

薛定谔的猫咪日记

难度：★★★

使用技巧：解题者须理解条件概率的意义，并灵活地使用对称性和排列顺序不影响概率的特性。

原作者：陈威宇、萧乐山、郑子宇

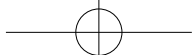
这个世界，有些事情不知道也没有关系

久违的朋友保罗·狄拉克¹，

搬到都柏林后，我已经找到教职了，请您不用担心。我很怀念和您在牛津大学共事的日子。这里蛮冷的，但是不湿，所以不会太难受。

言归正传。今天散步的时候，我想起前几天做的实验，有些想法，希望给您看看。容我摘录一段最近的实验

¹ Paul Dirac.



日志。

8月1日：

……统一场论的研究仍然没有头绪。不过又到了每天最快乐的时刻：和我的猫咪们一起做实验的时光。每次听到它们天真的呜呜声，就令人忘记所有烦恼。

作为一个物理学家，秉持着实验精神去确认一切是很重要的。因此，为了验证我的理论，我准备9个箱子，里面放置了放射性元素的毒气机关……其实第一次按下开关的时候，我也有点下不了手，可如果为了真理的话，有什么牺牲也是没办法的吧，小宝贝们？

实验设计还是比较简单的，每次在9个箱子中各放一只猫，它们死亡的概率分别为0.1, 0.2, …, 一直到0.9，我将它们排成九宫格，并编上1~9号，接下来几天，我要来用这些猫箱进行实验……

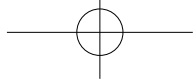
8月7日：

实验3……我打开了其中5个猫箱，发现301、304、305死了，302、307活着，可以藉此计算下一个打开的猫箱还有活猫的概率……301是我最喜欢的一只虎斑猫，它的眼睛比琥珀还漂亮。不过，过去的都过去了。让我看看下一个箱子……

8月12日：

实验7……我打开了其中4个猫箱，这次704, 705死了，701, 703活着，让我来推算一下再打开3个猫箱，里面死两只活一只的概率是多少……今天是我生日，全家度过了愉快的一天，明天也要以愉快的心情继续做实验。

当做数据整理时，我忽然发现8月7日和8月12日这两天所得出的概率值虽然复杂，但两者呈现出非常漂亮的比例。可惜的是，后来数据不小心沾上了血渍，已经看不清楚了。然而，如果这个漂亮的比例不是偶然，就能再次将其推导出来。



若令8月7日所得出的概率为 p ，而8月12日所得出的概率为 q ，又猫咪的编号只是代号，和放入哪个箱子没有关系。那么就是说，现在有9个猫箱，其中猫死亡的概率分别是0.1~0.9。 p 为在打开5个箱子后，确认猫3死2活的情况下，打开下个猫箱看到1只活猫的概率； q 为在确认猫2死2活的情况下，再打开3个猫箱，看到猫2死1活的概率，那 q/p 是多少呢？

这个问题困扰我好几天。一开始我列出许多情况，作了繁复的计算，却毫无进展。一直到方才喝下一杯冰啤酒时才骤然有了灵感。我决定分几个阶段考虑这个问题，利用条件概率来找出 p ， q 的关系，因为直接算 p 和 q 会相当复杂。这个过程也让我充分认识到，正因为大部分人光是活着就已经够累了，所以不需要特别去追根问底，这样日子才会轻松点，对吧，保罗？看来大部分人知道的少得可怜，这个世界才能在表面上和平运作呢！

为了说得更清楚，让我用数学语言再重复一次，方便起见，我以■表示死亡，□表示存活：

$$p = P(\blacksquare\blacksquare\blacksquare\square\square \text{ 后 } \square) / P(\blacksquare\blacksquare\blacksquare\square\square)$$

$$q = P(\blacksquare\blacksquare\square\square \text{ 后 } \blacksquare\blacksquare\square) / P(\blacksquare\blacksquare\square\square)$$

现在参照下图：

$$\frac{\frac{\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare}{\blacksquare\blacksquare\square\square} \times \frac{\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square}{\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare} \times \frac{\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square\blacksquare}{\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square}}{\frac{\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square\blacksquare}{\blacksquare\blacksquare\square\square}} = \frac{\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square\blacksquare}{\blacksquare\blacksquare\square\square} \quad q/3$$

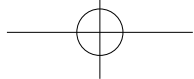
也就是说，令

$$A = P(\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare) / P(\blacksquare\blacksquare\square\square)$$

$$B = P(\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square) / P(\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare)$$

$$C = P(\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square\blacksquare) / P(\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square)$$

$$D = P(\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare\square\blacksquare) / P(\blacksquare\blacksquare\square\square)$$



根据条件概率的定义，可得到

$$ABC = D$$

现在，根据 p 的定义， $B = p$ 。你可能会问，我怎么知道前 5 只猫打开时状态按照顺序是死死活活死呢？其实这只是示意图，前 5 只猫的死活顺序不一定如此，但所有顺序都会得出同样的条件概率，仅是为了说明方便而写出一个顺序。重复一次， p 的定义，是已经知道“死 3 活 2”后“活 1”的概率。而死 3 活 2 的顺序是任意的。

让我们来算 A ， C ，道理是与上述类似的。由于猫咪的死亡率是 0.1~0.9 对称，故直观上当死的猫和活的猫数目相同时，下一只猫是死是活的概率亦相同，故为 0.5。

如果这样还没有说服你，可考虑由于猫咪的生存率亦为 0.1~0.9，故将死活情况对调后，即有

$$\begin{aligned} A &= P(\blacksquare\blacksquare\square\square\blacksquare) / P(\blacksquare\blacksquare\square\square) \\ &= P(\square\square\blacksquare\blacksquare\square) / P(\square\square\blacksquare\blacksquare) \end{aligned}$$

又由于前 4 只猫的死活顺序不影响条件概率，故有

$$\begin{aligned} A' &= P(\blacksquare\blacksquare\square\square\square) / P(\blacksquare\blacksquare\square\square) \\ &= P(\square\square\blacksquare\blacksquare\square) / P(\square\square\blacksquare\blacksquare) \end{aligned}$$

这两者即为在 2 死 2 活的情况下，下只猫是死或活的概率，明显相加为 1，概率又相同，故皆为 0.5。 C 的情况亦然，故

$$ABC = p / 4$$

D 与 q 的关系也不难得到。因为

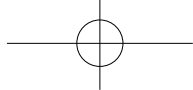
$$P(\blacksquare\blacksquare\square\square\text{后}\blacksquare\blacksquare\square)$$

包含 3 种情况：

$$(\sim\blacksquare\square\blacksquare), (\sim\square\blacksquare\blacksquare), (\sim\blacksquare\blacksquare\square)$$

而顺序排列并不会影响其概率，这 3 种情况的概率都是相等的，故

$$D = q / 3$$



$$q = 3p / 4$$

$$q / p = 0.75$$

说了这些，时间已经晚了，保罗，我还要准备教材呢，我们回头再联络吧。假如您有什么疑问，不管是今天这个问题，或是其他关于物理的，请和我说，不要怕打扰。我一个人在这里闲得发慌。真希望大战赶快结束，这样我就能回到苏黎世拜访昔日的同事去。

德国人真的病了，说什么为了“保持德意志精神的纯净”竟然把人送进毒气室。咱们科学家为的是“追求真理”才把猫送进了毒气箱子，这境界是纳粹政府不会懂的！真理看着不着，摸不着，不能吃，可是又有什么关系？在这样的时刻，能写信给另一位伙伴，他也同样把真理看得比享乐、责任，甚至生命来得重要，想到这里我就感到欣慰！

你最诚恳的朋友，
埃温 · 薛定谔¹

¹ Erwin Schrödinger。