INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
Práctica de Laboratorio #23
LÍNEAS DE ESPERA
Modelos de un solo servidor
(M/M/1):(GD/ /)

Nombre: Carlos Eduardo Sánchez Torres Fecha: 24/11/2021

1. Una tienda es operada por su propietario. El patrón de llegadas se comporta siguiendo una distribución de Poisson, con una tasa promedio de llegadas de 10 personas por hora. Los clientes son atendidos siguiendo un orden de tipo FCFS y no se producen abandonos. El tiempo para atender a un cliente se distribuye exponencialmente con un tiempo promedio de servicio de 3 minutos. Determine: a) el porcentaje de utilización de las instalaciones, (b) el número promedio de clientes en la tienda, (c) el número de clientes que tienen que esperar en la cola, (d) el tiempo de permanencia en la tienda, (e) el tiempo de espera en la fila.

$\lambda = 10\, clientes\ /\ hora,\ \mu = 20\, clientes\ /\ hora, \rho = 0.5$

a. $uso\ de\ instalación = \frac{\bar{c}}{c} = \bar{c} = \frac{\lambda}{\mu} = 50\%$

b. $L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = 1\, cliente$

c. $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.5^2}{0.5} = 0.5\, clientes$

d. $W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{10} hora = 6\, minutos$

e. $W_q = \frac{\rho}{\mu(1-p)} = \frac{1}{20}\, hora = 3\, minutos$

2. El Banco Nacional de Occidente piensa abrir una ventanilla de servicio en automóvil para servicio a los clientes. La gerencia estima que los clientes llegarán a una tasa de 15 por hora. El cajero que estará en la ventanilla puede atender clientes a una tasa de uno cada dos minutos.
Suponiendo que las llegadas son de Poisson y que el servicio es exponencial, encuentre, (a) La utilización del cajero, (b) el número promedio en cola, (c) el número promedio en el sistema, (d) el tiempo promedio de espera en cola, y (e) el tiempo promedio de espera en el sistema (incluyendo el servicio).

$\lambda = 15\, clientes\ /\ hora,\ \mu = 30\, clientes\ /\ hora, \rho = 0.5$

a. $uso\ de\ instalación = \frac{\bar{c}}{c} = \bar{c} = \frac{\lambda}{\mu} = 50\%$

b. $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.5^2}{0.5} = 0.5\, clientes$

c. $L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = 1\, cliente$

d. $W_q = \frac{\rho}{\mu(1-p)} = \frac{1}{30}\, hora = 2\, minutos$

e. $W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{15} hora = 4\, minutos$

3. *Autómata* es una instalación de lavado de autos con sólo un área de lavado. Los autos llegan según una distribución de Poisson con una media de cuatro autos por hora y deben esperar en el estacionamiento en la calle de la empresa si hay un auto lavándose. Eso significa que, para todo propósito práctico, no hay ningún límite en el tamaño del sistema. El tiempo para lavar un auto es exponencial con una media de 10 minutos. El gerente desea determinar el tamaño del estacionamiento que debe proporcionarse de modo que un auto que llega pueda encontrar un espacio de estacionamiento el 90% de las ocasiones.

$\lambda = 4\, clientes\ /\ hora,\ \mu = 6\, clientes\ /\ hora, \rho = 2/3$

$$\sum_{n=0}^{s} p_n \geq 0.9$$

$$\sum_{n=0}^{s} (1 - \rho)\rho^n \geq 0.9$$

$$\sum_{n=0}^{s} \rho^n \geq \frac{0.9}{1-\rho}$$

$$\sum_{n=0}^{s} \rho^n \geq \frac{0.9}{1-\rho}$$

$$\frac{1-\rho^{s+1}}{1-\rho} \geq \frac{0.9}{1-\rho}$$

$$1 - \rho^{s+1} \geq 0.9$$

$$\rho^{s+1} \leq 0.1$$

$$s + 1 \geq log_{\rho}(0.1)$$

$$s > 4.6788.7$$

Como s es entero

$$s \geq 5$$

4. En relación con el problema anterior haga lo siguiente:

a) Determine la utilización, en porcentaje, del área de lavado.

$$uso\ de\ instalación = \frac{\bar{c}}{c} = \bar{c} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$$

b) Determinar la probabilidad de que un auto que llega tenga que esperar en el estacionamiento antes de entrar al área de lavado.

$$p_{n\geq 2} = 1 - p_{n<2} = 1 - \sum_{n=0}^{1} (1 - \rho)\rho^n = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

c) Si hay 7 espacios de estacionamiento, determinar la probabilidad de que un auto que llega encuentre un estacionamiento vacío.

La RAE define estacionamiento como “Lugar o recinto destinado a estacionar vehículos”, significa que en el contexto del problema la cola está vacía:

$$p_{n<2} = p_0 + p_1 = \frac{5}{9}$$

y como “Lugar donde puede estacionarse un automóvil”, significa que en el contexto del problema el i cliente puede estacionarse si $i < 7$:

$$p(el\ cliente\ i\ pueda\ estacionarse) = p_{i<7} = \sum_{n=0}^{6} (1 - \rho)\rho^{n} = 0.941472$$

d) ¿Cuántos espacios de estacionamiento deben proporcionarse de modo que un auto que llega pueda encontrar un espacio de estacionamiento el 99% de las ocasiones?

$$1 - \rho^{s+1} \geq 0.99$$

$$\rho^{s+1} \leq 0.01$$

$$s \geq log_{\rho}(0.01) - 1$$

$$s > 10.35775$$

Como s es entero

$$s \geq 11$$

5. Los autos llegan a una caseta de cobro de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 90 autos por hora. El tiempo para pasar la caseta es exponencial con media de 35 segundos. Los conductores se quejan del largo tiempo de espera, y las autoridades están dispuestas a reducir el tiempo de paso promedio a 30 segundos instalando dispositivos automáticos de cobro del peaje, siempre que se satisfagan dos condiciones: (1) el número promedio de autos en espera en el sistema actual exceda 5 unidades y (2) el porcentaje de tiempo inactivo de la caseta con el nuevo dispositivo instalado no exceda 10%. ¿Se puede justificar el nuevo dispositivo?

$\lambda = 90\ clientes\ /\ hora$

$\mu_1 = \frac{720}{7} clientes\ /\ hora, \rho = \frac{7}{8} = 0.875$

$\mu_2 = 120\ clientes\ /\ hora, \rho = \frac{3}{4} = 0.75$

Sabemos que el número promedio de autos en espera en el sistema actual

$$L_q = \frac{(\frac{7}{8})^2}{\frac{1}{8}} = 6.125\ clientes > 5$$

y la porcentaje de tiempo inactivo de la caseta con el nuevo dispositivo instalado, es equivalente a decir, que en el sistema no se encuentren clientes:

$$p_0 = (1 - \rho)\rho^{n} = 0.25 * 0.75^{0} = 0.25$$

Como la primera condición se cumple y la segunda no, entonces NO se justifica el nuevo dispositivo.