

Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Vežbe 7

Zadatak 1 *Isar dokazi u logici prvog reda.*

lemma

assumes $(\exists x. P x)$
and $(\forall x. P x \longrightarrow Q x)$
shows $(\exists x. Q x)$

lemma

assumes $\forall c. Man\ c \longrightarrow Mortal\ c$
and $\forall g. Greek\ g \longrightarrow Man\ g$
shows $\forall a. Greek\ a \longrightarrow Mortal\ a$

Dodatni primeri:

lemma

assumes $\forall a. P\ a \longrightarrow Q\ a$
and $\forall b. P\ b$
shows $\forall x. Q\ x$

lemma

assumes $\exists x. A\ x \vee B\ x$
shows $(\exists x. A\ x) \vee (\exists x. B\ x)$

lemma

assumes $\forall x. A\ x \longrightarrow \neg B\ x$
shows $\neg (\exists x. A\ x \wedge B\ x)$

Formulisati i dokazati naredna tvrđenja u Isar jeziku:

Ako za svaki broj koji nije paran važi da je neparan;
i ako za svaki neparan broj važi da nije paran;
pokazati da onda za svaki broj važi da je ili paran ili neparan.

Ako svaki konj ima potkovice;
i ako ne postoji čovek koji ima potkovice;
i ako znamo da postoji makar jedan čovek;
dokazati da postoji čovek koji nije konj.

Zadatak 2 *Pravilo ccontr i classical.*

Dokazati u Isar jeziku naredna tvrđenja pomoću pravila *ccontr*.

lemma $\neg (A \wedge B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

Dodatni primer:

lemma $((P \longrightarrow Q) \longrightarrow P) \longrightarrow P$

Dokazati u Isar jeziku naredna tvrđenja pomoću pravila *classical*.

lemma $P \vee \neg P$

Dodatni primer:

lemma

assumes $\neg (\forall x. P x)$
shows $\exists x. \neg P x$

Zadatak 3 *Logčki lavirinti.*

Svaka osoba daje potvrđan odgovor na pitanje: *Da li si ti vitez?*

lemma *no-one-admits-knave:*

assumes $k \longleftrightarrow (k \longleftrightarrow ans)$
shows ans

Abercrombie je sreo tri stanovnika, koje ćemo zvati A, B i C. Pitao je A: Jesi li ti vitez ili podanik? On je odgovorio, ali tako nejasno da Abercrombie nije mogao shvati što je rekao. Zatim je upitao B: Šta je rekao? B odgovori: Rekao je da je podanik. U tom trenutku, C se ubacio i rekao: Ne verujte u to; to je laž! Je li C bio vitez ili podanik?

lemma *Smullyan-1-1:*

assumes $kA \longleftrightarrow (kA \longleftrightarrow ansA)$
and $kB \longleftrightarrow \neg ansA$
and $kC \longleftrightarrow \neg kB$
shows kC

Abercrombie nije pitao A da li je on vitez ili podanik (jer bi unapred znao koji će odgovor dobiti), već je pitao A koliko od njih trojice su bili vitezovi. Opet je A odgovorio nejasno, pa je Abercrombie upitao B što je A rekao. B je tada rekao da je A rekao da su tačno njih dvojica podanici. Tada je, kao i prije, C tvrdio da B laže. Je li je sada moguće utvrditi da li je C vitez ili podanik?

definition *exactly-two* :: $bool \Rightarrow bool \Rightarrow bool \Rightarrow bool$ **where**

exactly-two $A B C \longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \wedge \neg (A \wedge B \wedge C)$

lemma *Smullyan-1-2:*

assumes $kB \longleftrightarrow (kA \longleftrightarrow \text{exactly-two } (\neg kA) (\neg kB) (\neg kC))$
and $kC \longleftrightarrow \neg kB$
shows kC

Abercrombie je sreo samo dva stanovnika A i B. A je izjavio: Obojica smo podanici. Da li možemo da zaključimo šta je A a šta je B?

lemma *Smullyan-1-3:*

x

A nije rekao: Obojica smo podanici. Ono što je on rekao je: Bar jedan od nas je podanik. Ako je ova verzija odgovora tačna, šta su A i B?

lemma *Smullyan-1-4:*

x

A je rekao: Svi smo istog tipa tj. ili smo svi vitezovi ili podanici. Ako je ova verzija priče tačna, šta možemo zaključiti o A i B?

lemma *Smullyan-1-5:*

x

Primetiti da ova lema odgovara lemi *no-one-admits-knave*. Zašto se ne može ništa zaključiti o osobi A?