Esitysmatriisi

Rudolf Heiskanen

8. maaliskuuta 2023

Tämä on käytännöllinen katsaus esitysmatriisin muodostamiseen. Esitysmatriisin voi muodostaa (ainakin) kahdella tavalla. Määritellään molempia tapoja varten, että V on vektoriavaruus, ja $f : V \to V$ on kuvaus $(a, b, c) \mapsto (2a + b, b - a, 3c + a)$. Määritellään myös, että $\mathcal{P}_2$ on polynomiavaruus, jonka alkiot ovat muotoa $h(x) = a + bx + cx^2$ ja $g : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ on kuvaus $a + bx + cx^2 \mapsto a + 2c + 2bx + ax^2 + cx^2$.

1 Ensimmäinen tapa

Tämä tapa on sama, jota käytettiin luennolla ja kurssimonisteessa. Tässä tavassa muodostetaan matriisi sarakkeittain siten, että n:nes sarake on se vektori, joksi standardikannan n:nes vektori kuvautuu. Esimerkiksi funktio f:

Aloitetaan standardikannan alkiosta e_1: $f((1, 0, 0)) = (2 \cdot 1 + 0,\ 0 - 1,\ 3 \cdot 0 + 1)$
$= (2, -1, 1)$

Sitten e_2: $f((0, 1, 0)) = (2 \cdot 0 + 1,\ 1 - 0,\ 3 \cdot 0 + 0) = (1, 1, 0)$

Lopuksi e_3: $f((0, 0, 1)) = (2 \cdot 0 + 0,\ 0 - 0,\ 3 \cdot 1 + 0) = (0, 0, 3)$

Näin ollen, kun sijoitetaan saadut vektorit matriisiin vasemmalta oikealle saadaan seuraava esitysmatriisi A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Sitten tehdään sama proseduuri kuvaukselle g. Polynomiavaruuksien tapauksessa kunkin x:n kerrointa voi ajatella vektorin koordinaattina. Tarkastellaan siis kuvatun alkion kunkin asteisen muuttujan kerrointa.

Standardikannan alkio p_0: $g(1) = g(1x^0 + 0x^1 + 0x^2) = 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot x + 1x^2 + 0x^2$
$= 1 + x^2 = 1x^0 + 0x^1 + 1x^2$. Siis matriisin ensimmäinen $(1, 0, 1)$.

Sitten p_1: $g(x) = g(0x^0 + 1x^1 + 0x^2) = 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^2$
$= 2x = 0x^0 + 2x^1 + 0x^2$. Siis matriisin toinen sarake on $(0, 2, 0)$.

Sitten p_2: $g(x^2) = g(0x^0 + 0x^1 + 1x^2) = 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1x^2$

$= 2 + x^2 = 2x^1 + 0x^1 + 1x^2$. Siis matriisin kolmas sarake on $(2, 0, 1)$.

Näin saadaan esitysmatriisi B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Toinen tapa

Tätä tapaa käytin itse, sillä se tuntui intuitiiviselta. Tässä tavassa muodostetaan yhtälöryhmä siitä, mitä muotoa ovat kuvauksella saadun vektorin kukin koordinaatti. Esimerkiksi funktion f tapauksessa voidaan suoraan lukea, että:

$$\begin{cases} f(x)\text{:n koordinaatti } x_1 = 2a + b = 2a + 1b + 0c \\ f(x)\text{:n koordinaatti } x_2 = b - a \quad = -1a + 1b + 0c \\ f(x)\text{:n koordinaatti } x_3 = 3c + a = 1a + 0b + 3c \end{cases}$$

Josta voidaan tuttuun tapaan, kuten kaikista muistakin yhtälöryhmistä, muodostaa matriisi. Saadaan esitysmatriisi A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Huomataan, että saatu matriisi on sama, kuin tavalla 1 saatu.
Tehdään vielä sama kuvaukselle g. Käsitellään, kuten tavassa 1 mainittiinkin, kunkin asteen muuttujan kertoimia kuten vektorin koordinaatteja. Paketoidaan nämä sulkuihin hahmottamisen helpottamiseksi:

$$g(ax^0 + bx^1 + cx^2) = a + 2c + 2bx + ax^2 + cx^2 = (a + 2c)x^0 + (2b)x^1 + (a + c)x^2$$

Saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} g(x)\text{:n 0 asteen kerroin } x_1 = a + 2c = 1a + 0b + 2c \\ g(x)\text{:n 1 asteen kerroin } x_2 = 2b \qquad = 0a + 2b + 0c \\ g(x)\text{:n 2 asteen kerroin } x_3 = a + c = 1a + 0b + 1c \end{cases}$$

Josta saadaan helposti muodostettua matriisi. g:n esitysmatriisi on siis matriisi B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Huomataan jälleen, että tämä on sama kuin tavalla 1 saatu matriisi B.