En toda base ortonormal $B = \{w_1, \dots, w_n\}$, si

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

$$\Rightarrow \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

Dem:

$$\|v\|^2 = v^T \cdot v = \left(\sum \alpha_i w_i\right)^T \left(\sum \alpha_i w_i\right) = \sum \alpha_i^2 \underbrace{w_i^T \cdot w_i}_{=1 \text{ (base ortonormal)}} = \sum \alpha_i^2 \quad \boxtimes$$

y $w_j^T \cdot w_i = 0$

Prop. Si A diagonal: $\|A\|_2 = \max\{|\lambda_i|\}$

Dem: Vemos la norma subordinada $\|A\|_2 = \max_{\substack{x \in K^n \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|_2$

$$A x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

recordar que $v = (v_1, \dots, v_n)$, $\|v\|_2^2 = \sum v_i^2$. (I)

$\Rightarrow$ de (I): $\|Ax\|_2^2 = |\lambda_1 x_1|^2 + \dots + |\lambda_n x_n|^2 \leq |\lambda_{max} x_1|^2 + \dots + |\lambda_{max} \cdot x_n|^2 = |\lambda_{max}|^2 |x_1|^2 + \dots + |\lambda_{max}|^2 |x_n|^2 = |\lambda_{max}|^2 \underbrace{\sum |x_i|^2}_{= \|x\|_2^2}$

$$\Rightarrow \quad \|Ax\|_2^2 \underset{\|x\|_2 = 1}{\leq} |\lambda_{max}|^2$$

si el máximo se da para $k = i$, $\lambda_{max} = \lambda_i$: $A \cdot e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_{max} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \max\{\lambda_i\}$ $\boxtimes$

Def. Dada $A \in K^{n \times n}$ definimos el radio espectral como:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \text{ con } \lambda \text{ autovalor de } A\}$$

- Con matrices diagonales pasaba que los autovalores son los elementos de la diagonal por eso $\rho(A) = \|A\|_2 = \max\{\lambda_i\}$
- En palabras el rango espectral nos dice lo máximo que puede aumentar la norma-2 mn
- Las matrices simétricas son casi lo mismo que las matrices diagonales, pues puedo llevarla a una matriz diagonal a través de un cambio de base ortonormal $\Rightarrow$ Esas matrices se comportan como matrices diagonales.

Prop: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T = A$ (simétrica): $\|A\|_2 = \rho(A)$

Dem: tomamos base ortonormal de autovectores $B = \{w_1, \dots, w_n\}$

Sea $x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1$

por un lado sabemos que $\|A\|_2 \leq \rho(A)$

$$x = \sum \alpha_i w_i \quad , \quad Ax = \sum \alpha_i \lambda_i w_i$$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum |\alpha_i|^2 |\lambda_i|^2 w_i^2 \underset{\text{sim. demo anterior}}{\leq} \sum |\alpha_i|^2 \cdot |\lambda_{max}|^2 = \Big(\overbrace{\sum |\alpha_i|^2}^{= 1 = \|x\|_2^2}\Big) \cdot \rho(A)^2 = \rho(A)^2$$

$\therefore \|Ax\|_2 \leq \rho(A)$ | pero como hago para hacer aparecer $\|A\|_2$?

$\Rightarrow \|A\|_2 = \max \|Ax\|_2 = \rho(A)$ ✓

por otro sabemos que si $x = w_i$: $\|A\|_2 = \rho(A)$ osea, se alcanza el supremo

tomamos w_i autovector asociado a λ_i, $\|w_i\|_2 = 1$. $(w_i \in B)$

$$\|A w_i\|_2 = \|\lambda_i w_i\|_2 = |\lambda_i| \, \|w_i\|_2 = |\lambda_i| = |\lambda_{max}| = \rho(A)$$

(como $\rho(A) = \max \{|\lambda_i|\}$) si tomo el $\lambda_{max} = \lambda_i$ (considero)

$$\|A w_i\|_2 = \rho(A)$$

Conclusión: $\|A\|_2 = \rho(A)$ ☒

La norma de A simetrica $\|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$

Si quiero generalizar para cualquier matriz:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no necesariamente simetrica queremos $\sup\limits_{\|x\|_2 = 1} \{\|Ax\|_2\}$

1. $\|Ax\|_2^2 = (Ax)^T \cdot Ax = x^T \cdot (A^T A) x$
2. $A^T A$ es simetrica
3. $M = A^T A$ es semidefinida positiva, pues $x^T \cdot M x = \|Ax\|_2^2 \geq 0$
4. M sem. pos. $\Rightarrow$ autovalores son no-negativos. Dem: $x^T M x \geq 0 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow x^T M x = x^T \lambda_i x = \lambda_i x^T x = \lambda_i \underbrace{\|x_i\|_2^2}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda_i \geq 0$
5. si $\|x\|_2 = 1$ y $x = \sum \alpha_i w_i \Rightarrow \sum |\alpha_i|^2 = 1$.
6. $Mx = \sum \alpha_i \lambda_i w_i$
7. $x^T M x = (\sum \alpha_i w_i^T)(\sum \lambda_i \alpha_i w_i) = \sum \lambda_i \alpha_i^2 \overbrace{(w_i^T w_i)}^{=1} = \sum \lambda_i \alpha_i^2$ $\Rightarrow \|Ax\|_2^2 = x^T M x = \sum \lambda_i \alpha_i^2$
8. $\sup\limits_{\|x\|_2 = 1} \{\|Ax\|_2^2\} = \sup\limits_{\sum \alpha_i w_i = 1} \{\sum \lambda_i \alpha_i^2\} = \sup \{\lambda_i \sum \alpha_i^2\} = \sup \{\lambda_i\} = \lambda_{max} = \rho(M)$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

| $\|A\|_2^2 = \max \{\|Ax\|_2^2\} \overset{?}{=} \sup \{\|Ax\|_2^2\} = \rho(A)$

$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A)}$

puedo hacer max por sup.?

Relación entre radio espectral y norma subordinada.

Prop.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$\rho(A) = \inf \{ \|A\| : \|\cdot\| \text{ norma subordinada} \}$$

Dem: Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

sea w_i autovector, $\|w_i\| = 1$:

$$\|A w\| = \|\lambda w\| = |\lambda|$$

$\forall$ todo autovalor

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|A v\| \geq |\lambda|$$

si $\lambda = \lambda_{max}$ ($|\lambda| = \rho(A)$) $\Rightarrow \|A\| \geq \rho(A)$

Aplicación: Potencias de matrices

si $\rho(A) < 1$, $A^k \to 0$ cuando $k \to \infty$

Dem:

$$\rho(A) < 1 \Rightarrow A^k \to 0$$

Prop: $\|A\| < 1$ (para alguna norma) $\Rightarrow A^k \to 0$

Dem: $\|A^k\| \leq \underbrace{\|A\| \cdots \|A\|}_{k \text{ veces}} = \|A\|^k \to 0$ (pues $\|A\| < 1$)

La única matriz que tiene norma cero es aquella que tiene todas sus coordenadas nulas

$\Rightarrow A^k \to 0$

si $\rho(A) < 1$ y existe $\|\cdot\|$ tq $\|A\| < 1$ (Existe $\|\cdot\|$ tq $\|A\|$ está tan cerca de $\rho(A)$ como quiera)

tomo δ tq: $\rho(A) + \delta < 1$

y existe $\|\cdot\|$ tq $\|A\| < \rho(A) + \delta < 1$

y por prop. $\|A\| < 1 \Rightarrow A^k \to 0$