INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
CADENAS DE MARKOV
Práctica de Laboratorio #17

Nombre: Carlos Eduardo Sanchez Torres Fecha: 2/11/2020

1. Un profesor de ingeniería adquiere una computadora nueva cada dos años. El profesor puede elegir entre tres modelos: M1, M2 y M3. Si el modelo actual es M1, la siguiente computadora puede ser M2 con probabilidad 0.2 ó M3 con probabilidad 0.15 Si el modelo actual es M2, las probabilidades de cambiar a M1 y M3 son 0.6 y 0.25 respectivamente. Pero si el modelo actual es M3, entonces las probabilidades de comprar los modelos M1 y M2 son 0.5 y 0.1 respectivamente. Represente la situación como una cadena de Markov.

Tomemos como estado del sistema los modelos de computadora. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n:\ el\ modelo\ de\ la\ computadora\ cada\ 2n\ años.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, \ldots\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{M_1, M_2, M_3\}$, la matriz de transición está dada por:

P = [
0.65 0.20 0.15
0.60 0.15 0.25
0.50 0.10 0.40
]

2. Una patrulla policial vigila un vecindario conocido por sus actividades pandilleriles. Durante un patrullaje (0) hay 60% de probabilidades de llegar a tiempo al lugar donde se requiere la ayuda (1); si no sucede algo, continuará el patrullaje regular (0). Después de recibir una llamada, hay 10% de probabilidad de cancelación (en cuyo caso el patrullaje normal se reanuda) (1), y 30% de probabilidad de que la unidad ya está respondiendo a la llamada anterior (1). Cuando la patrulla llega a la escena del suceso (2), hay 10% de probabilidad de que los instigadores hayan desaparecido (en cuyo caso reanuda su patrullaje) (0), y 40% de probabilidad de que se haga una aprehensión de inmediato (3). De otro modo, los oficiales rastrearán el área (2). Si ocurre una aprehensión (3) hay 60% de probabilidad de trasladar a los sospechosos a la estación de policía (4), de lo contrario son liberados y la unidad regresa a patrullar (0). Exprese las actividades probabilísticas de la patrulla en la forma de una matriz de transición.

Tomemos como estado del sistema las actividades de la patrulla. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \ la\ actividad\ de\ la\ patrulla\ cada\ vigilancia.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{Patrullaje\ regular\ (0),\ Respondiendo\ una\ llamada\ (1),$
$Patrulla\ en\ la\ escena\ (2),\ Aprehensión\ (3),$
$Traslado\ a\ la\ estación\ (4)\}$, la matriz de transición está dada por:

P = [
0.4 0.6 0.0 0.0 0.0
0.1 0.3 0.6 0.0 0.0
0.1 0.0 0.5 0.4 0.0
0.4 0.0 0.0 0.0 0.6
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
]

3. El Banco Nacional ofrece préstamos. Si el pago sobre un préstamo se retrasa más de cuatro trimestres (un año) el Banco Nacional considera el préstamo como una deuda incobrable y la cancela. La siguiente tabla proporciona una muestra de la experiencia anterior del Banco Nacional con préstamos.

Cantidad Prestada	Trimestres de retraso	Historial de pagos
\$10,000	0	\$2000 pagados, \$3000 retrasados un trimestre, \$3000 retrasados 2 trimestres y el resto retrasados 3 trimestres.
\$25,000	1	\$4000 pagados, \$12000 retrasados un trimestre, \$6000 retrasados 2 trimestres y el resto retrasados 3 trimestres.
\$50,000	2	\$7500 pagados, \$15000 retrasados un trimestre y el resto retrasado 2 trimestres.
\$50,000	3	\$42000 pagados y el resto retrasado un trimestre.
\$100,000	4	\$50000 pagados.

Exprese la situación de préstamos del Banco Nacional como una cadena de Markov.

Tomemos como estado del sistema el trimestre de retraso. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \ el\ estado\ del\ préstamo\ en\ un\ trimestre.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, la matriz de transición está dada por:

P = [
0.20 0.30 0.30 0.20 0.00
0.16 0.48 0.28 0.12 0.00
0.15 0.30 0.55 0.00 0.00
0.84 0.16 0.00 0.00 0.00
0.50 0.00 0.00 0.00 0.50
]

4. Los pacientes que sufren de falla de riñón pueden conseguir un trasplante o someterse a diálisis periódicas. Durante un año cualquiera, 30% se somete a trasplantes de donantes fallecidos y 10% recibe riñones de donantes vivos. Un año después de un trasplante, 30% de los receptores de donantes fallecidos y 15% de los receptores de donantes vivos regresan a diálisis. Los porcentajes de muertes entre los dos grupos son de 20% y 10%, respectivamente. De aquellos que están en el grupo de diálisis 10% mueren y de los que sobreviven más de un año después de un trasplante, 5% mueren y 5% regresan a diálisis. Represente esta situación como una cadena de Markov.

Tomemos como estado del sistema el trimestre de retraso. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n:\ el\ estado\ del\ paciente\ en\ un\ año.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1,...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados
$I = \{trasplante\ de\ paciente\ vivo, trasplante\ de\ paciente\ fallecido,$
$diálisis,\ pacientes\ sobrevivientes,\ muerte\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
la matriz de transición está dada por:

P=[
0.00 0.00 0.15 0.75 0.10
0.00 0.00 0.30 0.50 0.20
0.30 0.10 0.50 0.00 0.10
0.00 0.00 0.05 0.90 0.05
0.00 0.00 0.00 0.00 1.00
]

$P(receptores\ de\ donantes\ fallecidos \rightarrow diálisis) = 0.3$
$P(receptores\ de\ donantes\ vivos\ \rightarrow diálisis\ diaria) = 0.15$
$P(receptores\ de\ donantes\ fallecidos\ \rightarrow muerte) = 0.2$
$P(receptores\ de\ donantes\ vivos\ \rightarrow muerte) = 0.10$
$P(\ diálisis \rightarrow muerte) = 0.10$
...

5. Cada año, durante la temporada de siembra de marzo a septiembre, un jardinero realiza una prueba química para verificar la condición de la tierra. Según el resultado de la prueba, la productividad de la nueva temporada puede corresponder a uno de tres estados siguientes: (1) buena, (2) regular y (3) mala. A lo largo de los años, el jardinero ha observado que la condición de la tierra del año anterior afecta la productividad del año actual y que la situación se describe mediante una cadena de Markov cuya matriz de transición es la siguiente:

$$P_0=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.50 & 0.30 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Usamos Octave

([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T ⇒

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las probabilidades de transición muestran que la condición de la tierra puede o deteriorarse o permanecer como está, pero nunca mejorar. Utilizando fertilizante puede obtenerse una matriz de transición que refleja mejores condiciones de la tierra:

$$P_1=\begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.60 & 0.30 \\ 0.05 & 0.40 & 0.55 \end{bmatrix}$$

Usamos Octave

([M,D]=eig(P_1)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T ⇒

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6/59 & 31/59 & 22/59 \\ 6/59 & 31/59 & 22/59 \\ 6/59 & 31/59 & 22/59 \end{bmatrix}$$