Höhere Technische Bundeslehranstalt Eisenstadt
Bad Kissingen Platz 3, 7000 Eisenstadt

FACHARBEIT

Themen:

Trennung der Variablen

Variation der Konstanten

Verfasser: Schweiss Sandro
Klasse: 4 AHME

Betreuer: Mag. Gert Rivalta
Abgabetermin: 21.12.2017

Inhaltsverzeichnis

1. TRENNUNG DER VARIABLEN

1.1. EINLEITUNG

Die Methode der „Trennung der Variablen" fällt in das Gebiet „Trennung der Veränderlichen". Die Trennung der Variablen ist ein Verfahren aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Durch dieses Verfahren lassen sich trennbare Differentialgleichungen erster Ordnung lösen, dies sind Differentialgleichungen, welche als erste Ableitung y' aus nur einem Produkt von x bestehen:

$$y' = f(x, y)$$

1.2. GESCHICHTE

Der Begriff „Trennung der Veränderlichen" kommt ursprünglich aus dem Jahre 1694, wo er von Johan Bernoulli in einem Brief an Gottfried Wilhem Leibniz verwendet wurde.

Johann Bernoulli geboren am 27.Juli 1667 in Basel und verstorben am 1. Januar 1748 war ein Schweizer Mathematiker und Arzt. Er sollte ursprünglich Kaufmann werden, entschied sich aber dagegen und studierte ab 1683 an der Universität Basel, wo er 1685 seinen Magister-Abschluss machte. In das Gebiet der Mathematik und das damals neue Teilgebiet der Analysis führte ihn sein älterer Bruder Jakob Bernoulli ein. Nach einigen Jahren verließ er seinen Bruder und reiste in Europa umher, um seine Kenntnisse zu verbreiten. Nach vielen langen Jahren auf diesem Gebiet, wurde er nach dem Tod von Leibniz im Jahre 1716 der Hauptvertreter der Analysis auf dem kontinentalen Europa. Seine weiteren Arbeitsgebiete umfassten unter anderem Reihen, Differentialgleichungen und Kurvendiskussionen unter geometrischen und mechanischen Aspekten. Bevor Johann und Jakob Bernoulli sich mit Differentialgleichungen beschäftigten, wurde sie überwiegend in der Geometrie eingesetzt. Erst durch die Brüder wurden die Differentialgleichungen auch zur Lösung von physikalischen Problemen eingesetzt.

1.3. ANWENDUNG

Wie bereits vorher erwähnt, besteht bei Differentialgleichungen erster Ordnung die Ableitung y' nur aus einem Produkt von x:

$$y' = f(x, y)$$

Um die Methode „Trennung der Variablen“ anwenden zu können, darf auf der rechten Seite der Gleichung y' nicht mehr vorkommen. Wenn diese Ausgangsform vorhanden ist, folgt man immer dem gleichen Lösungsschema:

Als erstes ersetzt man y' durch $\frac{dy}{dx}$ und formt dabei die Gleichung so um, dass jeder Term der y beinhaltet auf der linken Seite der Gleichung und jeder Term der x beinhaltet auf der rechten Seite steht. Anschließend wird die Gleichung integriert und nach y umgeformt.

1.3.1. AUSFÜHRLICHE ERKLÄRUNG

Schritt 1:

Die Gleichung auf die Grundform $y' = f(x, y)$ bringen, falls diese nicht vorhanden ist.

Schritt 2:

Überprüfe ob sich die rechte Seite als Produkt $g(x) \cdot h(y)$ anschreiben lässt, wobei $g(x)$ nur von x und $h(y)$ nur von y abhängig sein darf.

Schritt 3:

Ersetze y' durch $\frac{dy}{dx}$, multipliziere mit dx und dividiere sie durch $h(y)$, dadurch erhält man die folgende Gleichung. (Dieser Schritt ist nur möglich wenn $h(y)$ ungleich 0 ist)

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) \cdot dx$$

Schritt 4:

Integriere anschließend die linke Seite der Gleichung nach dy und die rechte Seite nach dx. Eine Integrationskonstante c muss hierbei nur auf die rechte Seite schreiben werden.

Schritt 5:

Forme die erhaltene Gleichung nach y um.

1.3.2. BEISPIEL

Gegeben ist:

$$y' = x \cdot y^2$$

Beim gegebenen Term ist y' bereits alleine auf der linken Seite (Die Ausgangsform ist bereits gegeben).

Auch die rechte Seite der Gleichung erfüllt die Kriterien $(g(x) \cdot h(y))$, somit kann eine Trennung der Variablen durchgeführt werden.

Als nächstes wird y' durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzt:

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

Und durch Umformen erhält man:

$$\frac{1}{y^2} dy = x \cdot dx$$

Anschließend werden nun beide Seiten der Gleichung integriert und man erhält folgenden Ausdruck:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x \cdot dx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{x} = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Alternativ auch:

$$ln(-y) = \frac{x^2}{2} + c$$

Den erhaltenen Ausdruck formen wir nun so um, dass nur y auf der linken Seite steht. Danach multipliziert man mit e^x und daraus folgt:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}+c}$$

Durch verändertes Anschreiben c ergibt sich e^c:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^c$$

Und aus der Schreibweise $e^c = c_O$ ergibt sich dann durch weiteres umformen die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot C_O}$$

2. VARIATION DER KONSTANTEN

2.1. EINLEITUNG

Die Variation der Konstanten ist ein Verfahren aus der Theorie linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zur Bestimmung einer speziellen Lösung eines inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungssysteme sind eine wichtige Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen und werden in der Form geschrieben:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) + g(x)$$

Vorausgesetzt wird hierfür eine vollständige Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

2.2. GESCHICHTE

Diese Verfahrensweise haben zwei Mathematiker geprägt, Leonhard Euler, der der einen Vorläufer dieser Methode bereits 1748 im Zusammenhang mit astronomischen Problemen verwendete Joseph-Louis Lagrange, der der das Verfahren in der heutig bekannten Form entwickelt hat.

Leonhard Euler, geboren am 15. April 1707 in Basel und verstorben am 7. September 1783 in Sankt Petersburg war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker. Er besuchte das dortige Gymnasium und nahm gleichzeitig Privatunterricht beim Theologen Johannes Burckhardt (1691–1743), der von der Mathematik begeistert war. Ab 1720 studierte er an der Universität Basel und hörte hier Vorlesungen von Johann Bernoulli. 1733 trat er schließlich die Nachfolge von Daniel Bernoulli als Professor für Mathematik an und verfasste viele Mathematische Publikationen wie zum Beispiel die Institutiones calculi differentialis (1755) und die Institutiones calculi integralis (1768–1770), er beschäftigte sich außer mit der Differential- und Integralrechnung unter anderem mit Differenzengleichungen und elliptischen Integralen sowie mit der Theorie der Gamma- und Betafunktion.

2.3. ANWENDUNG

Bei der Ermittlung der speziellen Lösung wird auch das bereits vorher besprochene Verfahren der homogenen Lösung benötigt, denn die spezielle Lösung ergibt sich auf Basis der homogenen Lösung. Insgesamt wird zur Bestimmung der gesamten Lösung drei verschiedene Verfahren angewendet.

2.3.1. AUSFÜHRLICHE ERKLÄRUNG

Die Ausgangsform für eine inhomogene lineare Gleichung erster Ordnung sieht in den meisten Fällen so aus (von dieser Formel gehen wir für die Erklärung aus):

$$y' + py = s(x)$$

Der Term ‚$+py$' ist der Grund, warum man nicht nur eine homogene Gleichung durchführen kann, da die Störfunktion $s(x) \neq 0$ ist.

Schritt 1:

Man berechnet die homogene Lösung wie folgt:

$$y_h(x) = c \cdot e^{-px}$$

Schritt 2:

Zuerst ersetzt man in der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung die Konstante c durch eine Funktion abhängig von x: $c(x)$

$$y_p = c(x) \cdot e^{-px}$$

Schritt 3:

Abhängig von der Ordnung der Differentialgleichungen muss man die Ableitungen von y_p bilden (In unserem Fall nur eine, da sie eine Differentialgleichung erster Ordnung ist).

$$y_p' = c'(x) \cdot e^{-px} - pc(x) \cdot e^{-px}$$

Alternativ auch:

$$y_p' = e^{-px} \cdot [c'(x) - pc(x)]$$

Schritt 4:

Man muss y_p und seine Ableitungen in die Ursprüngliche Formel $y' + py = s(x)$ einsetzen:

$$y_p' + py_p = s(x)$$

Daraus folgt:

$$c'(x) \cdot e^{-px} - pc(x) \cdot e^{-px} + pc(x) \cdot e^{-px} = s(x)$$

Durch kürzen:

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{-px} = s(x)$$

Jetzt kann man mit einer Integration c(x) bestimmen:

$$c(x) = \int c'(x) \cdot e^{-px}\, dx$$

Durch einsetzen der oberen Rechnung:

$$= \int s(x) \cdot e^{-px}\, dx$$

Und schließlich durch auflösen des Integrals:

$$= \frac{-s(x) \cdot e^{-px}}{p} + c$$

Schritt 5:

Dies können wir wieder oben für $c(x)$ bei der Formel $y_p = c(x) \cdot e^{-px}$ einsetzen und erhalten die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\boldsymbol{y_p = \left(\frac{-s(x) \cdot e^{-px}}{p} + c\right) \cdot e^{-px}}$$

2.3.2. BEISPIEL

Wir gehen von der Formel aus:

$$y' - 3y = x \cdot e^{4x}$$

Man berechnet die homogene Lösung:

$$y_h(x) = c \cdot e^{3x}$$

Man macht die konstante c zur Funktion $c(x)$:

$$y_p = c(x) \cdot e^{3x}$$

Da es eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, muss man nur eine Ableitung machen:

$$y' = c'(x) \cdot e^{3x} + 3c(x) \cdot e^{3x}$$

Dieses y und y' setzt man in die ursprüngliche inhomogene Differentialgleichung ein und vereinfacht:

$$y' - 3y = x \cdot e^{4x}$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{3x} + 3c(x) \cdot e^{3x} - 3c(x) \cdot e^{3x} = x \cdot e^{4x}$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{3x} = x \cdot e^{4x}$$

$$\Rightarrow c'(x) = x \cdot e^{x}$$

Jetzt kann man durch einmaliges Integrieren $c(x)$ bestimmen:

$$c(x) = \int c'(x)\, dx$$

$$= \int x \cdot e^{x}\, dx$$

$$= (\mathrm{x} - 1) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{c}$$

Dies müssen wir oben für $c(x)$ einsetzen:

$$y_p = c(x) \cdot e^{3x}$$

$$= [(x-1) \cdot e^{x} + c] \cdot e^{3x}$$

$$\boldsymbol{y_p = (x-1) \cdot e^{4x} + ce^{3x}}$$ **allgemeine Lösung**

2.4. ENDLÖSUNG

Durch beide Verfahren, nämlich die homogene Lösung und die inhomogene Lösung, lässt sich abschließend noch die komplette Allgemeine Lösung bestimmen, die diese Form besitzt:

$$y = y_h + y_p$$

Wenn wir diese Lösung an Hand des Beispiels nehmen, würde sie folgendermaßen aussehen:

$$y = \mathrm{c} \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{x}} + (x-1) \cdot \mathrm{e}^{4\mathrm{x}} + ce^{3x}$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{3x}(\mathbf{2}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{x} - \boldsymbol{e}^{x})}$$

3. ZUSAMMENFASSUNG – FAZIT

Die Gebiete „Trennung der Variablen“ und „Variation der Konstanten“ kommen in dem großen Gebiet Differentialgleichungen vor und werden benötigt um sie zu Lösen. Eine Vielzahl von Phänomenen in Natur und Technik kann durch Differentialgleichungen und darauf aufbauende mathematische Modelle beschrieben werden. Das Gebiet der Differentialgleichungen hat der Mathematik eine wichtige Erweiterung gegeben, noch heute forschen viele Teile der Mathematik an der Existenz-, Eindeutigkeits- und Stabilitätstheorie von verschiedenen Differentialgleichungen.

Das Thema war auf den ersten Blick nur eine anstrengende Arbeit, aber nachdem ich einen Blick hinein riskiert und mich wirklich damit beschäftigt habe, ist immer mehr Zeit und Quellenangaben in die Arbeit geflossen. Durch die Aufgabenstellung von zwei Themen, fiel es mir relativ einfach die Themen dementsprechend zu Gliedern. Wobei das erste Thema, durch die vielen Mathematikstunden, die über dieses Gebiet handelten, relativ einfach war, fiel mir das zweite Thema umso schwerer. Nicht, weil es ein schweres Thema an sich war, sondern weil es zu Missverständnissen zwischen verschiedenen Methoden gekommen ist, was mich mehr Zeit als erwartet gekostet hat, um dieses Problem zu lösen. Allerdings war das ein weiterer Grund für die intensive Auseinandersetzung mit diesem Thema. Durch die vorher angesprochene Wichtigkeit dieses Themas in den Bereichen Naturwissenschaften, Mechanik und Mathematik, viel es mir relativ einfach Informationen zu besorgen.

Ein negativer Punkt ist die Größe des Themas, während andere das ganze Thema Differentialgleichungen bekommen haben (wobei sie nur eine Seite für mein Thema gebraucht haben), musste ich versuchen mit diesen 2 Gebieten die erforderte Anzahl an Zettel zu füllen, was mir letztendlich auch gelungen ist und eine ausführliche Erklärung des Gebietes zur Folge hat.

4. QUELLENVERZEICHNIS

4.1. TRENNUNG DER VARIABLEN

4.1.1. LITERATUR

Kaiser Timischl (2017): Ingenieur Mathematik

4.Auflage, E Dorner

Wolfgang Walter. (1990) *Gewöhnliche Differentialgleichungen*.

Springer, 4. überarbeitete Auflage

Kurt Endl, Wolfgang Luh: (1989) *Analysis I*. Aula-Verlag,

9. Auflage, Wiesbaden

Harro Heuser: (2009) *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch*. Vieweg+Teubner,

6. aktualisierte Auflage,

4.1.2. INTERNET

https://de.wikipedia.org/wiki/Trennung_der_Ver%C3%A4nderlichen (15.12.2017)

https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli (15.12.2017)

http://statistik.wu-wien.ac.at/~leydold/MOK/HTML/node180.html (15.12.2017)

https://www.math.tu-dresden.de/~herrich/ss17_mathe2_CH/TdV.pdf (15.12.2017)

https://homepages.thm.de/~hg12496/b2/05.03-1st-order.pdf (16.12.2017)

4.2. VARIATION DER KONSTANTEN

4.2.1. LITERATUR

Forest Ray Moulton(1914): *An Introduction to Celestial Mechanics*,

2nd ed. Macmillan Company

Leonhard Euler 1748 par l'Académie Royale des Sciences de Paris, France: G. Martin, J.B. Coignard, & H.L. Guerin

Joseph-Louis Lagrange: (1766) "Solution de différens problèmes du calcul integral"

Wolfgang Walter(1986): *Gewöhnliche Differentialgleichungen.*

3. Auflage. Springer Verlag

Differentialgleichungen n-ter Ordnung(1977).

In: Otto Forster: Analysis II. Vieweg Verlag

4.2.2. INTERNET

http://statistik.wu-wien.ac.at/~leydold/MOK/HTML/node182.html (16.12.2017)

http://mathedia.com/gewoehnliche-differentialgleichungen/variation-der-konstanten-aufgabe-1/ (16.12.2017)

http://mathedia.com/gewoehnliche-differentialgleichungen/variation-der-konstanten-aufgabe-2/ (17.12.2017)

http://massmatics.de/merkzettel/index.php#!507:Variation_der_Konstanten (17.12.2017)

http://massmatics.de/merkzettel/index.php#!504:Differentialgleichungen_in_getrennten_Variablen (17.12.2017)

https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler (18.12.2017)

https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange (19.12.2017)