

Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Vežbe 9

Zadatak 1 *Zasnivanje prirodnih brojeva.*

Definisati algebarski tip podataka *prirodni* koji predstavlja prirodni broj.

datatype *prirodni* = *undef*

Diskutovati o tipu *prirodni* i sledećim termovima.

typ *prirodni*

term *Nula*

term *Sled Nula*

term *Sled (Sled Nula)*

Definisati skraćenice za prirodne brojeve **1**, **2**, **3**.

abbreviation *jedan* :: *prirodni* (**1**) **where**

1 \equiv *undefined*

abbreviation *dva* :: *prirodni* (**2**) **where**

2 \equiv *undefined*

abbreviation *tri* :: *prirodni* (**3**) **where**

3 \equiv *undefined*

Primitivnom rekurzijom definisati operaciju sabiranja. Uvesti levo asocijativni operator \oplus za operaciju sabiranja.

fun *saberi* (**infixl** \oplus 100) **where**

$a \oplus b =$ *undefined*

Testirati funkciju sabiranjem nekih skraćenica za prirodne brojeve.

Pokazati da je sabiranje asocijativno.

lemma *saberi-asoc*:

shows $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c$

Pokazati da je sabiranje komutativno.

Savet: Potrebno je pokazati pomoćne lemu.

lemma *saberi-kom*:

shows $a \oplus b = b \oplus a$

lemma *saberi-kom-isar*:

shows $a \oplus b = b \oplus a$

Primitivnom rekurzijom definisati operaciju množenja. Uvesti levo asocijativni operator \otimes za operaciju množenja.

fun *pomnozi* (**infixl** \otimes 101) **where**
 $a \otimes b = \text{undefined}$

Pokazati komutativnost množenja.

Savet: Pokazati pomoćne lemme.

lemma *pomnozi-kom:*

shows $a \otimes b = b \otimes a$

Pokazati da je množenje asocijativno.

lemma *pomnozi-asoc:*

shows $a \otimes (b \otimes c) = a \otimes b \otimes c$

Primitivnom rekurzijom definisati operaciju stepenovanja. Uvesti levo asocijativni operator \frown za operaciju stepenovanja.

fun *stepenuj* (**infixl** \frown 102) **where**

$a \frown b = \text{undefined}$

Pokazati da važi: $a^1 = a$.

lemma *stepenuj-jedan:*

shows $a \frown \mathbf{1} = a$

Pokazati da važi: $a^{(n+m)} = a^n b^m$.

lemma *stepenuj-na-zbir[simp]:*

shows $a \frown (n \oplus m) = a \frown n \otimes a \frown m$

Pokazati da važi: $a^{nm} = a^{n^m}$.

lemma *stepenuj-na-proizvod:*

shows $a \frown (n \otimes m) = a \frown n \frown m$

Zadatak 2 Dodatni primeri.

Pokazati sledeće teoreme u Isar-u. Kao dodatan izazov, dozvoljeno je korišćenje samo primenjivanje pravila *rule* i *subst* za dokazivanje među koraka, tj. bilo kakva automatizacija (*simp*, *auto*, *metis*, *blast*, *force*, *fastforce*, *sladgetherhammer*, ...) je zabranjena.

lemma $a \oplus \text{Nula} = a$

lemma $a \otimes (\text{Sled } b) = a \otimes b \oplus a$

lemma $a \otimes b \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

lemma $a \otimes b = b \otimes a$

lemma $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$