

# Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

## Vežbe 2

### **Zadatak 1** *Zapisivanje logičkih formula (nastavak)*

(a) Zapisati sledeće rečenice u logici prvog reda i dokazati njihovu ispravnost.

(a.1) Ako "šta leti to ima krila i lagano je" i "šta pliva, to nema krila", onda "šta pliva, to ne leti"

**lemma**

$(\forall x. \text{Leti } x \longrightarrow \text{Krila } x \wedge \text{Lagano } x) \wedge$

$(\forall x. \text{Pliva } x \longrightarrow \neg \text{Krila } x) \longrightarrow$

$(\forall x. \text{Pliva } x \longrightarrow \neg \text{Leti } x)$

**by** *auto*

(a.2) Ako postoji cipela koja u svakom trenutku odgovara svakoj nozi, onda za svaku nogu postoji cipela koja joj u nekom trenutku odgovara i za svaku nogu postoji trenutak takav da postoji cipela koja joj u tom trenutku odgovara.

**lemma**

$(\exists \text{ cipela}. \forall \text{ trenutak}. \forall \text{ noga}. \text{Odgovara cipela trenutak noga}) \longrightarrow$

$(\forall \text{ noga}. \exists \text{ cipela}. \exists \text{ trenutak}. \text{Odgovara cipela trenutak noga}) \wedge$

$(\forall \text{ noga}. \exists \text{ trenutak}. \exists \text{ cipela}. \text{Odgovara cipela trenutak noga})$

**by** *auto*

(b) Pokazati da je rečenica P logička posledica rečenica P1, P2,..., Pn.

P: Andrija voli da pleše.

P1: Svako ko je srećan voli da peva.

P2: Svako ko voli da peva, voli da pleše.

P3: Andrija je srećan.

**lemma**

$(\forall x. \text{Srecan } x \longrightarrow \text{Peva } x) \wedge$

$(\forall x. \text{Peva } x \longrightarrow \text{Plese } x) \wedge$

$\text{Srecan Andrija} \longrightarrow$

$\text{Plese Andrija}$

**by** *auto*

P': Svako dete voli da se igra.

P1': Svaki dečak voli da se igra.

P2': Svaka devojčica voli da se igra.

P3': Dete je dečak ili je devojčica.

**lemma**

$(\forall x. \text{Decak } x \longrightarrow \text{Igra } x) \wedge$

$$\begin{aligned}
& (\forall x. \text{Devojica } x \longrightarrow \text{Igra } x) \wedge \\
& (\forall x. \text{Dete } x \longrightarrow \text{Decak } x \vee \text{Devojica } x) \longrightarrow \\
& (\forall x. \text{Dete } x \longrightarrow \text{Igra } x)
\end{aligned}$$

**by** *auto*

(c) Na jeziku logike prvog reda zapisati sledeće rečenice i dokazati da su skupa nezadovoljive.

- Svaka dva brata imaju zajedničkog roditelja.

- Roditelj je stariji od deteta.

- Postoje braća.

- Nijedna osoba nije starija od druge.

**lemma**

$$\begin{aligned}
& (\forall x. \forall y. \exists z. \text{Brat } x y \longrightarrow \text{Roditelj } x z \wedge \text{Roditelj } y z) \wedge \\
& (\forall x. \forall y. \text{Roditelj } x y \longrightarrow \text{Stariji } y x) \wedge \\
& (\exists x. \exists y. \text{Brat } x y) \wedge \\
& (\neg (\exists x. \exists y. \text{Stariji } x y)) \longrightarrow
\end{aligned}$$

*False*

**by** *auto*

## **Zadatak 2** *Silogizmi*

Barbara (AAA-1)

All men are mortal. (MaP)

All Greeks are men. (SaM)

— All Greeks are mortal. (SaP)

**lemma** *Barbara:*

**lemma** *Barbara:*

$$\begin{aligned}
& (\forall x. \text{Man } x \longrightarrow \text{Mortal } x) \wedge \\
& (\forall x. \text{Greek } x \longrightarrow \text{Man } x) \longrightarrow \\
& (\forall x. \text{Greek } x \longrightarrow \text{Mortal } x)
\end{aligned}$$

**by** *auto*

Barbari (AAI-1)

All men are mortal. (MaP)

All Greeks are men. (SaM)

— Some Greeks are mortal. (SiP)

**lemma** *Barbari:*

**lemma** *Barbari:*

$$\begin{aligned}
& (\forall x. \text{Man } x \longrightarrow \text{Mortal } x) \wedge \\
& (\forall x. \text{Greek } x \longrightarrow \text{Man } x) \wedge \\
& (\exists x. \text{Greek } x) \longrightarrow \\
& (\exists x. \text{Greek } x \wedge \text{Mortal } x)
\end{aligned}$$

**by** *auto*

Celarent (EAE-1)

Similar: Cesare (EAE-2)

No reptiles have fur. (MeP)

All snakes are reptiles. (SaM)

— No snakes have fur. (SeP)

**lemma** *Celarent*:

**lemma** *Celarent*:

$(\neg (\exists x. \text{Reptile } x \wedge \text{Fur } x)) \wedge$   
 $(\forall x. \text{Snake } x \longrightarrow \text{Reptile } x) \longrightarrow$   
 $(\neg (\exists x. \text{Snake } x \wedge \text{Fur } x))$

**by** *auto*

Darii (AII-1)

Similar: Datisi (AII-3)

All rabbits have fur. (MaP)

Some pets are rabbits. (SiM)

— Some pets have fur. (SiP)

**lemma** *Darii*:

**lemma** *Darii*:

$(\forall x. \text{Rabbit } x \longrightarrow \text{Fur } x) \wedge$   
 $(\exists x. \text{Pet } x \wedge \text{Rabbit } x) \longrightarrow$   
 $(\exists x. \text{Pet } x \wedge \text{Fur } x)$

**by** *auto*

Ferioque (EIO-1)

Similar: Festino (EIO-2), Ferison (EIO-3), Fresison (EIO-4)

No homework is fun. (MeP)

Some reading is homework. (SiM)

— Some reading is not fun. (SoP)

**lemma** *Ferioque*:

**lemma** *Ferioque*:

$(\neg (\exists x. \text{Homework } x \longrightarrow \text{Fun } x)) \wedge$   
 $(\exists x. \text{Reading } x \wedge \text{Homework } x) \longrightarrow$   
 $(\exists x. \text{Reading } x \wedge \neg \text{Fun } x)$

**by** *auto*

Baroco (AOO-2)

All cats are mammals. (PaM)

Some pets are not mammals. (SoM)

— Some pets are not cats. (SoP)

**lemma** *Baroco*:

**lemma** *Baroco*:

$(\forall x. \text{Cat } x \longrightarrow \text{Mammal } x) \wedge$   
 $(\exists x. \text{Pet } x \wedge \neg \text{Mammal } x) \longrightarrow$   
 $(\exists x. \text{Pet } x \wedge \neg \text{Cat } x)$

**by** *auto*

Bocardo (OAO-3)

Some cats are not pets. (MoP)

All cats are mammals. (MaS)

— Some mammals are not pets. (SoP)

**lemma** *Bocardo*:

**lemma** *Bocardo*:

$$\begin{aligned} & (\exists x. Cat\ x \wedge \neg Pet\ x) \wedge \\ & (\forall x. Cat\ x \longrightarrow Mammal\ x) \longrightarrow \\ & (\exists x. Mammal\ x \wedge \neg Pet\ x) \end{aligned}$$

**by** *auto*

Celarent (EAO-1)

No reptiles have fur. (MeP)

All snakes are reptiles. (SaM)

— Some snakes have no fur. (SoP)

**lemma** *Celarent*:

**lemma** *Celarent*:

$$\begin{aligned} & (\neg (\exists x. Reptile\ x \wedge Fur\ x)) \wedge \\ & (\forall x. Snake\ x \longrightarrow Reptile\ x) \wedge \\ & (\exists x. Snake\ x) \longrightarrow \\ & (\exists x. Snake\ x \wedge \neg Fur\ x) \end{aligned}$$

**by** *auto*

Camestros (AEO-2)

All horses have hooves. (PaM)

No humans have hooves. (SeM)

— Some humans are not horses. (SoP)

**lemma** *Camestros*:

**lemma** *Camestros*:

$$\begin{aligned} & (\forall x. Horse\ x \longrightarrow Hooves\ x) \wedge \\ & (\neg (\exists x. Human\ x \wedge Hooves\ x)) \wedge \\ & (\exists x. Human\ x) \longrightarrow \\ & (\exists x. Human\ x \wedge \neg Horse\ x) \end{aligned}$$

**by** *auto*

Felapton (EAO-3)

No flowers are animals. (MeP)

All flowers are plants. (MaS)

— Some plants are not animals. (SoP)

**lemma** *Felapton*:

**lemma** *Felapton*:

$$(\neg (\exists x. Flower\ x \wedge Animal\ x)) \wedge$$

$(\forall x. \text{Flower } x \longrightarrow \text{Plant } x) \wedge$   
 $(\exists x. \text{Flower } x) \longrightarrow$   
 $(\exists x. \text{Plant } x \wedge \neg \text{Animal } x)$

by auto

Darapti (AAI-3)

All squares are rectangles. (MaP)

All squares are rhombuses. (MaS)

— Some rhombuses are rectangles. (SiP)

**lemma** *Darapti*:

**lemma** *Darapti*:

$(\forall x. \text{Square } x \longrightarrow \text{Rectangle } x) \wedge$   
 $(\forall x. \text{Square } x \longrightarrow \text{Rhombus } x) \wedge$   
 $(\exists x. \text{Square } x) \longrightarrow$   
 $(\exists x. \text{Rhombus } x \wedge \text{Rectangle } x)$

by auto

### Zadatak 3 *Raymond M. Smullyan: Logical Labyrinths*

Edgar Aberkrombi je bio antropolog koji se interesovao za logiku i socijologiju laganja i govorenja istine. Jednog dana je odlučio da poseti ostrvo vitezova i podanika. Stanovnike ovog ostrva delimo na one koji uvek govore istinu *vitezove* i one koji uvek govore laži *podanike*. Dodatno, na ostrvu žive samo vitezovi i podanici. Aberkrombi susreće stanovnike i želi da prepozna ko je od njih vitez, a ko je podanik.

1. Svaka osoba će odgovoriti potvrdno na pitanje: Da li si ti vitez?

**lemma** *no-one-admit-kneves*:

**assumes**  $k \longleftrightarrow (k \longleftrightarrow \text{yes})$

**shows** *yes*

**using** *assms*

by auto

1.1 Aberkrombi je razgovarao sa tri stanovnika ostrva, označimo ih sa A, B i C. Pitao je stanovnika A: "Da li si ti vitez ili podanik?" A je odgovorio ali nerazgovetno pa je Aberkrombi pitao stanovnika B: "Šta je A rekao?" B je odgovorio: "Rekao je da je on podanik." Tada se uključila i osoba C i rekla: "Ne veruj mu, on laže!" Da li je osoba C vitez ili podanik?

**lemma** *Smullyan-1-1*:

**assumes**  $kA \longleftrightarrow (kA \longleftrightarrow \text{yes}A)$

**and**  $kB \longleftrightarrow \neg \text{yes}A$

**and**  $kC \longleftrightarrow \neg kB$

**shows** *kC*

**using** *assms*

by auto

1.2 Aberkrombi je pitao stanovnika A koliko među njima trojicom ima podanika. A je opet odgovorio nerazgovetno, tako da je Aberkrombi pitao stanovnika B šta je A rekao. B je rekao da je A rekao da su tačno dvojica podanici. Ponovo je stanovnik C tvrdio da B laže. Da li je u ovoj situaciji moguće odrediti da li je C vitez ili podanik?

**definition** *exactly-two* :: *bool*  $\Rightarrow$  *bool*  $\Rightarrow$  *bool*  $\Rightarrow$  *bool* **where**

*exactly-two*  $x\ y\ z \longleftrightarrow ((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)) \wedge \neg (x \wedge y \wedge z)$

**lemma** *Smullyan-1-2:*

**assumes**  $kA \longleftrightarrow (\text{exactly-two } (\neg kA) (\neg kB) (\neg kC) \longleftrightarrow \text{yes}A)$   
**and**  $kB \longleftrightarrow \text{yes}A$   
**and**  $kC \longleftrightarrow \neg kB$   
**shows**  $kC$   
**using** *assms*  
**unfolding** *exactly-two-def*  
**by** *auto*

1.3 Da li se zaključak prethodnog tvrđenja menja ako B promeni svoj odgovor i kaže da je A rekao da su tačno dva od njih vitezovi?

**lemma** *Smullyan-1-3:*

**assumes**  $kA \longleftrightarrow (\text{exactly-two } kA \ kB \ kC \longleftrightarrow \text{yes}A)$   
**and**  $kB \longleftrightarrow \text{yes}A$   
**and**  $kC \longleftrightarrow \neg kB$   
**shows**  $\neg kC$   
**using** *assms*  
**unfolding** *exactly-two-def*  
**by** *auto*