INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
CADENAS DE MARKOV
Práctica de Laboratorio #18

Nombre: CARLOS EDUARDO SANCHEZ TORRES Fecha: 03/11/2021

1. En relación con el problema 1 (práctica 17), determine la probabilidad de que el profesor compre el modelo actual en cuatro años.

Como cada $2n$ $años$ $(n \in N)$renueva la computadora, entonces
P^2 = [

247/400	7/40	83/400
121/200	67/400	91/400
117/200	31/200	13/50

]

Como no sabemos cual es el modelo actual la diagonal principal nos indica la probabilidad de que el profesor compre el modelo M_i, $i = 1, 2, 3$ en cuatro años :

$$P(M_1 \; en \; cuatro \; años) = 247/400$$
$$P(M_2 \; en \; cuatro \; años) = 67/400$$
$$P(M_3 \; en \; cuatro \; años) = 13/50$$

2. En relación con el problema 2 (práctica 17), si la patrulla se encuentra en este momento en la escena de una llamada, determine la probabilidad de que haga una aprehensión en 2 patrullajes.
Nuestros estados $I = \{Patrullaje\ regular\ (0),\ Respondiendo\ una\ llamada\ (1),$
$Patrulla\ en\ la\ escena\ (2),\ Aprehensión\ (3),$
$Traslado\ a\ la\ estación\ (4)\}$, entonces

$$\pi_2 P^2 = [0, 0, 1, 0, 0]P^2 = [1/4 \quad 3/50 \quad 1/4 \quad 1/5 \quad 6/25]$$
$$P(Aprehensión\ en\ 2\ patrullajes) = 1/5$$

3. En relación con el problema 3 (práctica 17), suponga que actualmente el Banco Nacional tiene préstamos pendientes que ascienden a $500,000. De éstos, $100,000 son nuevos, $50,000 están retrasados un trimestre, $150,000 están retrasados dos trimestres, $100,000 están retrasados tres trimestres, y el resto están retrasados más de tres trimestres. ¿Cuál sería la situación de estos préstamos después de dos ciclos de préstamos?

P^2 =[

301/1000	163/500	309/1000	19/250	0
629/2500	477/1250	841/2500	56/625	0
321/2000	177/500	863/2000	33/500	0
121/625	411/1250	371/1250	117/625	0
7/20	3/20	3/20	1/10	¼

]

Nuestros estados $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ entonces

$$[0.2\ 0.1\ 0.3\ 0.1\ 0.3]P^2 = [385/1493\ 119/414\ \ 627/2093\ \ 157/1694\ \ 3/40]$$

La situación en dos ciclos de préstamos es la siguiente:

$$500000 * [385/1493\ 119/414\ \ 627/2093\ \ 157/1694\ \ 3/40] = [128935.0\ \ 143720.0\ 149785.0\ \ 46340.0\ \ 37500.0]$$

Concluyendo

Sin atraso: 128935.0

1 trimestre: 143720.0

2 trimestres: 149785.0

3 trimestres: 46340.0

Incobrables: 37500.0

4. En relación con el problema 4 (práctica 17),

a) Para un paciente al que se está tratando con diálisis, ¿cuál es la probabilidad de recibir un trasplante en dos años?

P^2=[

9/200	3/200	9/80	27/40	61/400
9/100	3/100	7/40	9/20	51/200
3/20	1/20	13/40	11/40	1/5
3/200	1/200	7/100	81/100	1/10
0	0	0	0	1

]

Espacio de estados
$I = \{trasplante\ de\ paciente\ vivo, trasplante\ de\ paciente\ fallecido,$
$diálisis,\ pacientes\ sobrevivientes,\ muerte\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces

$$[0\ 0\ 1\ 0\ 0]P^2 = [3/20\quad 1/20\quad 13/40\quad 11/40\quad 1/5]$$
$$P(transplante\ después\ de\ dos\ años) = 3/20 + 1/20 = 1/5$$

b) Para un paciente que ha sobrevivido más de un año, ¿cuál es la probabilidad de que sobreviva cuatro años más?

$$[0\ 0\ 0\ 1\ 0]P^4 = [3/200\quad 1/200\quad 7/100\quad 81/100\quad 1/10]$$
$$P(sobreviva\ cuatro\ años\ más) = 81/100$$

5. Un juego de lanzamiento de dados utiliza una cuadrícula de 4 casillas. Las casillas están designadas en sentido horario como A, B, C, y D con retribuciones monetarias de $4, -$2, -$6 y $9, respectivamente. Comenzando en la casilla A, lanzamos el dado para determinar la siguiente casilla a la que nos moveremos en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si el dado muestra 2, nos vemos a la casilla C. El juego se repite utilizando la última casilla como punto inicial.

Tablero en sentido horario:

A B
D C

a) Exprese el problema como una cadena de Markov.

Tomemos como estado del sistema las casillas. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n:\ la\ casilla\ en\ el\ n\ lanzamiento.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1,...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{A, B, C, D\}$, la matriz de transición está dada por:

P = [

1/6	1/3	1/3	1/6
1/6	1/6	1/3	1/3
1/3	1/6	1/6	1/3
1/3	1/3	1/6	1/6

]

Para determinar las probabilidades asociadas, sabemos que la aleatoriedad proviene del dado es decir, del espacio muestra $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$P(A \to A) = \frac{|\{4\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$
$P(A \to B) = \frac{|\{1,5\}|}{|S|} = \frac{2}{6}$
$P(A \to C) = \frac{|\{2,6\}|}{|S|} = \frac{2}{6}$
$P(A \to D) = \frac{|\{3\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$

$P(B \to B) = \frac{|\{4\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$
$P(B \to C) = \frac{|\{1,5\}|}{|S|} = \frac{2}{6}$
$P(B \to D) = \frac{|\{2,6\}|}{|S|} = \frac{2}{6}$
$P(B \to A) = \frac{|\{3\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$
$P(C \to C) = \frac{|\{4\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$
$P(C \to D) = \frac{|\{1,5\}|}{|S|} = \frac{2}{6}$
$P(C \to A) = \frac{|\{2,6\}|}{|S|} = \frac{2}{6}$
$P(C \to B) = \frac{|\{3\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$

$P(D \to D) = \frac{|\{4\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$
$P(D \to A) = \frac{|\{1,5\}|}{|S|} = \frac{2}{6}$
$P(D \to B) = \frac{|\{2,6\}|}{|S|} = \frac{2}{6}$
$P(D \to C) = \frac{|\{3\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$

b) Determine la ganancia o pérdida esperadas después de lanzar el dado 5 veces.
$4, -$2, -$6 y $9

$$[1\ 0\ 0\ 0]P^5 = [1/6 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1/6]$$
$$Valor\ esperado = 2\frac{1}{6} - 2\frac{1}{3} - 5\frac{1}{3} + 9\frac{1}{3} = 1$$

Es decir, la ganancia esperada después de lanzar el dado 5 veces es 1.

6. La dinámica de población se ve afectada por el continuo movimiento de personas que buscan una mejor calidad de vida o un mejor empleo. La ciudad de Nolis tiene una población citadina interna, una población suburbana y una población rural circundante. Los censos, levantados a intervalos de 10 años, muestran que 10% de la población rural se traslada a los suburbios y 5% al interior de la ciudad. En cuanto a la población suburbana, 30% se traslada a las áreas rurales y 15% al interior de la ciudad. La población del interior de la ciudad no se cambiaría a los suburbios, pero el 20% sí se cambiaría a la quieta vida rural.

a) ¿Puede expresarse la dinámica de esta población con una cadena de Markov?

Si, tomamos como estado del sistema la dinámica de población. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n:\ la\ dinámica\ en\ el\ n\ decenio.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{población\ citadina\ interna,\ población\ suburbana, población\ rural\ circundante\} = \{1, 2, 3\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.8 0 0.2
0.15 0.55 0.30
0.05 0.1 0.85
]

b) Si el área metropolitana de Nolis en la actualidad incluye 20,000 residentes rurales, 100,000 suburbanos y 30,000 habitantes citadinos, ¿cuál será la distribución de la población en 10 años? ¿En 20 años?

Distribuciones: [Citadinos Suburbanos Rurales]

$$p = [1/5\ 2/3\ 2/15]$$

P^{1} =[

0.8 0 0.2

0.15 0.55 0.30

0.05 0.1 0.85

]

Tipo	p_i	Cantidad
Citadinos	1/5	30000
Suburbanos	2/3	100000
Rurales	2/15	20000
		150000

$$pP^{1} = [4/15 \quad 19/50 \quad 53/150]$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 13/20 & 1/50 & 33/100 \\ 87/400 & 133/400 & 9/20 \\ 39/400 & 7/50 & 61/80 \end{bmatrix}$$

$$pP^2 = [36/125 \quad 733/3000 \quad 499/1067]$$

Tipo	p_i	Cantidad
Citadinos	$36/125$	43200
Suburbanos	$733/3000$	36650
Rurales	$499/1067$	70150

c) Determine la composición de la población de Nolis a largo plazo.

Usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T ⇒

$$L = \begin{bmatrix} 15/59 & 8/59 & 36/59 \\ 15/59 & 8/59 & 36/59 \\ 15/59 & 8/59 & 36/59 \end{bmatrix}$$

Como P es regular para distribución inicial:

$$pL = [15/59 \quad 8/59 \quad 36/59]$$

Tipo	p_i	Cantidad
Citadinos	15/59	38136
Suburbanos	8/59	20338
Rurales	36/59	91526

7. Una empresa posee un bosque renovable para plantar pinos. Los árboles se caen dentro de una de 4 categorías según su edad: bebés (0-5 años), jóvenes (5-10 años), maduros (11-15 años) y viejos de más de 15 años. El 10% de los árboles bebés y jóvenes se mueren antes de llegar al siguiente grupo de edad. Por lo que se refiere a los arboles maduros y viejos, 50% se talan y solo 5% se mueren. Debido a la naturaleza de renovación de la operación todos los árboles talados y muertos son reemplazados con árboles nuevos (bebés) al final del siguiente ciclo de cinco años.

a) Exprese la dinámica del bosque como una cadena de Markov.

Si, tomemos como estado del sistema las categorías del árbol. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \text{ } la\ dinámica\ en\ el\ n\ lustro.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, \ldots\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{bebés,\ jóvenes,\ maduros,\ viejos,\ muertos,\ talados\} = \{1, 2, 3, 4, 5,\ 6\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.00 0.90 0.00 0.00 0.10 0.00
0.00 0.00 0.90 0.00 0.10 0.00
0.00 0.00 0.00 0.45 0.05 0.50
0.00 0.00 0.00 0.45 0.05 0.50
1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
]

b) Si el bosque puede contener un total de 500,000 árboles, determine la composición a largo plazo del bosque.

Usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T ⇒

$$L = [$$

110/481	99/481	891/4810	729/4810	29/481	81/481
110/481	99/481	891/4810	729/4810	29/481	81/481
110/481	99/481	891/4810	729/4810	29/481	81/481
110/481	99/481	891/4810	729/4810	29/481	81/481
110/481	99/481	891/4810	729/4810	29/481	81/481
110/481	99/481	891/4810	729/4810	29/481	81/481

]

Como P es regular para cualquier distribución inicial:

$$pL = [110/481 \quad 99/481 \quad 891/4810 \quad 729/4810 \quad 29/481 \quad 81/481]$$

Distribución para 500000 árboles [$bebés \; jóvenes \; maduros \; viejos \; muertos \; talados$]:

$$500000 * pL = [114345 \quad 514553/5 \quad 185239/2 \quad 606237/8 \quad 60291/2 \quad 420998/5]$$

c) Si un árbol nuevo se planta a un costo de $1 por árbol y uno talado tiene un valor de $20 en el mercado, determine el ingreso anual promedio derivado de la operación del bosque.
$I = \{bebés,\ jóvenes,\ maduros,\ viejos,\ muertos,\ talados\}$
-$1, 0,0,0, 0,$20

$$500000 * pL = [114345 \quad 514553/5 \quad 185239/2 \quad 606237/8 \quad 60291/2 \quad 420998/5]$$
$$Valor\ esperado = -\ 114345 + 420998/5 = -\ 30145.4$$