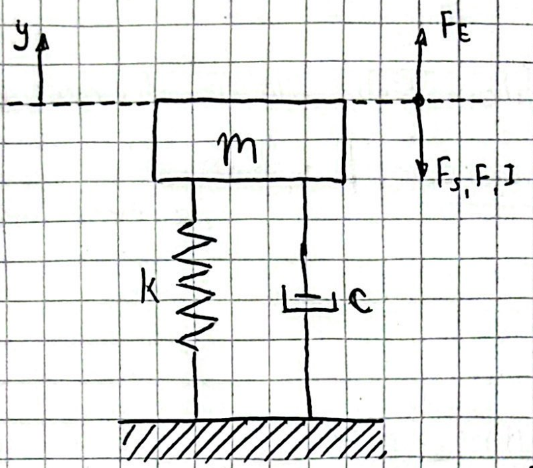
PARCIAL TRANSFORMADA DE FOURIER Y LAPLACE. SEÑALES Y SISTEMAS

1



- Masa : m
- Resorte con rigidez : K
- Se asume movimiento al eje vertical

La ecuacion diferencial del sistema mecanico se obtiene al considerar el equilibrio de fuerzas ejercidas sobre la masa:

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_E(t)$$

- $F_E(t)$: Fuerza externa que actua sobre la masa.
- $F_S(t)$: fuerza inducida por el resorte
- $F_F(t)$: Fuerza de friccion inducida por el amortiguador
- $F_I(t)$: fuerza inercial

$$\therefore \quad F_S(t) = Ky(t), \quad F_F(t) = c\frac{dy(t)}{dt}, \quad F_I(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

Reemplazando en la ecuacion,

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = F_E(t)$$

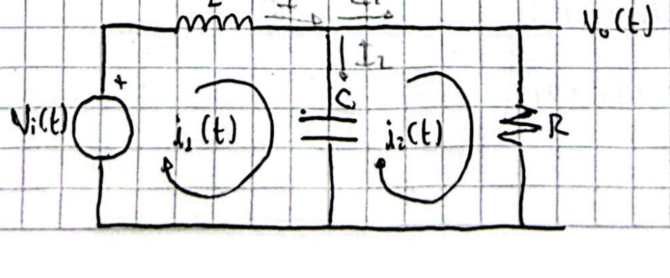
Aplicando la transformada de Laplace.

$$ms^2Y(s) + csY(s) + KY(s) = F_E(s)$$

$$Y(s)(ms^2 + cs + K) = F_E(s)$$

Funcion de transferencia del sistema

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$



Haciendo LVK

$$V_i(t) = V_L + V_o$$
$$v_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + V_o(t)$$

La corriente total se divide entre la resistencia y el capacitor

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$
$$i(t) = \frac{V_o(t)}{R} + C\frac{dV_o(t)}{dt}$$

Reemplazando

$$V_i(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{V_o(t)}{R} + C\frac{dV_o(t)}{dt}\right) + V_o(t)$$
$$V_i(t) = \frac{L}{R}\frac{dV_o(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + V_o(t)$$

Organizando $LC\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dV_o(t)}{dt} + V_o(t) = V_i(t)$

Luego hallamos la función de transferencia

$$LCs^2V_o(s) + \frac{L}{R}sV_o(s) + V_o(s) = V_i(s)$$
$$V_o(s)\left(LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1\right) = V_i(s)$$
$$\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}}$$

¿Son equivalentes?

- Funcion de transferencia del sistema masa - resorte

$$H_{mecanico}(s) = \frac{1}{ms^2 + Cs + K}$$

- Funcion de transferencia del circuito RLC

$$H_{electrico}(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

ANALOGIA MECANICO - ELECTRICA

Dominio mecanico. Dominio electrico.

Masa	m	Inductancia	L
Resorte	k	Resistencia	R
Amortiguador	c	$1/C$	(inverso de la capacitancia)
Fuerza	$F(t)$	Voltaje	$V_i(t)$
Posicion	$y(t)$	Voltaje paralelo	$V_o(t)$

Las funciones de transferencia son formalmente equivalentes.

$H_{mecanico}(s) = H_{electrico}(s)$ bajo la analogia $m = LC$, $c = \frac{L}{R}$, $K = L$

② Consulte y presente el modelo matematico del proceso de modulacion y demodulacion por amplitud en banda lateral unica (SSB-AM), tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia (mediante la transformada de Fourier).

- Señal mensaje: $m(t)$
- Frecuencia de la portadora: f_c
- Señal portadora $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$

Modulacion SSB-AM

- Dominio en el tiempo

La señal modulada en banda lateral unica (SSB-AM) se expresa como:

$$s_{SSB}(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t) \quad (1)$$

Donde

- $\hat{m}(t)$ es la transformada de Hilbert de $m(t)$
- El signo + es para la banda lateral superior (USB)
- El signo − es para la banda lateral inferior (LSB)

Transformada de Hilbert:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{\pi t} * m(t)$$ (donde * es la convolucion)

- Dominio de la frecuencia:

Sea $M(f)$ la transformada de Fourier de $m(t)$

- Transformada de Hilbert en frecuencia

$$F\{\hat{m}(t)\} = -j \cdot sgn(f) \cdot M(f)$$

Aplica transformada de Fourier para (1)

$$S_{SSB}(f) = \frac{1}{2}[M(f-f_c) \pm j \cdot sgn(f-f_c) \cdot M(f-f_c) + M(f+f_c) \mp j \cdot sgn(f+f_c) \cdot M(f+f_c)$$

Para conservar solo la USB o solo la LSB se selecciona una parte del espectro

Demodulacion SSB-AM

- Dominio en el tiempo:

Se multiplica la señal SSB recibida por una copia de la portadora

$$y(t) = S_{SSB}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Desarrollando

$$\Rightarrow [m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)] \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Usando identidades trigonometricas:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

Entonces

$$y(t) = \frac{m(t)}{2}[1 + \cos(4\pi f_c t) \pm \frac{\hat{m}(t)}{2}\sin(4\pi f_c t)$$

Se pasa por un filtro pasa-bajos, que eliminan los terminos en $2f_c$ y queda

$$y(t) = \frac{m(t)}{2}$$

- Dominio de la frecuencia

La transformada de Fourier de la señal demodulada es

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[S_{SSB}(f-f_c) + S_{SSB}(f+f_c) \right]$$

Luego, al aplicar un filtro paso bajos de ancho $|f| \leq B$ (donde B es el ancho de banda de la señal de mensaje):

$$Y(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} M(f), & |f| \leq B \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedades utilizadas:

- $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_c t)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right]$
- $\mathcal{F}\{\hat{m}(t)\} = -j \cdot \operatorname{sgn}(f) \cdot M(f)$
- $\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f)$