Proyecciones

- Teniendo una base ortonormal de S podemos:
  - Construir la proy. ort. de w sobre S con

$S = \langle v_1, \dots, v_M \rangle$

$$P_{v_i}(w) = \frac{\overbrace{v_i^* \cdot w}^{\in K} \cdot v_i}{\|v_i\|_2^2}$$

$$\boxed{P_S(w) = \sum_{i=1}^{K} P_{v_i}(w)}$$

Representaciones matriciales

$$P_{v_i} = \begin{pmatrix} v_{i_1} \\ \vdots \\ v_{i_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i_1} & \cdots & v_{i_n} \end{pmatrix}$$

$$P_S = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_M \end{array}\right) \begin{pmatrix} v_1^* \\ \hline v_2^* \\ \hline \vdots \\ \hline v_n^* \end{pmatrix}$$

La matriz P_S es la asociada a la t.l que proyecta un vector sobre S, se denota proyector

$P_S = A \cdot A^*$, A matriz con columnas de $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$P_S(w) = A \cdot A^* \cdot w = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_M \end{array}\right) \overbrace{\begin{pmatrix} v_1^* \, w \\ \hline v_2^* \, w \\ \hline \vdots \\ \hline v_n^* \, w \end{pmatrix}}^{\text{Prop. de matriz y vector}} = \sum (v_i^* \cdot w) \, v_i = \sum P_{v_i}(w)$$

Entonces, obtenemos la proy. ort. de un w sobre S a través de una base ortogonal de S

Idea: - Dado S, obtener sus generadores
- A partir de esa familia, generadores ortonormales. (u ortogonales)
- Lo hacemos mediante el sig. método:

Gram-Schmidt

- Produce una sucesión de vectores ortogonales $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a partir de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ L.I.
- Propiedad (invariante):

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$$

- $u_1 = v_1$
- $u_2 = v_2 - P_{u_1}(v_2)$
- $u_3 = v_3 - P_{u_1}(v_3) - P_{u_2}(v_3)$

$\vdots$

- $\boxed{u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P_{u_i}(v_k)}$

u_k es ortogonal, para ortonormalizarlos

$$q_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$$

Proyectores

- Una matriz $0 \neq P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice proyector si $P^2 = P$

Si $P \neq I$ proyector $\Rightarrow$ $I - P$ **proyector complementario**

P es ortogonal $\Leftrightarrow$ $P = P^*$

- P proyecta sobre su $Im(P)$:

$$v \in Im(P) \Rightarrow \exists\, w \,/\, Pw = v \Rightarrow P.v = v$$

- $Nu(P) = Im(I - P)$

P proyector:

1. P es ortogonal $(P = P^*)$
2. $\|v\|_2^2 = \|(I-P)\cdot v\|_2^2 + \|P\cdot v\|_2^2 \quad \forall v$
3. $\|P\|_2 = 1$

Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con columnas ortonormales, $P = A\cdot A^*$ proyector. Además, como $P^* = P$ es un proyector ortogonal

Consideremos v de norma 1, y el proyector ortogonal:

$$\boxed{P_v = v^* . v}$$

Proyecta sobre el subespacio $\langle v \rangle$.

Ahora su complementario:

$$\boxed{P_{v^\perp} = I - P_v}$$

Proyecta sobre el ortogonal a v.

Gram-Schmidt modificado:

Habiendo calculado $\{u_1, \dots, u_{j-1}\}$ y $\{q_1, \dots, q_{j-1}\}$

$$\boxed{u_j = P_{q_{j-1}^\perp} \cdot P_{q_{j-2}^\perp} \cdots P_{q_1^\perp} \cdot v_j .} \quad (*)$$

De donde sale esto?:

Tenemos

$$u_1 = v_1 \qquad \left(q_i = \frac{u_i}{\|u_i\|} \right)$$

$$u_2 = v_2 - \underbrace{P_{u_1}(v_2)}_{= P_{q_1}(v_2)} = (I - P_{q_1})\cdot v_2 = \boxed{P_{q_1^\perp} \cdot v_2}$$

$$u_3 = v_3 - P_{q_1}(v_3) - P_{q_2}(v_3)$$

$$u_3 = \underbrace{(I - P_{q_1})}_{P_{q_1^\perp}}\cdot v_3 - P_{q_2}(v_3) =$$

$$(*)\ P_{q_2}(v_3) = P_{q_2}\left(v_3 - P_{q_1}(v_3)\right) = P_{q_2}\cdot v_3 - \cancel{P_{q_2}\cdot \underbrace{(\beta\cdot q_1)}_{P_{q_1}(v_3)}} = P_{q_2}(v_3)$$

$= 0 \ (q_2 \perp q_1)$

$$u_3 = (I - P_{q_1}) \cdot v_3 - P_{q_2} \cdot (v_3 - P_{q_1} v_3)$$

$$= (I - P_{q_1}) \cdot v_3 - P_{q_2} (I - P_{q_1}) \cdot v_3$$

$$\vdots$$

$$= (P_{q_1^\perp} - P_{q_2} \cdot P_{q_1^\perp}) \cdot v_3$$

$$u_3 = (I - P_{q_2}) \cdot P_{q_1^\perp} \cdot v_3 = \boxed{P_{q_2^\perp} \cdot P_{q_1^\perp} \cdot v_3 .}$$

Generalizando para u_k llegamos a $\oplus$