рис. 11: Среднее количество запросов в системе $MAP|G|1$ в произвольный момент времени

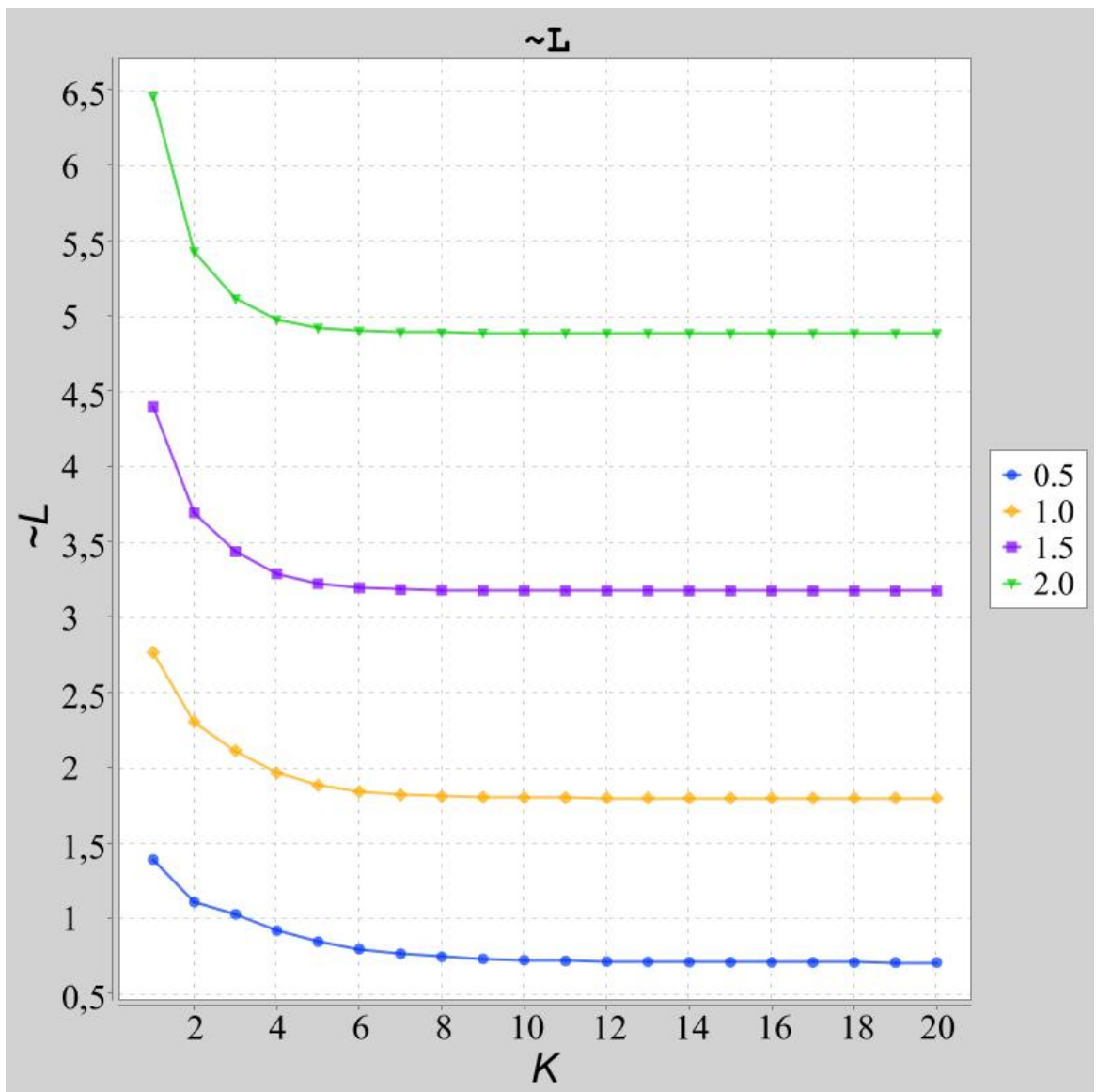


Рис. 12: Среднее количество запросов в системе $M|G|1$ в произвольный момент времени

4.9 Вывод по итогам анализа характеристик производительности

Путем сравнения характеристик производительности и выявления особенностей поведения системы можно повысить ее эффективность, повлияв на определенные параметры. Стоит отметить, что увеличение объема буфера энергии далеко не всегда способствует улучшению значения соответствующей характеристики т.к., начиная с определенного значения K , изменения достаточно малы и это экономически нецелесообразно, т.к не оказывает существенного влияния на работу системы. В целом $MAP/G/1$ точнее чем система $M/G/1$.

Стоит добавить, что при исследовании системы при значениях $T > 2$ условие эргодичности начинает выполняться только для достаточно больших значений K .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения дипломной работы:

1. Исследована система массового обслуживания типа $MAR|G|1$. Найдены вероятности одношаговых переходов, а так же построена матрица переходных вероятностей. Проверено выполнение условия эргодичности и найдено стационарное распределение вероятностей вложенной цепи Маркова.
2. Разработана программная реализация предложенного метода нахождения стационарного распределения вероятностей на языке программирования Java.
3. На основе программной реализации метода нахождения стационарного распределения вероятностей найдены характеристики производительности систем $MAR/G/1$ и $M/G/1$. Произведен их анализ и сделаны выводы.
4. Найдены характеристики системы в произвольный момент времени.

Список литературы

- [1] Вишнеvский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками: Теория и применение в телекоммуникационных сетях. 2018. Техносфера. Москва. 564 С.
- [2] Kim Chesoonг, Dudin S., Dudin A., Samouylov K. Multi-threshold control by a single-server queuing model with a service rate depending on the amount of harvested energy // Performance Evaluation. 2018. Vol. 127-128. P. 1-20.