UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

Diferencias divididas progresivas interpolantes de Newton

Presenta

Carlos Eduardo Sánchez Torres 361075
Alexis Heleodoro Nuñez Vega 360512
Emmanuel Ibarra Patrón 360161
Paola Estefanía López Rodríguez 361820

Profesora

Dra. Selene Solorza Calderón

Curso

Métodos numéricos

18 de junio de 2022

En matemáticas, la interpolación es el proceso de encontrar una función $f(x)$ que coincida en los nodos conocidos o dados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n)), x_0 < ... < x_n$ y estime los nodos desconocidos $f(x), x_0 \leq x \leq x_n$. Si $x < x_0$ y $x > x_n$, se le llama extrapolación.

Hay una infinidad de funciones que solucionan el problema, sin embargo, una de las más útiles, sencillas y bien conocida clase de funciones que mapean el conjunto de reales a sí mismo son los polinomios algebraicos:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_i x_i + ... + a_1 x + a_0, n \geq 0, a_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Además, sabemos que ¡se aproximan uniformemente a funciones continuas! (Teorema de aproximación de Weierstraß), existe y es único. Lo simple es hermoso.

Indocti discant, et ament meminisse periti, existen dos maneras principales (polinomios interpolantes de Lagrange y el método de diferencias divididas de Newton) de conseguir:

$$P_n(x_i) = f(x_i), 0 \leq i \leq n \tag{2}$$

Estos polinomios son conocidos como polinomios interpolantes, en particular, si el polinomio es de grado 1 se le llama interpolación lineal y al de grado 2, cuadrática.

Nos enfocaremos en el método de diferencias divididas hacia adelante o progresivas de Newton. Esto se enmarca en ecuaciones en diferencias, cuya incógnita es una función iterativa o forma cerrada (no recursiva). Por ejemplo, la secuencia de secuencia de Fibonacci recursiva:

$$x(n) = x(n-1) + x(n-2), n \geq 2, x(0) = x(1) = 1 \tag{3}$$

Cuya solución es:

$$x(n) = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{2\phi - 1}, \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{4}$$

Para nuestro caso, Netwon usa la notación Δ, la cual indica el grado de diferencia hacia adelante. Las primeras diferencias se definen como:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) \tag{5}$$

Las segundas diferencias se definen como:

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) \tag{6}$$

En general:

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i), 1 \leq k \leq n \tag{7}$$

Con la diferencias divididas progresivas interpolante de Newton expresamos el polinomio como una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independiente que lo generan. Una base de los polinomios de grado menor o igual a n esta dado por $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, pero hay otras bases infinitas que se puede escoger, en el método de diferencias divididas de Newton se escogen un base asociada a los nodos, esta es:

$$\{1, (x - x_0), (x_x 0)(x - x - 1), ..., (x - x_0) \cdots (x - x_n)\} \tag{8}$$

De tal manera que el polinomio $P_n(x)$ expresado en la base (8) está dado por:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_1(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_n) \tag{9}$$

Entonces el problema se reduce a encontrar los coeficientes a_n. La forma en que estos se encuentran es notando que, si evaluamos el polinomio de manera correcta, es decir en los nodos correctos encontramos dichos coeficientes. Por ejemplo, si evaluamos $P_n(x)$ en x_0, esto es:

$$P_n(x_0) = f(x_0) = a_0 \tag{10}$$

Similarmente podemos encontrar a_1, sabiendo previamente el valor de a_0, así si evaluamos el polinomio en el nodo x_1 obtenemos:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_i)}{x_1 - x_0}, i = 0 \tag{11}$$

Por notación, se expresará los coeficientes a_0. a_1 como:

$$a_0 = f[x_0], a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \tag{12}$$

De tal manera que si tenemos n nodos, entonces (12) lo podemos expresar como la 0 diferencia dividida:

$$a_i = f[x_i], 0 \leq i \leq n \tag{13}$$

La primera diferencia dividida:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, 0 \leq i \leq n \tag{14}$$

La segunda diferencia dividida:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, 0 \leq i \leq n \tag{15}$$

En general, repetimos el proceso hasta la n-ésima diferencia dividida:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{16}$$

Por lo tanto, conseguimos la forma del polinomio interpolante de Newton:

$$\begin{aligned}
&P_n(x) = f[x_0] \\
&+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\
&+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&+ ... \\
&+ f[x_0, x_1, x, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Por ejemplo, para $n = 3$:

x_0	f_0			
x_1	f_1	$f_{0,1}$		
x_2	f_2	$f_{0,2}$	$f_{0,1,2}$	
x_3	f_3	$f_{0,3}$	$f_{0,1,3}$	$f_{0,1,2,3}$

Cuadro 1: Diferencias divididas organizado en una tabla triangular.

Interpolación lineal

Es especial de interés, la interpolación lineal por ser la forma más simple de la interpolación, para este polinomio solo se requieren dos nodos, desde la forma general obtenemos polinomio de grado 1:

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{17}$$

como su nombre sugiere, consiste en encontrar un polinomio en forma de linea recta que une los dos valores, se debe tener cuidado al escoger esta simplificación, dependiendo de la forma que tenga la distribución de los nodos puede que usar esta interpolación resulte en que los valores intermedios que buscamos encontrar tendrán un error muy grande.

Referencias

[1] Burden, Richard L., and J. Douglas Faires. Numerical Analysis. 7th ed. Belmont, CA: Brooks Cole, 2000. ISBN: 0534382169.

[2] "interpolation — mathematics — Britannica," Encyclopædia Britannica. 2022 [Online]. Available: https://www.britannica.com/science/interpolation#ref176960. [Accessed: Apr. 20, 2022]

[3] Rafael, Hugo, and D. Cuevas, "Apuntes de métodos numéricos," Unam.mx, 2017, doi: http://132.248.52.100:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/14199. [Online]. Available: http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/14199. [Accessed: Apr. 20, 2022]