Ejercicios de cadenas y lenguajes

TA 361075 Carlos Eduardo Sánchez Torres

13 de febrero de 2022

Sea A = {a,b} y B = {b,c}. Describe informalmente los elementos de los siguientes conjuntos:

a. $A^* = \{\lambda, a, b, \} = \{\lambda, aab, ba, aa, aba, bba, aaa, abb, b, baa, bab, bb, ab, bbb, a, ...\}$

b. $A^*B^* = \{a, b\}^*\{b, c\} = \{\lambda, bbbc, abc, abcb, aac, acb, abb, b, bacb, bb, aabc, aacb, aa, abbc, cc, ab, babb, bbb, a, aabb, bc, bbcc, aab, aacc, ac, bbc, babc, c, bbcb, abcc, bcc, acc, abbb, ba, bac, bacc, bbbb, bab, bcb, cb, ...\}$

c. $(AB)^* = \{bb, ac, bc, ab\}^* = \{\lambda, ac, bc, bbbc, bcab, acac, acab, bcac, bb, abbb, bbac, acbc, abab, bbbb, bbab, abbc, bcbb, abac, ab, bcbc, acbb, ...\}$

d. $(A \cup B)^* = \{c, b, a\}^* = \{\lambda, ac, bc, ba, aa, ca, c, b, cc, bb, ab, cb, a, ...\}$

e. $(A \cap B)^* = \{b\}^* = \{\lambda, b, bb, bbb, bbbb, ...\}$

f. $(A \cup B)^*AB = \{c, b, a\}^*\{a, b\}\{b, c\} = \{cbbc, bbbc, aaab, abc, aac, acac, abb, bb, cabb, abac, aabc, acbc, ccac, ccbc, cabc, cac, bcbb, aaac, abbc, ab, bcac, babb, acbb, bbb, ac, bc, aabb, cbbb, aab, cbc, caac, bbc, bcab, acab, babc, baab, baac, abbb, bbac, cbb, caab, bac, ccab, cbac, abab, bbbb, bbab, cbab, cab, bab, ccbb, bcbc, ...\}$

g. $(A^* \cup AB)^*A \cup B^* = \{\lambda, bccc, bbbc, abc, abcb, aac, acb, aaa, abb, b, bacb, baa, bb, aabc, acbc, aacb, aa, abbc, cc, bcbb, accb, ab, acbb, a, babb, ac, bc, aca, aab, aacc, aabb, bbb, bbcc, bbc, babc, c, bbcb, bca, abcc, acc, bcc, bccb, abbb, ba, bac, bacc, bbbb, bba, aba, accc, bab, bcbc, bcb, cb, ...\}$

2. Sean A, B, C lenguajes arbitrarios sobre algún alfabeto V. Cuales de las siguientes aserciones son identidades:

a. $A(BA)^* = (AB)^*A$

$$A(BA)^* = A(\{\lambda\} \cup BA \cup (BA)^2 \cup (BA)^3 \cup ...) \tag{1}$$
$$= A \cup ABA \cup A(BA)^2 \cup A(BA)^3 \cup ... \tag{2}$$
$$= A \cup ABA \cup ABABA \cup ABABABA \cup ... \tag{3}$$
$$= A \cup (AB)A \cup (AB)ABA \cup (AB)ABABA \cup ... \tag{4}$$
$$= (AB)^0A \cup (AB)^1A \cup (AB)^2A \cup (AB)^3A \cup ... \tag{5}$$
$$= (AB)^*A \tag{6}$$

b. $(AB)^* = A^*B^*$

$$(AB)^* = \{\lambda\} \cup AB \cup (AB)^2 \cup (AB)^3 \cup ... \tag{7}$$
$$= \{\lambda\} \cup AB \cup ABAB \cup ABABAB \cup ... \tag{8}$$

Pero
$$A^*B^* = \{\lambda\} \cup A \cup B \cup ... \tag{9}$$

Nos damos cuenta que A es un término de A^*B^* (el lado derecho de la identidad), mas no del izquierdo, por contraejemplo decimos que:
$$(AB)^* \neq A^*B^* \tag{10}$$

c. $A(B^* \cap C^*) = AB^* \cap AC^*$

$$AB^* \cap AC^* = (A \cup AB \cup AB^2 \cup ...) \cap (A \cup AC \cup AC^2 \cup ...) \tag{11}$$
$$= A((\{\lambda\} \cup B \cup B^2 \cup ...) \cap (\{\lambda\} \cup C \cup C^2 \cup ...)) \tag{12}$$

Distributivad de los conjuntos:

$$= A(B \cap C)^0 \cup A(B \cap C)^1 \cup A(B \cap C)^2 \cup A(B \cap C)^3 ... \tag{13}$$
$$= A(B \cap C)^* \tag{14}$$
$$= A(B^* \cap C^*) \tag{15}$$

d. $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$

$$A^* \cap B^* = (\{\lambda\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup ...) \cap (\{\lambda\} \cup B \cup B^2 \cup B^3 \cup ...) \tag{16}$$

Distributivad de los conjuntos:

$$= \{\lambda\} \cup (A \cap B) \cup (A \cap B)^2 \cup (A \cap B)^3 \cup ... \tag{17}$$
$$= (A \cap B)^* \tag{18}$$

e. $A^*B = (B \cup A^*)AB$

$$A^*B = B \cup AB \cup A^2B \cup ... \tag{19}$$

Pero

$$(B \cup A^*)AB = BAB \cup AAB \cup ... \tag{20}$$

Nos damos cuenta que B es un término de A^*B (el lado izquierdo de la identidad), mas no del derecho, por contraejemplo decimos que:

$$A^*B \neq (B \cup A^*)AB \tag{21}$$

f. $A^*(B \cap C)^* = (AB \cup AC)^*$

$$A^*(B \cap C)^* = \{\lambda\} \cup A \cup ... \tag{22}$$
$$(AB \cup AC)^* = \{\lambda\} \cup (AB \cup AC)^1 \cup ... \tag{23}$$

Nos damos cuenta que A es un término de $A^*(B \cap C)^*$ (el lado izquierdo de la identidad), mas no del derecho, por contraejemplo decimos que:

$$A^*(B \cap C)^* \neq (AB \cup AC)^* \tag{24}$$

g. $(A^*B^*)^* = (A \cup B)^*$
Falta verificar:

$$(A^*B^*)^* = \{\lambda\} \cup AB \cup ... \tag{25}$$
$$(A \cup B)^* = \{\lambda\} \cup (A \cup B)^1 \cup (A \cup B)^2 ... \tag{26}$$

Si seleccionamos

$$AB = \{xy | x \in A \wedge y \in B\} \tag{27}$$

y suponemos la identidad, podemos establecer una relación biyectiva, tal que el codominio tenga los mismos elementos, entonces la cadena debe ser de la misma longitud:

$$(A \cup B)^2 = \{xy | x \in (A \cup B) \wedge y \in (A \cup B)\} \tag{28}$$
$$(A \cup B)^2 = \{xy | x \in A \vee x \in B \wedge y \in A \vee y \in B\} \tag{29}$$

Nos damos cuenta que AB es un término de $(A^*B^*)^*$ (el lado izquierdo de la identidad), mas no del derecho, por contraejemplo decimos que:

$$(A^*B^*)^* \neq (A \cup B)^* \tag{30}$$

h. $A^*(B \cup C) = A^*B \cup A^*C$

$$A^*(B \cup C) = (B \cup C) \cup A(B \cup C) \cup A^2(B \cup C)... \tag{31}$$
$$= A^0B \cup A^0C \cup AB \cup AC \cup A^2B \cup A^2C... \tag{32}$$

Agrupamos:

$$= A^0B \cup AB \cup A^2B \cup ... \cup A^0C \cup AC \cup A^2C \cup A^3C \cup ... \tag{33}$$
$$= A^*B \cup A^*C \tag{34}$$

3. Sea V = $\{0, 1\}$. Usando los operadores de conjuntos $\cup$, $\cdot$ y $*$ encuentra expresiones para cada uno de los siguientes lenguajes sobre V:

a. Toda $\omega \in V^*$ tal que la cadena 101 aparezca como una subcadena de ω

$$V^*101V^* \tag{35}$$

b. Toda $\omega \in V^*$ tal que cada 0 aparezca en ω inmediatamente seguido de al menos dos 1's.

$$(1 \cup 011)* \tag{36}$$

c. Toda $\omega \in V^*$ tal que cada 1 aparezca en ω inmediatamente seguido de la subcadena 10.

$$(0 \cup 110)* \tag{37}$$

Referencias

[1] Sipser, Michael. Introduction to the Theory of Computation. 3rd ed. Cengage Learning, 2012. ISBN: 9781133187790.