INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
CADENAS DE MARKOV (1)
Práctica de Laboratorio #15

Nombre: CARLOS EDUARDO SANCHEZ TORRES Fecha: 14/10/2021

1. La región de ventas de un vendedor la componen tres ciudades, A, B y C. Nunca vende en la misma ciudad en días seguidos. Si vende en la ciudad A, entonces al día siguiente vende en la ciudad B. Sin embargo, si vende en una de las dos B o C, entonces al día siguiente está en doble posibilidad de vender en A que en la otra ciudad. A la larga, ¿con qué frecuencia vende en cada ciudad?

Sea $S = \{A, B, C\}$ el espacio de estados donde A,B,C significa la ciudad a la que va a vender y vemos que se cumplen las condiciones para una cadena de Markov: un conjunto finito donde necesariamente ocurre uno de ellos y la probabilidad está determinado exclusivamente por máximo el día anterior. Así, la matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Esto es una matriz estocástica, también tenemos que para

$$P^3 = \begin{bmatrix} 14/27 & 2/9 & 7/27 \\ 26/81 & 49/81 & 2/27 \\ 26/81 & 16/27 & 7/81 \end{bmatrix}$$

tiene todas sus entradas positivas y mayores a 0, entonces la matriz es estocástica regular podemos aplicar el teorema 3:

$$tP = t$$

donde t nuestra frecuencia de ventas en cada ciudad porque es nuestro punto límite.

Resolviendo:

$$(P - I)^t t^t = 0$$

Buscando la matriz escalonada:

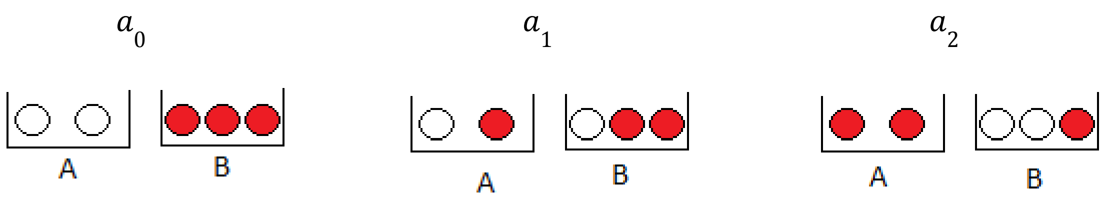
$$rref((P - I)^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8/3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = \frac{8}{3}z, y = 3z, z \in R^+ \Rightarrow z = 3,\ y = 9,\ x = 8$, nuestro frecuencias por ciudad entonces es:

$$t = (P(A),\ P(B),\ P(C)) = (2/5,\ \ 9/20\ ,\ 3/20)$$

2. Hay dos bolas blancas en una urna A y tres rojas en otra urna B. A cada paso del proceso se selecciona una bola de cada urna y las dos bolas escogidas se intercambian. Sea el estado a_i del sistema el número de bolas rojas de la urna A. (i) Hallar la matriz de transición P. (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A después de 3 pasos?, (iii) A la larga, ¿cuál es la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A?

Sea $S = \{a_0, a_1, a_2\}$ el espacio de estados donde a_i es el estado el número de bolas rojas de la urna A -solo existen 3 estados porque solo existen 3 posibilidades: 0 bolas rojas, 1 bola roja, 2 bolas rojas- y vemos que se cumplen las condiciones para una cadena de Markov: un conjunto finito donde necesariamente ocurre uno de ellos y la probabilidad está determinada exclusivamente por la anterior selección.



Sea p_{ij} la probabilidad de ir del estado i al estado j y los intercambios se denota como $\{(x, y) | \, x \in X = \{R,\, B\},\, y \in Y = \{R, B\}\}$, R: $Roja\ y\ B$: $Blanca$, sabemos que existen $|X||Y| = 2 * 2 = 4$ posibilidades. Definimos $p((x, y)_i)\ como\ la\ probabilidad\ del\ intercambio\ (x, y)\ en\ el\ estado\ a_i$, tal que nos lleve del estado buscado.

Análisis de p_{ij}:

En este estado tenemos en A={2 blancas} y en B={3 rojas}.

$p_{11} = p(a_0 \rightarrow a_0) = p((B, B)_0) = \frac{1}{2} * \frac{0}{3} = 0$

$p_{12} = p(a_0 \rightarrow a_1) = p((B, R)_0) = \frac{2}{2} * \frac{3}{3} = 1$

$p_{13} = p(a_0 \rightarrow a_2) = 0$

En este estado tenemos en A={1 blanca y 1 roja} y B={2 rojas y 1 blanca}.

$p_{21} = p(a_1 \rightarrow a_0) = p((R, B)_1) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p_{22} = p(a_1 \rightarrow a_1) = p((R, R)_1) + p((B, B)_1) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$p_{23} = p(a_1 \rightarrow a_2) = p((B, R)_1) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

En este estado tenemos en A={2 rojas} y B={1 roja y 2 blancas}.

$p_{31} = p(a_2 \rightarrow a_0) = 0$

$p_{32} = p(a_2 \rightarrow a_1) = p((R, B)_2) = \frac{2}{2} * \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$p_{33} = p(a_2 \rightarrow a_2) = p((R, R)_2) = \frac{2}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Así, la matriz de transición es:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A después de 3 pasos?

Sea $p^{(0)} = (1, 0, 0)$ (distribución inicial de probabilidad), entonces necesitamos

$$p^{(0)}P^3 = [1/12,\ \ 23/36,\ \ 5/18]$$

Esto significa que la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A después de 3 pasos es igual a **5/18**.

(iii) A la larga, ¿cuál es la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A?

Esto es una matriz estocástica regular porque para P^2 todas sus entradas son positivas, entonces podemos aplicar el teorema 3:

$$tP = t$$

Buscando la matriz escalonada:

$$rref((P - I)^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = z/3,\ y = 2z,\ z \in R \Rightarrow x = 1, y = 6,\ z = 3$

$t = [P(a_0),\ P(a_1),\ P(a_2)] = \frac{1}{10} * [1,\ 6,\ 3] = [1/10,\ 3/5,\ 3/10]$

$P(dos\ bolas\ rojas\ en\ la\ urna\ 2\ a\ la\ larga) = \frac{3}{10}$

3. Los hábitos de fumar de un hombre son los siguientes: Si fuma cigarros con filtro una semana, los suspende a la semana siguiente con probabilidad 0.2. Por otra parte, si fuma cigarros sin filtro una semana, hay una probabilidad de 0.7 que continuará fumando de éstos la semana siguiente. A la larga, ¿con qué frecuencia fumará cigarros con filtro?

Sea $S = \{F, N\}$ el espacio de estados donde $F: fuma\ cigarro\ con\ filtro$ y $N: fuma\ cigarro\ sin\ filtro$ y vemos que se cumplen las condiciones para una cadena de Markov: un conjunto finito donde necesariamente ocurre uno de ellos y la probabilidad está determinada exclusivamente por máximo la semana anterior. Así, la matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Esto es una matriz estocástica regular porque para P todas sus entradas son positivas, entonces podemos aplicar el teorema 3:

$$tP = t$$

Buscando la matriz escalonada:

$$rref((P - I)^t) = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = 3y/2,\ y \in R \Rightarrow x = 3, y = 2$

$t = [P(F),\ P(N)] = \frac{1}{5} * [3,\ 2] = [3/5,\ 2/5]$

$P(Fumará\ cigarros\ con\ filtro\ a\ larga) = \frac{3}{5}$

4. Dada la matriz de transición P = $\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la distribución de probabilidad inicial $p^{(0)} = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, hallar: (i) $p_{32}^{(2)}$ y $p_{13}^{(2)}$, (ii) $p^{(4)}$ y $p_3^{(4)}$, (iii) el vector al cual se aproxima $p^{(0)}P^n$, (iv) la matriz a que se aproxima P^n.

Si $P^2 = [$

1/4 3/4 0

1/4 1/2 1/4

1/2 1/2 0

]

Entonces $p^{(2)}{}_{32} = 1/2$ y $p_{13}{}^{(2)} = 0$

Aplicando el teorema 6 y usando Octave:

$$p^{(4)} = p^{(0)}P^4 = [\ 1/4 \quad 7/12 \quad 1/6]$$

Entonces $p^{(4)}{}_3 = 1/6$

Aplicando el teorema 3 porque P^3 es estocástica regular:

tP=t

Buscando la matriz escalonada:

$rref((P - I)^t) =$

[

1 0 -2

0 1 -4

0 0 0

]

El vector al cual se aproxima $p^{(0)}P$: $t = \frac{1}{7}[2, 4, 1] = [2/7\ 4/7\ 1/7]$

Por el teorema 7:

P = [

2/7 4/7 1/7

2/7 4/7 1/7

2/7 4/7 1/7

];