Unidad N° 4:

Polos, ceros y estabilidad

Introducción

Un requerimiento importante un sistema de control es que debe ser estable. Esto significa que si al sistema se aplica una entrada de magnitud finita, entonces la salida debería también ser finita y de ningún modo infinita, es decir, incrementarse dentro de un límite. Para Sistemas lineales el requerimiento de estabilidad se puede definir en términos de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado. Los polos son las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia y los ceros las raíces del polinomio numerador de la función de transferencia.

Definiendo estabilidad

Un sistema se puede definir como estable si **toda** entrada acotada, es decir, finita, produce salida acotada.

Polos y ceros

La función de transferencia en lazo cerrado $G(s)$ de un sistema, en general se puede representar mediante:

$$G(s) = \frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1 s + a_0)}{(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)}$$

Y, si las raíces del denominador y del numerador se establecen como

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Donde las raíces del numerador son $z_1, z_2, \ldots, z_m$ se denominan ceros y las raíces del denominador $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se denominan polos, K es una constante multiplicadora o ganancia del sistema.

Los ceros son los valores de s para los cuales la función de transferencia se convierte en cero. Los polos son los valores de s para los cuales la función de transferencia es infinita, es decir estos hacen que el valor del denominador sea cero.

Los polos y ceros pueden ser cantidades reales o complejas.

En general, los polos y los ceros se pueden escribir como $s = \sigma + j\omega$.

Enunciar los valores de los ceros y de los polos de un sistema, junto con el valor de la ganancia K, permite especificar por completo la función de transferencia del sistema.

Patrón de polos y ceros

Los polos y los ceros de una función de transferencia se pueden presentar en un diagrama llamado el *patrón de polos y ceros*. El eje x es la parte real del polo o cero y el eje y, la parte imaginaria.

La gráfica en dos dimensiones se conoce como *plano* s.

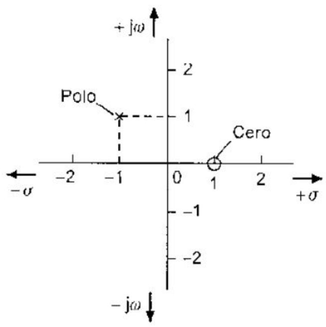


Figura 8.2 Patrón de polos y ceros

Estabilidad y polos

La estabilidad de un sistema se puede determinar considerando cómo cambia la salida con el tiempo después de una entrada impulso. Con un sistema estable la salida deberá tender a cero con el tiempo, y con un sistema instable la salida crecerá con el tiempo.

Si todos los polos están en el lado izquierdo del patrón de polos y ceros, el sistema es estable. Si solo uno de los está en el lado derecho de dicho patrón, ésta es inestable.

Un sistema es críticamente estable si uno o más polos están sobre el eje vertical del patrón de polos y ceros, es decir, tienen parte real cero, y no hay polos en el lado derecho.

Si sólo interesa la estabilidad, los polos de la función de la función de transferencia son importantes y los valores de los ceros del sistema son irrelevantes.

Análisis de la respuesta transitoria estacionaria

Estabilidad absoluta, estabilidad relativa y error en estado estacionario

La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan de forma indefinida. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial.

Como un sistema de control físico implica un almacenamiento de energía, la salida del sistema, cuando este está sujeto a una entrada, no sucede a la entrada de inmediato, sino que muestra una respuesta transitoria antes de alcanzar un estado estacionario. La respuesta transitoria de un sistema de control práctico, con frecuencia, muestra oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado estacionario. Si la salida de un sistema en estado estacionario no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un error en estado estacionario. Este error indica la precisión del sistema. Al analizar un sistema de control, se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estacionario.

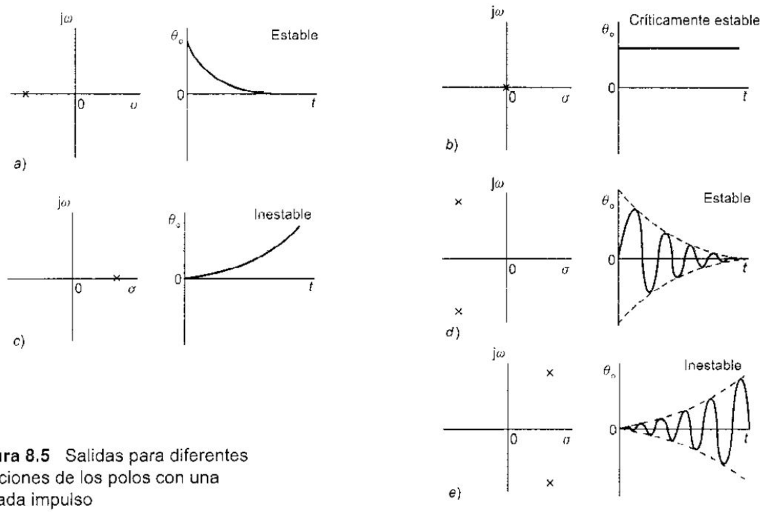


Figura 8.5 Salidas para diferentes posiciones de los polos con una entrada impulso

Una alternativa para el análisis de estabilidad es considerar la estabilidad en términos de cómo cambia la salida con el tiempo después de una entrada escalón. Esto es una entrada acotada y para un sistema estable debería haber una salida acotada.

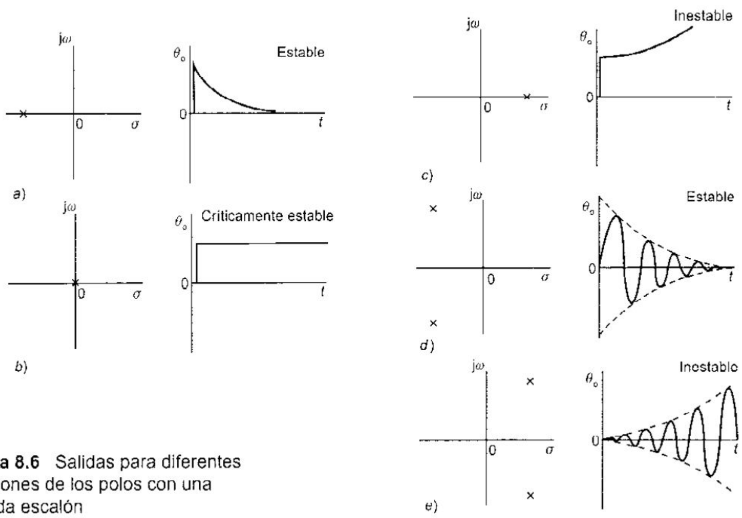


Figura 8.6 Salidas para diferentes posiciones de los polos con una entrada escalón

Introducción Kuo

La estabilidad se puede clasificar como **estabilidad absoluta** y **estabilidad relativa**. La estabilidad absoluta se refiere a la condición de si el sistema es estable o inestable, es una respuesta si o no. Una vez que se ha encontrado esto, es necesario determinar qué tan estable es, y este grado de estabilidad es una medida de la estabilidad relativa.

Se definen los siguientes dos tipos de respuesta de SLTI:

1. Respuesta de estado cero: Se debe a la entrada únicamente; todas las condiciones iniciales del sistema son cero.
2. Respuesta de entrada cero: Se debe a la condición inicial únicamente; y todas las entradas son cero.

Cuando un sistema está sujeto tanto a las entradas como a las condiciones iniciales, la respuesta total se escribe como:

$$\textit{respuesta total} = \textit{respuesta de estado cero} + \textit{respuesta de entrada cero}$$

Se aplican para sistemas en tiempo continuo y discreto.

Análisis de estabilidad en el plano complejo.

La estabilidad de un sistema lineal en lazo cerrado se determina a partir de la ubicación de los polos en lazo cerrado en el plano s. Si alguno de estos polos se encuentra en el semiplano derecho del plano s, entonces conforme aumenta el tiempo producirá el modo dominante, y la respuesta transitoria aumentará de forma monótona u oscilará con una amplitud creciente. Esto representa un sistema inestable. Por ende, en el sistema de control lineal normal no se permiten los polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s. Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran a la izquierda del eje $j\omega$, cualquier respuesta transitoria termina por alcanzar el equilibrio. Esto representa un sistema estable.

Los polos de la entrada, o de la función de excitación, no afectan a la propiedad de estabilidad del sistema, sino sólo contribuyen a los términos de respuesta en estado estacionario en la solución. Por tanto, el problema de estabilidad absoluta se soluciona con facilidad al no elegir polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s, incluyendo el eje $j\omega$.

Como la estabilidad relativa y el comportamiento transitorio de un sistema de control en lazo cerrado se relacionan directamente con el patrón de polos y ceros en lazo cerrado en el plano s, con frecuencia es necesario ajustar uno o más parámetros para obtener los patrones convenientes.

Unidad N° 5:

Respuesta transitoria y respuesta en estado estacionario

La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario. La respuesta transitoria se refiere a la que va del estado inicial al estado final. Por respuesta en estado estacionario se entiende la manera como se comporta la salida del sistema conforme t tiende a infinito. Por lo tanto, la respuesta del sistema $c(t)$ se puede escribir como:

$$c(t) = c_{tr} + c_{ss}(t)$$

Donde el primer término del miembro derecho de la ecuación es la respuesta transitoria y el segundo término es la respuesta en estado estacionario.

Recordando conceptos de sistemas de segundo orden

La función de transferencia en lazo cerrado $\frac{C(s)}{R(s)}$ se escribe como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Esta forma se denomina forma estándar del sistema de segundo orden.

El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe a continuación en términos de dos parámetro: ζ y ω_n. Si $0 < \zeta < 1$, los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. El sistema, entonces, se denomina *subamortiguado* y la respuesta transitoria es **oscilatoria**. Si $\zeta = 0$, la respuesta transitoria **no se amortigua**. Si $\zeta = 1$, el sistema se denomina *críticamente amortiguado*. Los sistemas *sobreamortiguados* corresponden a $\zeta > 1$.

Video 16 – Estabilidad y error en estado estable

Las señales de prueba que se usan regularmente son:

- Escalón
- Rampa
- Parábola

Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples.

Estas funciones tienen transformadas de Laplace muy sencillas:

- Entrada Escalón

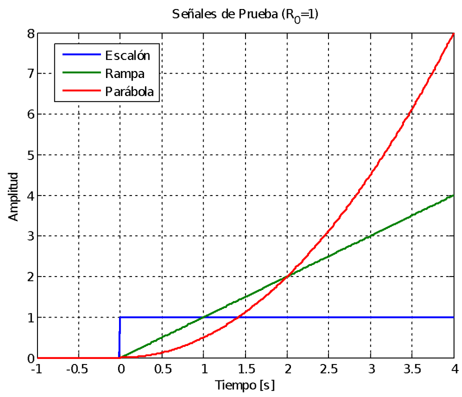
$$r(t) = R_0 u(t) \rightarrow R(s) = \frac{R_0}{s}$$

- Entrada Rampa

$$r(t) = R_0 t u(t) \rightarrow R(s) = \frac{R_0}{s^2}$$

- Entrada Parábola

$$r(t) = \frac{R_0}{2} t^2 u(t) \rightarrow R(s) = \frac{R_0}{s^3}$$



Estabilidad

- Sean u(t), y(t) y g(t) la entrada, salida y respuesta al impulso de un SLIT.
  - Con condiciones iniciales nulas, se dice que el sistema es estable si su salida es acotada para una entrada acotada. **Más vamos a usar.**
  - Con condiciones iniciales no nulas y entrada nula, se dice que el sistema es estable si la salida vuelve al estado inicial cuando el tiempo vuelve a infinito.
  - Un sistema es estable si la respuesta del sistema tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.
- Un sistema lineal e invariante en el tiempo es estable si la parte real de todas y cada una de las raíces de la ecuación característica (o de los polos) es negativa.

Tocaremos el concepto de estabilidad absoluta y relativa, en sistemas a lazo abierto el sistema es estable o no, en cambio, en los sistemas a lazo cerrado podemos incluir una ganancia para modificar los valores de las raíces de la ecuación característica, tanto lo podemos modificar que podríamos hacer que un sistema estable sea inestable y viceversa. La estabilidad en este caso pasaría a ser relativa, el sistema es estable para un determinado rango de valores.

Error en Estado Estable

Si el sistema es estable, nos interesa ver su respuesta temporal.

En el caso de los sistemas a lazo cerrado nos interesa conocer qué tal lejos está la salida del sistema de la señal de referencia, qué tan diferentes son.

Diferencia entre la magnitud deseada, y el valor efectivo de la salida, es un parámetro para medir qué tan bueno es nuestro controlador y qué tan bien funciona nuestro sistema. Como estamos hablando de comparar dos señales, la magnitud física a la cual las medimos, debe ser las mismas. Gracias a esto, solamente aplica para sistemas a lazo cerrado.

Entonces, llamamos error en estado estable al valor que toma $e(t)$ cuando el tiempo tiende al infinito.

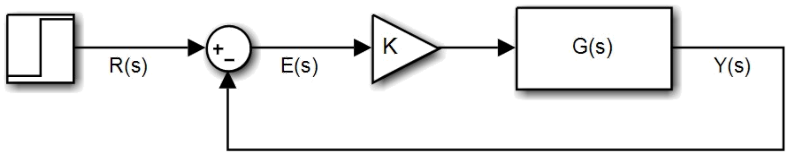
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$ (Teorema del valor final)

El error en estado estable puede tomar tres valores:

1. $e_{ss} = 0$, cuando la salida del sistema es exactamente igual a la entrada
2. $e_{ss} = cte$, cuando una vez que el sistema se establece se mantiene una diferencia a lo largo del tiempo entre la señal de salida y, de entrada.
3. $e_{ss} = \infty$, cuando la salida del sistema se va alejando de la referencia a medida que pasa el tiempo.

Las conclusiones a las que arribaremos son válidas exclusivamente para sistemas con realimentación unitaria.

La relación entre $E(s)$ y la entrada $R(s)$ es $\frac{1}{[1+G(s)]}$. En el caso de realimentación unitaria.



$$E(s) = R(s) - Y(s)$$
$$E(s) = R(s) - G(s)E(s)$$
$$E(s)\left[1 + G(s)\right] = R(s)$$
$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

El error en estado estable depende de:

- La entrada (Rampa, parábola, escalón)
- El tipo de sistema.

Llamamos tipo de sistema a la cantidad de polos en el origen que tiene la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$.

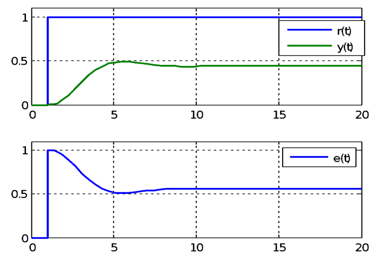
Entonces, para encontrar el error en estado estable de un sistema de lazo **cerrado**. Vamos a estudiar la entrada y la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$.

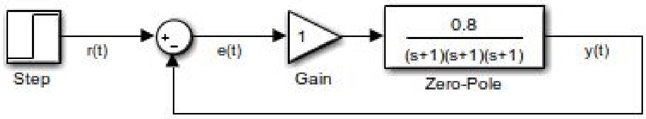
$$G(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(s - z_i)}{s^j \prod_{k=1}^{m-j}(s - p_k)}$$

Entonces $G(s)$ se puede leer como: Una ganancia K por el producto de los ceros, sobre el producto de los polos. Este sistema tendrá n ceros y m polos. De esos m polos, vamos a separar los que están en el origen, es decir, las raíces que valen 0.

Ejemplos:

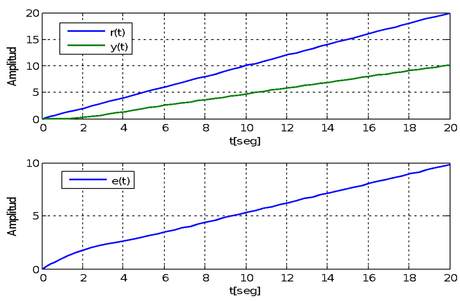
- Sistema Tipo 0
- Entrada escalón
- Error constante

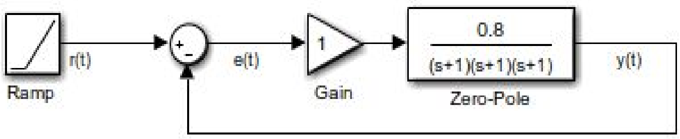




Un sistema tipo 0 porque no hay polos en el origen.

- Sistema Tipo 0
- Entrada rampa
- Error creciente

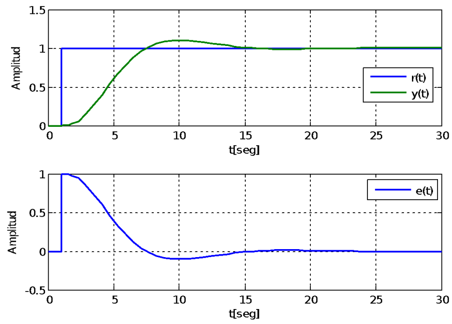


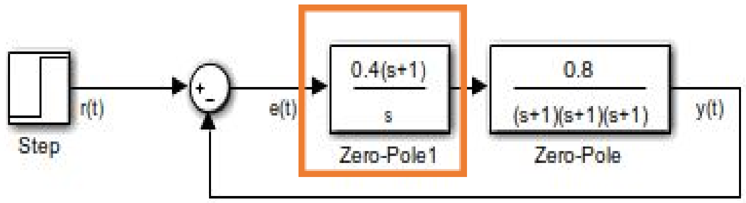


Pasado el transitorio, a medida que la referencia $r(t)$ crece, la diferencia con la salida se hace cada vez más grande. Entonces para un tiempo infinito, el error será infinito.

¿Esto quiere decir que el sistema sea inestable? No, no tiene nada que ver con la estabilidad del sistema. El sistema ya es estable, recordar que estamos hablando de error en estado **estable**.

- Sistema Tipo 1
- Entrada escalón
- Error nulo

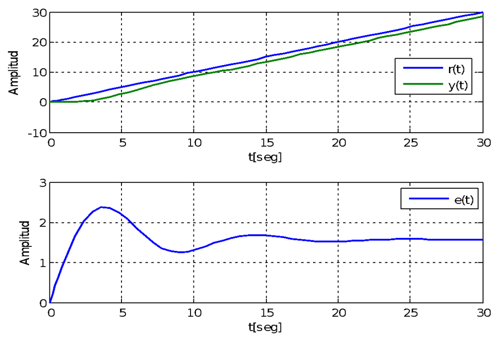


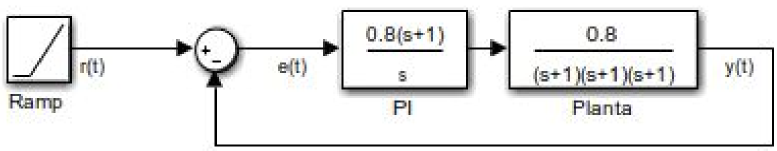


Le agregamos un bloque, Zero-Pole1. Lo interesante es que el producto de las dos funciones me da como resultado un sistema tipo 1 porque agregamos un polo en el origen.

El error se hace cero cuando el tiempo es lo suficientemente grande.

- Sistema Tipo 1
- Entrada rampa
- Error constante





El error se va a hacer constante.

Dato: Recordar que el polo en cero lo introduje yo con un bloque. Esto quiere decir que somos capaces de modificar la respuesta temporal del sistema ante una determinada entrada.

Error en estado estable para sistemas tipo 0.

Entrada escalón.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^0\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0}\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^0\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}} = \frac{1}{1+K_p}, K_p = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(-z_i)}{\prod_{k=1}^{m-j}(-p_k)}$$

Considerando entonces que el error para un sistema tipo 0 con entrada de un escalón es igual a $\frac{1}{1+K_p}$, podemos inferir que el error es constante ya que K_p es una constante.

Entrada rampa.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s^2}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^0\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\lim_{s\to 0}\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^0\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}} = \infty$$

Para un sistema tipo 0 con una entrada rampa, el error en estado estable es infinito. Si veo me queda $\frac{1}{s}$ en el numerador, por lo que si tomo el límite de $s\to 0$; el numerador se me hace infinito.

Entrada parábola.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s^3}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^0\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss} = \frac{\frac{1}{s^2}}{1+\lim_{s\to 0}\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^0\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}} = \infty$$

Ocurre de la misma manera con la parábola.

Error en estado estable para sistemas tipo 1.

Entrada escalón.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0}\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}} = 0$$

Considerando un sistema tipo 1 con una entrada escalón, podemos observar que al quedar una s en el denominador, a diferencia del tipo 0, el denominador se hace infinito por lo tanto $\frac{1}{\infty} = 0$.

Entrada rampa

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s^2}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left(s+\frac{sK\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}\right)} = \frac{1}{K_v}, K_v = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(-z_i)}{\prod_{k=1}^{m-j}(-p_k)}$$

En este caso multiplicamos numerador y denominador por s entonces al tomar límite y simplificando las s que acompañan a los K, obtenemos un número constante como resultado K_v.

Hasta acá explicó Pedroni y dejó que veamos el resto de ejemplos solos.

Entrada parábola.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s^3}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left(s^2+\frac{s^2K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}\right)} = \infty$$

Error en estado estable para sistemas tipo 2.

Entrada escalón

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}=0$$

Entrada rampa.

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s^2}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{\lim_{s\to 0}\left(s+\frac{sK\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}\right)}=0$$

Entrada parábola

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s^3}}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{\lim_{s\to 0}\left(s^2+\frac{s^2K\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{m-j}(s-p_k)}\right)}=K_a, K_a=\frac{K\prod_{i=1}^{n}(-z_i)}{\prod_{k=1}^{m-j}(-p_k)}$$

Conociendo del sistema, es decir, conociendo la cantidad de polos al origen de la función de transferencia de lazo abierto, vamos a poder determinar, a partir de la entrada que elija, el error que voy a obtener (Constate, nulo o infinito).

Para determinar el valor de las constantes, debo tomar el límite cuando $s \to 0$, de la función de transferencia. Siendo:

$$K_v = sG(s)$$

En resumen, lo que debemos saber es lo que viene:

Resumen:

Error en estado estable, según la entrada y el tipo de sistema

		Tipo de Sistema		
		Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2
Entrada	Escalón	$e_{ss} = cte = \frac{1}{1+K_p}$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$
	Rampa	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = cte = \frac{1}{K_v}$	$e_{ss} = 0$
	Parábola	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = cte = \frac{1}{K_a}$

Tener en cuenta entonces que:

- Exclusivo de los sistemas a lazo cerrado.
- Depende de la entrada y del tipo de sistema.
- Estamos hablando de sistemas **estables**
- ¿Cómo depende? Ver cuadrito.
- Lo que está marcado en celeste es lo que tenemos que saber.

Errores en estado estacionario en los sistemas de control con realimentación unitaria

Analizaremos un tipo de error en estado estacionario provocado por la incapacidad del sistema de seguir determinados tipos de entradas.

Clasificación de los sistemas de control

Las magnitudes de los errores en estado estacionario producidos por entradas individuales indican la bondad del sistema. Considérese el sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

Este sistema contiene el término s^N en el denominador, que representa un polo de multiplicidad N en el origen. Un sistema se denomina de tipo 0, tipo 1, tipo 2,..., si $N = 0,\ N = 1,\ N = 2, \ldots,$ respectivamente. Conforme el número del tipo es mayor, mejora la precisión; sin embargo, aumentar el número del tipo agrava el problema de la estabilidad. Siempre es necesario un equilibrio entre la precisión en estado estacionario y la estabilidad relativa.

Errores en estado estacionario

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

La función de transferencia entre la señal de error $e(t)$ y la señal de entrada $r(t)$ es:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

Donde el error $e(t)$ es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida.

El teorema del valor final ofrece una forma conveniente de determinar el comportamiento en estado estacionario de un sistema estable. Como $E(s)$ es

$$E\,(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

El error en estado estacionario es:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

Cuanto más altas sean las constantes ($K_p, K_v\ y\ K_a$), más pequeño será el error en estado estacionario.

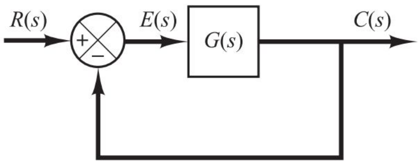
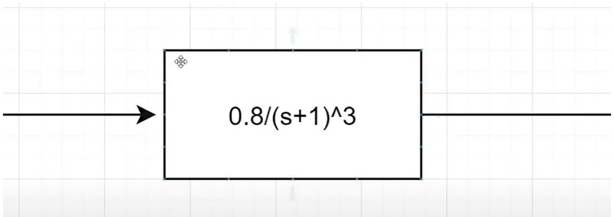


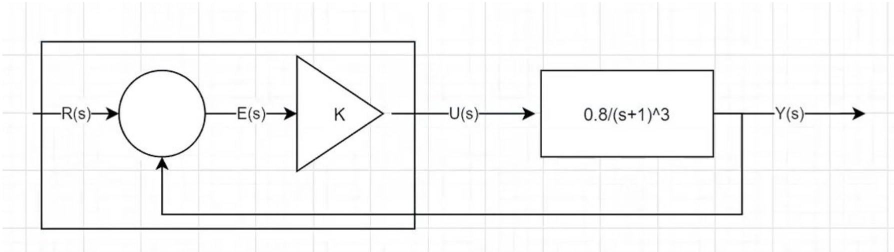
Figura 5-46. Sistema de control.

Video 17 – Introducción al lugar de raíces

Ejemplo de sistema a lazo abierto:



Ejemplo de sistema a lazo cerrado, tomando el ejemplo anterior:



Función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{0.8}{(s+1)^3}$$

Función de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

Ecuación característica:

$$1+KG(s)=0$$

$$1+K\frac{N(s)}{D(s)}=0$$

Gracias a la realimentación, podemos incorporar un parámetro K, una ganancia, en la ecuación característica.

La ecuación característica de la función de transferencia de lazo cerrado depende del denominador y el numerador de la función de transferencia de lazo abierto. Esto quiere decir que: Conociendo la función de transferencia de lazo abierto, podemos predecir cómo van a ser las raíces de la ecuación característica del sistema de lazo cerrado a medida que variamos un parámetro K. Hay que recordar que, variando las raíces de la ecuación característica, podemos variar la respuesta temporal.

Ecuación característica:

$$1+KG(s)=0$$

$$1+K\frac{N(s)}{D(s)} = 0, 1+K\frac{0.8}{(s+1)^3} = 0$$

$$D(s)+KN(s) = 0, (s+1)^3 + 0.8K = 0, s^3+3s^2+3s+1+0.8K=0$$

Dato: El profe pone “,” para separar cosas. No es 0,1; sino que quiso poner 1+K…

Para variar la respuesta temporal debemos hacer lo siguiente:

Podemos ir dibujando las raíces de la ecuación característica en el plano complejo conforme va variando K.

Los comandos que vamos a usar son:

Rlocus(G) ⍰ Le paso por parámetro la función de lazo abierto. Esto me dibuja el lugar de las raíces.

Debemos determinar ahora los valores de K que hacen que el sistema se vuelva inestable. Para ello utilizaremos otro comando:

Rlocfind(G).

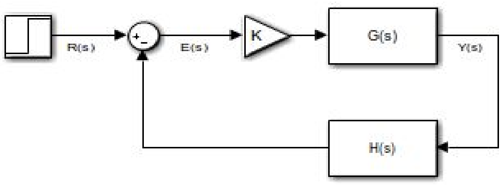
Hay una herramienta que nos permite relacionar cómo va a ser la respuesta temporal de este sistema a lazo cerrado según los valores de la ecuación característica. Esa herramienta se llama, **lugar de raíces**. Esta dibuja sobre el plano complejo la evolución de las raíces de la ecuación característica conforme va variando K.

Video 18 – Diseño de compensadores proporcionales usando el lugar de raíces

Recordar, la técnica de lugar de raíces nos ayuda a relacionar las raíces de la ecuación característica de un sistema con ζ y ω_n.

Motivación:

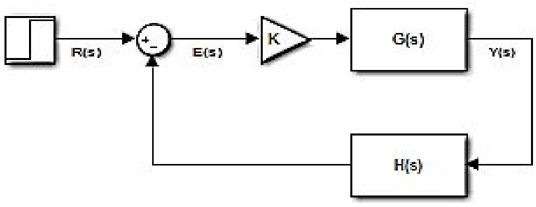
- Las raíces del polinomio denominador de la función de transferencia de un sistema determinan la forma general de la respuesta temporal, así como su estabilidad absoluta y relativa.
- En un sistema realimentado, las raíces de la ecuación característica se pueden modificar al cambiar la ganancia K.
- El método permite relacionar las raíces de la ecuación característica conforme varía K con los parámetros ζ y ω_n en el plano complejo.
- Para el cálculo se puede usar la fuerza bruta o un algoritmo (Técnica del lugar de las raíces).



Al cambiar con K el valor de las raíces de la ecuación característica, variamos su desempeño dinámico, es decir, vamos a cambiar principalmente la respuesta transitoria.

El lugar de las raíces nos permite describir de manera gráfica sobre el plano complejo cómo evolucionan las raíces de la ecuación característica de un sistema conforme varía el parámetro K.

Dado el siguiente sistema:



La Función de Transferencia de Lazo Cerrado del sistema es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}$$

Y la ecuación característica:

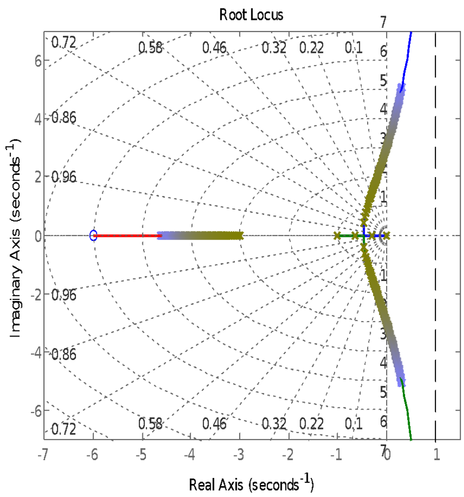
$$1 + KG(s)H(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = D(s) + KN(s) = 0$$

$N(s)$ es un numerador, $D(s)$ es un denominador.

Consideremos que $G(s)$ y $H(s)$ son elementos de nuestro sistema que no podemos modificar, son sensores o algún otro tipo de artefacto. El parámetro K es el que podemos hacer variar.

Recordar que necesitamos la información la función de transferencia de lazo abierto para poder dibujar cómo cambian las raíces de la función de transferencia de lazo cerrado.

- Solución (Fuerza bruta)



Recordando que la ecuación característica del sistema a lazo cerrado de la figura es:

$K = 0;$

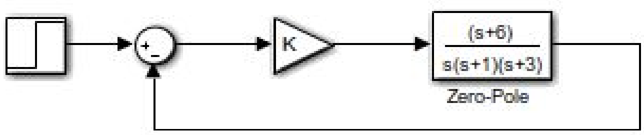
$while\ K < 200;$

$plot(real(roots(dG + K * nG)), \ldots$

$imag(roots(dG + K * nG)))$

$K = K + .1;$

end



Para tener en cuenta, cuando $K = 0$, $D(s) + KN(s) = 0$, las raíces de la ecuación característica equivalen a los polos de la función de transferencia de lazo abierto. Entonces el lugar de las raíces comienza a dibujarse en los polos de la función de transferencia de lazo abierto.

La ecuación característica va a tener tantas raíces como polos tenga $G(s)H(s)$, la función de transferencia de lazo abierto.

Las ramas del lugar de raíces nos van a dibujar la evolución de **una** de esas raíces. Las ramas arrancan en los polos y terminan en los ceros.

¿Qué pasa en un sistema donde se tienen más polos que ceros? Habrá alguna de las ramas que terminen en esos ceros finitos y otras que se van a ir al infinito.

Otra característica importante del lugar de raíces es su simetría, el eje real también funciona como eje de simetría, es decir, todo lo que ocurra en el semiplano superior se va a ver reflejado en el plano inferior porque las raíces pueden ser reales o complejas conjugadas.

Cuando $K = \infty$ las raíces de la ecuación característica del sistema a lazo cerrado coinciden con los ceros de la función de transferencia de lazo abierto.

Respuesta transitoria de un sistema prototipo de segundo orden

Considérese que un sistema de control de segundo orden con realimentación unitaria se representa por el gráfico siguiente:

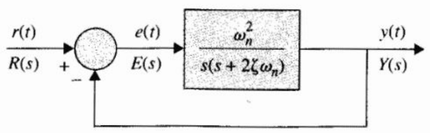


Figura 7-12 Sistema de control prototipo de segundo orden.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema es:

G(s)=Y(s)/E(s) = n2 / s(s+2n)

En donde y n son constantes reales. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Con las funciones de transferencias dadas y el gráfico se define entonces como sistema prototipo de segundo orden.

La ecuación característica del sistema prototipo de segundo orden se obtiene estableciendo el denominador de la ecuación anterior a cero.

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Para una entrada escalón unitario, la respuesta de salida del sistema se obtiene aplicando la antitransformada de Laplace de la transformada de salida:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Factor de amortiguamiento relativo y factor de amortiguamiento

Los efectos de los parámetros del sistema ζ y ω_n en la respuesta al escalón $y(t)$ del sistema prototipo de segundo orden se refieren a las raíces de la ecuación característica en la ecuación (7-84). Las dos raíces pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} s_1, s_2 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\alpha \pm j\omega \end{aligned} \tag{7-87}$$

en donde:

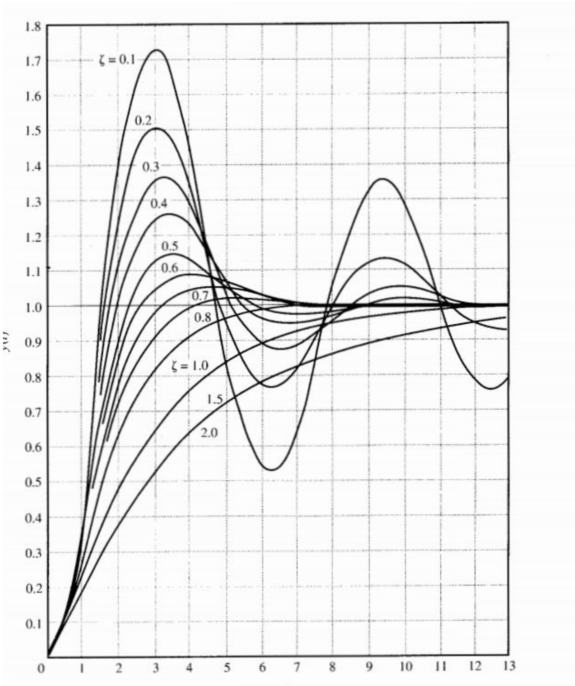
$$\alpha = \zeta\omega_n \tag{7-88}$$

y

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{7-89}$$

Podemos decir que controla la velocidad de crecimiento o decaimiento de la respuesta al escalón unitario y(t). En otras palabras, controla el “amortiguamiento” del sistema y se conoce como **factor de amortiguamiento** o **constante de amortiguamiento**.

Cuando las dos raíces de la ecuación característica son reales e iguales, el sistema se conoce como **amortiguamiento crítico**.



el amortiguamiento crítico sucede cuando =1. Bajo esta condición, el factor de amortiguamiento es =n. Por lo tanto se enuncia como el factor de amortiguamiento relativo, esto es:

=factor de amortiguamiento relativo = n=factor de amortiguamiento realfactor de amortiguamiento en amortiguamiento crítico

Frecuencia natural no amortiguada

El parámetro ω_n se define como la **frecuencia natural no amortiguada.** Como se observa en la ecuación (7-87), cuando $\zeta = 0$, el amortiguamiento es cero, las raíces de la ecuación característica son imaginarias, y la ecuación (7-86) muestra que la respuesta al escalón unitario es puramente senoidal. Por lo tanto, ω_n corresponde a la frecuencia de la respuesta senoidal no amortiguada. La ecuación (7-87) muestra que cuando $0 < \zeta < 1$, las partes imaginarias de las raíces tienen la magnitud de ω. Ya que cuando $\zeta \neq 0$, la respuesta de $y(t)$ no es una función periódica, la ω que se define en la ecuación (7-89) no es una frecuencia. Para el propósito de referencia, ω algunas veces se define como **frecuencia condicional (oscilación)** o **frecuencia de amortiguamiento.**

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \cos^{-1}\zeta) \qquad t \geq 0 \tag{7-86}$$

Para las raíces de conjugación compleja se muestran:

- ▲ ω_n es la distancia radial de las raíces al origen del plano s.
- ▲ α es la parte real de las raíces.
- ▲ ω es la parte imaginaria de las raíces.
- ▲ ζ es el coseno del ángulo entre la línea radial de las raíces y el eje negativo cuando las raíces están en el semiplano izquierdo del plano s, o

$$\zeta = \cos\theta \tag{7-91}$$

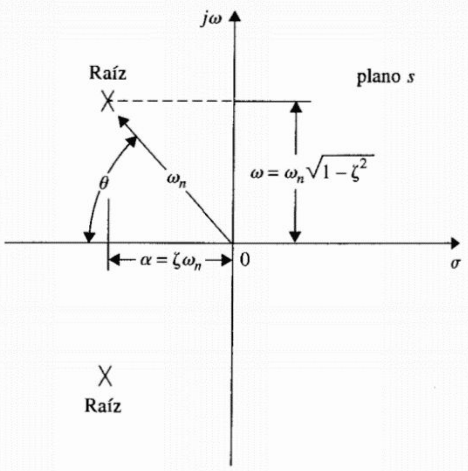


Figura 7-14 Relación entre las raíces de la ecuación característica del sistema prototipo de segundo orden y α, ζ, ω_n y ω.

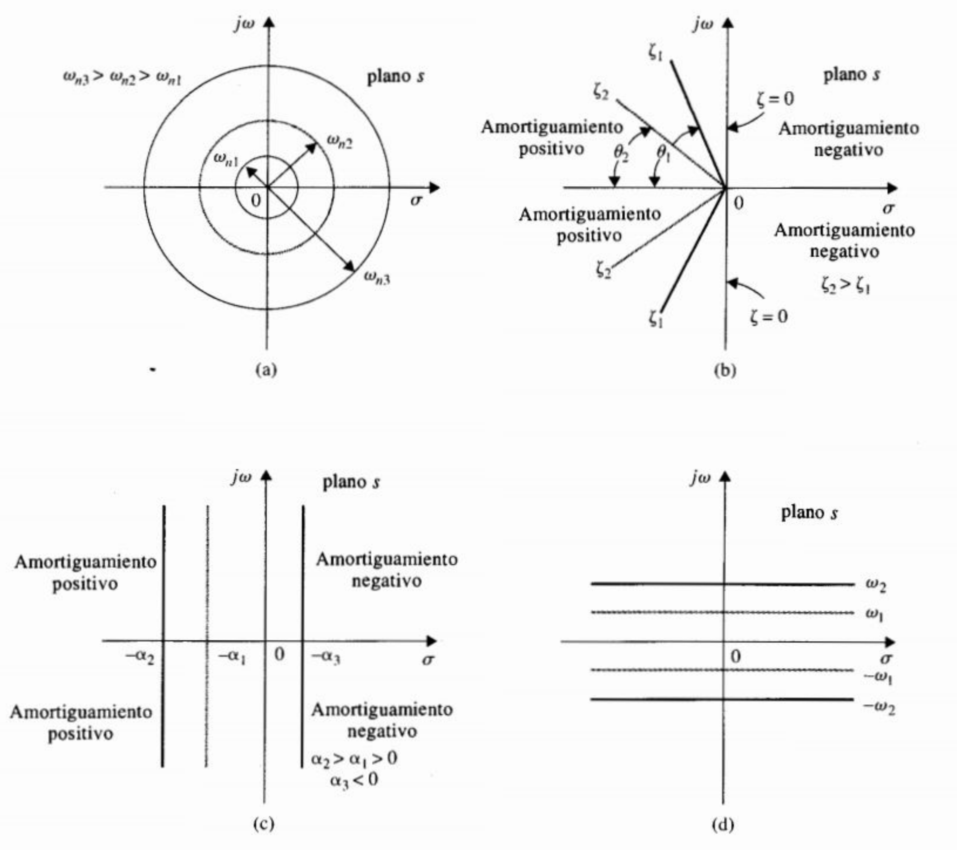


Figura 7-15 (a) Lugar geométrico de la frecuencia natural no amortiguada constante. (b) Lugar geométrico del factor de amortiguamiento relativo constante. (c) Lugar geométrico del factor de amortiguamiento constante. (d) Lugar geométrico de la frecuencia de oscilación constante.

Las regiones en el plano s se identifican con el amortiguamiento del sistema como sigue:

- ▲ El semiplano izquierdo del plano s corresponde al amortiguamiento positivo (es decir, el factor de amortiguamiento o el factor de amortiguamiento relativo es positivo). El amortiguamiento positivo causa que la respuesta al escalón unitario establezca un valor final constante en el estado estable debido al exponente negativo de la $\exp(-\zeta\omega_n t)$. El sistema es estable.
- ▲ El semiplano derecho del plano s corresponde al amortiguamiento negativo. El amortiguamiento negativo da una respuesta que crece en magnitud sin límite en el tiempo, y el sistema es inestable.

- ▲ El eje imaginario corresponde a cero amortiguamientos ($\alpha = 0$ o $\zeta = 0$). El amortiguamiento cero resulta en una respuesta de oscilación sostenida, y el sistema es marginalmente estable o marginalmente inestable.

Las dinámicas del sistema con respecto al valor de se clasifican como sigue:

- $0 < \zeta < 1$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ $(-\zeta\omega_n < 0)$ *bajo amortiguamiento*
- $\zeta = 1$: $s_1, s_2 = -\omega_n$ *amortiguamiento crítico*
- $\zeta > 1$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ *sobre amortiguamiento*
- $\zeta = 0$: $s_1, s_2 = \pm j\omega_n$ *no amortiguado*
- $\zeta < 0$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ $(-\zeta\omega_n < 0)$ *amortiguamiento negativo*

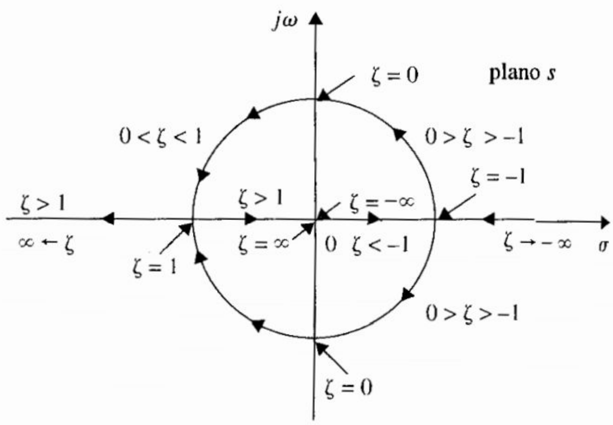
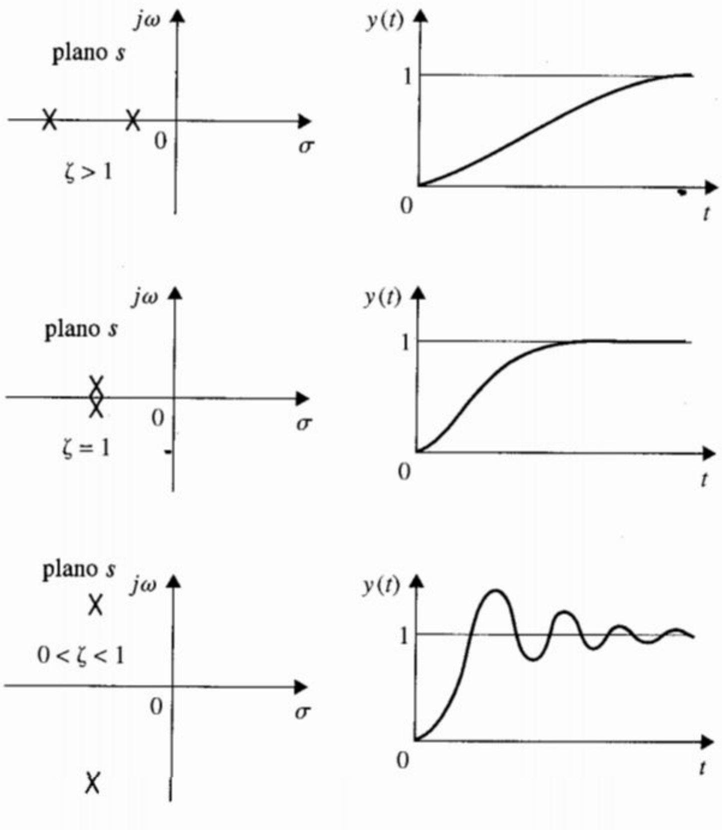


Figura 7-16 Lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema prototipo de segundo orden, ecuación (7-84), cuando ω_n se mantiene constante cuando el factor de amortiguamiento relativo varía desde $-\infty$ hasta ∞.



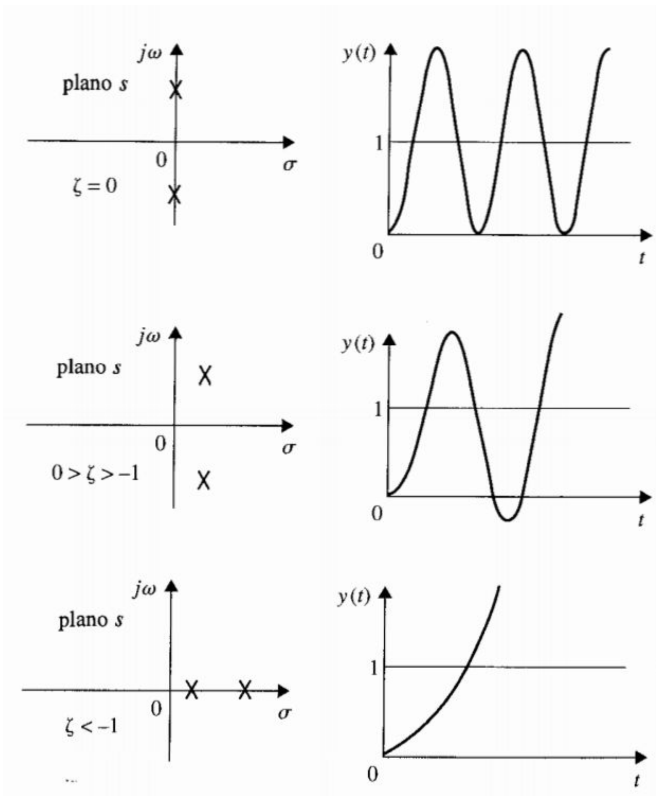
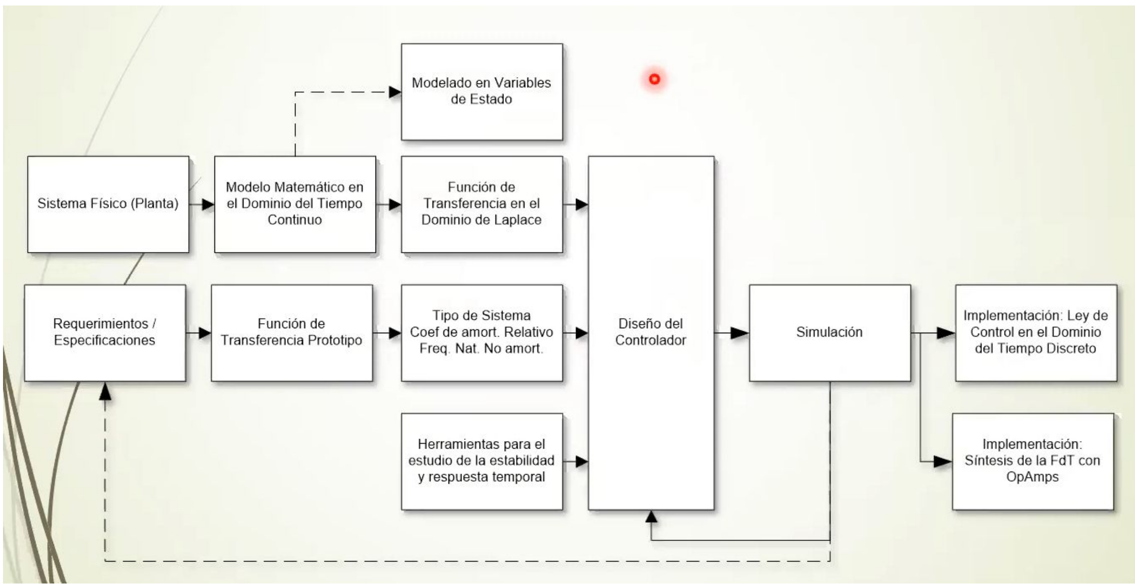


Figura 7-17 Comparación de la respuesta al escalón para varios sitios del lugar geométrico de las raíces en el plano *s*.

Unidad N°6:

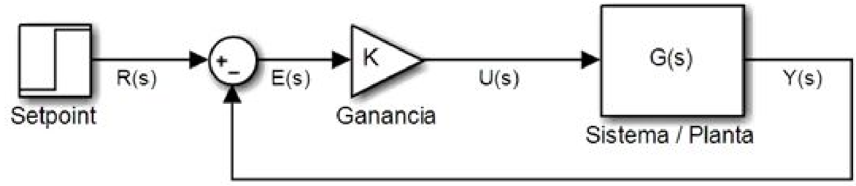
Video 19 - Acciones básicas de control

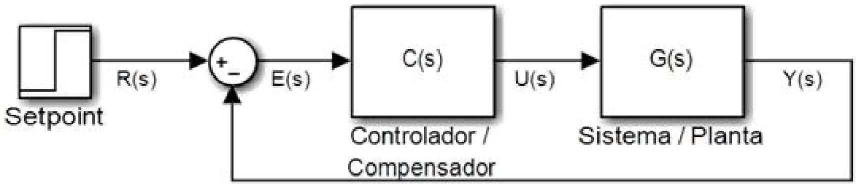


Motivación:

- Ya hemos visto que se pueden modificar las raíces de la ecuación característica del sistema a lazo cerrado variando una ganancia K insertada en la trayectoria directa del sistema.

- Nada impide incluir una Función de Transferencia propia en la trayectoria directa del sistema. El motivo? Ganar grados de libertad, ganar parámetros de ajuste para cumplir con los requerimientos de diseño





De todas las funciones de transferencia que podemos poner en C(s), vamos a estudiar particularmente una.

A esta nueva Función de Transferencia se la denomina Controlador, y a la relación entre la entrada E(s) (error) y la salida U(s) (acción de control), *ley de control*.

En principio puede tomar cualquier forma. La más común es la que incorpora las tres acciones básicas del control:

- Acción Proporcional
- Acción Integral
- Acción Derivativa

La ley de control, matemáticamente, el dominio del tiempo:

$$u(t) = K_P\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

u(t) es la acción de control (salida del controlador).

A esta ley de control se la conoce como PID.

Estudiaremos estas tres acciones (Proporcional, integral, derivativa). Conociéndolas vamos a poder ajustar los controladores aun teniendo incertidumbres en el modelo matemático.

- Ley de Control:
  - Tiempo continuo (análisis)

$$u(t) = K_P\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

  - Función de Transferencia (diseño)

$$PID(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = K_p\frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

Haciendo uso de las siguientes propiedades, llegamos a la ecuación de PID(s):

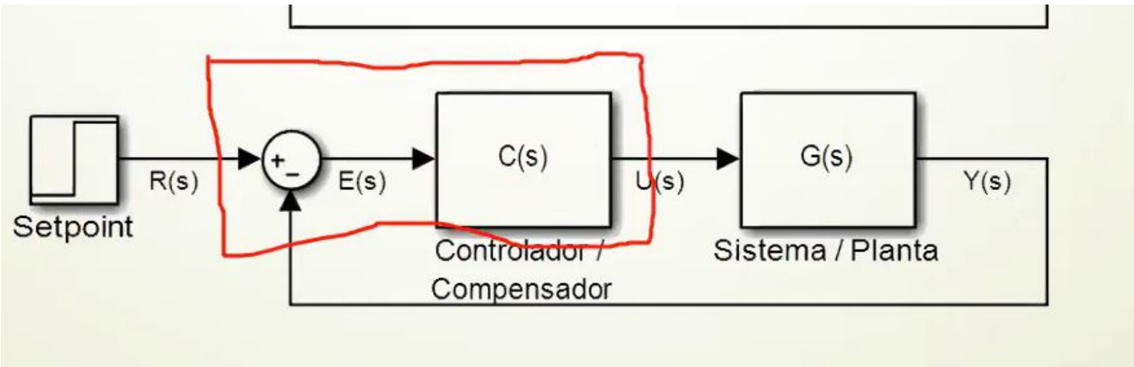
$$e(t) -> E(s)$$

$$\int e(t)dt -> \frac{1}{s}E(s)$$

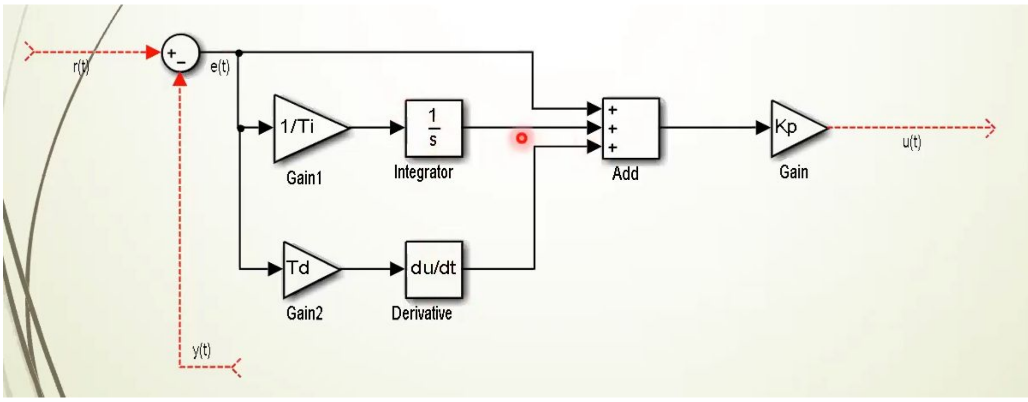
$$\frac{de(t)}{dt} -> sE(s)$$

La relación entre el error E(s) y u(s) es PID(s).

Si le hacemos zoom esto:



Obtendremos:



Tenemos una entrada $r(t)$ (referencia del sistema), la salida del sistema $y(t)$, la diferencia entre ellas $e(t)$ que es la entrada del controlador.

Ahora, $e(t)$ se divide en tres, teniendo en cuenta la ecuación $u(t)$:

1. El primer término sigue derecho al sumador, $e(t)$.
2. En el siguiente, $e(t)$ es multiplicada por $\frac{1}{T_i}$ e integrada por $\frac{1}{s}$.
3. Finalmente, $e(t)$ es multiplicada por otra ganancia Td y luego derivada $\frac{du}{dt}$.

Estas tres señales se suman y luego se multiplican por la ganancia K_p, la salida de este bloque de ganancia es nuestra acción de control $u(t)$.

Estas acciones (proporcional, integral y derivativa), no siempre tienen que estar todas juntas. Podemos diseñar un controlador puramente proporcional, integral, derivativo o también se pueden combinar. Esto dependerá de la planta y del problema que tengamos que resolver.

De esa ley de control podemos obtener 4 alternativas:

1. PID
2. P
3. PI
4. PD

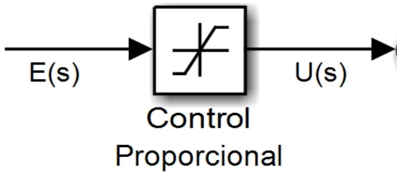
Acción proporcional

- Con la acción proporcional la salida del controlador es directamente proporcional a su entrada.

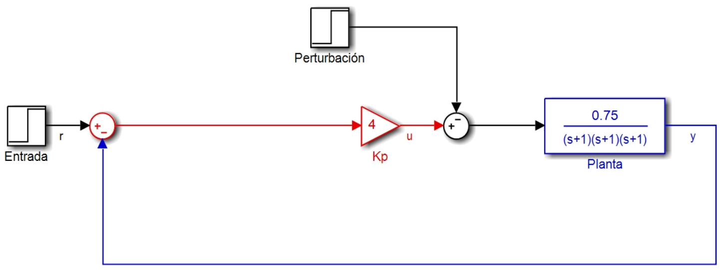
$$u(t) = K_p e(t)$$

- Donde K_p es una constante llamada ganancia proporcional. Es un número que aprendimos a elegir con el lugar de las raíces.
- La salida del controlador depende sólo de la magnitud del error en el instante que se considera. Considera el error en el momento actual, esta acción no tiene en cuenta el estado del sistema, ni estados anteriores, ni entradas anteriores ni el futuro.
- En la práctica, la ganancia constante existe sólo para un cierto rango de errores que se conoce como banda proporcional.
- **Objetivo de la acción proporcional:** La acción proporcional busca **minimizar** el error, tan **rápido** como se pueda.

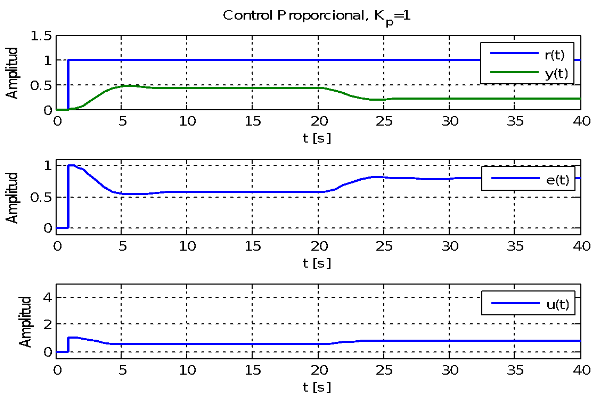
- Mientras más grande sea la ganancia mayor esfuerzo va a haber puesto en tratar de hacer que el error disminuya lo más rápido que se pueda.
- Tener en cuenta que aumentar demasiado el K_p puede traer también consecuencias negativas, una de ellas, es que empecemos a tener oscilaciones en la salida de nuestro sistema. Que este se vuelva subamortiguado, con lo cual podemos hacer que el tiempo de establecimiento se haga muy grande. Inclusive podemos hacer que el sistema se haga inestable. También podemos hacer con esto que el sistema salga del trabajo lineal.



- ¿Cómo es entonces el efecto del controlador puramente proporcional?



Tengamos en cuenta que este sistema es de tipo 0, por lo tanto, es de esperarse que ante una entrada escalón el error sea constante.



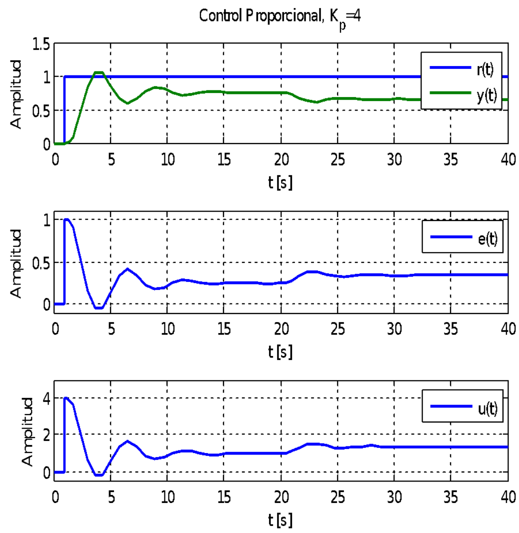
En el primer gráfico tenemos $r(t)$ e $y(t)$; en el segundo la señal de error $e(t)$ y en el último la acción de control $u(t)$.

Dato: A los 20 segundos, le introducimos la señal de perturbación.

Si el error es grande la acción de control es grande también, para poder eliminar o disminuir el error lo más que se pueda. A medida que la salida del sistema se va acercando al valor de referencia, la acción de control se va haciendo más chica. Si vemos en gráfico 3, cuando se introduce la perturbación, la acción de control aumenta para disminuir el error, que si observamos el gráfico 2, aumentó considerablemente en ese instante de tiempo.

Entonces, para poder disminuir el error gracias a la perturbación introducida, podemos agrandar el valor de K_p .

Si agrandamos el K_p obtenemos:



Una vez que el sistema se establece, el error en estado estable es menor. Incluso el rechazo a la perturbación es mejor. El error cuando aparecía la perturbación, inicialmente, se iba a 0,75 aprox., ahora con un $K_p = 4$, el error disminuyó a menos de 0,5.

De todas formas, ahora "pagamos un precio", hay sobrepasamiento, si vemos la función de verde del primer gráfico podremos dilucidar esto.

Acción integral

Con la acción integral la salida del controlador es proporcional a la integral de la señal de error en el tiempo, es decir, a la acumulación del error a lo largo del tiempo. Se dice acumulando porque una integral representa una sumatoria.

$$u(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt$$

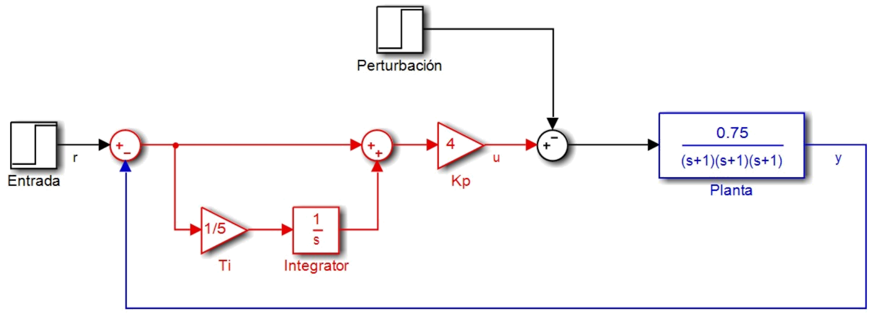
- Donde T_i es una constante llamada **tiempo de integración.**
- Importante: La acción integral no solamente considera el valor actual sino todos los valores pasados del error. "El ahora y el pasado". Tiene "memoria".
- Al tomar la transformada de Laplace se determina la función de transferencia:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s}$$

La acción integral le agrega un polo al origen al sistema, a la función de transferencia de lazo abierto, por lo tanto, incremente el tipo de sistema en 1.

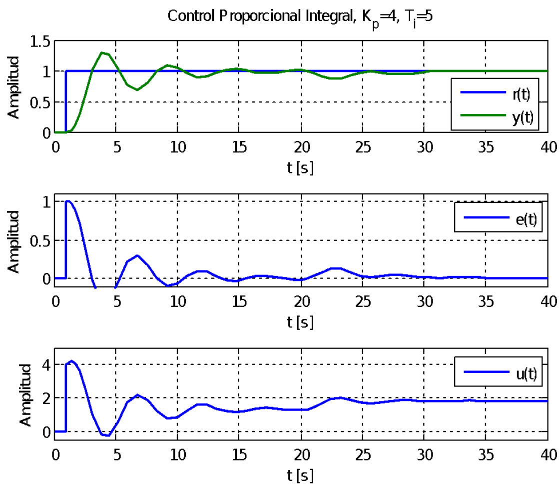
- Por lo tanto, la acción integral agrega un polo en el origen a la función de transferencia de lazo abierto, incrementando su tipo en uno.

Ejemplo: Controlador PI



Le agregamos un controlador Pi, acción proporcional + acción integradora, transformamos el sistema en un sistema tipo1 y error en estado estable para una entrada escalón es 0.

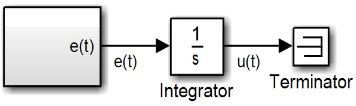
Consideremos el siguiente gráfico:

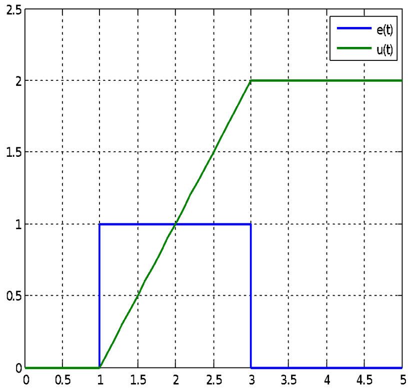


Las oscilaciones se mantienen igual que cuando teníamos la acción proporcional sola pero el error en estado estable tiende a cero.

- **Objetivo de la acción integral:** Lo que busca es hacer el **error nulo** en estado estable, tanto para cambios en la entrada como ante perturbaciones.
- No tiene buen desempeño durante la respuesta dinámica, durante el transitorio, no mejor el desempeño durante el transitorio, de hecho hasta lo puede empeorar, lo puede volver más lento pero si elimina el error en estado estable.
- ¿Cómo funciona esto de la acumulación entonces?

Consideremos una entrada $e(t)$ que tiene forma de un pulso, vamos a pasar esa señal por un integrador y vamos a evaluar la salida $u(t)$.





Mientras la entrada es cero, la salida es cero pero en 1 cuando ingresa la entrada (cambia de estado), la salida empieza a acumular ese estado. Y cuando la entrada vuelve a ser nula (en 3), la acción de control no vuelve a cero, sino que se mantiene en el último valor computado.

Pregunta, ¿Al introducir la acción integral, está introduciendo sobrepasamiento y aumentando el tiempo de establecimiento?: El sobrepasamiento está dado principalmente, por la acción proporcional ya que es la más "Violenta", la que tiene más energía, la que tiene más "fuerza". La acción integral no me genera sobrepasamiento porque lo que nos das es un polo en el origen que no generaría esto pero si aumenta el tiempo de establecimiento porque como pone ese polo en el origen acerca todas las raíces de la ecuación característica al eje imaginario entonces el tiempo de establecimiento del sistema **puede** hacerse más lento.

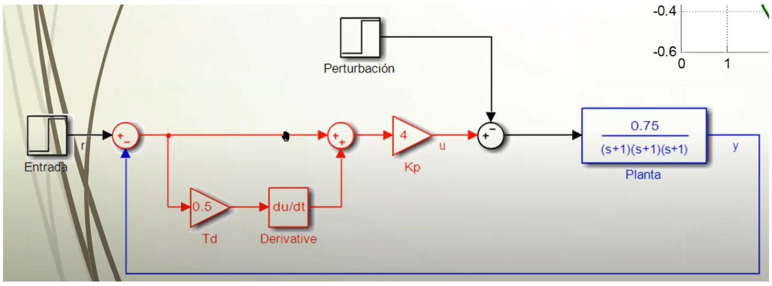
Acción derivativa

- Con la acción derivativa la salida del controlador es proporcional a la razón de cambio de la señal de error en el tiempo, es decir, a la variación (al cambio) de la señal de error en el tiempo.

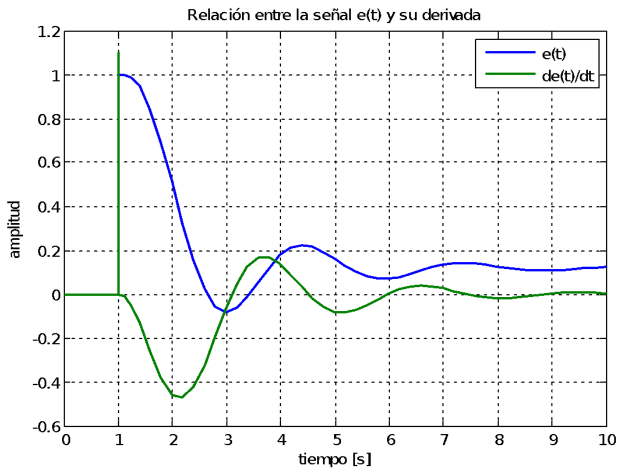
$$u(t) = T_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Donde T_d es una constante llamada **tiempo de derivación.**
- Ya que la derivada de una constante es cero, esta acción colabora exclusivamente durante los **transitorios** y ante perturbaciones. Cuando el sistema se estabiliza, el error pasa a ser constante, entonces, cuando el error es constante esta acción se hace cero porque la derivada de una constante es cero.
- Vemos que el PID tiene tres valores para ajusta:
    - La ganancia proporcional K_p
    - El tiempo de integración T_i
    - El tiempo de derivación T_d
- **Objetivo de la acción derivativa:** Trata de minimizar los sobrepasamientos que se producen cuando la constante K_p, de la acción proporcional, se vuelve muy grande. Mejorar el transitorio, tratar que la respuesta subamortiguada que viene dada por una acción proporcional muy grande disminuya o, si es posible, que desaparezca.

- **Resumen de las acciones:** Esta acción derivativa, se anticipa al estado que va a tomar el sistema, es decir, es como que el valor de la acción proporcional depende del ahora, el valor de la acción integral depende de la señal de ahora y del pasado y, por último, el valor de la acción derivativa predice cómo va a ser el error en el futuro y acciona según esa predicción.
- **Dato:** La acción de control puramente integral, o puramente derivativa no se puede usar, por eso las vamos combinando con la proporcional.
- Tomando el ejemplo que vimos antes, podemos observar ahora que cerrando el lazo de control con una ganancia K_p puramente proporcional y una rama derivativa, es decir, tenemos un sistema PD:

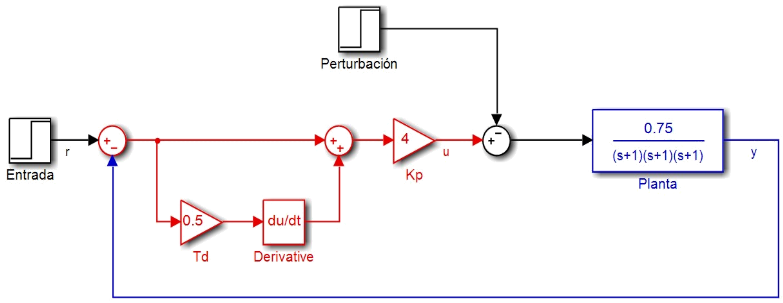


Lo que veremos en el gráfico siguiente es el valor de la señal de error y el valor de la derivada del error:

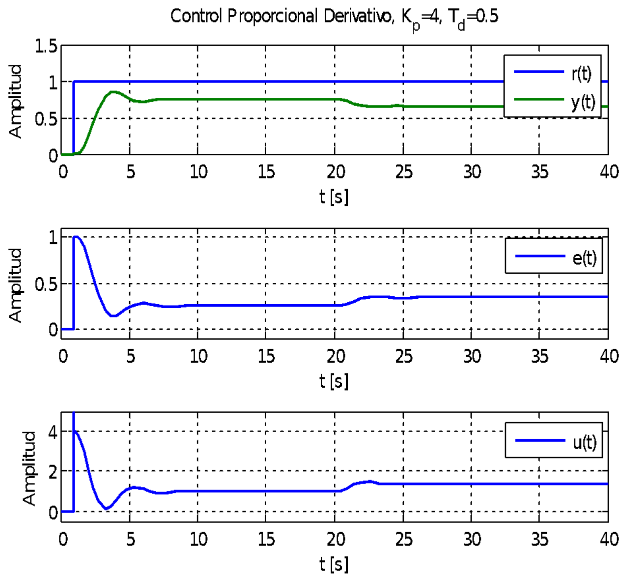


En $t = 1$, la señal de error está en un máximo y va a empezar a disminuir. Si vemos en $t = 2$ el error va disminuyendo, la derivada ya llegó a un mínimo. Luego en $t = 3$, el error llegó a un mínimo, la derivada ya está subiendo. Luego el error está subiendo, cambia de signo y llega a un máximo y su derivada ya estuvo antes en ese máximo. Si comparamos entonces, la derivada de la señal de error es la misma señal, pero adelantada en el tiempo, desfazada hacia adelante. Esto es lo que le da la característica anticipativa. Por esto, al saber que este error va a hacer que la señal de salidas del sistema se pase por encima de la referencia, ya empieza a generar una acción para frenar ese hecho. No perdamos de vista que, la acción proporcional es "proporcional" a la línea azul que vemos, la acción derivativa es proporcional a la línea verde y ambas se suman. Entonces, si vemos, el error al comienzo genera una acción de control positiva y su derivada le va a restar un poco porque anticipa que con este gran error va a haber sobrepasamiento, entonces antes que eso ocurra, trata de frenar.

Ejemplo: Controlado PD



Al sacar la acción integral, el sistema vuelve a ser de tipo 0, por lo que nos volveremos a encontrar con error en estado estable. Lo que esperamos es que el sobrepasamiento haya disminuido.



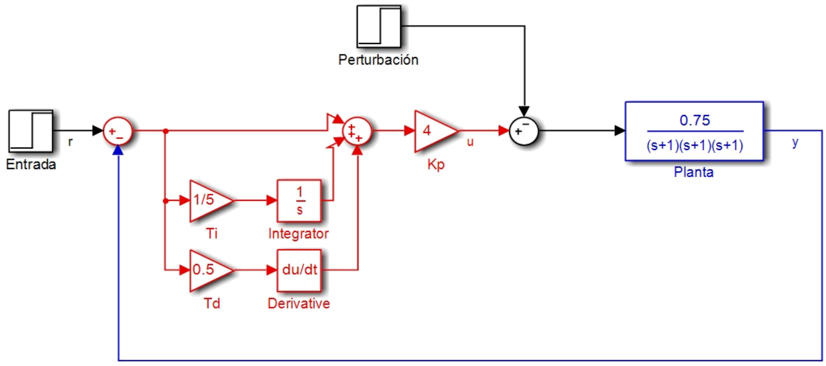
El error es el mismo que en la acción proporcional pero tenemos un transitorio más corto y más suave, no hay tanto sobrepasamiento. Ante las perturbaciones tenemos una mejora en el transitorio pero el que termina haciendo el esfuerzo para rechazar la perturbación es la acción proporcional porque la derivativa aporta solamente cuando hay variaciones en el error, una vez que el error se vuelve constante ya no aporta más nada. El tiempo de establecimiento se acorta, es decir, se establece antes con la acción derivativa.

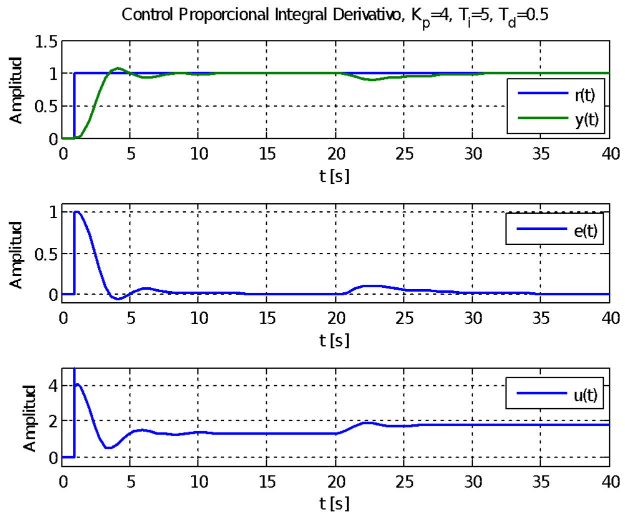
Acción PID

Podemos evaluar ahora, entonces, el comportamiento de las tres en conjunto. ¿Qué esperamos?

- Gracias a la acción proporcional, un rápido rechazo a las perturbaciones y trate de llevar a la salida al valor de referencia rápidamente.
- Por la acción integral, tenemos un polo en el origen y, por lo tanto, esperamos que el error sea nulo tanto para cambios en la entrada como para cambios en la perturbación.

- Como también tenemos una acción derivativa, esperamos que esta acción trabaje durante el transitorio para minimizar las oscilaciones producto de K_p y trate de minimizar el efecto de la perturbación.





Vemos que tenemos ciertas oscilaciones, el tiempo de establecimiento con PID es un poco más grande que con el PD (debido a la acción integral, hace más lenta la respuesta); el error en estado estable se hace nulo tanto ante una modificación en la referencia como después ante una modificación en una perturbación.

La señal de error, en un instante inicial el error es grande, luego disminuye con pocas oscilaciones, va a **trata** de hacerse cero pero, gracias al acumulador del integral a lo largo de tiempo lo va aproximando a cero. Lo mismo ocurre cuando tenemos una perturbación, se va haciendo cero a medida que la acción integral vaya creciendo, porque esta acción integral, este acumulador, si bien es genial, mal seteado o mal usado es “peligroso” porque si le pongo una constante de integración muy chica el numero que multiplica a la integral se hace grande $\left(\frac{1}{T_i}\right)$ (Si a T_i le doy valores muy chiquitos, el número se vuelve grande), esto significa que por cada pequeño error que voy metiendo al acumulador la salida se hace cada vez más grande y esto puede generar un efecto contraproducente, haciendo que el acumulador crezca mucho, genere una acción positiva muy grande que haga que el sistema se pase de la referencia y después demore mucho tiempo ese acumulador en “descargarse” cuando el acumulador cambie de signo y termina haciendo una respuesta temporal mucho más lenta.

La acción derivativa también tiene sus problemas, es muy sensible al ruido y a las variaciones bruscas.

Repitiendo las contras de la acción proporcional, diremos que: una acción proporcional muy chica no corrige el error, demora mucho para llevar al sistema al valor de referencia. Una acción proporcional muy grande va a hacer que en principio, más allá de que se produzcan oscilaciones ante el transitorio, también puede hacer que en estado estable, ese mismo ruido del sensor genere pequeños movimientos en la señal de error que multiplicado por un K_p muy grande se transforme en una acción de control grande. Además, obvio, un K_p muy grande puede volver al sistema inestable.

RESUMEN:

- Acción proporcional: Minimizar error en estado estable tan pronto como aparece y minimizar efecto de las perturbaciones.
- Acción Integral: No afecta el sobrepasamiento, aumenta el tiempo de establecimiento, hace nulo el error en estado estable (pero no siempre, depende de: La entrada, la planta que podría ser de otro tipo), lo que hace es agregar un polo al origen, es decir, incrementar en 1 el tipo de sistema.
- Acción derivativa: Reduce el sobrepasamiento, reduce el tiempo de establecimiento, no afecta el error en estado estable.

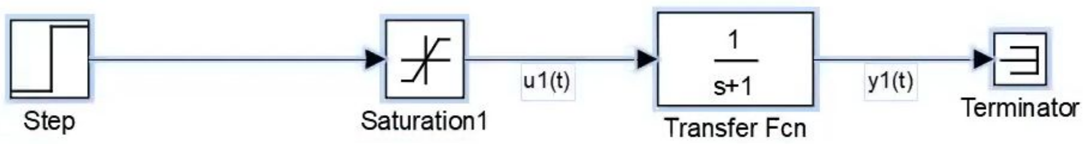
Video 20 – Banda proporcional Elección de K_p

En la teoría, K_p puede asumir cualquier valor pero en la práctica si tiene límite. K_p va a mantener al sistema trabajando como un sistema lineal solamente para un cierto rango de valores, que se conoce como **banda proporcional**.

Por ejemplo: Queremos hacer el control de un motor que está alimentado por 12V. Nuestra acción de control no puede tomar valores más allá de $\pm 12V$.

Supongamos que “atacamos” a nuestro sistema de una forma tal que el error se vuelve una sinusoide de amplitud 15 y nuestra $K_p = 1$. Va a ocurrir entonces que la acción de control que implementemos no va a poder seguir en todo el rango a ese error porque no puede superar los $\pm 12V$. Entonces se va a producir un fenómeno de saturación, que se puede volver nocivo combinado con una acción integral demasiado grande.

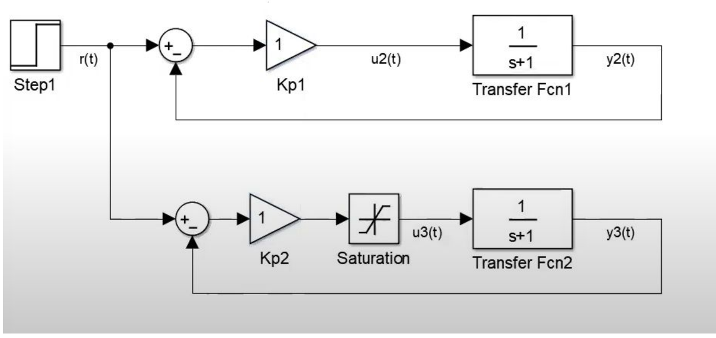
Veamos el ejemplo:



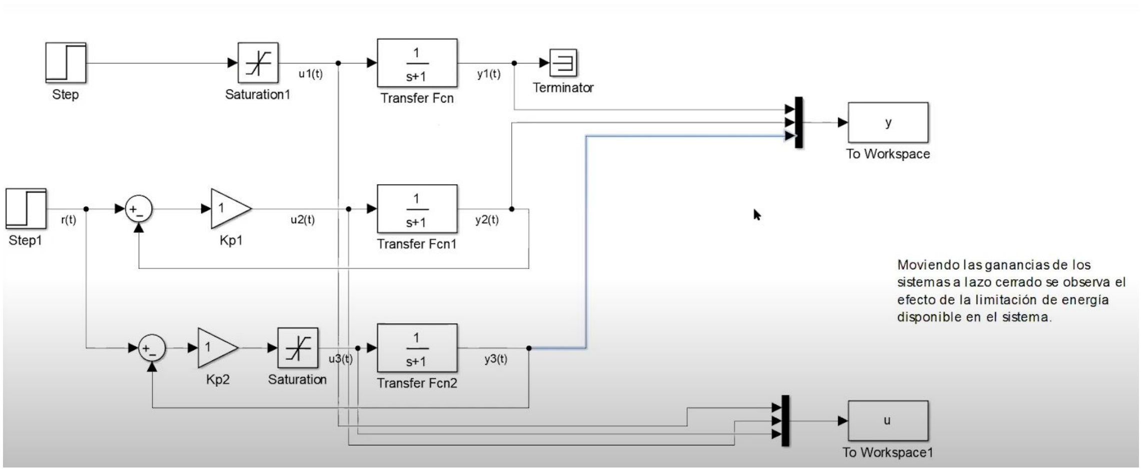
Tenemos un sistema caracterizado por una función de transferencia $\frac{1}{s+1}$ y le vamos a agregar una saturación, es decir, un límite de energía disponible en ± 1 .

A este sistema lo vamos a realimentar de dos formas

1- Sin considerar la saturación. Porque esta saturación es un elemento no lineal, y nosotros modelados elementos lineales. Vamos a realimentar, poner un control proporcional
2- Consideramos la saturación. Vamos a realimentar también y poner un control proporcional.

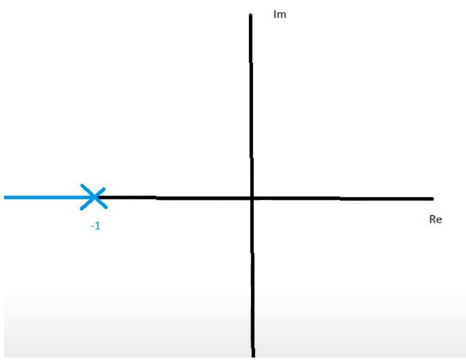


Vamos a ir viendo las salidas de estos sistemas y vamos a ir viendo las acciones de control.



El lugar de raíces será entonces:

- Vamos a tener un polo en -1 y el lugar de raíces va a partir de ahí y se va para la izquierda de la forma:

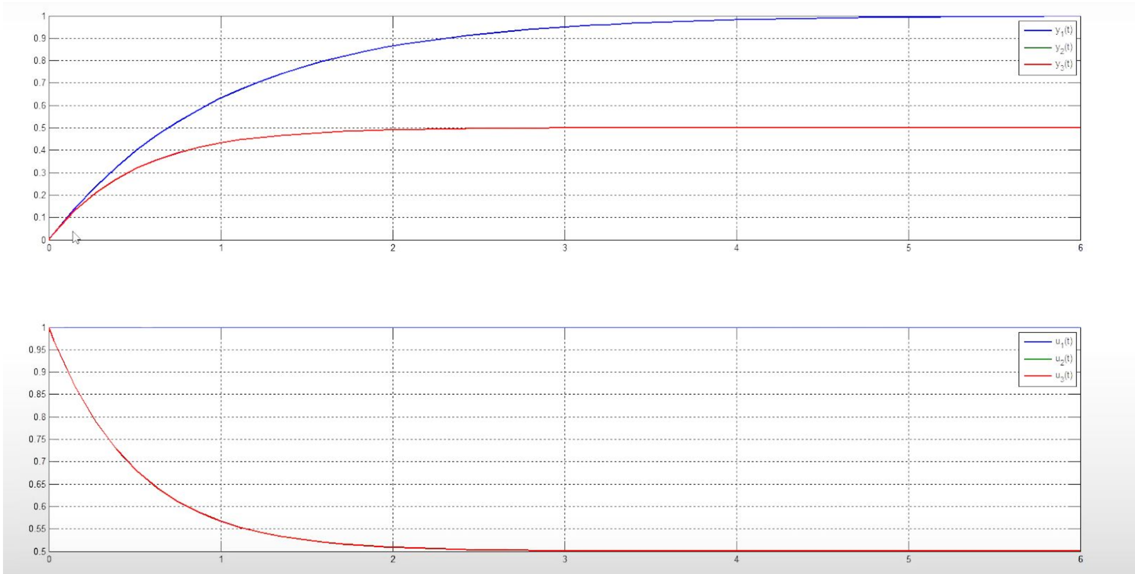


Mientras aumentemos el valor de K_p, la raíz de la ecuación características del sistema lazo cerrado se va a alejar del eje imaginario entonces va a hacer la respuesta temporal más rápida. A medida que aumentemos K_p, el sistema va a responder cada vez mejor. Esto considerando que sea lineal.

Ahora, viendo en la “vida real” obtenemos:

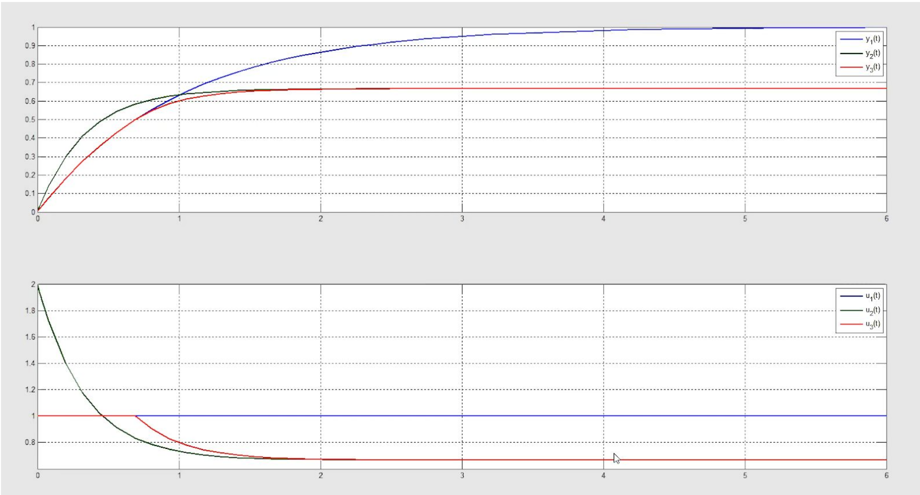
El azul la respuesta del sistema a lazo abierto, la acción de control a lazo abierto es un valor unitario. La salida de los sistemas realimentados son iguales, porque en un instante inicial el error es uno, la ganancia del controlador proporcional es 1 y la acción de control es 1 manteniéndose todo entre 1 y -1 como dijimos anteriormente al citar el ejemplo. Esto implica entonces que la acción de control de estos dos sistemas realimentados es igual.

Como el sistema es tipo 0, presentará error en esta estable.



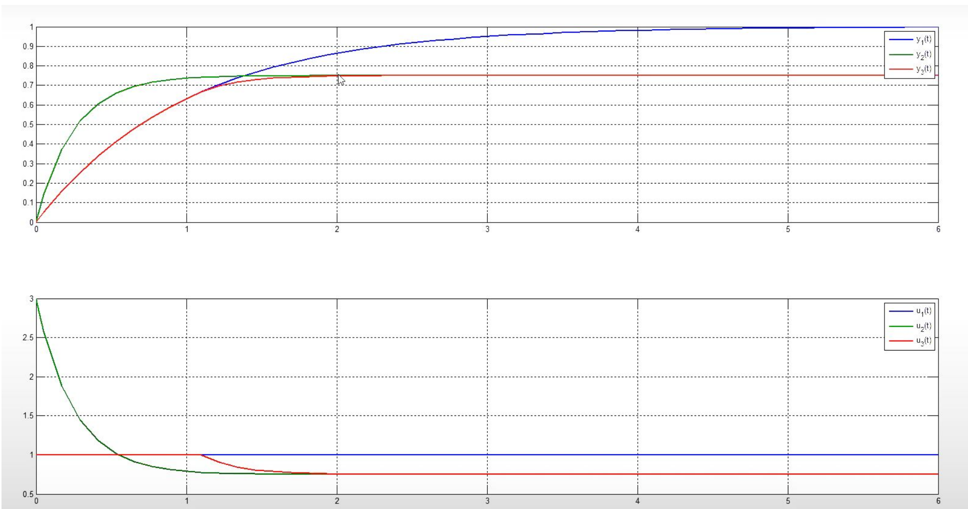
¿Cómo mejoraríamos entonces la respuesta temporal? ¿Cómo hacemos para que el sistema a lazo cerrado sea más rápido y con el menor error en estado estable posible? Aumentemos entonces K_p

En azul el sistema a lazo abierto, ahora los sistemas a lazo cerrado se “despegaron”, el que se mantiene lineal tiene una respuesta mucho más rápida incluso que el sistema a lazo abierto; esto se debe a que la acción de control de este sistema ahora llegó hasta 2 (nosotros le cambiamos el valor a $K_p = 2$) y tenemos más energía disponible, por lo tanto, la respuesta es más rápida. De todas formas, esta acción de control es irrealizable porque nuestro límite de energía disponible era 1 (nosotros dijimos que era así e n el ejemplo). ¿Qué hace entonces el sistema que considera esta limitación? La acción de control se satura en 1 (línea roja) hasta que finalmente empieza a “caer”. El sistema a lazo cerrado que considera este límite, copia el sistema a lazo abierto y luego se separa.

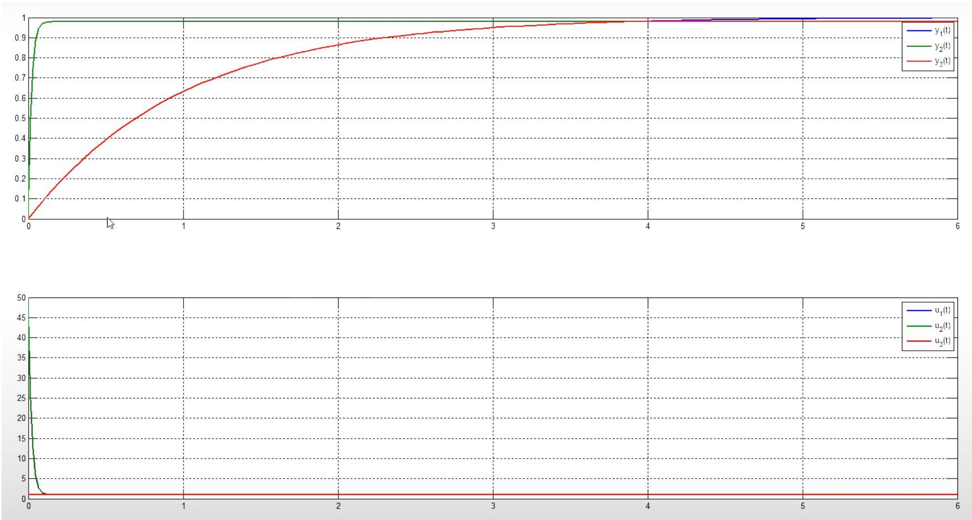


Si aún a pesar de esto agrandamos más K_p el sistema que no considera la limitación cada vez responde mejor, es más rápido pero en la realidad no ocurrirá porque no tenemos esa energía disponible.

En el caso del sistema que si considera el límite, en el intervalo de tiempo que se satura, trabaja como un sistema a lazo abierto, entrega toda la energía disponible para tratar de achicar la diferencia con la referencia lo más rápido que puede y cuando se está aproximando ahí es como que "se vuelve a cerrar el lazo". El sistema no se desestabiliza, si nosotros no consideramos la saturación, osea, la energía disponible, vamos a esperar una respuesta que no va a tener nada que ver con la realidad.

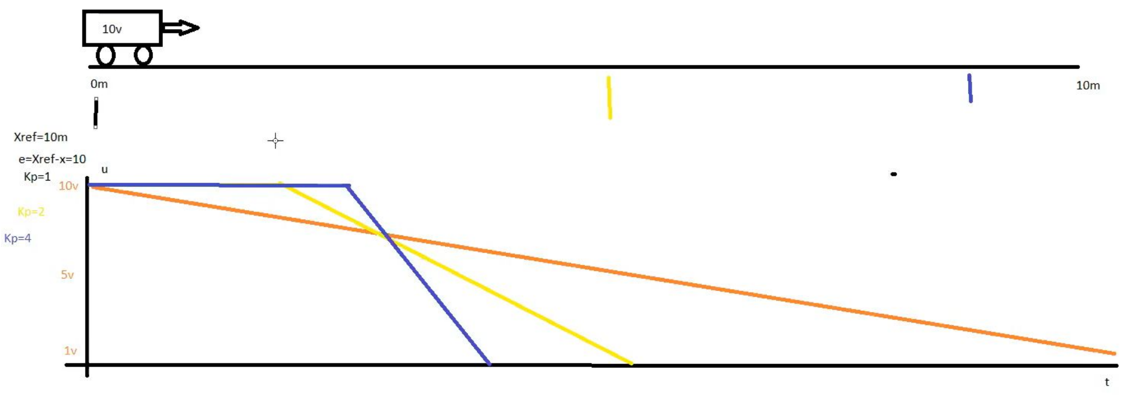


Por último, si considero un valor de K_p demasiado grande el que no considera la saturación el tiempo de establecimiento es prácticamente inmediato mientras que el otro sistema que si la considera va copiando durante el prácticamente todo el tiempo a la curva del sistema de lazo abierto. Entonces responde de una forma que no tiene nada que ver con lo que dice la teoría.



El valor de K_p tiene que ser elegido de manera consciente, teniendo en cuenta qué parte del sistema va a trabajar de manera lineal y cuál no.

Supongamos que tenemos que mover un móvil sobre una línea que mide 10metros, nuestra señal de referencia $x_{ref} = 10m$. Consideramos un sistema con una compensación puramente proporcional, el error $e = x_{ref} - x = 10$ (siendo x la posición del móvil). Suopngamos que la energía disponible para mover los motorcitos son 10V. Entonces, si queremos mantener a todo el sistema lineal a lo largo de toda la trayectoria lo lógico sería que $K_p = 1$ entonces la acción de control u inicial va a ser $u = 10$ y a medida que nos vayamos acercando al final la acción de control se va a ir haciendo cada vez más chica. Y al ocurrir esto, el motorcito cada vez va a tener menos energía disponible, menos fuerza, para mover al móvil.



Introducción – Kuo

El lugar geométrico de las raíces hace referencia a las trayectorias de la ecuación característica cuando un parámetro del sistema varía.

El problema del lugar geométrico de las raíces se puede formular con referencia a la siguiente ecuación algebraica de la variación compleja de s:

$$F(s) = P(s) + KQ(s) = 0$$

Donde $P(s)$ es un polinomio en s de grado n,

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Y $Q(s)$ es un polinomio en s de grado m; n y m son enteros positivos

$$Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0$$

K es una constante real que puede variar de $-\infty$ hasta $+\infty$.

Los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ y $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ se consideran reales y fijos.

Se definen las siguientes categorías de lugares geométricos de las raíces basados en el signo de K:

▲ RL se refiere al lugar geométrico de las raíces con valores positivos de K.

▲ CRL se refiere al lugar geométrico de las raíces con valores negativos de K.

1. **RL:** la porción del lugar geométrico de las raíces donde K es positiva; $0 \leq K < \infty$.
2. **CRL (lugar geométrico de las raíces complementario):** la porción del lugar geométrico de las raíces donde K es negativa; $-\infty < K \leq 0$.
3. **RC (contornos de las raíces):** contornos de las raíces cuando varía más de un parámetro.
4. **Lugar geométrico de las raíces:** se refiere al lugar geométrico de las raíces total para $-\infty < K < \infty$.

Propiedades básicas del lugar geométrico de las raíces

Considerando la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de un solo lazo:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado se obtiene al igualar el denominador a cero. Por tanto, las raíces de la ecuación característica deben satisfacer:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \textbf{(8.5)}$$

Supongo que $G(s)H(s)$ contiene un parámetor variable K como factor multiplicativo, de forma que la ecuación racional se puede expresar como:

$$G(s)H(s) = \frac{KQ(s)}{P(s)} \quad \textbf{(8.6)}$$

Donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios definidos unos pasos antes. La ecuación **(8.5)** se escribe como:

$$1 + \frac{KQ(s)}{P(s)} = \frac{P(s)+KQ(s)}{P(s)} = 0 \quad (8.7)$$

La construcción gráfica del lugar de las raíces se basa en el conocimiento de los polos y ceros de la función $G(s)H(s)$. Se escribe de la siguiente forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

Donde los ceros y los polos de $G(s)H(s)$ son reales o en pareces complejos conjugados.

Una vez que el lugar geométrico de las raíces se ha construido, los valores de K a lo largo del lugar geométrico se pueden determinar de la siguiente forma:

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^{n} |s + p_j|}{\prod_{k=1}^{m} |s + z_k|}$$

Dato:

- Los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces donde $K = 0$ son los polos de $G(s)H(s)$.
- Los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces donde $K = \pm\infty$ son los ceros de $G(s)H(s)$.

$$G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K} \qquad (8\text{-}25)$$

Cuando la magnitud de K se aproxima a cero, $G_1(s)H_1(s)$ se aproxima a infinito, por lo que s se aproxima a los polos de $G_1(s)H_1(s)$ o de $G(s)H(s)$. De forma similar, si la magnitud de K se aproxima a infinito, s se aproxima a los ceros de $G(s)H(s)$.

Una rama del lugar geométrido de las raíces es el lugar geométrico de una raíz cuando K varía entre $-\infty$ e $+\infty$.

- El número de ramas del lugar geométrico de las raíces de la ecuación es igual al orden del polinomio.

El número de ramas del lugar geométrico de las raíces de:

$$s(s + 2)(s + 3) + K(s + 1) = 0 \qquad (8\text{-}29)$$

es tres, ya que la ecuación es de tercer orden. En otras palabras, la ecuación tiene tres raíces y por tanto, debe haber tres lugares de las raíces. ▲

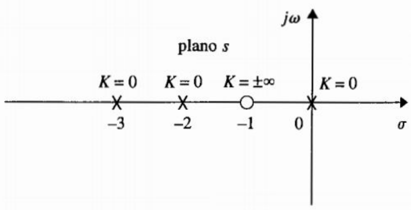


Figura 8-2 Puntos en los cuales $K = 0$ sobre el lugar geométrico de las raíces de $s(s + 2)(s + 3) + K(s + 1) = 0$.

El lugar geométrico de las raíces es simétrico respecto al eje real del plano s.

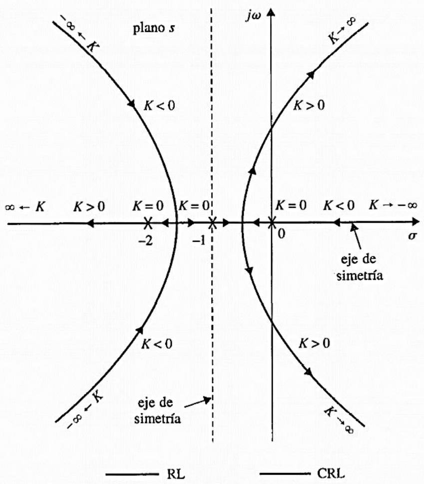


Figura 8-3 Lugar geométrico de las raíces de $s(s+1)(s+2)+K=0$, que muestran las propiedades de simetría

Introducción - Diseño de sistemas de control – Kuo

El diseño de sistemas de control involucra los tres pasos siguientes:

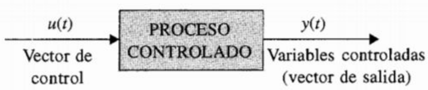


Figura 10-1 Proceso controlado.

1. Determine qué debe hacer el sistema y cómo hacerlo (especificaciones de diseño).
2. Determine la configuración del compensador o controlador relativa a cómo está conectado al proceso controlado.
3. Determine los valores de los parámetros del controlador para alcanzar los objetivos de diseño.

Video 21 – Implementación de controladores PID

- La implementación del PID se realizará en un microcontrolador o SBC, por lo tanto la función de transferencia, o la ecuación diferencial que lo representa, deberá reescribirse como una ecuación en diferencias en tiempo discreto para poder codificarse
- Esta codificación se deberá ejecutar en intervalos regulares de tiempo, llamado tiempo de muestreo t_s . Voy a generar un código que se tiene que ejecutar en intervalos regulares de tiempo. Debe ser fijo y muy preciso.
- Sobre las condiciones que debe cumplir el tiempo de muestreo se hablará más adelante.

- La ley de control en tiempo continuo es:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Vamos a considerar que $\frac{K_p}{T_i} = K_i$ y $K_p T_d = K_D$. Entonces si aumento K_p aumento la acción proporcional, si aumento K_i aumento la acción integral y si aumento K_D aumento la acción derivativa y viceversa.

- Vamos a ver cómo discretizar las acciones del punto anterior:
    - Acción proporcional: Digitalización de la acción proporcional en el dominio del tiempo continuo. $P(k)$ es en tiempo discreto.

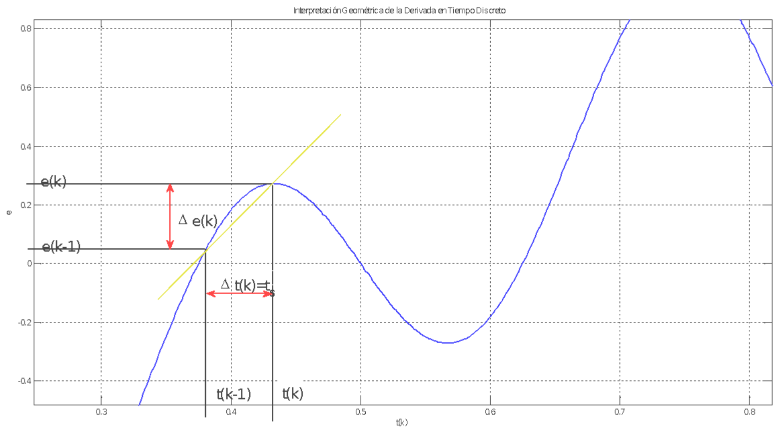
      $$P(t) = K_p e(t) \rightarrow P(k) = K_p e(k)$$

    - Acción derivativa: Discretización de la acción derivativa.

      $$D(t) = K_P T_D \frac{de(t)}{dt}$$

      $$D(k) = K_P T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{t_s}$$

      Recordando el concepto de derivada, límite de de cuando el tiempo $t \rightarrow 0$.



Tratamos de acercar $t(k-1)$ a $t(k)$.