Teoría de control

Resumen Final

1- INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL

Introducción

[Distefano, Cap 1]

Definición	Un **sistema** es un arreglo, conjunto o colección de cosas conectadas o relacionadas de manera que constituyan un todo.
Definición	Un **sistema** es un arreglo de componentes físicos conectados o relacionados de tal manera que formen una unidad completa o que puedan actuar como tal.

La palabra **control** generalmente se usa para designar *regulación, dirección o comando.* Al combinar las definiciones anteriores, se tiene:

Definición	Un **sistema de control** es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera que el arreglo se pueda comandar, dirigir o regular a si mismo o a otro sistema.

En la ingeniería y en la ciencia generalmente restringimos el significado de sistemas de control al aplicarlo a esos sistemas cuya función principal es comandar, dirigir o regular *dinámicamente* o *activamente.*

Definición	La **entrada** es el estimulo o excitación que se aplica a un sistema de control desde una fuente de energía externa, generalmente con el fin de producir, de parte del sistema de control, una respuesta especificada.
Definición	La **salida** es la respuesta obtenida del sistema de control. Puede ser o no puede ser igual a la respuesta especificada que la entrada implica.

El propósito para el que está destinado el sistema de control generalmente determina o define la entrada y salida. Dadas la entrada y la salida es posible determinar o definir la naturaleza de los componentes del sistema.

Existen tres tipos básicos de sistemas de control

1. Sistemas de control hechos por el hombre.
   Ej.: un conmutador eléctrico: controla el flujo de electricidad.
2. Sistemas de control naturales, incluyendo sistemas biológicos
   Ej.: el acto de indicar un objeto con el dedo: sistema constituido por los ojos, el brazo, el dedo, la mano, el cerebro.
3. Sistemas de control cuyos componentes están hechos por el hombre y otros por la naturaleza.
   Ej.: hombre que maneja un automóvil.

Con el fin de resolver un problema de sistemas, tanto las especificaciones o descripción de la configuración del sistema como sus componentes, se deben poner en una forma susceptible de ser sometida a análisis, diseño y evaluación.
Se usan extensamente tres representaciones básicas (modelos) de los componentes físicos y de los sistemas, en el estudio de los sistemas de control:

1. Ecuaciones diferenciales y otras relaciones matemáticas.
2. Diagramas en bloque.
3. Graficas del flujo de señales.

Los **diagramas en bloque** y **graficas del flujo de señales** son acortamientos en forma de representaciones graficas ya sea de diagramas esquemáticos de un sistema físico o del conjunto de ecuaciones matemáticas que caracterizan las partes del sistema.

Los modelos matemáticos, en forma de ecuaciones del sistema, se emplean cuando se requieren relaciones detalladas. Cada sistema de control se puede caracterizar teóricamente por ecuaciones matemáticas. La solución de estas ecuaciones representa el comportamiento del sistema.

Panorama de las variables complejas y las funciones.

[Ogata, cap 2.2]

Variable compleja

Un número complejo tiene una parte real y una parte imaginaria, y ambas son constantes. Si la parte real y/o la parte imaginaria son variables, el número complejo se denomina *variable compleja.* En la transformada de Laplace, se emplea la notación *s* como variable compleja; esto es

$$s = \sigma + j\omega$$

donde σ es la parte real y ω es la parte imaginaria.

Función compleja

Una función compleja $G(s)$ es una función de s, que tiene una parte real y una parte imaginaria, o bien,

$$G(s) = G_x + jG_y$$

donde G_x y G_y son cantidades reales. La magnitud de $G(s)$ es $\sqrt{{G_x}^2 + {G_y}^2}$, y el ángulo θ de $G(s)$ es $\tan^{-1}(G_y/G_x)$. El ángulo se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a partir del eje real positivo.

Transformada de Laplace a partir de la Transformada de Fourier

Para un sistema lineal invariante en el tiempo, con respuesta al impulso *h(t)*, la respuesta *y(t)* del sistema a una entrada exponencial compleja de la forma e^{st} esta dada por

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

Para *s* imaginaria (es decir, *s=jω*), la integral en la ecuación (1) corresponde a la transformada de Fourier de *h(t)*; mientras que para valores generales de la variable compleja *s*, se conoce como *transformada de Laplace* de la respuesta el impulso *h(t).*

Transformada (directa e inversa) de Laplace.

[Bolton, cap 4]

La **Transformada de Lapace** es un método que transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica más fácil de resolver. La ecuación que describe cómo se comporta un sistema en el tiempo se transforma en relaciones algebraicas sencillas, que no involucran el tiempo, donde es posible realizar las manipulaciones algebraicas normales de las cantidades. Se dice que el comportamiento del circuito en el *dominio del tiempo* se transforma al *dominio de s*, en el cual se pueden realizar manipulaciones algebraicas. Entonces se utiliza una transformada inversa, a fin de obtener la solución que describe como la señal varia con el tiempo, es decir, se transforma de regreso del dominio de *s* al dominio del tiempo.

[Distefano, cap 4]

Definición La transformada de Laplace se define de la siguiente manera:
Sea f(t) una función real de una variable real t definida para t > 0. Entonces

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad 0 < \epsilon < T$$

s es una variable compleja definida por $s = \sigma + j\omega$, donde σ y ω son variables reales y $j = \sqrt{-1}$.

Obsérvese que el límite inferior de la integral es $t = \epsilon > 0$. Esta definición del límite inferior algunas veces es útil cuando se trabaja con funciones que son discontinuas en $t = 0$. Cuando se hace uso *explicito* de este límite, se abrevia como $t = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon = 0^+$, como se muestra en la integral.

El inverso de la Transformada de Laplace

La transformada de Laplace transforma un problema de la variable real en el dominio del tiempo a la variable compleja en el dominio de *s.* Después, de haber obtenido una solución del problema transformando en términos de *s* es necesario "invertir" la transformada con el fin de obtener la solución en el dominio del tiempo. La transformación desde el dominio de *s* al dominio de *t* se denomina el inverso de la *Transformada de Laplace.*

Definición La *F(s)* la transformada de Laplace de una función *f(t)*, *t>0*. La integral de contorno

$$\mathcal{L}^{-1}[F(t)] = f(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)e^{st}ds$$

donde $j = \sqrt{-1}$ y $c > \sigma_0$ se llama inverso de la **Transformada de Laplace** de *F(s).*

Propiedades de la Transformada de Laplace

1. La transformada y la antitransformada de Laplace son *transformaciones lineales* entre funciones definidas en el dominio *s*. Es decir, si $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ respectivamente, entonces $a_1F_1(s)+ a_2F_2(s)$ es la transformada de Laplace de $a_1f_1(t)+ a_2f_2(t)$, donde a_1 y a_2 son constantes arbitrarias.
2. La transformada de Laplace de la *derivada* $\frac{df}{dt}$ de una función *f(t)* cuya transformada de Laplace es *F(s)* es

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

donde $f(0^+)$ es el valor inicial de $f(t)$, evaluada como el limite unilateral de *f(t)* a medida que *t* tiene a cero desde valores positivos.

3. La transformada de Laplace de la integral $\int_0^t f(\tau)d\,\tau$ de una función *f(t)* cuya transformada de Laplace es *F(s)* es

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\,\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Tabla de Trasformadas de Laplace

Función de tiempo		Trasformada de Laplace
Impulso unidad	$\delta(t)$	1
Paso unidad	$u(t)$	$1/s$
Rampa unidad	t	$1/s^2$
Polinomio	t^n	$n!/s^{n+1}$
Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Onda sinusoidal	$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Onda cosenoidal	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Onda sinusoidal amortiguada	$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Onda cosenoidal amortiguada	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Solución de las EDO por medio de la transformada de Laplace.

Ecuaciones diferenciales

Definición	Una **ecuación diferencial** es cualquier igualdad algebraica o trascendental que involucra ya sea diferenciales o derivadas.

Las ecuaciones diferenciales son útiles para relacionar las ratas de cambio de variables y otros parámetros.

Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales

Definición	Una **ecuación diferencial parcial** es una igualdad que involucra una o más variables dependientes y dos o más variables independientes, al igual que derivadas parciales de la variable dependiente con respecto a las variables independientes.
Definición	Una **ecuación diferencial ordinaria (total)** es una igualdad que involucra una o mas variables dependientes, una variable independiente y una o más derivadas de las variables dependientes con respecto a la variable independiente.

Ecuaciones diferenciales variables e invariables en el tiempo

Definición	Una **ecuación diferencial variable en tiempo** es una ecuación diferencial en la cual uno o más términos dependen *explícitamente* de la variable independiente *t*.
Definición	Una **ecuación diferencial invariable en tiempo** es una ecuación diferencial en la cual ninguno de los términos depende *explícitamente* de la variable independiente de tiempo *t*.

Plano complejo: mapa de polos y ceros

La función racional *F(s)* se puede escribir como:

$$F(s) = \frac{b_m \sum_{i=o}^{m} \frac{b_i}{b_m} s^i}{\sum_{i=o}^{m} a_i s^i} = \frac{b_m \prod_{i=0}^{m}(i + z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s + p_i)}$$

donde los termino $i + z_i$ son factores del polinomio del numerador y los términos $s + p_i$ son factores del polinomio del denominador.

Definición	Los valores de la variable compleja *s* para los cuales $\lvert F(s) \rvert$ es cero se llaman los **ceros** de $F(s)$
Definición	Los valores de la variable compleja *s* para los cuales $\lvert F(s) \rvert$ es infinito se llaman los **polos** de $\lvert F(s) \rvert$

Los polos y ceros son números complejos determinados por dos variables reales, una de las cuales representa la parte real y la otra, la parte imaginaria del número complejo. Un polo o cero se puede por tanto representar como un punto en coordenadas rectangulares. La *abscisa* de este punto representa la parte real y la *ordenada* la parte imaginaria. La abscisa también se llama eje σ

y la ordenada eje $j\omega$. El plano definido por este sistema de coordenadas se llama *plano complejo* o **plano s.** La parte del plano en la cual $\sigma < 0$ se llama **mitad izquierda del plano s (MIP)** y la parte en la cual $\sigma > 0$ se llama **mitad derecha del plano s (MDP).**

La localización de un polo es el plano *s* se marca simbólicamente con una cruz inclinada (X) y la localización de un cero con un pequeño círculo (°). El plano *s* incluyendo las localizaciones de los polos y ceros finitos de *F(s)* se denomina el **mapa de los polos y ceros** de *F(s).*

Retrospectiva de los sistemas de control.

Sistemas de control lineal y no lineal. Linealización.

Definición

Un **sistema lineal** es un sistema que tiene la propiedad de que si:

a) una entrada $x_1(t)$ produce una salida $y_1(t)$,
b) una estrada $x_2(t)$ produce una salida $y_2(t), entonces$
c) una entrada $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ produce una salida $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ para todos los pares de entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y todos los pares de constantes c_1 y c_2.

Los sistemas lineales se pueden representar a menudo por ecuaciones diferenciales lineales.

El concepto de linealidad se puede representar por el

Principio de superposición

La respuesta $y(t)$ de un sistema lineal, debida a varias entradas $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ que actúan simultáneamente, es igual a la suma de las respuestas de cada entrada actuando sola. Es decir, si $y_1(t)$ es la respuesta debida a la entrada $x_1(t)$, entonces

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_1(t)$$

El principio de superposición es una consecuencia aparente de la definición de linealidad. También debe tenerse en cuenta que cualquier sistema que satisface el principio de superposición es lineal. Los conceptos de *linealidad* y *superposición* son equivalentes.

Definición

La relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal a menudo se puede describir por la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

donde $x(t)$ es la entrada y $y(t)$ la salida resultante. La función de dos variables $\omega(t,\tau)$ que comprende las propiedades físicas del sistema se denomina la **función de peso** del sistema.

Definición

La integral de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

se llama **integral de convolución.**

Si un sistema lineal se describe por medio de una integral de convolución, entonces la salida $y(t)$ en un tiempo dado *t* es una suma *con peso* (una integral en el límite) de los valores de la entrada, a lo largo del intervalo desde menos infinito hasta más infinito. Es decir, la contribución que hace la entrada $x(\tau)$ a la salida $y(t)$ es un valor con peso de $x(\tau)$, donde el peso lo proporciona la función de peso $\omega(t,\tau)$.

Sistemas de control de lazo abierto y de lazo cerrado.

[Distefano, Cap 1]
Los sistemas se clasifican en dos grandes categorías: *Sistemas de Lazo abierto* y *sistemas de lazo cerrado.* La distinción la determina la acción de control, que es la cantidad que activa el sistema para producir la salida.

Definición	Un sistema de control de **lazo abierto** es aquel es el cual la acción de control es independiente de la salida.
Definición	Un sistema de control de **lazo cerrado** es aquel en el cual la acción de control es en cierto modo dependiente de la salida

Los sistemas de control de lazo abierto tienen dos rasgos sobresalientes:

1. La habilidad que éstos tienen para ajustar una acción con exactitud está determinada por su calibración. **Calibrar** significa establecer o restablecer una relación entre la entrada y la salida con el fin de obtener del sistema la exactitud deseada.
2. Estos sistemas no tiene problema de estabilidad.

Para clasificar un sistema de control como de lazo abierto o lazo cerrado, se deben distinguir claramente los componentes del sistema de los componentes que interactúan con él pero que no forman parte del mismo.

Los sistemas de control de lazo cerrado se llaman comúnmente sistemas de control por *retroalimentación.*

Efectos de la realimentación.

Definición	**Retroalimentación** es la propiedad de un sistema de lazo cerrado que permite que la salida (o cualquier otra variable controlada del sistema) sea comparada con la entrada al sistema (o con una entrada a cualquier componente interno del sistema o con un subsistema) de tal manera que se pueda establecer la acción de control apropiada como función de la entrada y la salida.

Existe retroalimentación en un sistema cuando existe una secuencia cerrada de relaciones de causa y efecto entre las variables del sistema.

2- MODELO MATEMÁTICO DE SISTEMAS

[Bolton, Cap 1, pag. 18]
Con la finalidad de entender el comportamiento de los sistemas es necesario obtener modelos matemáticos que los representen.

Un *modelo matemático* de un sistema es una "replica" de las relaciones entre entrada y salida o entre entradas y salidas. Las relaciones reales entre la entrada y la salida de un sistema se sustituyen por expresiones matemáticas.

Sistemas LIT, respuesta al impulso.

1. La función de transferencia de un sistema es la transformada de Laplace de su respuesta al impulso. Es decir, si la entrada de un sistema con una función de transferencia *P(s)* es un impulso, y todos los valores iniciales son cero, la transformada de la salida de *P(s).*

Integral de convolución.

[Distefano, Cap 3.6]

Definición

Un **sistema lineal** es un sistema que tiene la propiedad de que si:

a) una entrada $x_1(t)$ produce una salida $y_1(t)$,
b) una estrada $x_2(t)$ produce una salida $y_2(t), entonces$
c) una entrada $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ produce una salida $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ para todos los pares de entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y todos los pares de constantes c_1 y c_2.

Los sistemas lineales se pueden representar a menudo por ecuaciones diferenciales lineales.

El concepto de linealidad se puede representar por el

Principio de superposición

La respuesta $y(t)$ de un sistema lineal, debida a varias entradas $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ que actúan simultáneamente, es igual a la suma de las respuestas de cada entrada actuando sola. Es decir, si $y_1(t)$ es la respuesta debida a la entrada $x_1(t)$, entonces

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_1(t)$$

El principio de superposición es una consecuencia aparente de la definición de linealidad. También debe tenerse en cuenta que cualquier sistema que satisface el principio de superposición es lineal. Los conceptos de *linealidad* y *superposición* son equivalentes.

Definición

La relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal a menudo se puede describir por la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

donde $x(t)$ es la entrada y $y(t)$ la salida resultante. La función de dos variables $\omega(t,\tau)$ que comprende las propiedades físicas del sistema se denomina la **función de peso** del sistema.

Definición

La integral de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

se llama **integral de convolución.**

Si un sistema lineal se describe por medio de una integral de convolución, entonces la salida $y(t)$ en un tiempo dado *t* es una suma *con peso* (una integral en el límite) de los valores de la entrada, a lo largo del intervalo desde menos infinito hasta más infinito. Es decir, la contribución que hace la entrada

$x(\tau)$ a la salida $y(t)$ es un valor con peso de $x(\tau)$, donde el peso lo proporciona la función de peso $\omega(t,\tau)$.

Función de transferencia.

[Bolton, Cap 1, pag. 19]

Se puede definir la función de transferencia como el cociente de la salida en estado estable y la entrada en estado estable para un sistema o subsistema

$$Función\ de\ transferencia\ G = \frac{salida\ en\ estado\ estable}{entrada\ en\ estado\ estable}$$

[Ogata, Cap 3, pag. 55]

En la teoría de control, se utiliza las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo.

La **Función de Transferencia** de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo descripto mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$a_0 y + a_1 y + \cdots + a_n y = b_0 x + b_1 x + \cdots + b_m x \quad (n \geq m)$$

donde y es la salida del sistema y x es la entrada. La función de transferencia de este sistema es el cociente de la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero

$$Función\ de\ transferencia = G(s) = \frac{\mathcal{L}[output]}{\mathcal{L}[input]} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

La aplicación del concepto de función de transferencia está limitada a los sistemas descriptos mediante ecuaciones diferenciales lineales invariante en el tiempo.

Características:

- La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
- La función de transferencia es una propiedad de un sistema, independientemente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
- La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información acerca de la estructura física del sistema.
- Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se estudia la salida o respuesta para varias formas de entrada, con la intención de comprender la naturaleza del sistema.
- Si se desconoce la función de transferencia, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida

una función de transferencia, proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema, a diferencia de su descripción física.

[Distefano, Cap 3, pag. 55]

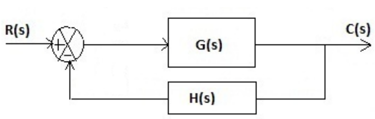
Propiedades

2. La función de transferencia de un sistema es la transformada de Laplace de su respuesta al impulso. Es decir, si la entrada de un sistema con una función de transferencia *P(s)* es un impulso, y todos los valores iniciales son cero, la transformada de la salida de *P(s).*
3. La función de transferencia del sistema se puede determinar a partir de la ecuación diferencial del sistema, usando la transformada de Laplace e ignorando todos los términos ocasionados por valores iniciales. La función de transferencia *P(s)* está dada entonces por
$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$
4. La ecuación diferencial del sistema se puede obtener de la función de transferencia remplazando la variable *s* por el operador diferencial *D* definido por $D = \frac{d}{dt}$.
5. La estabilidad de un sistema lineal invariable con el tiempo se puede determinar de la ecuación característica. El denominador de la función de transferencia del sistema igualado a cero, constituye la ecuación característica. En consecuencia, si todas las raíces del denominador tienen partes reales negativas, el sistema es estable.
6. Las raíces del denominador son los polos del sistema y las raíces del numerador son los ceros del sistema. La función de transferencia del sistema se puede entonces especificar como una constante, especificando los polos y ceros del sistema. Esta constante, que generalmente se denota por *K,* es el **factor de ganancia** del sistema. Los polos y ceros del sistema se pueden representar esquemáticamente por un mapa de polos y ceros en el plano *s.*

En Lazo abierto:

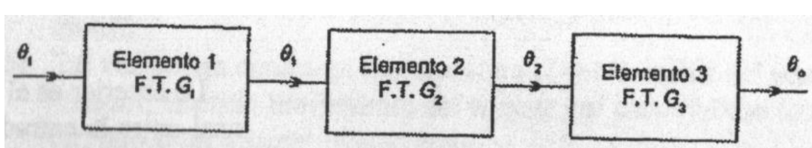
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

En Lazo cerrado:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) * H(s)}$$

Modelos matemáticos para sistemas de lazo abierto



Existes muchas situaciones donde se requiere la función de trasferencia para varios elementos en serie. Considere tres elementos en serie. Los tres elementos pueden ser un sistema en lazo abierto puesto que no hay lazo de realimentación, o solo tres elementos de un sistema más grande.
Para el elemento 1 la función de transferencia *G_1* es la salida $\theta_1$dividida entre la entrada θ_i,G_1= $\frac{\theta_1}{\theta_i}$
Para el elemento 2, G_2= $\frac{\theta_2}{\theta_1}$
Para el elemento 3, G_3= $\frac{\theta_0}{\theta_2}$

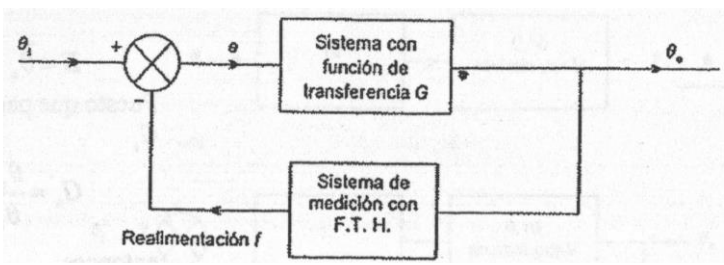
La función de transferencia global del sistema es la salida $\theta_0$dividida entre la entrada θ_i. Pero esto se puede escribir como

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{\theta_1}{\theta_i} x \frac{\theta_2}{\theta_1} x \frac{\theta_0}{\theta_2}$$

Por lo tanto, para el sistema en lazo abierto

Función de transferencia = *G_1* x *G_1* x *G_1*

Modelo matemático para sistemas de lazo cerrado



La figura muestra un sistema en lazo cerrado sencillo. Si $\theta_i$es el valor de referencia, es decir, la entrada, y si $\theta_0$es el valor real, es decir, la salida del sistema, entonces la función de transferencia del sistema completo es

$$Función\ de\ transferencia\ G = \frac{salida}{entrada} = \frac{\theta_i}{\theta_0}$$

Cada subsistema del sistema global tiene su propia función de transferencia. De este modo, si el sistema que se controla tiene una función de transferencia *G*, entonces con su entrada de la señal de error *e* y salida θ_0,

$$G = \frac{\theta_0}{e}$$

Si la trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia *H,* con entrada θ_0y salida *f*

$$H = \frac{f}{\theta_0}$$

La señal de error *e* es la diferencia entre θ_i y *f*, la señal de realimentación *f* es una medida de la salida del sistema completo.

$$e = \theta_i - f$$

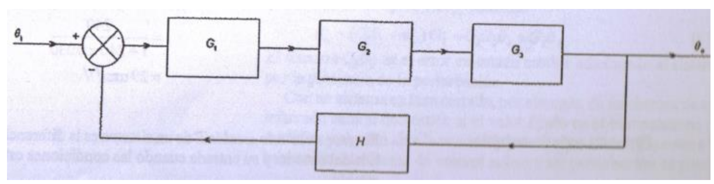
Al sustituir *e* y *f*, despejándolas a partir de las dos ecuaciones anteriores,

$$\frac{\theta_0}{G} = \theta_i - H\theta_0$$

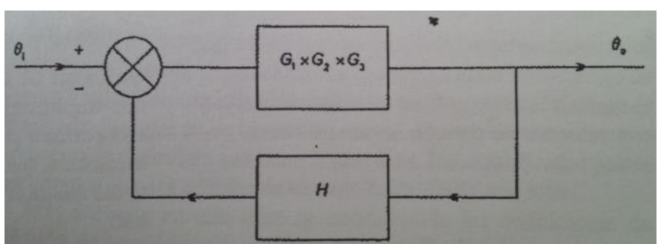
$$\theta_0\left(\frac{1}{G}+H\right)=\theta_1$$
$$\theta_0\left(\frac{1+GH}{G}\right)=\theta_i$$
Por lo tanto, la función de transferencia global del sistema de control en lazo cerrado es
$$Función\ de\ transferencia\ G=\frac{\theta_i}{\theta_0}=\frac{1+GH}{G}$$
La ecuación anterior se aplica a realimentación negativa. Con realimentación positiva el denominador de la ecuación anterior se convierte en $(1-GH)$.
En sistemas de lazo cerrado, *G* se conoce como la *función de transferencia de la trayectoria directa*, puesto que es la función de transferencia que relaciona las señales que se mueven hacia adelante a través del sistema de la entrada a la salida. *GH* se conoce como *función de transferencia de lazo*, ya que es el término que se representa en la expresión como resultado del lazo de realimentación.

Modelos matemáticos para sistemas de lazo cerrado con elementos múltiples.

La función de transferencia para el sistema completo se puede obtener determinando primero la función de transferencia para los tres elementos en serie. Como estos tienen funciones de transferencia G_1, G_2 y G_3, entonces la función de transferencia combinada es



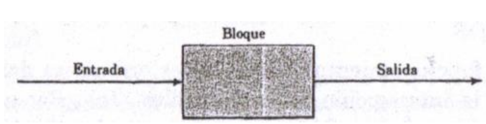
$$FT\ de\ los\ elemetos\ en\ serie=G_1\ x\ G_2\ x\ G_3$$
El sistema se puede reemplazar por el sistema equivalente más sencillo.



Ahora, este es solo un elemento con una función de transferencia de $G_1\ x\ G_2\ x\ G_3$ y un lazo de realimentación con una función de transferencia *H.* La función de transferencia global para este sistema es entonces
$$FT\ del\ sistema=\frac{\theta_0}{\theta_i}=\frac{G_1\ x\ G_2\ x\ G_3}{1+(G_1\ x\ G_2\ x\ G_3)H}$$

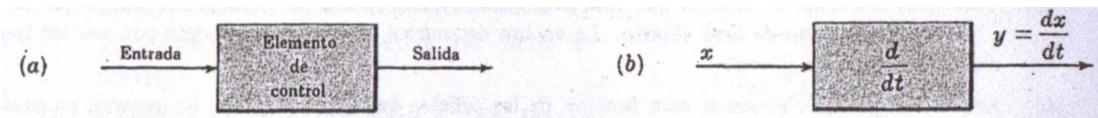
Diagramas de bloques.

[Distefano, Cap 2]
Un **diagrama en bloque** es una representación visual simplificada de la relación de causa y efecto que existe entre la entrada y la salida de un sistema físico. El diagrama suministra un método útil y conveniente para caracterizar las relaciones funcionales entre los diferentes componentes de un

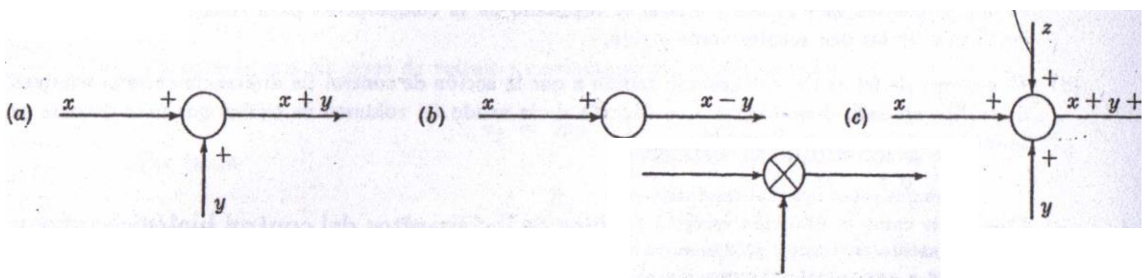


sistema de control. Los *componentes* del sistema se conocen alternativamente con el nombre de *elementos* del sistema. La forma más sencilla del diagrama en bloques es el *bloque* simple que lleva una entrada y una salida:

El interior del rectángulo que representa al bloque generalmente contiene la descripción o el nombre del elemento, o el símbolo de la operación matemática que se ejecuta sobre la entrada, con el fin de obtener la salida. Las *flechas* representan la dirección de la información unilateral o el flujo de señales.

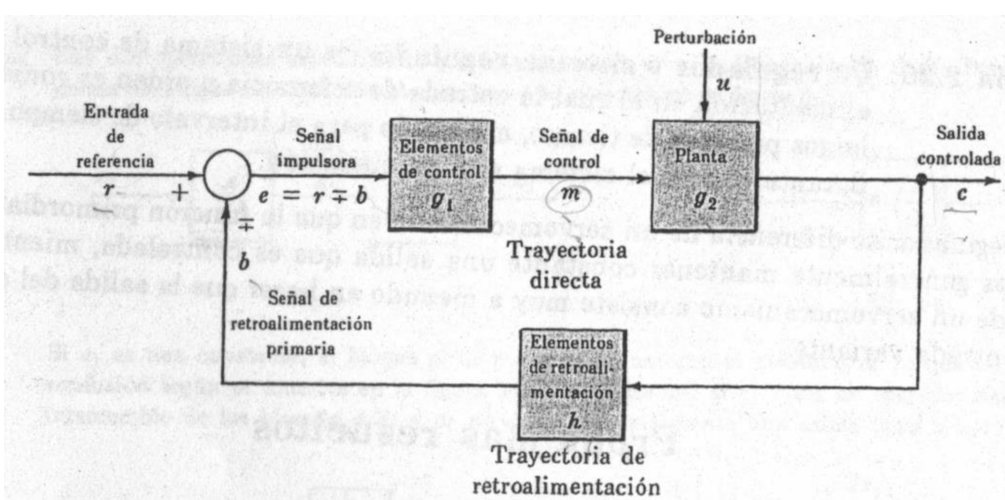


Las operaciones de adición y sustracción tienen una representación especial. El bloque se cambia por un pequeño círculo, llamado **punto de suma** con el signo apropiado (más o menos), acompañando las flechas que llegan al círculo. La salida es la suma algebraica de las entradas. Cualquier número de entradas se puede aplicar al punto de suma.



Con el fin de emplear la misma señal o variable como entrada a más de un bloque o punto de suma, se una un **punto de reparto**. Esto permite que la señal prosiga sin alteración a lo largo de diferentes trayectorias hacia varis destinos.

En la configuración de un sistema de control simple de lazo cerrado (retroalimentación), se debe notar que las flechas del lazo cerrado que interconectan los bloques, representan la dirección del flujo de la energía de *control* y no la fuente principal de energía para el sistema.



Para representar la salida de cada elemento se usan letras minúsculas tal como para los símbolos de los bloques g_1, g_2, y h. Estas cantidades representan funciones de tiempo, a no ser que se especifique lo contrario.

$$\text{Ej: } r = r(t)$$

Las letras mayúsculas representan transformadas de Laplace de cantidades que son funciones de la variable compleja s, o transformadas de Fourier de cantidades (funciones de frecuencia) que son funciones de s generalmente se abrevian con una letra minúscula sola. Las funciones de frecuencia nunca se abrevian.

$$\text{Ej: R(s) se abrevia como R. R(j}\omega\text{)nunca se abrevia}$$

Definición La planta g_2, llamada también **sistema controlado**, es el cuerpo, proceso o maquina de la cual se va a controlar una cantidad o condición particular.

Definición Los **elementos de control** g_1, también llamados el **controlador,** son los componentes requeridos para generar la señal de control apropiada m que se aplica a la planta.

Definición Los **elementos de retroalimentación** h son los componentes que se requieren para establecer la relación funcional entre la señal de retroalimentación primaria b y la salida controlada c.

Definición La **entrada de referencia** r es una señal externa aplicada a un sistema de control por retroalimentación con el fin de ordenar la planta una acción especificada. A menudo representa un comportamiento ideal de la salida de la planta.

Definición La **salida controlada** c es esa cantidad o condición de la planta que se controla.

Definición La salida de **retroalimentación primaria** b es una señal que es función de la salida controlada c, y que se suma algebraicamente a la entrada de referencia r para obtener la señal impulsora e.

Definición La **señal impulsora** e, también denominada **error o acción de control,** es una suma algebraica de la entrada de referencia r más o menos (usualmente menos) la retroalimentación primaria b.

Definición La **variable manipulada** m (señal de control) es esa cantidad o condición que los elementos de control g_1 aplican a la planta g_2.

Definición Una **perturbación** u es una señal de entrada indeseable que afecta el valor de la salida controlada c. puede entrar a la planta sumándose con m o a través de un punto intermedio.

Definición La **trayectoria directa** es la vía de transmisión desde la señal impulsora *e* hasta la salida controlada *c*.

Terminología Suplementaria

Definición Un **trasductor** es un dispositivo que convierte una forma de energía en otra.

Definición Cuando el elemento de retroalimentación está formado por un trasductor y se requiere otro a la entrada, la parte del sistema de control que se lustra en la figura (b), se llama **detector de error.**

Definición En la **retroalimentación negativa** el punto de suma es un sustractor, luego $e = r\text{-}b$.

Definición En la **retroalimentación positiva** el punto de suma es un sumador, luego $e = r+b$.

Definición Un estimulo es una señal de entrada que se introduce externamente y que aecta la salida controla *c*.

Servomecanismo

Definición Un **servomecanismo** es un sistema de control por retroalimentación con amplificación de potencia en el cual la variable controlada *c* es una posición mecánica o una derivación de posición, con respecto al tiempo tal como la velocidad o la aceleración.

Reguladores

Definición Un **regulador** o **sistema regulador** es un sistema de control por retroalimentación en el cual la entrada de referencia u orden es constante para largos periodos de tiempo, a menudo para el intervalo de tiempo completo, durante el cual el sistema está en operación.

Un regulador se diferencia de un servomecanismo en que la función primordial de un regulador es generalmente mantener constante una salida que es controlada, mientras que la función de un servomecanismo consiste muy a menudo en hacer que la salida del sistema siga una entrada variante.

Algebra de los diagramas de bloque y funciones de transferencia

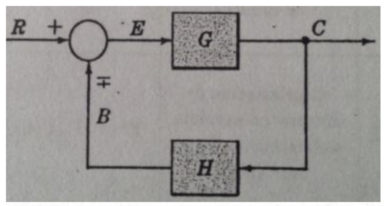
[Distefano, Cap 7]

Bloques en cascada

Cualquier número de bloques en serie se puede combinar algebraicamente por medio de multiplicación. Es decir, *n* componentes o bloques con las funciones de transferencia $G_1, G_2, \ldots, G_n$ conectados en cascada son equivalentes a un solo elemento *G* con una función de transferencia dad por

$$G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n = \prod_{i=1}^{n} G_i$$

Forma canoníca de un sistema de control por retroalimentación



La configuración que muestra la figura se denomina **forma canoníca** de un sistema de control por retroalimentación.

Definición G = función de transferencia directa = función de transferencia hacia adelante.

Definición H = función de transferencia de retroalimentación

Definición GH = función de transferencia de lazo = función de transferencia de lazo abierto

Definición $\frac{C}{R}$ = función de transferencia de lazo cerrado = razón de control

Definición $\frac{E}{R}$ = razón de señal impulsora = razón de error

Definición $\frac{B}{R}$ = razón de retroalimentación primaria

En las siguientes ecuaciones, el signo (-) se refiere a un sistema de retroalimentación *positiva* y el signo (+) se refiere a un sistema de retroalimentación *negativa.*

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 \pm GH}$$

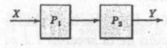
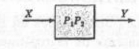
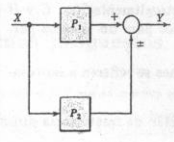
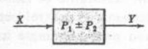
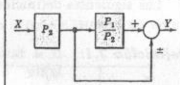
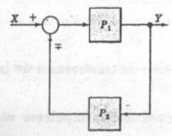
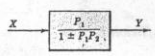
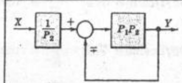
$$\frac{B}{R} = \frac{GH}{1 \pm GH}$$

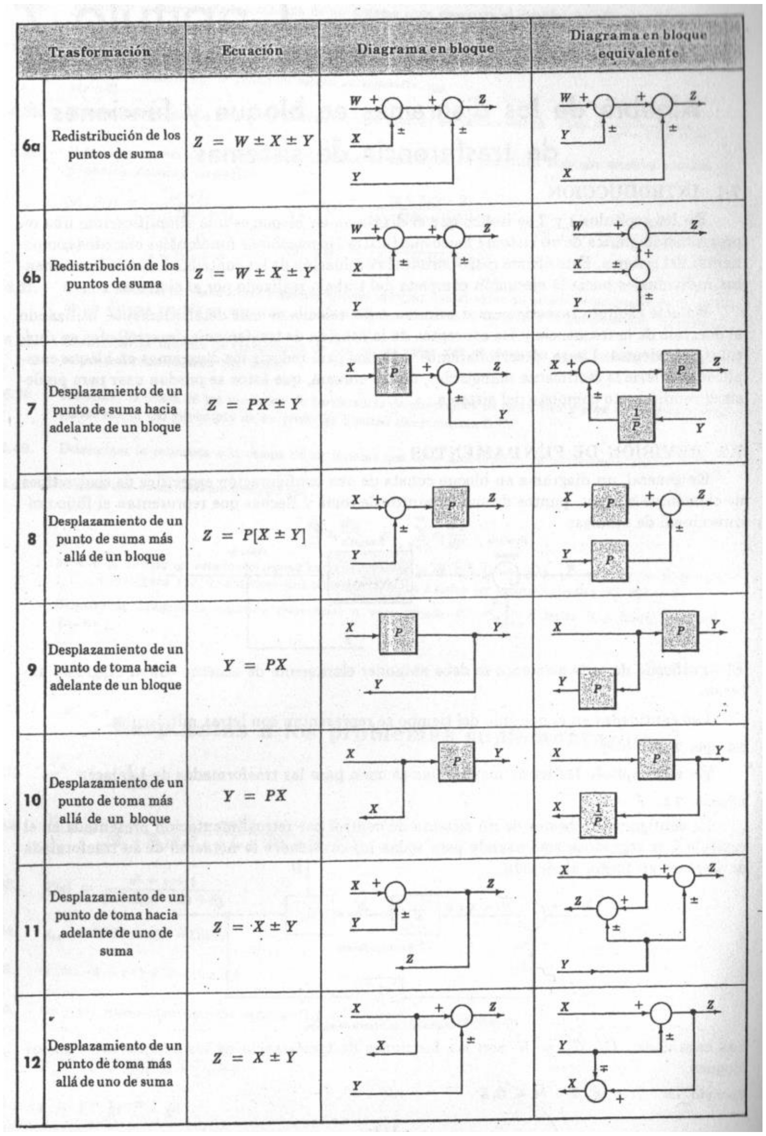
La *ecuación característica* del sistema, el cual se determina a partir de $1 \pm GH = 0$, es

$$D_{GH} \pm N_{GH} = 0$$

donde D_{GH} es el denominador y N_{GH} es el numerador de GH.

Teoremas de transformación de los diagramas en bloque

	Trasformación	Ecuación	Diagrama en bloque	Diagrama en bloque equivalente
1	Combinación de bloques en cascada	$Y = (P_1P_2)X$		
2	Combinación de bloques en paralelo o eliminación de un lazo directo	$Y = P_1X \pm P_2X$		
3	Eliminación de un bloque de la trayectoria directa	$Y = P_1X \pm P_2X$		
4	Eliminación de un lazo de retroalimentación	$Y = P_1(X \mp P_2Y)$		
5	Eliminación de un bloque de un lazo de retroalimentación	$Y = P_1(X \mp P_2Y)$		



	Trasformación	Ecuación	Diagrama en bloque	Diagrama en bloque equivalente
6a	Redistribución de los puntos de suma	$Z = W \pm X \pm Y$		
6b	Redistribución de los puntos de suma	$Z = W \pm X \pm Y$		
7	Desplazamiento de un punto de suma hacia adelante de un bloque	$Z = PX \pm Y$		
8	Desplazamiento de un punto de suma más allá de un bloque	$Z = P[X \pm Y]$		
9	Desplazamiento de un punto de toma hacia adelante de un bloque	$Y = PX$		
10	Desplazamiento de un punto de toma más allá de un bloque	$Y = PX$		
11	Desplazamiento de un punto de toma hacia adelante de uno de suma	$Z = X \pm Y$		
12	Desplazamiento de un punto de toma más allá de uno de suma	$Z = X \pm Y$		

Entradas múltiples

Cuando están presentes entradas múltiples en un sistema *lineal*, cada una se trata independientemente de las otras. La salida ocasionada por todos los estímulos actuando conjuntamente se encuentra de la siguiente manera:

Paso 1: Igualar todas las entradas a cero excepto una.

Paso 2: Transformar el diagrama en bloque a la forma canoníca, usando las transformaciones de la tabla anterior.

Paso 3: Calcular la respuesta debida a la entrada escogida actuando sola.

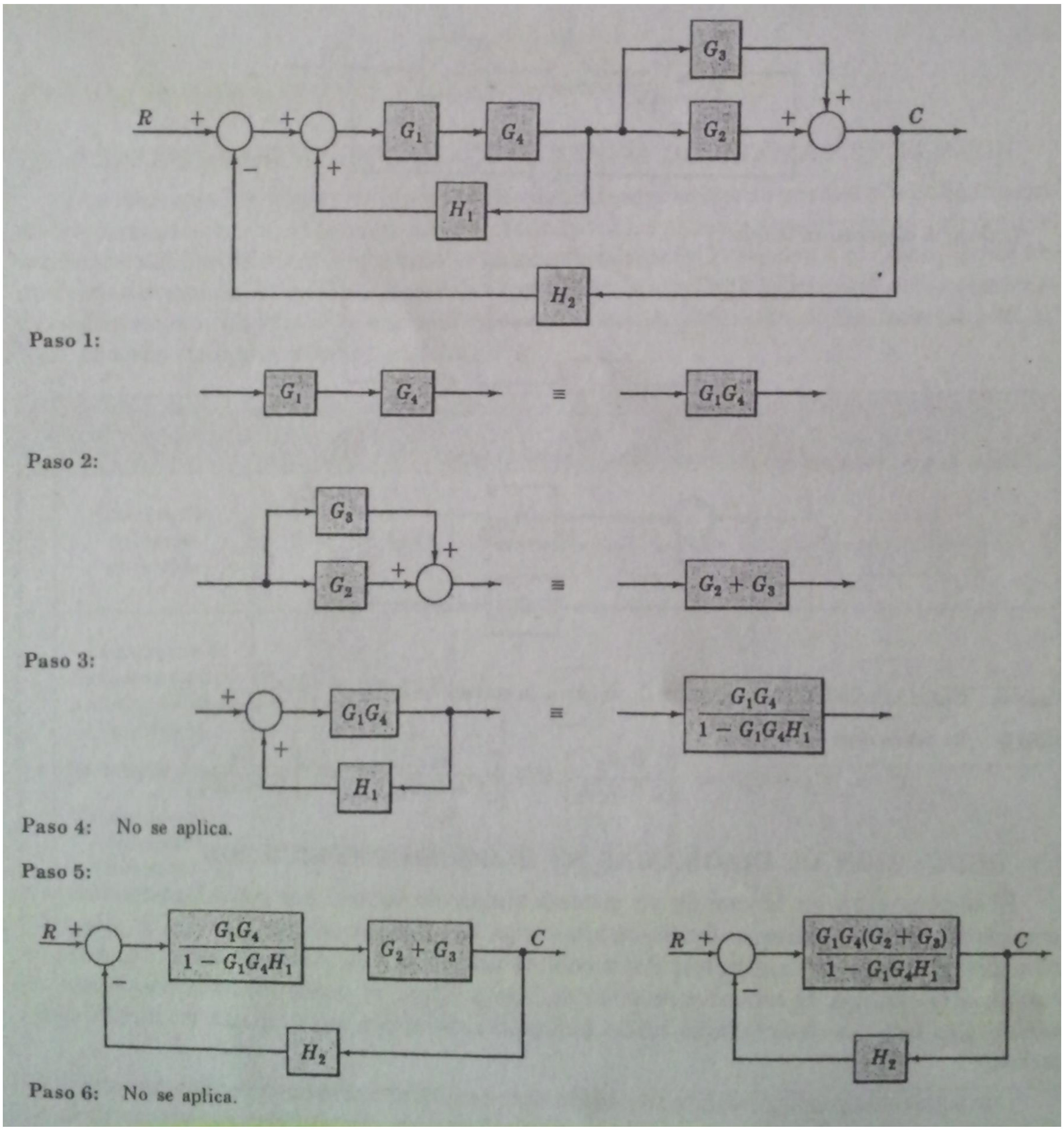
Paso 4: Repetir los pasos 1 a 3 para cada una de las entradas restantes.

Paso 5: Añadir algebraicamente todas las respuestas (salidas) determinadas de los pasos 1 a 5. Esta suma es la salida total del sistema con todas las entradas actuando simultáneamente.

Reducción de diagramas en bloques complicados

Paso 1: combinar todos los bloques en cascada usando la transformación 1.

Paso 2: Combinar todos los bloques en paralelo usando la transformación 2.
Paso 3: eliminar todos los lazos menores de retroalimentación usando la transformación 4.
Paso 4: desplazar los puntos de suma hacia la izquierda y los puntos de toma hacia la derecha del lazo principal, usando las transformaciones 7, 10, 12.
Paso 5: repetir los pasos 1 a 4 hasta que se logre la forma canoníca para una entrada particular.
Paso 6: repetir los pasos 1 a 5 para cada entrada según sea necesario.



Gráficos de flujo de señal. Fórmula de Mason.

[Distefano, Cap 8, pag. 137]

Una **grafica de flujo de señales** es una representación pictórica de las ecuaciones simultáneas que describen un sistema. Es ésta se muestra la transmisión de señales por el sistema como se hace en el diagrama de bloques. Sin embargo, la grafica del flujo de señales es más fácil de dibujar y de manejar que el diagrama de bloques.

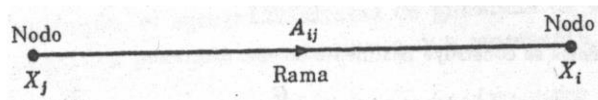
Fundamentos

Considere la ecuación simple

$$X_i = A_{ij}X_j$$

En lo que respecta a graficas del flujo de señales, A_{ij} es un operador matemático que proyecta a X_j sobre X_i, y se denomina **función de transmisión.**

La grafica del flujo de señales para la ecuación es:



Obsérvese que las variables X_i y X_j están representadas por un punto llamado **nodo** y la función de transmisión A_{ij} se representa por una línea con una flecha, llamada **rama.**

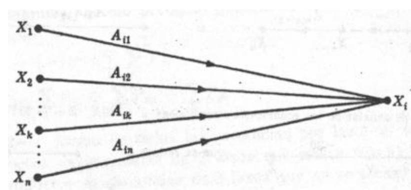
Cada variable en una grafica del flujo de señales se designa por un nodo y cada función de transmisión por una rama. Las ramas son siempre unidireccionales. La fecha indica la dirección del flujo de señales.

Algebra de las graficas del flujo de señales

Regla de adición

El valor de la variable que se designa por un nodo e igual a la suma de todas las señales que llegan al nodo.

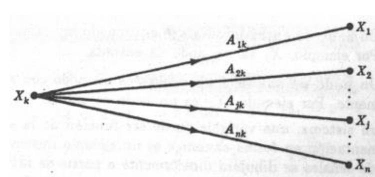
$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j$$



Regla de transmisión

El valor de la variable que se designa por un nodo, se transmite sobre cada rama que parte del nodo

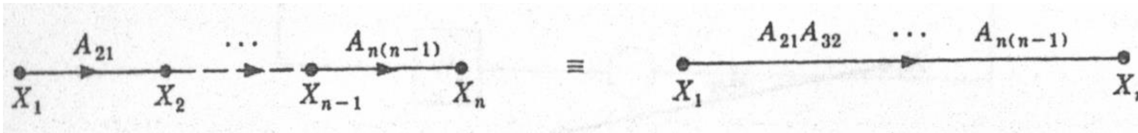
$$X_i = A_{ik}X_k \qquad i = 1,2, \ldots, n, k\ fijo$$



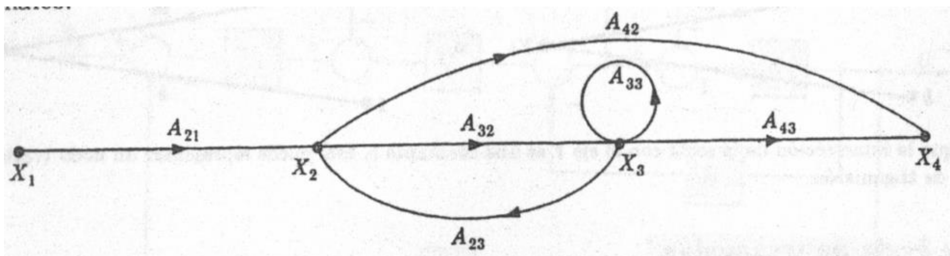
Regla de multiplicación

Una conexión en cascada (serie) de *n-1* ramas con funciones de transmisión $A_{21}, A_{32}, A_{43} \ldots, A_{n(n-1)} \cdot X_1$ se puede reemplazar por una sola rama, con una nueva función de transmisión igual al producto de las anteriores. Esto es,

$$A_n = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{43} \cdot \ldots \cdot A_{n(n-1)} \cdot X_1$$



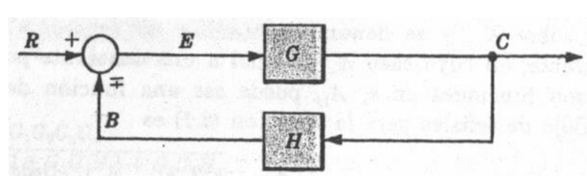
Definiciones

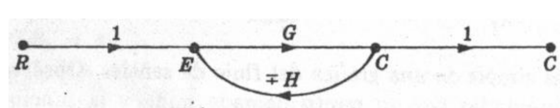


Definición	Una **trayectoria** es una sucesión unidireccional de ramas a lo largo de la cual ningún nodo se pasa más de una vez.
Definición	Un **nodo de entrada** o **fuente** es un nodo con ramas salientes solamente.
Definición	Un **nodo de salida o absorción** es un nodo con ramas entrantes solamente.
Definición	Una **trayectoria directa** es una trayectoria que va desde el nodo de entrada hasta el nodo de salida.
Definición	Una **trayectoria de retroalimentación o lazo de retroalimentación** es una trayectoria que se origina y termina sobre el mismo nodo.
Definición	Un **lazo simple** es un lazo de retroalimentación que consiste en una sola rama.
Definición	La **ganancia** de una rama es la función de transmisión de esa rama, cuando la función de transmisión es un operador multiplicativo.
Definición	La **ganancia de trayectoria** es el producto de las ganancias de las ramas que se encuentran al atravesar una trayectoria.
Definición	La **ganancia de lazo** es el producto de las ganancias de las ramas del lazo.

Construcción de graficas del flujo de señales

La grafica del flujo de señales de un sistema de control literal por retroalimentación cuyos componentes se especifican por medio de funciones de transferencia que no interfieren entre sí, se puede construir directamente refiriéndose al diagrama en bloque del sistema. Cada variable del diagrama en bloque viene a ser un nodo y cada bloque viene a ser una rama.





La grafica del flujo de señales de un sistema descripto por un conjunto de ecuaciones simultáneas se puede construir de la siguiente manera:

1. Las ecuaciones del sistema se escriben de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
X_1 &= A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n \\
X_2 &= A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{2n}X_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_m &= A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \cdots + A_{mn}X_n
\end{aligned}
$$

2. Se ordenan nodos de *m* o *n* (el que sea más grande) de izquierda a derecha. Los nodos se pueden volver a ordenar si los lazos requeridos se vuelven luego difíciles de manejar.
3. Se conectan los nodos por medio de las ramas apropiadas, A_{11}, A_{12}, etc.
4. Si el nodo de salida deseado tiene ramas salientes, se añade un nodo ficticio y una rama de ganancia de unidad.
5. Se vuelven a ordenar los nodos y los lazos en la grafica con el fin de obtener máxima claridad.

Mason: Formula general de la ganancia entre entrada y salida

Se demostró que es posible reducir diagramas en bloque complicados a la forma canónica, de donde se puede fácilmente escribir la razón de control:

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

Es posible simplificar gráficas del flujo de señales de una manera similar a la simplificación de diagramas de bloque. Pero también es posible, y en forma más rápida, escribir por *simple inspección* la relación entre la entrada y la salida a partir de la grafica original del flujo de señales.

La razón de la variable de entrada y la variable de salida se puede designar por *T.* Para sistemas lineales de control de retroalimentación $T = \frac{C}{R}$. Para la gráfica general del flujo de señales presentada en los parágrafos $T = \frac{X_n}{X_1}$, donde X_n es la salida y X_1es la entrada.

La formula general para cualquier grafica del flujo de señales es

$$T = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

donde

P_i es la ganancia de la *i*-ésima trayectoria directa.

P_{jk} es cualquier *j*-ésimo producto posible de las *k* ganancias de lazos que no se tocan

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk}$$

$$\Delta = 1 - \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} - \sum_j P_{j3} + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta \\
&= 1 - (suma\ de\ todas\ las\ ganancias\ por\ lazo) \\
&+\ (suma\ de\ toos\ los\ productos\ de\ ganancias\ de\ 2\ lazos\ que\ no\ se\ tocan) \\
&-\ (suma\ de\ todos\ los\ productos\ de\ ganancias\ de\ 3\ lazos\ que\ no\ se\ tocan) + \ \ldots
\end{aligned}
$$

Δ_i valor de Δ evaluado cuando se eliminan todos los lazos P_i que se tocan.

Se dice que dos lazos, trayectorias, o un lazo y una trayectoria **no se tocan** si no tienen nodos comunes. Δ es el **determinante de la grafica del flujo de señales o función característica,** puesto que $\Delta = 0$ es la ecuación característica del sistema.

Reducción de diagramas en bloque usando graficas del flujo de señales y la formula general de la ganancia entre entrada y salida

La manera más fácil de determinar la razón de control de un diagrama en bloque consiste en convertir el diagrama en bloque en una grafica del flujo de señales y aplicar luego la ecuación

$$T = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

Los puntos de toma y los puntos de suma se deben separar por una rama de ganancia de unidad en la grafica del flujo de señales cuando se usa la ecuación anterior.

Si se desean los elementos *G* y *H* de una representación de retroalimentación en forma canónica, la ecuación anterior también se puede suministrar esta información. La función de transferencia directa es

$$G = \sum_i P_i \Delta_i$$

La función de transferencia del lazo es $GH = \Delta - 1$

Estas dos últimas ecuaciones se resuelven simultáneamente para *G* y *H,* y el sistema de control por retroalimentación en forma canónica se dibuja a partir del resultado.

3- ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

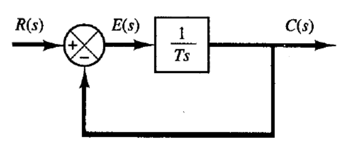
En el análisis y diseño de sistemas de control, debemos tener una base de comparación del desempeño de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.
Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba). El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.
La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia bajo una operación normal determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema. Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual, una función rampa sería una buena señal de prueba. Asimismo, si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas una función escalón sería una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso sería la mejor.
Una vez diseñado un sistema de control con base en las señales de prueba, por lo general el desempeño del sistema en respuesta a las entradas reales es satisfactorio. El uso de tales señales de prueba permite comparar el desempeño de todos los sistemas sobre la misma base.

Señales de prueba típicas. Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples.

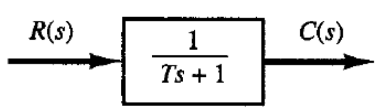
Respuesta transitoria y respuesta en estado estable. La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable. Por respuesta transitoria nos referimos a la que va del estado inicial al estado final. Por respuesta en estado estable, nos referimos a la manera en la cual se comporta la salida del sistema conforme t tiende a infinito.

Sistemas de primer Orden

Considere el sistema de primer orden de la figura



Físicamente, este sistema representa un circuito ***RC,*** un sistema térmico o algo similar. La figura



presenta un diagrama de bloques simplificado. La relación entrada-salida se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (1)$$

En lo sucesivo, analizaremos las respuestas del sistema a entradas tales como la función escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario. Se supone que las condiciones iniciales son cero.

Respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden.

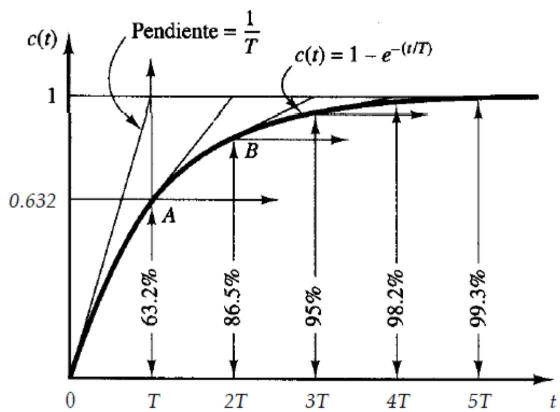
Dado que la transformada de Laplace de la función escalón unitario es $\frac{1}{s}$, sustituyendo ***R(s)*** = l/s en la ecuación (l), obtenemos

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}$$

Al expandir por facciones simples y tomar la transformada inversa de Lapace, obtenemos

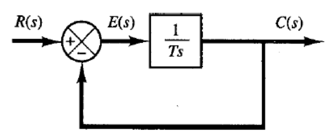
$$C(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad para\ t \geq 0$$

La ecuación anterior plantea que la salida $c(t)$ es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria.



Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden.

Dado que la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es $1/s^2$, obtenemos la salida del sistema de la siguiente figura como



$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2}$$

Si expandimos $C(s)$ en fracciones simples y aplicamos la transformada inversa de Laplace obtenemos

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad para\ t \geq 0$$

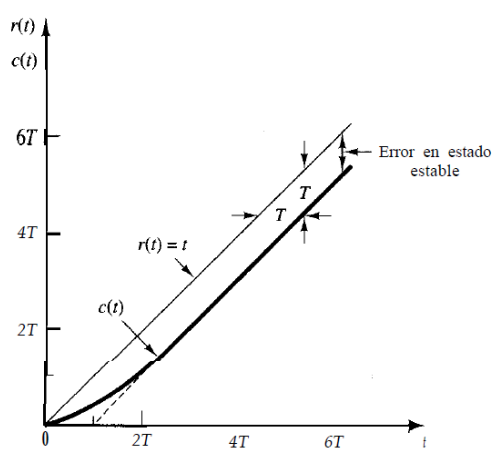
De este modo, la señal de error *e(t)* es

$$e(t) = r(T) - C(t) = T(1 - e^{-t/T})$$

Conforme t tiende a infinito, e-t/T se aproxima a cero y, por tanto, la señal de error *e(t) se* aproxima a *T o*

$$e(\infty) = T$$

La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestran en la figura a continuación:



El error después de la entrada rampa unitaria es igual a T para una t suficientemente grande. Entre más pequeña es la constante de tiempo T, más pequeño es el error en estado estable después de la entrada rampa.

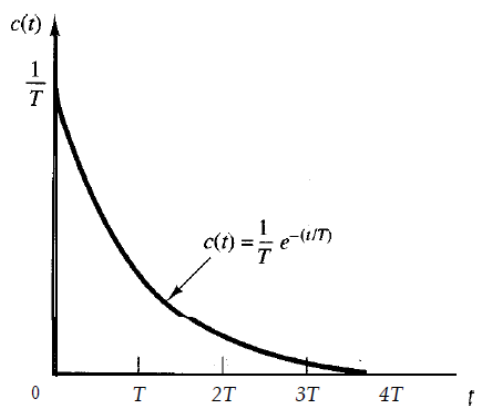
Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden.
Para la entrada impulso unitario, la transformada es R(s) = 1 y la salida del sistema puede obtenerse como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

O bien

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}, \qquad para\ t \geq 0$$

La curva de respuesta obtenida mediante la ecuación anterior aparece en la figura a continuación:



Especificaciones en el dominio del tiempo.

Análisis transitorio de sistemas de primer y segundo orden. Uso de Matlab.

Parámetros de normalización:

Frecuencia natural no amortiguada y relación de amortiguamiento.

Identificación de parámetros de la planta a partir de la respuesta temporal a señales de

excitación típicas. Uso de Matlab.

Respuesta de sistemas de orden superior. Polos complejos dominantes

Efectos del incremento de ganancia en sistemas de segundo orden de lazo cerrado.

Acciones básicas de control.

Utilización de software específico, el Matlab.

4- RESPUESTA EN RÉGIMEN PERMANENTE Y ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO

Estabilidad relativa y estabilidad absoluta. Criterio de Routh.

[Ogata, Cap 5, pág. 135]

Al diseñar un sistema de control, debemos ser capaces de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de los componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable.

[Distefano, Cap 5]

La consideración del grado de estabilidad de un sistema, a menudo proporciona una valiosa información sobre su comportamiento. Es decir, si un sistema es estable, ¿cuán cerca está de ser inestable? Este es el concepto de **estabilidad relativa.** Generalmente, la estabilidad relativa se expresa en términos de alguna variación permitida en un parámetro de un sistema particular, para la cual el sistema permanecerá estable.

[Distefano, Cap 5]

La estabilidad de un sistema se determina por su respuesta a las entradas o las perturbaciones. Intuitivamente, un sistema estable es aquel que permanece en reposo a no ser que se excite por una fuente externa y en tal caso, volverá al reposo una vez que desaparezcan todas las excitaciones.

La estabilidad se puede definir exactamente, en términos de la respuesta al impulso de un sistema.

Definición Un sistema es **estable** si su respuesta al impulso tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito.

Alternativamente, la definición de un sistema estable se puede basar en la respuesta del sistema a entradas limitadas, es decir, entradas cuyas magnitudes son inferiores a un valor finito para todo tiempo.

Definición Un sistema es **estable** si la entrada limitada produce una salida limitada.

[Bolt, Cap 8, pag. 182]

Definición Si la salida no tiende a cero o no crece a infinito, pero tiende a un valor finito diferente de cero, se dice entonces que el sistema es **críticamente o marginalmente inestable.**

[Distefano, Cap 5, pág. 87]

Localización de las raíces características (Estabilidad y Polos para Bolt)

La respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo, se compone de funciones exponenciales de tiempo cuyos exponentes son las raíces de la ecuación característica del sistema. Una condición necesaria para que el sistema sea estable es que las partes reales de las raíces de la ecuación característica, sean partes reales negativas. Esto asegura que la respuesta al impulso decaerá exponencialmente con el tiempo. Si solo uno de los términos exponenciales es una exponencial creciente, entonces la salida crece de manera continua con el tiempo y el sistema es inestable.

[Bolt, Cap 8, pág. 188]

De esta manera, si todos los polos están en el lado izquierdo del patrón de polos y ceros, el sistema es **estable**. Si solo uno de los polos esta en el lado derecho del dicho patrón, este es **inestable.** Un sistema es críticamente estable si uno o más polos están sobre el eje vertical del patrón de polos y ceros, es decir, tienen parte real cero, y no hay polos en el lado derecho.

Si solo interesa la estabilidad, los polos de la función de transferencia son importantes y los valores de los ceros del sistema son irrelevantes.

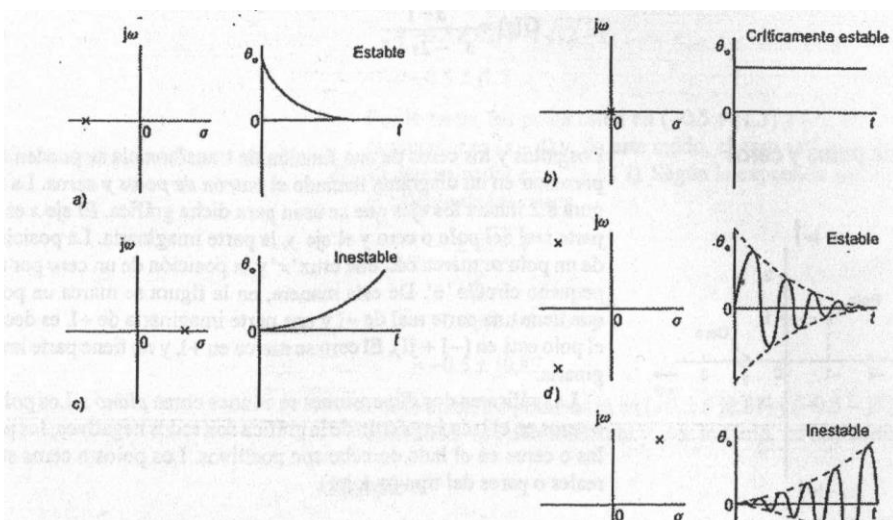


Figura 8.5 Salidas para diferentes posiciones de los polos con una entrada impulso

Una alternativa para el análisis de estabilidad anterior es considerar la estabilidad en términos de cómo cambia la salida con el tiempo después de una entrada escalón. Esto es una entrada acotada para un sistema estable debería haber una salida acotada. Para la estabilidad en relación con las posiciones de los polos resulta la misma condición.

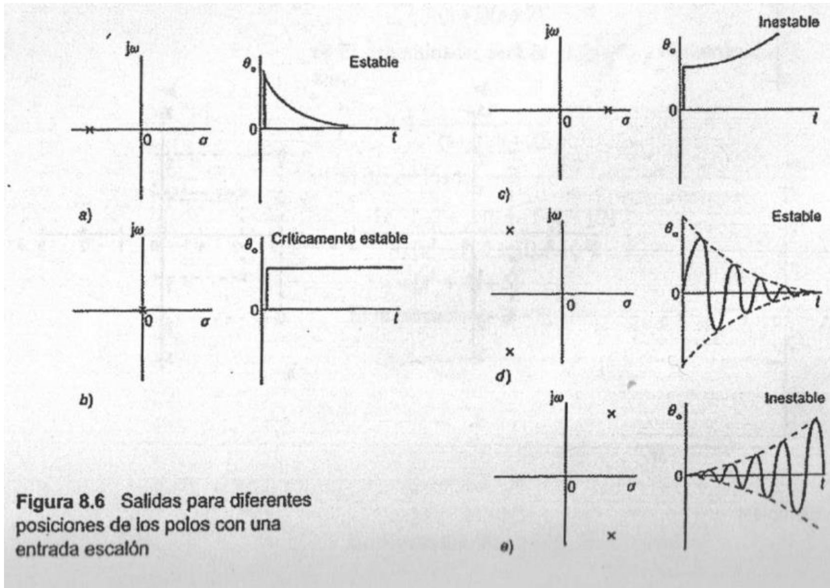


Figura 8.6 Salidas para diferentes posiciones de los polos con una entrada escalón

Criterio de estabilidad de Routh

[Distefano, Cap 5, pág. 88]
El criterio de estabilidad de Routh es un método para determinar la estabilidad de un sistema que se puede aplicar a una ecuación característica de *n-esimo* orden de la forma

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

El criterio se aplica usando una **Tabla de Routh** que se define como

$$\begin{array}{ccccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ \vdots & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ . & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ & . & . & . & . \end{array}$$

Donde $\mathrm{a_n} + \mathrm{a_{n-1}} + \cdots + \mathrm{a_0}$ son los coeficientes de la ecuación característica y

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1}$$

La tabla se continúa horizontal y verticalmente hasta donde se obtengan ceros. Cuando el arreglo se ha completado, este se revisa. Si todos los elementos de la primera columna son positivos, todas las raíces tienen partes reales negativas, y están en el lado izquierdo del patrón de polos y ceros. El sistema es, entonces estable si todos los elementos de la primera columna son positivos. Si en la primera columna, hay elementos negativos, el número de cambios de signo en la primera columna es igual al número de raíces con partes reales positivas.

Análisis de error en estado estacionario, constante de error.

Controladores, acciones PID.

Parámetros de ajuste de los controladores.

Utilización de software específico.

5- ANÁLISIS MEDIANTE EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES (Og. Cap. 6)(Des Cap 13)

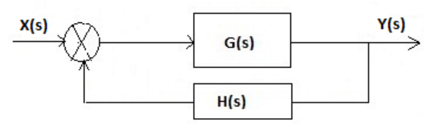
[Distefano, Cap 13]

Este capítulo estudia la relación entre el comportamiento de los sistemas y las posiciones de sus raíces. La técnica que se utiliza para este análisis se denomina *método del lugar geométrico de las raíces* que representa un método analítico para mostrar la localización de los polos y ceros de una función de lazo cerrado,

$$\frac{G}{1+GH}$$

como una función del **factor de ganancia** *K* (ver característica de función de transferencia) de la función de transferencia de lazo abierto *GH*. Este método llamado *análisis del lugar de las raíces,* requiere que solamente se conozca la localización de los polos y ceros de *GH* y no requiere que el polinomio característico sea factorizado.

Considere el sistema de control por retroalimentación en forma canónica.



La función de transferencia de este sistema de lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

La función de transferencia de lazo abierto *GH* se puede representar por

$$G(s)H(s)=\frac{kN(s)}{D(s)}=\frac{k(a_1s^m+a_2s^{m-1}+\cdots+a_m)}{(b_1s^n+b_2s^{n-1}+\cdots+b_n)}$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son los polinomios finitos en la variable compleja s, $m\leq n$, y *k* es el factor de ganancia del lazo abierto. La función de transferencia de lazo cerrado viene entonces a ser

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G(s)}{1+\frac{kN(s)}{D(s)}}=\frac{G(s)}{\frac{D(s)+kN(s)}{D(s)}}=\frac{G(s)D(s)}{D(s)+kN(s)}$$

Los polos de lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica

$$D(s)+kN(s)=0$$

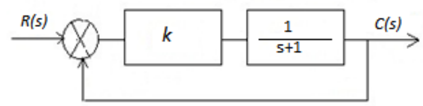
En general la localización de estas raíces en el plano *s* cambia a medida que se varía el factor de ganancia en lazo abierto *K*. El lugar de estas raíces representado en el plano *s* como una función *K* se llama **lugar de raíces.**

Para *K* igual a cero, las raíces de $D(s)+kN(s)=0$, son las raíces del polinomio $D(s)$ y son los mismos polos de la función de transferencia de lazo abierto *GH*. SI *K* se vuelve muy grande, las raíces tienden hacia las del polinomio $N(s)$, que son los ceros en lazo abierto. Luego a medida que K aumenta desde cero hasta infinito, los lugares de los polos de lazo cerrado se originan en los polos de lazo abierto y continúan hacia los ceros de lazo abierto, donde terminan.

- Si $k = 0$ las raíces son las de $D(s)$, polos de $G(s)H(s)$
- Si $k = \infty$ las raíces son las de $N(s)$, ceros de $G(s)H(s)$

[Ogata, Cap 9]

Lugares geométricos de las raíces de sistemas de primer orden



Considere el sistema de primer orden.

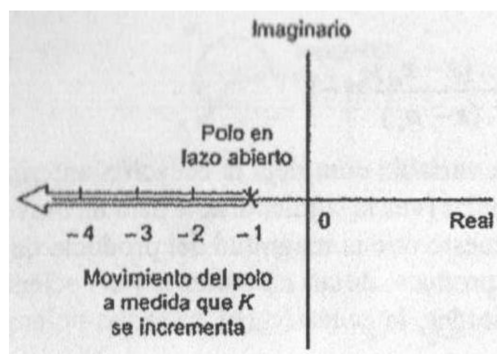
La función de transferencia del sistema en lazo abierto,
$G_o(s) = \frac{K}{(s+1)}$ y, puesto que la realimentación es unitaria, el sistema tiene una función de transferencia $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{K/s + 1}{1 + (K/s + 1)}$$

la cual se puede escribir como

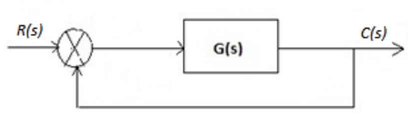
$$G(s) = \frac{K}{s + (1 + K)}$$

El sistema tiene un solo polo, en $-(1 + K)$. Cuando *K=0*, entonces el polo esta en -1 y a medida que se incrementa el valor de *K*, el valor del polo se hace más negativo. La línea que muestra cómo cambia la posición del polo se aleja desde *K=0* a medida que *K* cambia, y se denomina ***lugar geométrico de las raíces.***
Cuando *K=0* la función de transferencia del sistema se convierte en función de transferencia en lazo abierto, y el valor de la raíz para el sistema cuando *k=0* se denomina *polo en lazo abierto.*



Lugar geométrico de las raíces de sistemas en lazo cerrado

Considere el siguiente sistema general de lazo cerrado.
La función de transferencia en lazo abierto es $G_o(s)$ y, así, con realimentación unitaria, la función de transferencia $G(s)$ para el sistema es



$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

Los polos serán los valores de s para los cuales el polinomio del denominador es cero, es decir,

$$1 + G_o(s) = 0$$

y, de este modo

$$G_o(s) = -1$$

$G_o(s)$ se puede obtener a partir del agrupamiento de varios elementos, cada uno de los cuales tiene su propia función de transferencia.

$G_o(s)$ al ser un cociente de polinomios en s, se puede escribir

$$G_o(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - n)}$$

Donde k es una constante; $z_1, z_2, \dots, z_m$, los ceros, y $p_1, p_2, \dots, p_n$ los polos.

Si los valores de s en la ecuación anterior van a ser los valores de los polos y, de esta forma, estar sobre el lugar geométrico de las raíces, entonces también se debe satisfacer la ecuación $G_o(s) = -1$. De este modo, para los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces

$$\frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = -1$$

Debido a que *s* es una variable compleja la ecuación anterior se puede escribir en forma polar. Puesto que la magnitud del producto de dos números complejos es el producto de sus magnitudes y el cociente es el cociente de sus magnitudes, la ecuación anterior en forma polar es

$$\frac{k|s - z_1||s - z_2| \dots |s - z_m|}{|s - p_1||s - p_2| \dots |s - p_n|} = -1 \qquad (1)$$

Dado que el argumento del producto de dos números complejos es la suma de sus argumentos y el cociente su diferencia, la ecuación anterior en forma polar da para los argumentos

$$\begin{aligned}[\angle(s - z_1) + \angle(s - z_2) + \cdots + \angle(s - z_2)] \\ - [(s - p_1) + \angle(s - p_2) + \cdots + \angle(s - p_3)] \\ = \pm multiplo\ impar\ de\ \pi \qquad (2)\end{aligned}$$

La ecuación (2), también conocida como **condición de ángulo**, se puede utilizar para determinar si un punto en el plano *s* está sobre un lugar geométrico de las raíces. Si el puto está sobre el lugar geométrico de las raíces se cumplirá la ecuación (2), si el punto no está sobre el lugar geométrico de las raíces, entonces ésta no se cumplirá.

La ecuación (1), también conocida como **condición de magnitud,** dará el valor de *K* en los puntos a lo largo del lugar de las raíces.

Obsérvese que, debido a que los polos complejos conjugados y los ceros complejos conjugados en lazo abierto, si existen, siempre se sitúan simétricamente con respecto al eje real, los lugares de las raíces siempre son simétricos con respecto a este eje. Por los tanto, solo es necesario construir la mitad superior de los lugares de las raíces y dibujar la imagen especular de la mitad superior en el plano *s* inferior.

Para ilustrar lo anterior considere un sistema con función de transferencia en lazo abierto de

$G_o(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2)}$

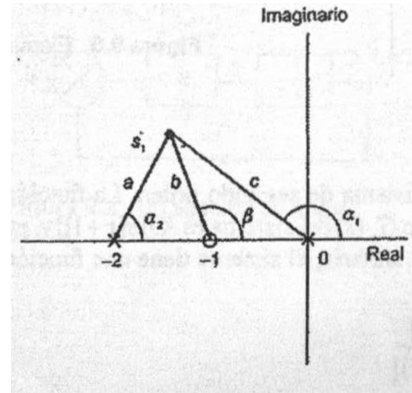


Figura 9.12 $G_o(s)=K(s+1)/s(s+2)$

Y realimentación unitaria. La función de transferencia del sistema será

$$G(s) = \frac{k(s+1)/[s(s+2)]}{1 + K(s+1)/[s(s+2)]}$$

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2) + K(s+1)}$$

El sistema tiene dos polos en lazo abierto, es decir, cuando *K=0*, en 0 y en -2 y un cero en -1. Considere algún punto sobre el plano *s*, sea s_1. Se dibujan líneas para conectar el punto con los polos y el cero. Para que s_1 este sobre el lugar geométrico de las raíces se debe tener que aplicar la ecuación (2)

$$\beta - (\alpha_1 + \alpha_2) = \pm multiplo\ impar\ de\ \pi$$

Aplicando la ecuación (1)

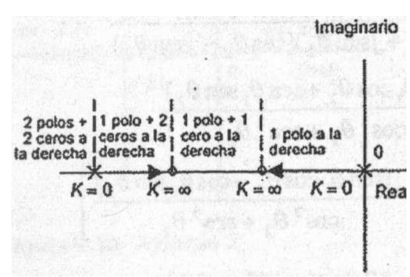
$$\frac{Kb}{ac} = 1$$

Y así,

$$K = \frac{ac}{b}$$

Construcción de lugares geométricos de las raíces

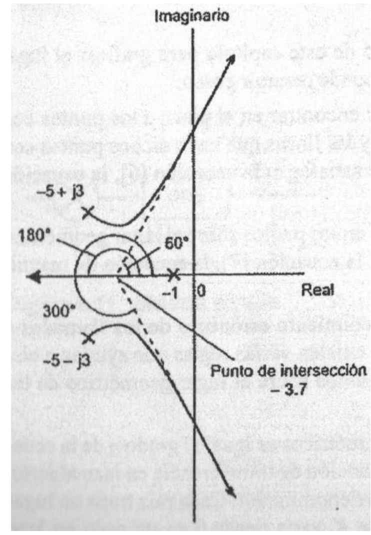
1. El numero de lugares geométricos es igual al grado *n* de la ecuación característica de la función de transferencia en lazo abierto, es decir, el polinomio del denominador.
   Cada raíz traza un lugar geométrico a medida que *K* varía desde 0 en un polo en lazo abierto, hasta infinito en un cero en lazo abierto.
   El termino *rama de lugar geométrico de las raíces* se usa con frecuencia para cada lugar geométrico de las raíces. Estas ramas son curvas continuas que inician en cada uno de los *n* polos en lazo abierto, donde *K=0*, y se aproxima a infinito en los *m* ceros en lazo abierto.
2. Los lugares geométricos se las raíces de un sistema con un ecuación característica real son simétricos respecto al eje real. Esto se debe a que las raíces complejas se presentan en pares de la forma $\sigma \pm j\omega$.
3. Los lugares geométricos de las raíces comienzan en los *n* polos del sistema donde *K*=0.
4. Los lugares geométricos de las raíces finalizan en los *m* ceros del sistema, donde *K=∞*. Si hay mas polos que ceros, que es el caso más común, entonces *m* lugares geométricos terminan en los *m* ceros finitos y los (*n-m*) lugares geométricos restantes terminan en infinito.
5. Las porciones del eje real son secciones de los lugares geométricos de las raíces si el número de polos y ceros a la derecha de dicha porción es impar.



6. Aquellos lugares geométricos de que terminan en infinito tienden hacia asíntotas que forman ángulos respecto al eje real positivo de

$$\frac{\pi}{n-m}, \frac{3\pi}{n-m}, \frac{5\pi}{n-m}, \dots, \frac{[2(n-m)-1]\pi}{n-m}$$

La figura muestra ejemplos de dichos lugares geométricos para un sistema cuando *n*=3 y *m*=0. Los ángulos de las asíntotas son $\pi/3$ o 60º, π o 180º y $5\pi/3$ o 360°.



7. Las asíntotas intersectan sobre el eje real un punto, algunas veces llamado *centro de gravedad o centroide* de las asíntotas, dado por

$$\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(z_1+z_2+\cdots+z_m)}{n-m}$$

De este modo, para el ejemplo de la figura anterior donde los polos están en -1 y -5±j3 y no hay ceros, entonces el punto de intersección es

$$\frac{-1-5+j3-5-j3}{3} = -3{,}7$$

8. La intersección de los lugares geométricos de las raíces con el eje imaginario se puede encontrar calculando aquellos valores de *K* que den como resultados la existencia de las raíces imaginarias en la ecuación característica, es decir, $s = \sigma + j\omega$ con $\sigma = 0$.

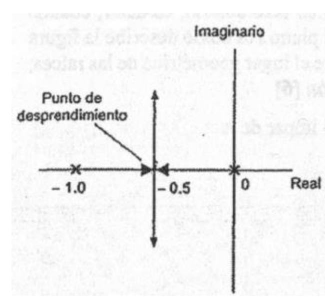
   Por ejemplo, con una ecuación característica s^3+2s^2+3s+K, entonces haciendo $s = j\omega$ resulta $-j\omega^3 - 2\omega^2 + 3\,j\omega + K = 0$ y así, al igualar las partes imaginarias se obtiene $\omega^3 + 3\omega = 0$ y $\omega = \sqrt{3}$ e igualando las partes reales da como resultado $-2\omega^2 + K = 0$ y así, *K=6.*

   Una alternativa para determinar esta intersección es el usar el arreglo de Routh y encontrar el valor limite de *K* que preserva la estabilidad, siendo éste el valor de *K*, donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.

9. El termino *punto de desprendimiento o ruptura* se usa cuando dos o más lugares geométricos se encuentran en un punto y en forma subsecuente se "separan" de ese punto siguiendo trayectorias separadas. La figura muestra dicho punto de desprendimiento.

   Los puntos de desprendimiento se presentan en aquellos puntos para los cuales, la ecuación característica $\frac{dK}{ds} = 0$.

   Sin embargo, se debe observar que no todas las raíces de la ecuación $\frac{dK}{ds} = 0$ corresponden a los puntos de desprendimiento, solamente aquéllas para las cuales la ecuación (1), es decir la ecuación de argumento, se satisface.



Para el sistema dado en la figura

$G(s) = \frac{K}{s^2+s+k}$

La ecuación característica es $s^2 + s + k = 0$

Por lo tanto

$$k = -s^2 - s$$

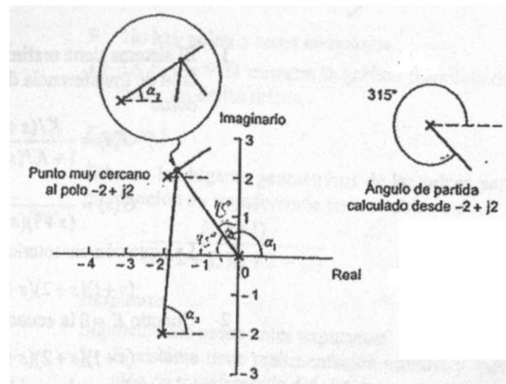
$$\frac{dK}{ds} = -2s - 1$$

Cuando $\frac{dK}{ds} = 0$, entonces

$$-2s - 1 = 0$$

y así, el punto de desprendimiento está en $s = -\frac{1}{2}$

10. El ángulo de partida de los lugares geométricos en *K=0* de un polo complejo y el ángulo de llegada de los lugares geométricos de las raíces en *K=∞* a un cero complejo se puede determinar con la ecuación de argumento (2) y haciendo que *s* sea un punto sobre el lugar geométrico de las raíces muy cercano al polo o cero considerado.



La figura ilustra esta idea cuando se aplica para determinar el ángulo de partida de un polo complejo (-2+j2). El sistema tiene polos en 0 y -2±j2 sin ceros, y así, se debe tener

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \pm multiplo\ impar\ de\ \pi$$

Debido a que el punto está muy cercano al polo, entonces $\alpha_1 = 180^{\circ} - \tan^{-1}(2/2)$ y, de este modo, es 135°. El ángulo α_3 es 90°. Por lo tanto, se tiene

$$-(135^{\circ} + \alpha_2 + 90^{\circ}) = -multiplo\ impar\ de\ \pi = -540^{\circ}$$

Por lo tanto $\alpha_2 = 180^{\circ}$

Una secuencia útil que se puede seguir, con la ayuda de las reglas anteriores, para construir lugares de las raíces se puede resumir como:

1. Obtener la ecuación característica de la función de transferencia en lazo abierto, $G_0(s)$, para el sistema.
2. Determinar las posiciones de los polos y los ceros.
3. Determinar, con base en la regla 1, el número de lugares geométricos.
4. Graficar los lugares geométricos sobre el eje real con la regla 5.
5. Determinar los ángulos de las asíntotas a partir de la regla 6.
6. Obtener la intersección de las asíntotas con el eje real con base en la regla 7.
7. Determinar la intersección de las asíntotas con el eje imaginario con la regla 8.
8. Determinar los puntos de desprendimiento usando la regla 9.
9. Obtener los ángulos de partida de los polos complejos y los ángulos de llegada a ceros complejos a partir de la regla 10.
10. Esbozar los lugares geométricos de las raíces teniendo en cuenta las reglas 2, 3 y 4.

Consideraciones sobre el trazado del lugar: Polos de lazo cerrado a partir de polos de lazo abierto.

Reglas para la construcción del lugar de raíces, para K positivo.

Consideraciones para el análisis de sistemas de control.

Lugar de raíces con retardo puro de transporte.

Utilización del Matlab.

6- DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL MEDIANTE EL LUGAR DE RAÍCES. (Og. Cap.7) (Des Cap 14)

[Distefano, Cap 14]
EL método del lugar de raíces se puede usar efectivamente en el diseño de sistemas de control por retroalimentación porque ilustra gráficamente la variación de los polos de un sistema de lazo cerrado como función del factor de ganancia K. En forma más simple, el diseño se lleva a cabo escogiendo un valor de K que resulte en un comportamiento satisfactorio de lazo cerrado. Esto se llama *compensación del factor de ganancia*. Si no es posible satisfacer las especificaciones del sistema de esta manera, se puede añadir otra forma de compensación al sistema para alterar el lugar de raíces en la forma deseada.

[Ogata, Cap 7]
Compensadores. Si se necesita un compensador para cumplir las especificaciones de desempeño, el diseñador debe planear un dispositivo físico que tenga prescrita la función de transferencia del compensador. Entre los muchos tipos de compensadores, los de mayor uso son los compensadores de adelanto, los de atraso, los de atraso-adelanto y los de realimentación de velocidad.

Enfoque del lugar geométrico de las raíces para el diseño de un sistema de control.

El método del lugar geométrico de las raíces es un enfoque gráfico que permite determinar las ubicaciones de todos los polos en lazo cerrado a partir de las ubicaciones de los polos y ceros en lazo abierto conforme algún parámetro (por lo general la ganancia) varía de cero a infinito. El método produce un indicio claro de los efectos del ajuste del parámetro.

En la práctica, una gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema indica que el desempeño deseado no puede obtenerse con sólo el ajuste de la ganancia. De hecho, en algunos casos, tal vez el sistema no sea estable para todos los valores de ganancia. En este caso, es necesario volver a construir los lugares geométricos de las raíces para cumplir las especificaciones de desempeño.

Cuando se diseña un sistema de control, si se requiere de un ajuste diferente al de la ganancia, debemos modificar los lugares geométricos de las raíces originales insertando un compensador conveniente. Una vez comprendidos los efectos de la adición de los polos y/o ceros sobre el lugar geométrico de las raíces, podemos determinar con facilidad las ubicaciones de los polos y los ceros del compensador que volverán a dar una forma conveniente al lugar geométrico de las raíces. En esencia, en el diseño realizado mediante el método del lugar geométrico de las raíces, los lugares geométricos de las raíces del sistema se vuelven a construir mediante el uso de un compensador, a fin de poder colocar un par de polos dominantes en lazo cerrado en la posición deseada.

Efectos de la adición de polos. La adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de jalar el lugar geométrico de las raíces a la derecha, lo cual tiende a disminuir la estabilidad relativa del sistema y alentar el asentamiento de la respuesta.

Efectos de la adición de ceros. La adición de un cero a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de jalar el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda, con lo cual el sistema tiende a ser más estable, y se acelera el asentamiento de la respuesta.

COMPENSACIÓN DE ADELANTO

Técnicas de compensación de adelanto basadas en el enfoque del lugar geométrico de las raíces.

El enfoque del lugar geométrico de las raíces es muy poderoso en el diseño cuando se incorporan las especificaciones en términos de las cantidades en el dominio del tiempo.

Los procedimientos para diseñar un compensador de adelanto se plantean del modo siguiente:

1. A partir de las especificaciones de desempeño, determine la ubicación deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.
2. Por medio de una gráfica del lugar geométrico de las raíces, compruebe si el ajuste de la ganancia puede o no por sí solo producir los polos en lazo cerrado convenientes. Si no, calcule la deficiencia de ángulo ϕ. Este ángulo debe ser una contribución del compensador de adelanto si el nuevo lugar geométrico de las raíces va a pasar por las ubicaciones deseadas para los polos dominantes en lazo cerrado.

Una vez diseñado un compensador, verifique que se hayan cumplido todas las especificaciones de desempeño. Si el sistema no cumple las especificaciones de desempeño, repita el procedimiento de diseño ajustando el polo y el cero del compensador hasta cumplir con todas las especificaciones. Si se requiere de una constante de error estático grande, enlace en cascada una red de atraso o convierta el compensador de adelanto en un compensador de atraso-adelanto.

COMPENSACIÓN DE ATRASO

Técnicas de compensación de atraso basadas en el enfoque del lugar geométrico de las raíces

En este caso la compensación consiste, esencialmente, en incrementar la ganancia en lazo cerrado sin modificar en forma notable las características de la respuesta transitoria. Esto quiere decir que no debe cambiarse de manera significativa el lugar geométrico de las raíces en la vecindad de los polos dominantes en lazo cerrado, sino que debe incrementarse la ganancia en lazo abierto en la medida en que se necesite. Esto se consigue si se coloca un compensador de atraso en cascada con la función de transferencia de la trayectoria directa determinada.

Consideraciones de diseño.

Compensación en adelanto, vinculación con PID.

Compensación en atraso, vinculación con PID.

Uso de Matlab.

7- ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA (OG. CAP. 8) (Des Cap 15)

[Bolton, Cap 11]

El termino *respuesta en frecuencia* se define como la respuesta en estado estable de un sistema a una estrada senoidal; la frecuencia de la señal de entrada se varia en un cierto rango, para estudiar la respuesta resultante.

Respuesta en Frecuencia

Si a un sistema lineal se aplica una entrada senoidal, la salida es también una senoidal y de la misma frecuencia. La salida puede diferir de la entrada en amplitud y en fase.

El cociente entre la amplitud de entrada y la amplitud de salida se conoce como ***magnitud***, aunque algunas veces se denomina *razón de amplitud o ganancia.*

El corrimiento de fase de la senoidal de salida con relación a la senoidal de entrada se denomina ***fase****.* La variación de la magnitud y la fase con la frecuencia se denomina ***respuesta en frecuencia*** del sistema.

Función de transferencia

La función de transferencia *G(s)* de un sistema en general se puede representar mediante

$$G(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - n)}$$

donde *k* es la ganancia; $z_1, z_2, \dots, z_m$, los ceros del sistema, y $p_1, p_2, \dots, p_n$, los polos, habiendo *m* ceros y *n* polos. De este modo, puesto que $G(s)$ es el cociente de la salida entre la entrada, es decir, $G(s) = \theta_0(s)/\theta_i(s)$, entonces la salida está dada por

$$\theta_0(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - n)} \theta_i(s) \qquad (1)$$

De esta manera, si se considera una entrada senoidal

$$\theta_i = \alpha \, sen \, \omega t$$

donde α es la amplitud de la entrada y ω la frecuencia angular en rad/s, entonces

$$\theta_i(s) = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2}$$

y la ecuación (1) se convierte en

$$\theta_0(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - n)} \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Esta ecuación se puede solucionar usando fracciones parciales y obtener una relación de la forma

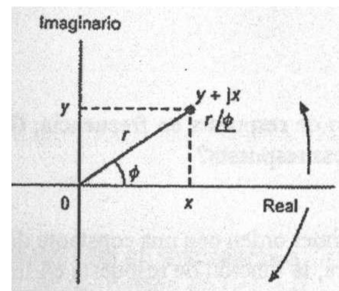
$$\theta_0(s) = términos\ transitorios + términos\ en\ estado\ estable$$

Los términos transitorios desaparecen en el tiempo. De esta manera, si solo se tiene interés en el estado estable, la solución que se obtiene es

$$\theta_0(s) = a|G(j\omega)|sen(\omega t + \phi)$$

La salida en estado estable es senoidal con la misma frecuencia angular ω que la entrada. $|G(j\omega)|$ es la magnitud de la función de transferencia $G(s)$ cuando *s* se reemplaza por $j\omega$. La función $G(j\omega)$, la cual se obtiene al reemplazar *s* por $j\omega$ en $G(s)$, se denomina ***función de respuesta en frecuencia.***
De la misma manera que $G(s)$ se encuentra en el dominio de *s*, $G(j\omega)$ es función de transferencia de $G(j\omega)$ en el *dominio de la frecuencia.* $G(j\omega)$se puede encontrar al reemplazar todos los valores de *s* en $G(s)$ por $j\omega$ y, así, reordenar la expresión para obtenerla en forma que permite separar las partes real e imaginaria y, por lo tanto, identificar la magnitud y la fase.

Una cantidad compleja se puede representar mediante $(x + jy)$, donde x es la parte real e y, la parte imaginaria del número complejo. En una grafica con la parte imaginaria como el eje y y la parte real como el eje x, la x y la y son las coordenadas cartesianas de punto que representa al número complejo.
Otra manera de representarlo es un forma polar como $r(cos\phi + jsen\phi)$, donde sobre la grafica de la componente imaginaria contra la real, r es la magnitud de la línea que une el origen con el punto que representa el número complejo y ϕ es el ángulo entre la línea y el eje x. El termino $(cos\phi + jsen\phi)$ se puede representar mediante $\angle\phi$, donde *r* es la magnitud y ϕ, la fase del número complejo. Por lo tanto, don el teorema de Pitágoras la magnitud está dada por



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Y la fase ϕ, mediante

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

Los signos de los términos *x* y *y* se deben tener en cuenta al determinar la $\tan\phi$:

- *x* positiva, *y* positiva → $0 < \phi < 90º \rightarrow primer\ cuadrante$
- *x* negativa, *y* positiva → $90º < \phi < 180º \rightarrow segundo\ cuadrante$
- *x* negativa, *y* negativa → $180º < \phi < 270º \rightarrow tercer\ cuadrante$
- *x* positiva, *y* negativa → $270º < \phi < 360º \rightarrow cuarto\ cuadrante$

Diagramas de Bode

[Bolton, Cap. 11, pág. 261]
Un diagrama de Bode consiste en dos gráficas: una de la magnitud graficada contra la frecuencia y una del ángulo de fase graficada contra la frecuencia. La magnitud y la frecuencia se grafican usando escalas logarítmicas.
[Ogata, Cap. 8.2]
La ventaja principal de utilizar el diagrama de Bode es que la multiplicación de magnitudes se convierte en suma. Además, cuenta con un método simple para dibujar una curva aproximada de magnitud logarítmica. Se basa en aproximaciones asintóticas. Esta aproximación, mediante asíntotas (líneas rectas), es suficiente si solo se necesita información general sobre la característica de la recta en frecuencia. Si se desea obtener curvas exactas, es fácil corregir las curvas asintóticas.

[Bolton, Cap. 11, pág. 261]

Para un sistema que tiene una función de transferencia que involucra varios términos, la magnitud resultante es el producto de las magnitudes de los elementos que la constituyen, es decir,

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)| \ldots$$

Al tomar algoritmos de base 10, la ecuación se convierte en

$$\log|G(j\omega)| = \log|G_1(j\omega)| + \log|G_2(j\omega)| + \log|G_3(j\omega)| \ldots$$

De esta manera, el trazar una grafica de $\log|G(j\omega)|$ contra la frecuencia significa que solo se puede sumar las contribuciones debidas a los términos de magnitud individuales. Por ejemplo, si se quisiera obtener la traza de Bode para

$$G(j\omega) = \frac{5(1+j\omega)}{2+j\omega}$$

entonces se puede graficar por separado las graficas logarítmicas para las magnitudes de los elementos 5, $(1+j\omega)$ y $\frac{1}{2+j\omega}$ y solo sumarlas para obtener la traza para $|G(j\omega)|$.

Es común expresar la magnitud en unidades de decibeles (db).

$$Magnitud\ en\ dB = 20\log|G(j\omega)|$$

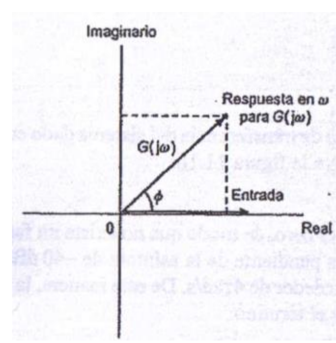
Cuando existen varios elementos, la traza de fase es solo la suma de las fases de los elementos por separado. La escala de frecuencia que se usa para ambas trazas, magnitudes y fase, es logarítmica. Esto permite a la gráfica cubrir un gran intervalo de frecuencias y también conduce a graficas asintóticas mediante líneas rectas.

Falta ejemplo

Diagramas de Nyquist

Para especificar el comportamiento de un sistema a una entrada senoidal (es decir, especificar la función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$) en una frecuencia angular particular, ω, se deben establecer tanto la magnitud, $|G(j\omega)|$ como la fase, ϕ. Ambas son funciones de la frecuencia angular. Una forma de mostrar cómo se comporta un sistema sobre un intervalo de frecuencias angulares es trazar los datos de la respuesta para el sistema en un diagrama de Nyquist. El *diagrama de Nyquist* es una *traza de la respuesta en frecuencia del sistema.*

Un número complejo se puede representar mediante la forma $x + jy$, donde x es la parte real e y la parte imaginaria. El número se puede trazar como un punto en un diagrama que tiene un eje y el cual representa la parte imaginaria y un eje x, que es la parte real. La versión polar del número complejo se representa mediante una línea $\sqrt{x^2+y^2}$ que se dibuja desde el origen formando un ángulo ϕ con el eje real, donde $\tan\phi = \frac{y}{x}$.



En el diagrama de Nyquist la salida para una entrada senoidal de amplitud unitaria en una frecuencia angular particular, se especifica mediante el trazo de una línea de longitud igual a la magnitud, $|G(j\omega)|$ en un ángulo de fase, ϕ, con el eje real. La entrada senoidal al sistema, de este modo, en efecto se presenta mediante la línea de magnitud 1 a lo largo del eje real.

Al trazar diagramas de Nyquist existen cuatro puntos clave que se deben representar: el inicio de la traza, donde $\omega = 0$; el fin de la traza, donde $\omega = \infty$; donde la traza cruza al eje real, es decir, $\phi = 0°$ o $\pm 180°$, y donde ésta cruza al eje imaginario, o sea, $\phi = \pm 90°$.

Para un *sistema de primer orden*, o un sistema de atraso sencillo, la función de transferencia es de la forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

donde τ es la constante de tiempo. De esta manera, la función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$, es

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Así, debido a que la magnitud $|G(j\omega)|$ es la raíz cuadrada de la parte real al cuadrado mas la parte real imaginaria al cuadrado, entonces

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 - j\omega\tau}{(1 + \omega^2\tau^2)^2} + \frac{\omega^2\tau^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \qquad (1)$$

La fase, ϕ, esta dada por el cociente de la parte imaginaria y la parte real

$$\tan\phi = \frac{-\omega\tau/(1 + \omega^2\tau^2)}{1/(1 + \omega^2\tau^2)}$$

$$\phi = \tan^{-1}\omega\tau \qquad (2)$$

Cuando $\omega = 0$, entonces las ecuaciones (1) y (2) dan como resultado $|G(j\omega)| = 1$ y $\phi = 0°$. Esto es también el punto en el que la traza cruza el eje real. Cuando ω tiende a ∞, entonces $|G(j\omega)|$ tiende a 0 y ϕ a $-90°$. Este es también el punto en el que la traza cruza el eje imaginario. También se pueden calcular otros puntos para ayudar a dibujar la traza de Nyquist. Así, por ejemplo, cuando $\omega = \frac{1}{\tau}$, entonces $|G(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$ y $\phi = -\tan^{-1} 1 = 45°$

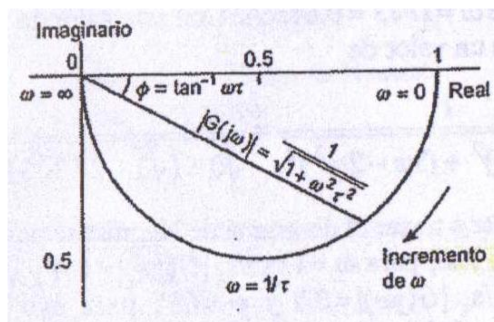


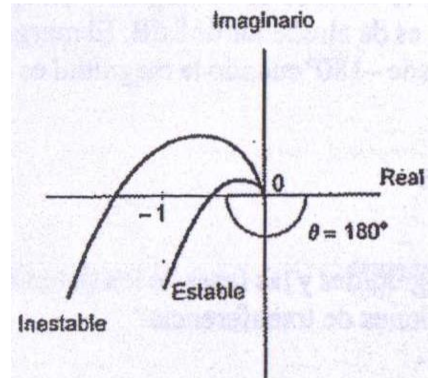
Figura 11.20 Trazado de Nyquist para $G(s) = 1/(1+\tau s)$

Criterio de estabilidad de Nyquist

Cuando a un sistema se aplica una entrada senoidal la salida de ese sistema es senoidal con la misma frecuencia angular, pero pude tener una amplitud que difiere de al de la entrada y mostrar una diferencia de fase. El cociente de las amplitudes de salida y de entrada es la magnitud, $|G(j\omega)|$.

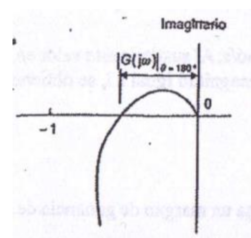
Para que la inestabilidad se presente cuando la entrada al sistema es senoidal, la magnitud en lazo abierto debe ser mayor que 1 si el atraso de fase en lazo abierto es 180°. Si el sistema causa un cambio de fase de 180°, entonces la señal de realimentación estará en fase con la señal de entrada y, de esta manera, se adicionará a esta en vez de sustraerse. Si la amplitud es menor que la de la señal de entrada, se puede alcanzar una condición estable, pero si la amplitud es mayor, la señal a través del sistema crecerá de manera continua. Si el sistema en lazo abierto es estable, el sistema en lazo cerrado también es estable.

La figura muestra la implicación de este criterio de estabilidad en relación al diagrama de Nyquist para un sistema en lazo abierto. Un ángulo de 180° significa que la magnitud apunta hacia la parte negativa del eje real. Si la magnitud en este valor de fase no debe exceder a 1, entonces la traza polar no debe encerrar al punto -1 sobre el eje real si el sistema va a ser estable.



Margen de ganancia y margen de fase

El **margen de ganancia** se define como el factor mediante el cual la ganancia del sistema, es decir, la magnitud, se puede incrementar antes de que se presente la inestabilidad. Este es, entonces, la cantidad mediante la cual la magnitud en 180º debe incrementarse para alcanzar el valor crítico de 1. (Figura)



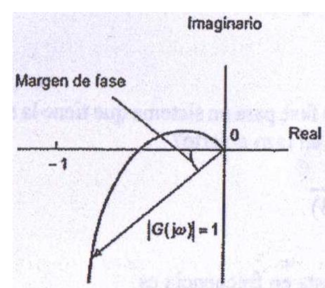
$$1 = Margen\ de\ ganancia\ x\ |G(j\omega)|_{\phi=180°}$$

Este en general se cuantifica en decibeles y de esta forma en decibeles es

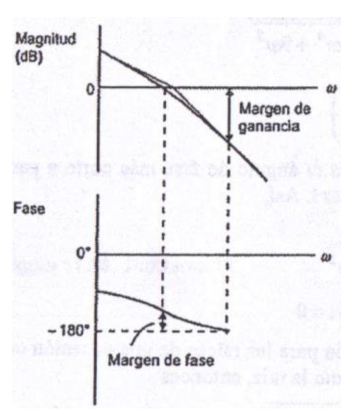
$$Margen\ de\ ganancia = 20\log 1 - 20\log|G(j\omega)|_{\phi=180°}$$
$$Margen\ de\ ganancia = -20\log|G(j\omega)|_{\phi=180°}$$

Si la traza de Nyquist jamás cruza la parte negativa del eje real, el margen de ganancia es infinito. Si la traza pasa a través del eje en un valor menor que 1, el margen de ganancia es positivo. Si pasa a través del eje en 1, el margen de ganancia es cero y si pasa a través del eje en un valor mayor que 1, es decir, la traza encierra el punto -1, el margen de ganancia es negativo.

El **margen de fase** se define como el ángulo a través del cual la traza de Nyquist debe girar para que el punto de magnitud unitaria pase a través del punto -1 en el eje real (Figura). Esta es, por lo tanto, la cantidad mediante la cual la fase del sistema en lazo abierto cae cerca de 180º cuando su magnitud tiene un valor de 1, es decir, la amplitud de la salida es la misma que la de la entrada.



La figura muestra los márgenes de ganancia y fase en las trazas de Bode.



Estos márgenes se pueden apreciar desde un gráfico de Bode.

- MG: se debe analizar la fase cuando llega a cortar los $-180°$ y allí se sube al módulo para ver, en valor absoluto, cuánto le falta para llegar a cero.

- MF: se debe analizar cuando el módulo vale $0dB$ y se debe ver cuánto falta en la fase para llegar a 180°; $|G * H| = 0\ dB$.

Respuesta en frecuencia de sistemas de lazo cerrado.

Parámetros de interés.

La traza de Nyquist. - Criterios de estabilidad.

Parámetros de estabilidad y de comportamiento, margen de fase y de ganancia.

Estabilidad relativa.

Diagramas de Bode.

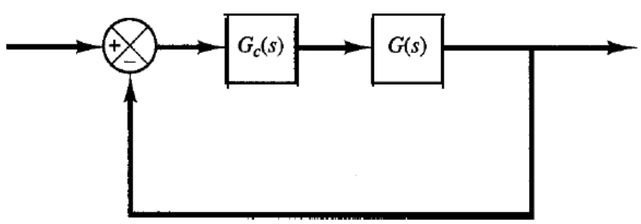
8- CONSIDERACIONES DE DISEÑO Y TÉCNICAS DE COMPENSACIÓN (Og. Cap. 9)

Consideraciones de diseño en el dominio de frecuencias.

Compensación en adelanto.

[Ogata, Cap. 9,pag 613]

Técnicas de compensación de adelanto basadas en el enfoque de la respuesta en frecuencia.
La función principal del compensador de adelanto es volver a dar forma a la curva de respuesta en frecuencia a fin de ofrecer un ángulo de adelanto de fase suficiente para compensar el atraso de fase excesivo asociado con los componentes del sistema fijo.
Considere el sistema de la figura siguiente. Suponga que las especificaciones del desempeño se dan en términos del margen de fase, del margen de ganancia, de las constantes de error estático de velocidad, etc. El procedimiento para diseñar un compensador de adelanto mediante el enfoque de la respuesta en frecuencia se plantea del modo siguiente:



1. Suponga el siguiente compensador de adelanto:

$$G(s) = K_c a \frac{T_s + 1}{aT_s + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{aT}} \qquad (0 < a < 1)$$

Defina

$$K_c a = K$$

Asi,

$$G_c(s) = k\frac{Ts+1}{aTs+1}$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K\frac{Ts+1}{aTs+1}G(s) = \frac{Ts+1}{aTs+1}KG(s) = \frac{Ts+1}{aTs+1}G_1(s)$$

En donde

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia ***K*** que satisfaga el requerimiento sobre la constante estática de error determinada.

2. Usando la ganancia ***K*** determinada, dibuje las trazas de Bode de $G_1(j\omega)$, el sistema con la ganancia ajustada pero sin compensar. Calcule el valor del margen de fase.
3. Determine el ángulo de adelanto de fase ϕ necesario que se agregará al sistema.
4. Determine el factor de atenuación ***a*** a partir de la ecuación

$$sen\ \phi_m = \frac{\frac{1-a}{2}}{\frac{1+a}{2}} = \frac{1-a}{1+a}$$

Establezca la frecuencia a la cual la magnitud del sistema no compensado $G_1(j\omega)$ es igual a $-20\log(\frac{1}{\sqrt{a}})$. Seleccione ésta como la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta frecuencia corresponde a $\omega_m = \frac{1}{(\sqrt{a}T)}$, y el cambio de fase máximo ϕ_m ocurre en ella.

5. Determine las frecuencias de esquina del compensador de adelanto del modo siguiente:

Cero del compensador de adelanto: $\omega = \frac{1}{T}$
Polo del compensador de adelanto: $\omega = \frac{1}{aT}$

6. Usando el valor de ***K*** determinado en el paso 1 y el de ***a*** establecido en el paso 4, calcule la constante ***K,*** a partir de

$$K_c = \frac{K}{a}$$

7. Verifique el margen de ganancia para asegurarse de que es satisfactorio. De no ser así, repita el proceso de diseño modificando la ubicación de los polos y ceros del compensador hasta obtener un resultado satisfactorio.

Compensación en atraso. Controladores P, PD, PI, PID.

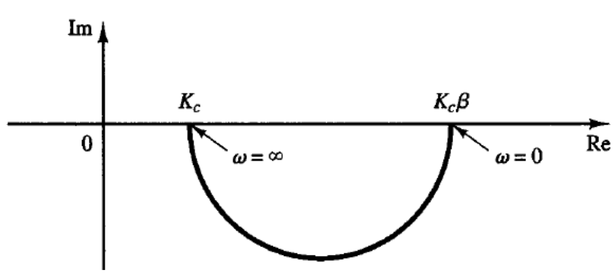
[Ogata, Cap. 9,pag 613]

Características de los compensadores de atraso.

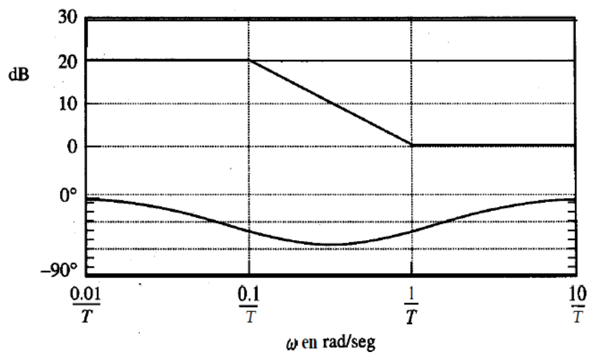
Considere un compensador de atraso que tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = K_c\beta\,\frac{T_s+1}{\beta T_s+\ 1} = \ K_c\,\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{aT}} \qquad (\beta > 1)$$

En el plano complejo, un compensador de atraso tiene un cero en $s = 1/T$ y un polo en $s = -1/(\beta T)$. El polo está a la derecha del cero. La figura a continuación muestra una traza polar del compensador de atraso.



La figura a continuación contiene las trazas de Bode del mismo, en donde ***K,*** = 1 y p = 10.



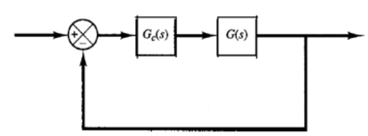
Las frecuencias de esquina del compensador de atraso están en $\omega = 1/T\ y\ \omega = 1/(\beta T)$ .Como se observa en la figura anterior, en donde los valores de K_c y β se hacen igual a 1 y 10, respectivamente, la magnitud del compensador de atraso se vuelve 10 (o 20 dB) en frecuencias bajas, y 1 (o 0 dB) en frecuencias altas. Por tanto, el compensador de atraso es esencialmente un filtro de paso-bajas.

Técnicas de compensación de atraso basadas en el enfoque de la respuesta en frecuencia.

La función principal de un compensador de atraso es proporcionar una atenuación en el rango de las frecuencias altas a fin de aportar un margen de fase suficiente al sistema.

La característica de atraso de fase no afecta la compensación de atraso.

El procedimiento para diseñar compensadores de atraso para el sistema de la figura mediante el enfoque de la respuesta en frecuencia, se plantea del modo siguiente:



1. Suponga el compensador de atraso:

$$G(s) = K_c\beta\ \frac{T_s + 1}{\beta T_s +\ 1} = \ K_c\ \frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{aT}} \qquad (\beta > 1)$$

   Defina

$$K_c\beta = K$$

   De modo que

$$G_c(s) = K\ \frac{T_s + 1}{\beta T_s +\ 1}$$

   La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}G(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}KG(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}G_1(s)$$

   en donde

$$G(s) = KG(s)$$

   Determine la ganancia K que satisfaga el requerimiento en la constante de error estático establecida.

2. Si el sistema no compensado $G_1(j\omega) = KG(j\omega)$ no satisface las especificaciones en los márgenes de fase y de ganancia, encuentre el punto de frecuencia en el cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto sea igual a - 180" más el margen de fase requerido. Éste es el margen de fase especificado entre 5 y 12". (La adición de entre 5 y 12" compensa el atraso de fase del compensador de atraso.) Seleccione ésta como la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

3. Para evitar los efectos nocivos del atraso de fase producido por el compensador de atraso, el polo y el cero del compensador de atraso deben ubicarse mucho más abajo que la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Por tanto, seleccione la frecuencia de esquina $\omega = 1/T$(que corresponde al cero del compensador de atraso) entre una octava y una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. (Si las constantes de tiempo del compensador de atraso no se vuelven demasiado grandes, se selecciona la esquina de frecuencia $\omega = 1/T$ una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia.)

4. Determine la atenuación necesaria para disminuir la curva de magnitud a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Considerando que esta atenuación es de -20 log β, determine el valor de β. Luego se obtiene la otra frecuencia de esquina (que corresponde al polo del compensador de atraso) a partir de $\omega = 1/(\beta/T)$.

5. Usando el valor de K determinado en el paso 1 y el de β obtenido en el paso 5, calcule la constante K_c a partir de

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$

Reglas de sintonía y ajuste de controladores PID.

Cancelación de polos y ceros.

9- ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADOS (OG.CAP. 3)

[Ogata, Cap. 3.4]

La teoría de control moderna contra la teoría de control convencional.

La teoría de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que la primera se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser lineales o no lineales, en tanto que la segunda sólo se aplica a sistemas lineales con una entrada y una salida e invariantes con el tiempo. Asimismo, la teoría del control moderna es esencialmente un enfoque en el dominio del tiempo, en tanto que la teoría de control convencional es un enfoque complejo en el dominio de la frecuencia.

Definiciones

Estado: El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas *variables de estado*) de modo que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Variables de estado: Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico.
Si se necesitan al menos n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial en $t = t_0$, el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Vector de estado: Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector $\boldsymbol{x}$. Tal vector se denomina vector de estado. Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema $\boldsymbol{x}(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez que se obtiene el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $\boldsymbol{x}(t)$para $t \geq t_0$.

Espacio de estados: El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1, el eje x_2,…, el eje x_n, se denomina *espacio de estados*. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados.

Ecuaciones en el espacio de estados: En el análisis en el espacio de estados, nos concentramos en tres tipos de variables involucrados en el modelado de sistemas dinámicos: variables de entrada, variables de salida y variables de estado.
El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Dado que los integradores de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de tales integradores se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico. Por tanto, las salidas de los integradores funcionan como variables de estado. La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.
Suponga que un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas contiene n integradores. También suponga que existen r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Se definen las n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Entonces el sistema se puede escribir mediante

$$\begin{gathered} x_1(t) = f_1(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ x_2(t) = f_2(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ x_n(t) = f_n(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{gathered} \qquad (1)$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante

$$\begin{gathered} y(t) = g_1(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{gathered} \qquad (2)$$

Si se define

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \cdots \\ g_m(x_1, x_2 \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (1) y (2) se convierten en

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \qquad (3)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \qquad (4)$$

en donde la ecuación (3) es la *ecuación de estado* y la ecuación (4) es la *ecuación de la salida*. Si las funciones vectoriales $\boldsymbol{f}$ y/o $\boldsymbol{g}$ involucran explícitamente el tiempo *t*, el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se linealizan las ecuaciones (3) y (4) alrededor del estado de operación, tenemos

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \qquad (5)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \qquad (6)$$

Donde $\mathbf{A}(t)$ se denomina *matriz de estado,* $\mathbf{B}(t)$ *matriz de entrada,* $\mathbf{C}(t)$ *matriz de salida* y $\mathbf{D}(t)$ *matriz de transmisión de directa.*
Si las funciones vectoriales $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina *sistema invariante con el tiempo*. En este caso, las ecuaciones (5) y (6) se simplifican a

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad (7)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{u}(t) \qquad (8)$$

La ecuación (7) es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante con el tiempo. La ecuación (8) es la ecuación de salida para el mismo sistema.

Estado y variables de estado. Representación matricial.

Autovalores y autovectores. Diagrama de estados.

Diagonalización – Desacoplamiento de estados.

Soluciones de las ecuaciones de estado. Matriz de transición de estado.

Controlabilidad y observabilidad. – Formas canónicas de las ecuaciones de estado.

El plano de fases. Trazado del plano de fases por el método de las isoclinas.

Puntos singulares.

10- DISEÑO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO (Og. Cap 11)

Diseño por medio de la ubicación de polos.

Método de la asignación de polos y formula de Ackermann.

Observador de estado.

Uso de Matlab.