



بسمه تعالی

پروژه درس کنترل مدرن

استاد درس: دکتر بلندی

-دانشکده مهندسی برق-

ساناز مطیع - ۹۹۴۱۳۰۸۲

تابستان ۱۴۰۲

سوال اول)

بزرگی خطای حالت پایدار و overshoot ناشی از اختلالات محیطی می تواند باعث حرکت ناپایدار هواپیما شود. چنین شرایطی می تواند باعث شود که هواپیما یک اغتشاش را تجربه کند و مسیر خود را از یک مسیر از پیش تعیین شده تغییر دهد. هدف این مقاله طراحی پایداری عملکرد پرواز پهپاد، به ویژه ساخت بال پرنده با استفاده از سیستم کنترل روش LQR است. انتظار می رود که هواپیما بتواند ماموریت را با حداقل اختلال انجام دهد.

در این مقاله برای بررسی نتیجه از یک مدل بال پرنده به کار رفته که در سیستم کنترل آن از PID و LQR استفاده شده است. به بال پرنده سه نقطه در مسیر داده شده است و دقت آن برای رفتن به هر نقطه محاسبه شده است. طبق نتایج به دست آمده دقت بسیار بالاتر رفته و خطا کاهش یافته است.

Translation Movement

$$\sum F = ma \quad (1)$$

where: m = mass (kg)
 a = acceleration ($\frac{m}{s^2}$)

$$\sum F = F + F_{gravity} \quad (2)$$

$$\sum F = m \frac{d}{dt} v_T = m \frac{d}{dt} v_T + (\omega \times v_T) \quad (3)$$

where : v_T = translation velocity ($\frac{m}{s}$)
 ω = angular velocity ($\frac{rad}{s}$)

Linear vector velocity and total angular can be calculated in Equations 4 and 5:

$$v_T = iU + jV + kW \quad (4)$$

$$\omega = iP + jQ + kR \quad (5)$$

Based on the earth's gravity force on each plane axis the force of each axis on the plane can be written [19]:

$$X = (U + QW - VR + g\sin\theta) \quad (7)$$

$$Y = (V + UR - PW - g\cos\theta\sin\phi) \quad (8)$$

$$Z = (W + PV - UQ + g\cos\theta\cos\phi) \quad (9)$$

Rotation Movement

$$H = I\omega \quad (10)$$

where: $H = \text{angular momentum (} \frac{kg.m^2.rad}{s} \text{)}$
 $I = \text{moment of inertia (} kg.m^2 \text{)}$

Torque that occurs in the system is:

$$M = I \frac{d}{dt}(\omega + \omega \times \omega) + \omega \times H \quad (11)$$

where: $\omega \times \omega = 0$

So Equation 11 can be Equation (12) and then (13).

$$\frac{d}{dt}\omega = iP + jQ + kR \quad (12)$$

$$\omega \times H = \begin{bmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$M_x = I_{xx}\dot{P} - (\dot{R} + PQ) + (I_{zz} - I_{yy}) \quad (19)$$

$$M_y = I_{yy}\dot{Q} - (P\dot{R} + R\dot{P}) + (I_{xx} - I_{zz}) \quad (20)$$

$$M_z = I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + (I_{xx} - I_{yy} + RQI_{xz}) \quad (21)$$

where: $M_x = L$ (roll)
 M_y is M (pitch)
 M_z is N (yaw)

معادلات فضای حالت سیستم

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{\dot{U}} \\ \dot{V} \\ \dot{\dot{V}} \\ \dot{W} \\ \dot{\dot{W}} \\ \dot{P} \\ \dot{\dot{P}} \\ \dot{Q} \\ \dot{\dot{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(I_{yy}-I_{zz})}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_E \\ U \\ Y_E \\ V \\ Z_E \\ W \\ \phi \\ P \\ \theta \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ L \\ M \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\dot{x} = A x B u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_E \\ U \\ Y_E \\ V \\ Z_E \\ W \\ \phi \\ P \\ \theta \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$y = C x D u$$

سوال سوم

فضای حالت سیستم به صورت زیر است.

A =

```
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -w]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

B =

```
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[1/m, 0, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 1/m, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 1/m, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 1/i_xx, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 1/i_yy, 0]
```

```
C =
    1     0     0     0     0     0     0     0     0     0
    0     0     1     0     0     0     0     0     0     0
    0     0     0     0     1     0     0     0     0     0
    0     0     0     0     0     0     1     0     0     0
    0     0     0     0     0     0     0     0     1     0
```

```
D =
    0     0     0     0     0
    0     0     0     0     0
    0     0     0     0     0
    0     0     0     0     0
    0     0     0     0     0
```

سوال چهارم)

ماتریس کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم را محاسبه می کنیم. سپس مرتبه آن را به دست می آوریم مشاهده می شود که مرتبه آن کامل نیست پس سیستم مود های کنترل ناپذیر و مشاهده ناپذیر دارد.

```
35 %% Q4
36 %Controllability Matrix
37 - phic=ctrb(A,B);
38 - nc=rank(phic)
39
40 %Observability Matrix
41 - phio=obsv(A,C);
42 - no=rank(phio)
43
```

Command Window

```
nc =
    8

no =
    9
```

جدا سازی بخش کنترل پذیر و کنترل ناپذیر

$[Abar, Bbar, Cbar, T, k] = ctrbf(A, B, C)$

```
Abar =
    1.0000     0     0     0     0     0     0     0     0     0
         0 -0.0000     0.0000 -0.0000     0.0000     0.0000     0.0000 -0.0000 -0.0000     0.0000
         0     0.0000 -0.0000     0.0000 -0.0001 -0.0000 -0.0000     0.0000     0.0003 -0.0176
         0 -0.0000     0.0000 -0.0000     0.0000     0.0000 -1.0000     0 -0.0000     0.0000
         0 -0.0000     0.2982 -0.0000     4.2705     0.0000     0.0000     0 -13.6988 -0.2523
         0 -0.0000     0.0000 -0.0000     0.0000     0.0000 -0.0000    30.0000 -0.0000 -0.0000
         0     0     0     0     0     0     0     0     0 -10.0000
         0 -0.0000 -0.2078     0.0000 -2.9755     1.0000     0     0     9.5448     0
         0 -0.0000     0.0930 -0.0000     1.3313     0.0000     0     0 -4.2705     0.8094
         0 -0.0000     0.0204 -0.0000     0.2924     0.0000     0     0 -0.9381     0
```

```

Bbar =
      0      0      0      0      0
      0      0      0 -0.0000      0
      0      0      0  0.0000      0
      0      0      0 -0.0000      0
      0      0      0  0.0000      0
      0      0      0  0.0000      0
-0.1250      0      0      0      0
      0 -0.1250      0      0      0
      0      0      0 -0.4191      0
      0      0      0      0 -0.4292

Cbar =
      0 -0.0000  0.0000  1.0000 -0.0000  0.0000      0      0      0      0
 1.0000      0      0      0      0      0      0      0      0      0
      0  0.0000 -0.0000      0      0 -1.0000      0      0      0      0
      0  0.0000 -0.9976      0  0.0697 -0.0000      0      0      0      0
      0  1.0000  0.0000      0  0.0000  0.0000      0      0      0      0

```

جداسازی بخش مشاهده پذیر و مشاهده ناپذیر

$[Abar, Bbar, Cbar, T, k] = \text{obsvf}(A, B, C)$

```

Abar =
      0      0      0 -15.0000      0      0      0      0      0      0
      0      0      0 -0.9828      0      0      0      0      0      0
      0 -10.0000      0      0      0      0      0      0      0      0
      0  0.8480      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0  10.0000      0      0      0 -1.0000      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0 -1.0000      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0 -30.0000      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0  1.0000      0
      0      0  1.0000      0      0      0      0      0      0      0

```

```

Bbar =
      0      0      0  0.1250      0
      0      0      0      0  0.4292
 0.1250      0      0      0      0
      0      0      0  0.4000      0
      0  0.1250      0      0      0
      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0

Cbar =
      0      0      0      0      0      0      0      0      0      1
      0      0      0      0      0      0      0      0 -1      0
      0      0      0      0      0      0      0 -1      0      0
      0      0      0      0      0      0 -1      0      0      0
      0      0      0      0      0 -1      0      0      0      0

```

سوال پنجم)

سیستم مشاهده ناپذیر و کنترل ناپذیر است در نتیجه مینیمال نیست. برای به دست آوردن سیستم مینیمال از دستور minreal استفاده می کنیم.

```
minsys=minreal(sys)
[A,B,C,D] = ssdata(minsys)
```

A =

0	1.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-10.0000
0	0	0	1.0000	0	10.0000	0
0	0	30.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1.0000	0
0	0	0	0	0	0	0.8480
0	0	0	0	0	-0.9828	0

B =

0	0	0	0	0
0.1250	0	0	0	0
0	0.1250	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0.4000	0
0	0	0	0	0.4292

C =

1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

D =

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

* فضای حالت ما کنترل پذیر نیست به همین علت از این سوال به بعد قسمت کنترل پذیر آن ها را جدا کرده و با استفاده از آن پاسخ سوالات را می نویسیم.

```
[Abar,Bbar,Cbar,T,P]=ctrbf(A,B,C);
A=Abar(3:10,3:10);
B=Bbar(3:10,:);
C=Cbar(:,3:10);
```


سوال ششم)

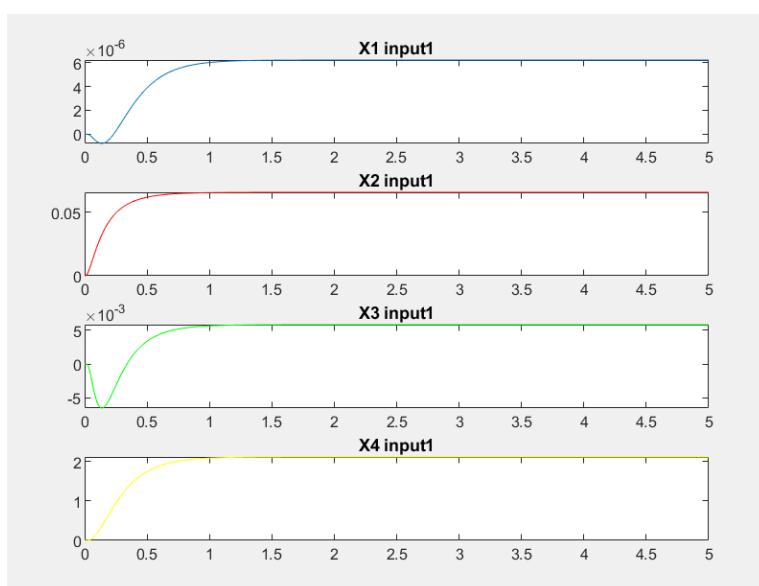
قطب های سیستم حلقه بسته را در محل های زیر قرار می دهیم.

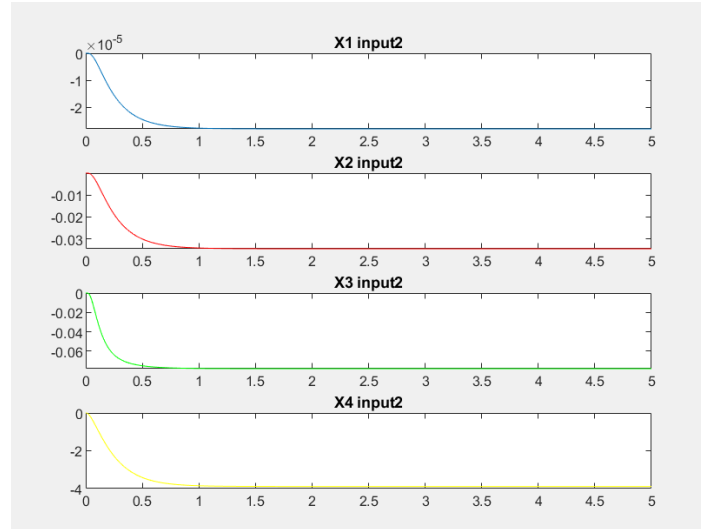
$$p = [-5 \ -10 \ -9 \ -50 \ -15 \ -20 \ -25 \ -30] ;$$

سیستم حلقه بسته را تشکیل می دهیم.

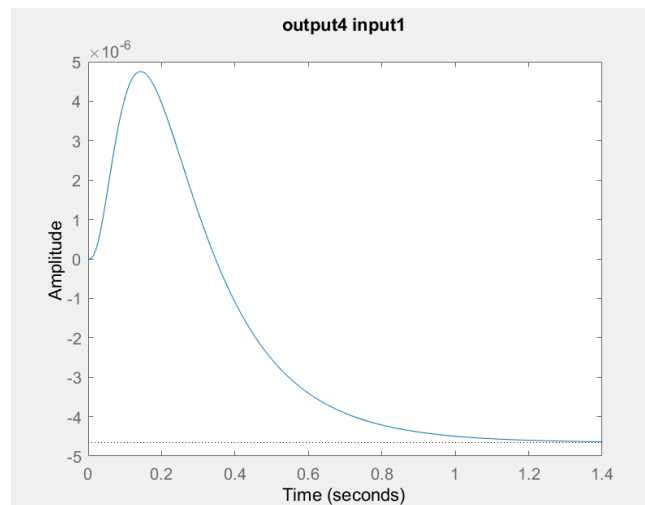
سیستم MIMO است. و ۵ ورودی و خروجی دارد. تعداد متغیر حالت برای هر ورودی و خروجی ۸ تا است. در اینجا x_1 ماتریس متغیر های حالت برای ورودی اول است و به همین ترتیب تا x_5 می رویم. در زیر برخی از متغیر های حالت را نمایش داده ایم.

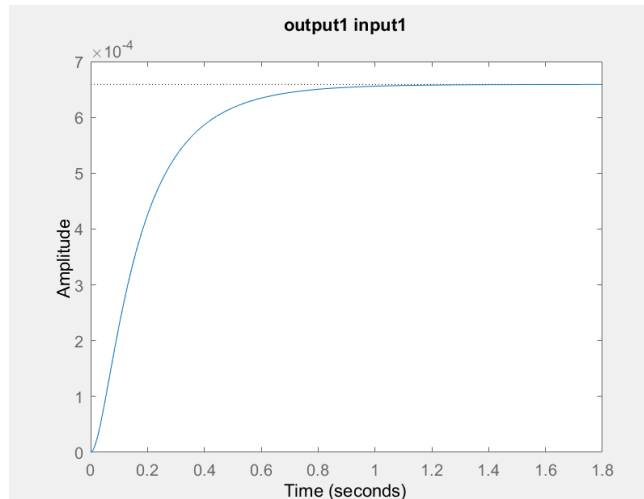
```
p = [-5 -10 -9 -50 -15 -20 -25 -30] ;
K=place(A,B,p)
AA = A - B*K;
sys=ss(AA,B,C,D)
close_loop_pole=pole(sys)
step(sys)
x1 = zeros(8,1);
x2 = zeros(8,1);
x3 = zeros(8,1);
x4 = zeros(8,1);
x5 = zeros(8,1);
t = 0:0.01:5;
for i=2:size(t,2)
    x1(:,i) = x1(:,i-1) + 0.01*(AA)*x1(:,i-1) + B(:,1);
    x2(:,i) = x2(:,i-1) + 0.01*(AA)*x2(:,i-1) + B(:,2);
    x3(:,i) = x3(:,i-1) + 0.01*(AA)*x3(:,i-1) + B(:,3);
    x4(:,i) = x4(:,i-1) + 0.01*(AA)*x4(:,i-1) + B(:,4);
    x5(:,i) = x5(:,i-1) + 0.01*(AA)*x5(:,i-1) + B(:,5);
end
```





به ازای هر ورودی و هر خروجی یک پاسخ پله داریم به دلیل محدودیت فضا برخی از پاسخ پله در زیر رسم شده اند.





برخی از قطب های سیستم حلقه باز در سمت راست محور قرار دارند ولی در سیستم حلقه بسته همه قطب ها در سمت چپ محور قرار دارند و سیستم پایدار است.

	open_loop_pole =
close_loop_pole =	0
-50.0000	0
-30.0000	0
-25.0000	5.4772
-5.0000	-5.4772
-20.0000	0.0997
-15.0000	-0.0997
-9.0000	0
-10.0000	0
	1.0000

سوال هفتم)

در این قسمت ابتدا باید معکوس تابع تبدیل به عنوان ضریب P محاسبه کنیم.

$$P = \text{inv}(C * \text{inv}(-A_{fb}) * B)$$

اما همانطور که مشاهده می شود مقدار آن INF است به این دلیل که در مبدا صفر داریم و تابع تبدیل وارون پذیر نیست. به همین علت امکان طراحی ردیاب استاتیک وجود ندارد.

P =

Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
Inf	Inf	Inf	Inf	Inf

اگر مقدار ماتریس P قابل محاسبه بود میتوانستیم ردیاب استاتیک را به صورت زیر محاسبه کنیم.

```
%% Q7 static tracker
P = inv(C*inv(-A_fb)*B)
B_st = B*P
sys = ss(A_fb,B_st,C,D);

t = 0:0.01:5;

for i=2:size(t,2)
    x1(1:8,i) = x1(:,i-1) + 0.01*((A_fb)*x1(:,i-1) + B_st(:,1));
    x2(1:8,i) = x2(:,i-1) + 0.01*((A_fb)*x2(:,i-1) + B_st(:,2));
    x3(1:8,i) = x3(:,i-1) + 0.01*((A_fb)*x3(:,i-1) + B_st(:,3));
    x4(1:8,i) = x4(:,i-1) + 0.01*((A_fb)*x4(:,i-1) + B_st(:,4));
    x5(1:8,i) = x5(:,i-1) + 0.01*((A_fb)*x5(:,i-1) + B_st(:,5));
end
```

سوال هشتم)

برای طراحی ردیاب انتگرالی دو شرط باید چک شود. اول آنکه ماتریس کنترل پذیر باشد سپس ماتریس $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -C \end{bmatrix}$ full rank باشد. همانطور که مشاهده می شود ماتریس کنترل پذیر است (زیرا ما بخش کنترل پذیر ماتریس اولیه را جدا کردیم) اما شرط دوم برقرار نیست. در نتیجه امکان طراحی ردیاب انتگرالی وجود ندارد.

```
n=size(A,1); %number of state
m=size(C,1); %number of output

if (rank(ctrb(A,B))==n)
    display('System is Controllable')
end
if (rank([B A;zeros(5,5) C])==n+m)
    display('System is intergrally Controllable')
else
    display('System is not intergrally Controllable')
end
```

```
System is Controlable  
System is not intergrally Controlable
```

سوال نهم)

در ابتدا برای طراحی تخمین گر مرتبه کامل باید با استفاده از دستور `place` مقدار `K` را به دست آوریم اما با این ارور مواجه می شویم با توجه به این که `A C` قسمت کنترل پذیر فضای حالت اولیه هستند و این ارور با تغییر دادن محل قطب های `P` نیز رفع نشد امکان طراحی این تخمین گر نیست.

```
K=place(A',C',P);
```

```
>> Q9  
Error using place (line 171)  
The "place" command could not place the poles at the specified locations. Probable causes include:  
* (A,B) is nearly uncontrollable  
* The specified locations are too close to each other.  
  
Error in Q9 (line 40)  
K=place(A',C',P);
```

سوال دهم)

برای طراحی تخمین گر کاهش مرتبه ابتدا بررسی می کنیم ماتریس به فرم `[1 0 ..0]` هست یا خیر. از آنجایی که به این فرم نیست ابتدا مرتبه آن را بررسی می کنیم.

```
rank_C =  
  
3
```

سپس ماتریس P را تشکیل می دهیم.

```
P =  
  
    0.0000    1.0000    0.0000   -0.0000         0         0         0         0  
   -0.0000    0.0000    0.0000   -1.0000         0         0         0         0  
    0.9967   -0.0000   -0.0806   -0.0000         0         0         0         0  
    1.0000         0         0         0         0         0         0         0  
         0         0    1.0000         0         0    1.0000         0         0  
         0    1.0000         0         0    1.0000         0         0         0  
         0         0         0         0         0         0    1.0000         0  
         0         0         0         0         0         0         0    1.0000  
  
rank_P =  
  
      8
```

در ادامه باید با استفاده از دستور place ماتریس K را محاسبه کنیم که با ارور کنترل ناپذیر بودن سیستم مواجه می شویم و امکان طراحی نیست.

```
K=place(A22',A12',P_desire)  
L=K'
```

سوال یازدهم)

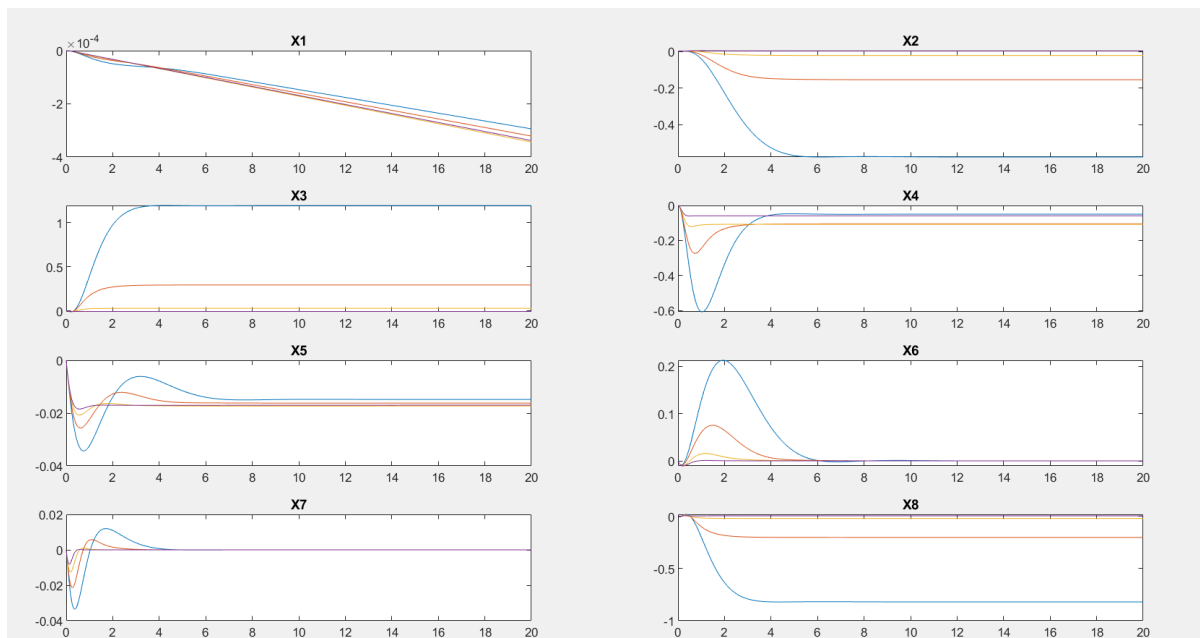
به دلیل کنترل ناپذیر بود سیستم امکان طراحی تخمین گر نداشتیم.

سوال دوازدهم)

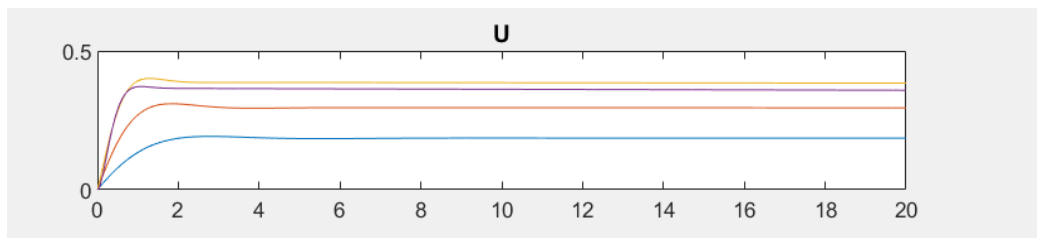
ابتدا R را ثابت فرض می کنیم سپس Q را افزایش می دهیم. مشاهده می شود با افزایش Q دامنه افزایش یافته و سرعت کاهش می یابد.

این کد را برای ماتریس های Q مختلف امتحان می کنیم.

```
R = 1;  
Q = eye(8);  
[K,~,P] = lqr(A, B, Q, R)  
sys = ss(A-B*K, B, C, 0);  
[y,~,x] = lsim(sys,ones(1000,5),t);
```

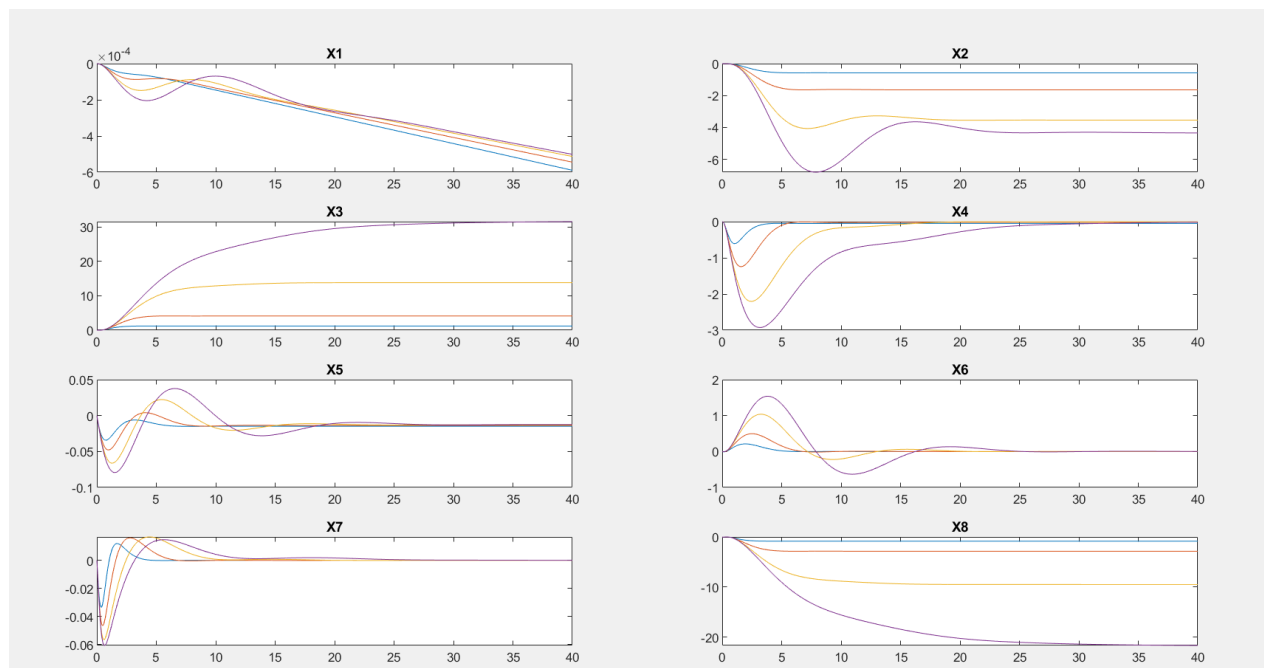


در اینجا یکی از سیگنال های کنترلی برای مثال نشان داده شده است.



حال Q را ثابت فرض می کنیم سپس R را افزایش می دهیم. مشاهده می کنیم دامنه کمتر و سرعت بیشتر می شود.

```
R = 1;
Q = eye(8);
[K,~,P] = lqr(A, B, Q, R);
sys = ss(A-B*K, B, C, 0);
[y,~,x] = lsim(sys,ones(1000,5),t);
```



سوال سیزدهم)

سیستم مقاله خطی ست و همه محاسبات برای سیستم اولیه خطی انجام شده است.

با تشکر از توجه شما