ルベーグ積分まとめ (執筆中)

2020 年 5 月 9 日

はじめに

伊藤清三先生の「Lebesgue 積分入門 (新装版)」で個人的に勉強したことをまとめました．集合に関する基礎的な知識のみを前提として,Lebesugue 積分の定義までを説明します．ご指摘がある場合は,Github アカウントの@sanagif までご連絡ください.

1　基礎: 可測空間, 可測関数

定義 1. 集合 X の部分集合からなる集合族 $\mathfrak{B}$ が **σ-加法族**であるとは次の条件を満たすことである.

$$\phi \in \mathfrak{B} \tag{1}$$

$$E \in \mathfrak{B} \text{ ならば } E^c \in \mathfrak{B} \tag{2}$$

$$E_n \in \mathfrak{B}(n = 1, 2, \cdots) \text{ ならば } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B} \tag{3}$$

σ-加法族は**完全加法族**ともいう．集合 X と X 上の加法族 $\mathfrak{B}$ の組 $(X, \mathfrak{B})$ を**可測空間**と呼ぶ.

可測空間 $(X, \mathfrak{B})$ を考える．1 つの集合 $E \in \mathfrak{B}$ を固定する．写像 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ と実数 a に対して次のような記法を採用する.

$$E(f < a) = \{x \in E \mid f(x) < a\} \tag{4}$$

同様に

$$E(f \leq a) = \{x \in E \mid f(x) \leq a\} \tag{5}$$

$$E(f = a) = \{x \in E \mid f(x) = a\} \tag{6}$$

$$E(a < f \leq b) = \{x \in E \mid a < f(x) \leq a\} \tag{7}$$

などと定義する.

定義 2. 可測空間 $(X, \mathfrak{B})$ と 1 つの集合 $E \in \mathfrak{B}$ に対して, 写像 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ が**可測関数**であるとは, 任意の実数 a に対して, $E(f < a) \in \mathfrak{B}$ を満たすことである.