



Ejercicios de cadenas y lenguajes

TA 361075 Carlos Eduardo Sánchez Torres

9 de febrero de 2022



Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$. Describe informalmente los elementos de los siguientes conjuntos:

a. $A^* = \{\lambda, a, b, \} = \{\lambda, aab, ba, aa, aba, bba, aaa, abb, b, baa, bab, bb, ab, bbb, a, \dots\}$

b. $A^*B^* = \{a, b\}^*\{b, c\} = \{\lambda, bbcb, abc, abcb, aac, acb, abb, b, bacb, bb, aabc, aacb, aa, abbc, cc, ab, babb, bbb, a, aabb, bc, bbcc, aab, aacc, ac, bbc, babc, c, bbcb, abcc, bcc, acc, abbb, ba, bac, bacc, bbbb, bab, bcb, cb, \dots\}$

c. $(AB)^* = \{bb, ac, bc, ab\}^* = \{\lambda, ac, bc, bbcb, bcab, acac, acab, bcac, bb, abbb, bbac, acbc, abab, bbbb, bbab, abbc, bcbb, abac, ab, bcba, acbb, \dots\}$

d. $(A \cup B)^* = \{c, b, a\}^* = \{\lambda, ac, bc, ba, aa, ca, c, b, cc, bb, ab, cb, a, \dots\}$

e. $(A \cap B)^* = \{b\}^* = \{\lambda, b, bb, bbb, bbbb, \dots\}$

f. $(A \cup B)^*AB = \{c, b, a\}^*\{a, b\}\{b, c\} = \{cbcb, bbcb, aaab, abc, aac, acac, abb, bb, cabb, abac, aabc, acbc, ccac, ccbc, cabc, cac, bcbb, aaac, abbc, ab, bcac, babb, acbb, bbb, ac, bc, aabb, cbbb, aab, cbc, caac, bbc, bcab, acab, babc, baab, baac, abbb, bbac, cbb, caab, bac, ccab, cbac, abab, bbbb, bbab, cbab, cab, bab, cccb, bcba, \dots\}$

g. $(A^* \cup AB)^*A \cup B^* = \{\lambda, bccc, bbcb, abc, abcb, aac, acb, aaa, abb, b, bacb, baa, bb, aabc, acbc, aacb, aa, abbc, cc, bcbb, accb, ab, acbb, a, babb, ac, bc, aca, aab, aacc, aabb, bbb, bbcc, bbc, babc, c, bbcb, bca, abcc, acc, bcc, bcba, abbb, ba, bac, bacc, bbbb, bba, aba, accc, bab, bcba, bcb, cb, \dots\}$

2. Sean A, B, C lenguajes arbitrarios sobre algún alfabeto V. Cuales de las siguientes aserciones son identidades:

a. $A(BA)^* = (AB)^*A$

$$A(BA)^* = A(\{\lambda\} \cup BA \cup (BA)^2 \cup (BA)^3 \cup \dots) \quad (1)$$

$$= A \cup ABA \cup A(BA)^2 \cup A(BA)^3 \cup \dots \quad (2)$$

$$= A \cup ABA \cup ABABA \cup ABABABA \cup \dots \quad (3)$$

$$= A \cup (AB)A \cup (AB)ABA \cup (AB)ABABA \cup \dots \quad (4)$$

$$= (AB)^0 A \cup (AB)^1 A \cup (AB)^2 A \cup (AB)^3 A \cup \dots \quad (5)$$

$$= (AB)^* A \quad (6)$$

b. $(AB)^* = A^*B^*$

$$(AB)^* = \{\lambda\} \cup AB \cup (AB)^2 \cup (AB)^3 \cup \dots \quad (7)$$

$$= \{\lambda\} \cup AB \cup ABAB \cup ABABAB \cup \dots \quad (8)$$

Pero

$$A^*B^* = \{\lambda\} \cup A \cup B \cup \dots \quad (9)$$

Nos damos cuenta que A es un término de A^*B^* (el lado derecho de la identidad), mas no del izquierdo, por contraejemplo decimos que:

$$(AB)^* \neq A^*B^* \quad (10)$$

$$c. A(B^* \cap C^*) = AB^* \cap AC^*$$

$$AB^* \cap AC^* = (A \cup AB \cup AB^2 \cup \dots) \cap (A \cup AC \cup AC^2 \cup \dots) \quad (11)$$

$$= A((\{\lambda\} \cup B \cup B^2 \cup \dots) \cap (\{\lambda\} \cup C \cup C^2 \cup \dots)) \quad (12)$$

Distributividad de los conjuntos:

$$= A(B \cap C)^0 \cup A(B \cap C)^1 \cup A(B \cap C)^2 \cup A(B \cap C)^3 \dots \quad (13)$$

$$= A(B \cap C)^* \quad (14)$$

$$= A(B^* \cap C^*) \quad (15)$$

$$d. (A \cap B)^* = A^* \cap B^*$$

$$A^* \cap B^* = (\{\lambda\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots) \cap (\{\lambda\} \cup B \cup B^2 \cup B^3 \cup \dots) \quad (16)$$

Distributividad de los conjuntos:

$$= \{\lambda\} \cup (A \cap B) \cup (A \cap B)^2 \cup (A \cap B)^3 \cup \dots \quad (17)$$

$$= (A \cap B)^* \quad (18)$$

$$e. A^*B = (B \cup A^*)AB$$

$$A^*B = B \cup AB \cup A^2B \cup \dots \quad (19)$$

Pero

$$(B \cup A^*)AB = BAB \cup AAB \cup \dots \quad (20)$$

Nos damos cuenta que B es un término de A^*B (el lado izquierdo de la identidad), mas no del derecho, por contraejemplo decimos que:

$$A^*B \neq (B \cup A^*)AB \quad (21)$$

$$f. A^*(B \cap C)^* = (AB \cup AC)^*$$

$$A^*(B \cap C)^* = \{\lambda\} \cup A \cup \dots \quad (22)$$

$$(AB \cup AC)^* = \{\lambda\} \cup (AB \cup AC)^1 \cup \dots \quad (23)$$

Nos damos cuenta que A es un término de $A^*(B \cap C)^*$ (el lado izquierdo de la identidad), mas no del derecho, por contraejemplo decimos que:

$$A^*(B \cap C)^* \neq (AB \cup AC)^* \quad (24)$$

$$g. (A^*B^*)^* = (A \cup B)^*$$

$$(A^*B^*)^* = \{\lambda\} \cup AB \cup \dots \quad (25)$$

$$(A \cup B)^* = \{\lambda\} \cup (A \cup B)^1 \cup \dots \quad (26)$$

Nos damos cuenta que AB es un término de $(A^*B^*)^*$ (el lado izquierdo de la identidad), mas no del derecho, por contraejemplo decimos que:

$$(A^*B^*)^* \neq (A \cup B)^* \quad (27)$$

$$h. A^*(B \cup C) = A^*B \cup A^*C$$

$$A^*(B \cup C) = (B \cup C) \cup A(B \cup C) \cup A^2(B \cup C) \dots \quad (28)$$

$$= A^0B \cup A^0C \cup AB \cup AC \cup A^2B \cup A^2C \dots \quad (29)$$

Agrupamos:

$$= A^0B \cup AB \cup A^2B \cup \dots \cup A^0C \cup AC \cup A^2C \cup A^3C \cup \dots \quad (30)$$

$$= A^*B \cup A^*C \quad (31)$$

3. Sea $V = \{0, 1\}$. Usando los operadores de conjuntos \cup , \cdot y $*$ encuentra expresiones para cada uno de los siguientes lenguajes sobre V :

- a. Toda $\omega \in V^*$ tal que la cadena 101 aparezca como una subcadena de ω

$$V^*101V^* \quad (32)$$

- b. Toda $\omega \in V^*$ tal que cada 0 aparezca en ω inmediatamente seguido de al menos dos 1's.

$$(1^*110)^* \quad (33)$$

- c. Toda $\omega \in V^*$ tal que cada 1 aparezca en ω inmediatamente seguido de la subcadena 10.

$$((10)^+1^*)^* \quad (34)$$

Referencias

- [1] Sipser, Michael. Introduction to the Theory of Computation. 3rd ed. Cengage Learning, 2012. ISBN: 9781133187790.