INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
Práctica de Laboratorio #25
LÍNEAS DE ESPERA
Modelos de un solo servidor, N clientes máximo.
(M/M/1/GD/N/)

Nombre: Carlos Eduardo Sanchez Torres Fecha: 29/11/2021

1. First Bank de Springdale opera cajeros automáticos de un solo carril. Los autos llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 12 autos por hora. El tiempo por caja necesario para completar la transacción en el cajero es exponencial con media de 6 minutos. El carril tiene espacio para 10 autos. Una vez que el carril está lleno, los demás autos que llegan buscan el servicio en otra sucursal.
El límite en el sistema es N = 10 + 1 = 11. Tenemos que λ = 12 hr^{-1}, μ = 10 hr^{-1}, c = 1.

Determine lo siguiente:

a) La probabilidad de que un auto que llega no pueda utilizar el cajero porque el carril está lleno. El programa de Octave nos entrega:
$$p_{11} = 0.18772080$$
b) La probabilidad de que un auto no pueda utilizar el cajero en cuanto llegue.
$$p(estar\ en\ cola) = 1 - p_{11} = 0.81227920$$
c) El promedio de autos en el carril.
$$L_q = 6.54116286$$

2. En relación con la instalación de lavado de autos *Autómata* (práctica 23, problema #3), determine los siguiente:

N = 5 + 1 = 6, $\lambda = 4\ clientes\ /\ hora,\ \mu = 6\ clientes\ /\ hora,\ c = 1$

a) La probabilidad de que un auto que llega entre de inmediato al área de lavado.
$$p_0 = 0.35405537$$
b) El tiempo de espera hasta que se inicie el servicio.
$$W_q = 14.22556391 \text{ minutos}$$
c) La cantidad esperada de espacios de estacionamiento vacíos.
$$(N - 1) - Lq = 4.08110733\ \ estacionamiento\ vacíos$$
d) La probabilidad de que todos los espacios de estacionamiento estén ocupados.
$$p_6 = 0.03108305$$
e) La reducción, en porcentaje, del tiempo de servicio promedio que limitará el tiempo promedio en el sistema a aproximadamente 10 minutos. (W_s: $minutos$)

$(\lambda = 4,\ N = 6, c = 1,\ \mu = x) \Rightarrow W_s \leq 10$ tal que la reducción en porcentaje es $\frac{|1/\mu_{actual} - 1/x|}{1/\mu_{actual}}$ (recuerde que es el tiempo) donde x es lo que buscamos.

Por un algoritmo iterativo ejecutado en Octave:
$$min\{x \in Z |\ x \geq \mu_{actual} + 1 = 7 \Rightarrow W_s \leq 10\ \} = 10, W_s = 9.85\ \ min$$

Obtenemos: $\frac{|1/\mu_{actual} - 1/x|}{1/\mu_{actual}} = 40\%$

3. Nuevamente, con relación a la instalación de lavado de autos *Autómata* (práctica 23, prob. #3), determine la cantidad de espacios de estacionamiento, de modo que el porcentaje de los autos que no puedan encontrar un espacio no exceda del 1%.
Equivale al algoritmo:

$$min\{x \in Z | (\lambda = 4,\ N = x + 1 \geq 6, c = 1,\ \mu = 6) \Rightarrow p_N \leq 0.01\} = 8$$

$$(\lambda = 4,\ N = 8 + 1 \geq 6, c = 1,\ \mu = 6) \Rightarrow p_{8+1} = 0.00882378 \leq 0.01$$

4. El tiempo que el peluquero Joe Cakes emplea para realizar un corte de pelo es exponencial con una media de 12 minutos. Debido a su popularidad, los clientes suelen llegar de acuerdo con una distribución de Poisson a una razón mayor que la que Joe puede manejar: 6 clientes por hora. Joe en realidad se siente cómodo si la tasa de llegadas se reduce efectivamente alrededor de 4 clientes por hora. Para alcanzar esta meta se le ocurrió proporcionar asientos limitados en el área de espera, de modo que los clientes que acaban de llegar se vayan a otra parte cuando se dan cuenta de que todos los asientos están ocupados. ¿Cuántos asientos debe proporcionar Joe para alcanzar su meta?
Equivale al algoritmo:

$$min\{x \in Z | (\lambda = 6,\ N = x + 1, c = 1,\ \mu = 5) \Rightarrow |4 - \lambda_{efectiva}| \geq |4 - \lambda_{efectiva\ menor}|\} = 2$$

Concluyendo necesita $x = 2$ asientos para alcanzar su meta.

$$(\lambda = 6,\ N = 2 + 1 = 3, c = 1,\ \mu = 5) \Rightarrow |4 - \lambda_{efectiva\ menor}| = |4 - 4.06855440|$$

5. El ensamble final de los generadores eléctricos en Electro se realiza a razón de Poisson de 10 generadores por hora. Luego, los generadores son transportados por una banda al departamento de inspección para su revisión final. La banda puede transportar un máximo de 7 generadores. Un sensor automático detiene al instante la banda una vez que se llena, lo que evita que el departamento de ensamble final arme más unidades hasta que haya espacio disponible. El tiempo para inspeccionar los generadores es exponencial, con una media de 15 minutos.

$$\lambda = 10,\ N = 7 + 1 = 8, c = 1,\ \mu = 4$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el departamento de ensamble final detenga la producción?

$$p_N = p_8 = 0.60015733$$

b) ¿Cuál es el promedio de generadores sobre la banda transportadora?

$$L_q = 6.33608657\ generadores$$

c) El ingeniero de producción afirma que las interrupciones en el departamento de ensamble pueden reducirse si se incrementa la capacidad de la banda. De hecho, el ingeniero afirma que la capacidad puede incrementarse al punto en que el departamento de ensamble opere el 95% del tiempo sin interrupciones. ¿Es realmente posible lograr este incremento de capacidad?

Equivale al algoritmo:

$$\exists min\{x \in Z | (\lambda = 10,\ N = x + 1, c = 1,\ \mu = 4) \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} p_n = \sum_{n=0}^{x} p_n \geq 0.95\}$$

Aplicando el modelo $M/M/1: (GD/N/\infty), 1 \leq N$:

$$\lambda = 10,\ N = x + 1, c = 1,\ \mu = 4, \rho = \frac{10}{4} = 2.5$$

Si encontramos

$$lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{x} p_n > 0.95$$

En caso contrario, no existe capacidad x que dada las condiciones dadas sea razón suficiente para que el departamento de ensamble opere el 95% del tiempo sin interrupciones, a saber, la afirmación del ingeniero es falsa.

Demostración.

$$lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{x} p_n =$$

$$lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{x} \left(\frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}\right) =$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{1-p}{1-p^{x+2}} \sum_{n=0}^{x} \rho^n =$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{1-p}{1-p^{x+2}} \left(\frac{1-\rho^{x+1}}{1-\rho}\right) =$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{1-p^{x+1}}{1-p^{x+2}}$$

Si $\lim_{x\to\infty} 1 - p^{x+1} = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} 1 - p^{x+2} = \infty$ entonces aplicamos el teorema de L'Hopital:

$$lim_{x\to\infty} \frac{1-p^{x+1}}{1-p^{x+2}}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{-ln(p)p^{x+1}}{-ln(p)p^{x+2}}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{p^{x+1}}{p^{x+2}}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{1}{2.5}$$

$$= 0.4$$

Si $lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{x} p_n = 0.4 < 0.95$, entonces no es posible lograr este incremento de capacidad.

* A menos que se diga lo contrario en esta práctica, por conveniencia la unidad de tiempo de λ: $clientes/hora$ y μ: $clientes/hora, W_q: horas,\ W_s: horas$