INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
CADENAS DE MARKOV
Práctica de Laboratorio #20
Clases de estados

Nombre: Carlos Eduardo Sánchez Torres   Fecha: 16-11-2021

1. Considere la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .7 & .3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .8 \end{bmatrix}$$

a) Clasifique los estados correspondientes.
El estado 1 transitorio.
El 2,3,5,6 recurrente.
El 4 absorbente y transitorio.

b) Identifique los conjuntos de estados cerrados.

A={1,2,3}
B={4}
C={5,6}

c) ¿Esta cadena es ergódica?
No es ergódica, no cumple el teorema.

2. Para cada una de las siguientes cadenas determine si la cadena de Markov es ergódica. Asimismo, para cada cadena, determine los estados recurrentes, transitorios, periódicos y absorbentes. Para los estados periódicos que existan indique el periodo correspondiente.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & .8 & .2 \\ .3 & .7 & 0 \\ .4 & .5 & .1 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} .2 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .9 & .1 \\ .4 & .5 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sobre P1: los 3 estados se comunican, entonces son estados recurrentes. Además, son aperiódicos. Entonces la matriz es ergódica.

Sobre P2: el estado 1,2,3 es transitorio, el 4 absorbente y aperiódicos. Entonces, no es ergódica.

3. Dada la siguiente matriz

`

$$P = \begin{bmatrix} .8 & .05 & .15 \\ .04 & .9 & .06 \\ .06 & .04 & .9 \end{bmatrix}$$

determine si es ergódica utilizando los dos criterios de ergodicidad vistos.

- Todas sus entradas son positivas, entonces la matriz es regular, por lo tanto, es ergódica.
- Todos los estados de la cadena son recurrentes y aperiódicos entonces la cadena es ergódica.

4. Un museo consta de seis salas de tamaños iguales dispuestas en forma de cuadrícula con tres filas y dos columnas. Cada muro interior tiene una puerta que conecta con las salas adyacentes. Los guardias se desplazan por las salas a través de las puertas interiores.

a) Si los guardias tienden a usar las puertas de cada sala con igual probabilidad encuentre la matriz de transición correspondiente de la cadena de Markov.

Si, tomamos como estado del sistema la puerta interior. Definamos la variable aleatoria:

Xn: la puerta interior i en el desplazamiento n, i=1,2,3,4,5,6

El proceso estocástico {X0,X1,...} es entonces una cadena de Markov con espacio de estados I={1,2,3,4,5,6}, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.0 1/2 0.0 0.0 0.0 1/2
1/3 0.0 1/3 0.0 1/2 0.0
0.0 1/2 0.0 1/2 0.0 0.0
0.0 0.0 1/2 0.0 1/2 0.0
0.0 1/3 0.0 1/3 0.0 1/3
1/2 0.0 0.0 0.0 1/2 0.0
]

b) Clasifique los estados. Si hubiese estados periódicos determine el periodo correspondiente.

Todos los estados son recurrentes y periódicos con t=2. Ninguno es absorbente.

c) Investigue ergodicidad utilizando los dos teoremas disponibles.

- No es una matriz regular, entonces no es ergódica.
- Todos los estados de la cadena son recurrentes y periódicos entonces la cadena NO es ergódica.

1	6
2	5
3	4

5. La ruina del jugador

En el tiempo 0 tengo \$2. En los tiempos 1, 2, … participo en un juego en el que apuesto \$1. Con probabilidad p gano el juego y con probabilidad 1-p pierdo el juego. Mi objetivo es incrementar mi capital a \$4, cuando lo logre, se termina el juego. El juego también se termina si mi capital se reduce a \$0. Si se define X_t como mi capital después de que se juega el juego en el tiempo t, entonces X_0, X_1, X_2, …, X_t, se podría considerar como un proceso estocástico discreto en el tiempo t. Observe que $X_0 = 2$ es una constante conocida, pero X_1, X_2, … con aleatorias. Por ejemplo, con probabilidad p, $X_1 = 3$ y con probabilidad 1-p, $X_1 = 1$. Observe también que si $X_t = 4$, entonces X_{t+1} y las X_t posteriores también serán iguales a 4. De manera similar, si $X_t = 0$, entonces las X_{t+1} posteriores también serán iguales a 0.

a) Usando p = 0.5 determine la matriz de transición correspondiente.

El espacio de estados es S={a0, a1,a2, a3,a4}, con ai="el jugador tiene i dólares". La matriz de transición es como sigue:

P=[

1 0 0 0 0
0.5 0 0.5 0 0
0 0.5 0 0.5 0
0 0 0.5 0 0.5
0 0 0 0 1
]

b) Clasifique los estados. Si hubiese estados periódicos determine el periodo correspondiente.

Los estados a0 y a4 absorbentes. Los estados a1,a2,a3 transitorios con periodo t=2

c) Investigue ergodicidad utilizando los dos teoremas disponibles.
   - No es una matriz regular, entonces no es ergódica.
   - Existen estados periódicos entonces la cadena NO es ergódica.

d) ¿Para qué valores de n, $p_{ii}^{(n)}, i = 2, 3, 4$ toma valores positivos? ¿Tiene esto relación con el periodo?
Si, para valores de n=t,2t,3t,4t, ... donde t=2, pii es positivo. Este es el periodo.