INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
EXAMEN PARCIAL 4
CADENAS DE MARKOV

Nombre: Carlos Eduardo Sanchez Torres Fecha: noviembre 17, 2021

1. Un ratón se coloca en un laberinto cuyas rutas son mostradas en la figura de abajo. La intersección 1 es la entrada al laberinto y la intersección 5 es la salida. En cualquier intersección, el ratón tiene probabilidades iguales de seleccionar cualquiera de las rutas disponibles. Cuando el ratón llega a la intersección 5, el experimento se repite volviendo a entrar al laberinto por la intersección 1.

a) Exprese el laberinto como una cadena de Markov.

Tomamos como estado del sistema las rutas disponibles. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \ la\ ruta\ disponible\ en\ la\ intersección\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1,...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.0 1/3 1/3 1/3 0.0
1/3 0.0 1/3 0.0 1/3
1/3 1/3 0.0 0.0 1/3
1/2 0.0 0.0 0.0 1/2
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
]

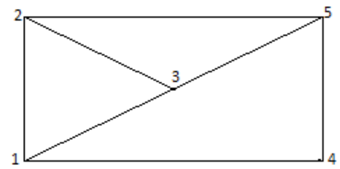
b) Determine las probabilidades de que, comenzando con la intersección 1, el ratón llegue a la salida en tres intentos.

$$a^3 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]P^3 = [0.462963 \quad 0.166667 \quad 0.166667 \quad 0.129630 \quad 0.074074]$$
$$a_5^{(3)} = 0.074074$$

c) Determine la probabilidad a largo plazo de que el ratón localice la intersección de salida.

Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T

$$\pi P = \pi \Rightarrow \pi = [6/17 \quad 3/17 \quad 3/17 \quad 2/17 \quad 3/17]$$
$$\pi_5 = 3/17$$



2. En una comunidad hay tres supermercados, S1, S2, y S3. Existe movilidad de clientes de un mercado a otro. El 1 de septiembre, 1/4 de los clientes va al S1, 1/3 al S2 y 5/12 al S3 de un total de 10,000 personas. Cada mes el S1 retiene el 90% de sus clientes y pierde el 10% que va al S2. Se averiguó que el S2 sólo retiene el 5% con el 85% que va al S1 y el resto se va al S3. El S3 retiene sólo el 40%, pierde el 50% que va al S1 y el 10% que va al S2.

Tomamos como estado del sistema los tres supermercados. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n\text{: } la\ elección\ del\ supermercado\ en\ el\ mes\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, \ldots\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{S1,\ S2,\ S3\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.90 0.10 0.00
0.85 0.05 0.10
0.50 0.10 0.40
]

a) ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de diciembre?

$$a^{(3)} = [1/4\ 1/3\ 5/12]P^3 = [0.859875\ 0.0952083\ 0.0449167]$$

Supermercado	Distribución	Población
S1	0.859875	8599
S2	0.0952083	952
S3	0.0449167	449

b) ¿A largo plazo cuál será la cantidad de clientes en cada supermercado?

Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T

$$\pi P = \pi \Rightarrow \pi = [8/9\ \ 2/21\ \ 1/63]$$

Supermercado	Distribución	Población
S1	$8/9$	8889
S2	$2/21$	952
S3	$1/63$	159

3. Quienes pagan impuestos a la Federación pueden ser clasificados en 3 categorías: los que nunca evaden impuestos, los que en ocasiones lo hacen y los que siempre lo hacen. Un examen de las declaraciones de impuestos auditadas de un año al siguiente muestra que, de los que no evadieron impuestos el año pasado, 95% continuará en la misma categoría este año, 4% se moverá la categoría "a veces" y el resto se moverá a la categoría "siempre". Para los que a veces evaden impuestos, 6% se moverá a "nunca", 90% permanecerá igual y 4% se moverá a "siempre". Por lo que se refiere a los evasores de "siempre" los porcentajes respectivos son 0, 10 y 90%.

Tomamos como estado del sistema las categorías de evasión Definamos la variable aleatoria:

$$X_n\colon \ la\ categoría\ de\ evasión\ en\ el\ año\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, \ldots\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{Nunca,\ A\ veces,\ Siempre\} = \{N,\ A,\ S\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.95 0.04 0.01
0.06 0.90 0.04
0.00 0.10 0.90
]

a) A la larga, ¿cuáles serían los porcentajes de las categorías de evasión de impuestos de "nunca", "a veces" y "siempre"?

Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T

$$\pi P = \pi \Rightarrow \pi = [15/34\ \ 25/68\ \ 13/68]$$

b) Las estadísticas muestran que un contribuyente en la categoría “a veces” evade impuestos que suman aproximadamente $5000 por declaración, y en la categoría “siempre” suman aproximadamente $2000. Suponiendo que la población de contribuyentes es de 70 millones y la tasa del impuesto sobre la renta promedio es de 12%, determine la reducción anual de los impuestos recolectados debido a la evasión.

Categoría	Distribución	Población (millones)	
Nunca	15/34	525/17	
A veces	25/68	875/34	1838.23529412
Siempre	13/68	455/34	382.352941176

Reducción anual = (1838.23529412+382.352941176)*70000000 =155441176471

4. Jim y Joe comienzan un juego con 5 fichas, tres para Jim y dos para Joe. Se lanza una moneda, y si el resultado es “cara”, Jim le da a Joe una ficha, de lo contrario Jim obtiene una ficha de Joe. El juego termina cuando Jim o Joe tienen todas las fichas. En este punto, hay 30% de probabilidades de que Jim y Joe continúen con el juego, comenzando de nuevo con tres fichas para Jim y dos fichas para Joe.

a) Represente el juego como una cadena de Markov.

Tomamos como estado del sistema la cantidad de fichas de Jim. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n\text{: } la\ cantidad\ de\ fichas\ de\ Jim\ en\ el\ lanzamiento\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.7 0.0 0.0 0.3 0.0 0.0
0.5 0.0 0.5 0.0 0.0 0.0
0.0 0.5 0.0 0.5 0.0 0.0
0.0 0.0 0.5 0.0 0.5 0.0
0.0 0.0 0.0 0.5 0.0 0.5
0.0 0.0 0.0 0.3 0.0 0.7
]

b) Determine la probabilidad de que Joe gane con tres lanzamientos de la moneda. De que Jim gane haciendo lo mismo.

$$a^{(3)} = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]P^3 = [1/8 \quad 0 \quad 3/8 \quad 3/40 \quad 1/4 \quad 7/40]$$

Gana Jim: $a_6^{(3)} = 7/40$

Gana Joe: $a_0^{(3)} = 1/8$

c) Determine la probabilidad de que un juego termine en favor de Jim. A favor de Joe.

Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T

$$\pi P = \pi \Rightarrow \pi = [1/7 \quad 3/35 \quad 6/35 \quad 9/35 \quad 9/70 \quad 3/14]$$

Gana Jim: $\pi_6^{(3)} = 3/14$

Gana Joe: $\pi_0^{(3)} = 1/7$