12. Familias conjugadas

Ita Santiago

Supongamos que nos interesa analizar el IQ de una muestra de estudiantes del ITAM y suponemos que el IQ de un estudiante tiene una distribución normal $x \sim N(\theta, \sigma^2)$ **con** σ^2 **conocida.** Considera que observamos el IQ de un estudiante x. La verosimilitud del modelo es:

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right)$$

Realizaremos un análisis bayesiano por lo que hace falta establer una distribución inicial, elegimos $p(x|\theta)$ que se distribuya $N(\mu, \tau^2)$ donde elegimos los parámetros μ, τ (τ desviación estándar) que mejor describan nuestras creencias iniciales, por ejemplo si tengo mucha certeza de que el IQ promedio se ubica en 150, elegiría $\mu = 150$ y una desviación estándar chica, por ejemplo $\tau = 5$. Entonces la distribución inicial es:

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)$$

Calcula la distribución posterio $p(\theta|x) \propto p(x|\theta)\, p(\theta)$r, usando la inicial y verosimilitud que definimos arriba. Una vez que realices la multiplicación debes identificar el núcleo de una distribución Normal,

¿cuáles son sus parámetros (media y varianza)?

$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)\, p(\theta)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right) exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2 - \frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}(\tau^2(x-\theta)^2 + \sigma^2(\theta-\mu)^2)\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}(\tau^2(x^2 - 2x\theta + \theta^2) + \sigma^2(\theta^2 - 2\theta\mu + \mu^2))\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}(x^2\tau^2 - 2x\theta\tau^2 + \theta^2\tau^2 + \theta^2\sigma^2 - 2\theta\mu\sigma^2 + \mu^2\sigma^2)\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2}\left(\theta^2\left(\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\right) - 2\theta\left(\frac{\tau^2 x + \sigma^2\mu}{\sigma^2\tau^2}\right) + \frac{\tau^2x^2 + \sigma^2\mu^2}{\sigma^2\tau^2}\right)\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2}\left(\theta^2\left(\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\right) - 2\theta\left(\frac{\tau^2 x + \sigma^2\mu}{\sigma^2\tau^2}\right) + \frac{\tau^2x^2 + \sigma^2\mu^2}{\sigma^2\tau^2}\right)\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\right)\left(\theta^2 - 2\theta\left(\frac{\tau^2 x + \sigma^2\mu}{\sigma^2+\tau^2}\right) + \left(\frac{\tau^2x^2 + \sigma^2\mu^2}{\sigma^2+\tau^2}\right)\right)\right)$$

$$= exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\right)\left(\theta - \left(\frac{\tau^2 x + \sigma^2\mu}{\sigma^2+\tau^2}\right)\right)^2\right)$$

Con esto podemos ver que tenemos una media de $\frac{\tau^2 x+\sigma^2\mu}{\sigma^2+\tau^2}$ y una varianza de $\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}$