ルベーグ積分まとめ (執筆中)

sanagif

2020 年 5 月 10 日

はじめに

伊藤清三先生の「Lebesgue 積分入門 (新装版)」で個人的に勉強したことをまとめました. 集合に関する基礎的な知識のみを前提として,Lebesugue 積分の定義までを説明します. ご指摘がある場合は,Github アカウントの@sanagif までご連絡ください.

1 記号の定義

集合 X の部分集合 E に対して, 定義関数を χ_E で表す. すなわち,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \in E^c) \end{cases}$$

.

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に $+\infty, -\infty$ を付加したものを $\overline{\mathbb{R}}$ と表す. すなわち $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

2 基礎: 可測空間, 可測関数

定義 1. 集合 X の部分集合からなる集合族 $\mathfrak{B}$ が **σ-加法族**または**完全加法族**であるとは次の条件を満たすことである.

$$\phi \in \mathfrak{B} \tag{1}$$

$$E \in \mathfrak{B} \text{ ならば } E^c \in \mathfrak{B} \tag{2}$$

$$E_n \in \mathfrak{B}(n = 1, 2, \cdots) \text{ ならば } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B} \tag{3}$$

集合 X と X 上の加法族 $\mathfrak{B}$ の組 $(X, \mathfrak{B})$ を**可測空間**と呼ぶ.

可測空間 $(X, \mathfrak{B})$ を考える. 1 つの集合 $E \in \mathfrak{B}$ を固定する. 写像 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ と実数 a に対して次のような記法を採用する.

$$E(f < a) = \{x \in E \mid f(x) < a\} \tag{4}$$

同様に

$$E(f \leq a) = \{x \in E \mid f(x) \leq a\} \tag{5}$$
$$E(f = a) = \{x \in E \mid f(x) = a\} \tag{6}$$
$$E(a < f \leq b) = \{x \in E \mid a < f(x) \leq a\} \tag{7}$$

などと定義する.

定義 2. 可測空間 $(X, \mathfrak{B})$ と 1 つの集合 $E \in \mathfrak{B}$ に対して, 写像 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ が**可測関数**であるとは, 任意の実数 a に対して, $E(f < a) \in \mathfrak{B}$ [1)] を満たすことである.

定義 3. 可測空間 $(X, \mathfrak{B})$ と 1 つの集合 $E \in \mathfrak{B}$ に対して, 写像 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ が**単関数**あるいは**階段関数**であるとは, 集合 E が $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ と有限個の直和に表され, 任意の $x \in E$ に対して

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

が成立することを言う. ただし, 各 α_i は実数で $i \neq j$ ならば $\alpha_i \neq \alpha_j$.

[1)] $E(f \leq a) \in \mathfrak{B}, E(f > a) \in \mathfrak{B}, E(f \geq a) \in \mathfrak{B}$ に置き換えても良い