16. Cadenas de Markov

IO 361075 Carlos Eduardo Sánchez Torres

29 de octubre de 2021

1. En una cierta población, al 90 % de los días soleados le siguen días soleados, y al 80 % de los días nublados le siguen días nublados. Con esta información modele el clima de este lugar como una cadena de Markov.

Tomemos como estado del sistema el clima de la población. Definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n : \text{el estado del clima en el día } n. \tag{1}$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{soleado, nublado\}$, la matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. El piso en el que finaliza el viaje del ascensor de un edificio de tres pisos sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten de la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que, si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja. a) Calcule la matriz de transición, b) Dibuje el gráfico asociado. c) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?
Definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n : \text{el piso donde se ubica el ascensor en el viaje } n. \tag{3}$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{0, 1, 2\}$ (los pisos), la matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

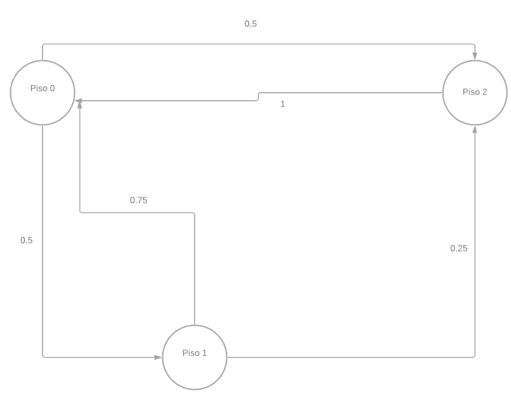

Figura 1: Diagrama de estados.

Usando Octave y

$$L = M^{-1}(D^n)M \tag{5}$$

Además sabemos que la matriz es regular (P^4), así la probabilidad en el largo plazo:

$$p^{(0)}L = p^{(0)} \begin{bmatrix} 8/17 & 4/17 & 5/17 \\ 8/17 & 4/17 & 5/17 \\ 8/17 & 4/17 & 5/17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/17 & 4/17 & 5/17 \end{bmatrix} \tag{6}$$

3. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si duerme un día en B, con probabilidad de un 20 % tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60 % de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último, si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6. a) Si hoy está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días? b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?
Definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n : \text{la ciudad donde pernocta el agente comercial en el día } n. \tag{7}$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{A, B, C\}$ (las ciudades) -cumple la propiedad de Markov porque solo depende del día anterior-, la matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Para la distribución inicial $p^{(0)=[0,0,1]}$ y n=4

$$p^{(0)}P^4 = \begin{bmatrix} 909/5000 & 166/523 & 313/625 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Podemos concluir que $P(X_4 = C|...) = 313/625$

Siendo una matriz regular, usamos Octave ($[M, D] = eig(P)$) y

$$L = (M^T)^{-1}(D^n)M^T \tag{10}$$

Obtenemos

$$L = \begin{bmatrix} 2/11 & 7/22 & 1/2 \\ 2/11 & 7/22 & 1/2 \\ 2/11 & 7/22 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Por lo tanto, los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades es $p^{(0)}L = \begin{bmatrix} 2/11 & 7/22 & 1/2 \end{bmatrix}$

4. Suponga que toda la industria de refresco produce sólo Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90 % de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80 % de que repita la vez siguiente. Se pide: a) Si alguien es actualmente comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy? b) Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora? c) Supongamos que el 60 % de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40 % Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola?

Definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n : \text{el refresco comprado en la compra } n\text{-ésima.} \tag{12}$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{1, 2\}$ (los refrescos) -cumple la propiedad de Markov porque solo depende de la compra anterior-, la matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Para la distribución inicial $p^{(0)} = [1, 0]$ y n=3

$$p^{(0)}P^3 = \begin{bmatrix}781/1000 & 219/1000\end{bmatrix} \tag{14}$$

Podemos concluir que $P(X_3 = 1|...) = 781/1000$

Para la distribución inicial $p^{(0)} = \begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}4\end{bmatrix}$ y n=3

$$p^{(0)}P^3 = \begin{bmatrix}3219/5000 & 1781/5000\end{bmatrix} \tag{15}$$

Podemos concluir que la fracción de compradores que estará comprando Coca Cola $P(X_3 = 1|...) = 3219/5000$.

5. Considere el siguiente modelo para el valor de una acción: al final de un día dado se registra el valor de la acción. Si la acción subió de valor, la probabilidad de que suba también mañana es de 0.7. Si la acción bajó, la probabilidad de que suba mañana es de sólo 0.5. Diga si esta situación puede ser modelada mediante una cadena de Markov y en su caso encuentre las matrices P y L.
Definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n : \text{el estado de la acción en el día } n. \tag{16}$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{\text{la acción sube, la acción baja}$ (el estado de la acción) -cumple la propiedad de Markov porque solo depende del día anterior-, la matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{bmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix} \tag{17}$$

Usamos Octave ($[M, D] = eig(P)$) y

$$L = (M^T)^{-1}(D^n)M^T \tag{18}$$

Obtenemos

$$L = \begin{bmatrix}5/8 & 3/8\\ 5/8 & 3/8\end{bmatrix} \tag{19}$$

6. La situación narrada en el problema anterior se modifica de la manera siguiente: El que la acción suba o no mañana, depende de si subió o no hoy y ayer. En particular, si la acción subió los dos días, la probabilidad de que suba mañana es de 0.9. Si la acción subió hoy pero ayer bajó, mañana subirá con probabilidad de 0.6. Si la acción bajó hoy pero ayer subió, entonces mañana subirá con probabilidad de 0.5. Por último, si bajó los dos días, la probabilidad de que mañana suba es de 0.3. ¿Puede modelarse esta situación con una cadena de Markov? Sugerencia: Si, como en el problema anterior, se define como espacio de estados: la acción sube, la acción baja, no podría ser utilizada una cadena de Markov. Sin embargo, si se definen los estados a0 = la acción subió ayer y subió hoy, a1 = la acción bajó ayer y subió hoy, a2 = la acción subió ayer y bajó hoy, a3 = la acción bajó ayer y bajó hoy sí podría ser utilizada una cadena de Markov para modelar esta situación más compleja. Establezca la matriz de transición P y calcule el matriz límite L.

Este ejemplo demuestra que las cadenas de Markov pueden en realidad incorporar una cantidad arbitraria de "historia" pero a costa de aumentar significativamente el número de estados.

Definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n : \text{el estado de la acción en el día A,B cada } 2n \text{ días.} \tag{20}$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados

$$I = \{(subió, subió), (subió, bajó), (bajó, subió), (bajó, bajó)\} \tag{21}$$

(el estado de la acción cada dos días) -cumple la propiedad de Markov porque solo depende de los dos días anteriores-, la matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{bmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7\end{bmatrix} \tag{22}$$

Usamos Octave ($[M, D] = eig(P)$) y

$$L = (M^T)^{-1}(D^n)M^T \tag{23}$$

Obtenemos

$$L = \begin{bmatrix} 6/7 & 1/7 & 0 & 0 \\ 6/7 & 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 3/8 & 5/8 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Justificación de P:

$$(ayer_1, hoy_1) \rightarrow (ayer_2, hoy_2) : (hoy_1, hoy_2) \tag{25}$$

Entonces

$$p((subió, subió) \rightarrow (subió, suba)) = 0{,}9 \tag{26}$$

$$p((subió, subió) \rightarrow (subió, baje)) = 0{,}1 \tag{27}$$

$$p((bajó, subió) \rightarrow (subió, suba)) = 0{,}6 \tag{28}$$

$$p((bajó, subió) \rightarrow (subió, baje)) = 0{,}4 \tag{29}$$

$$p((subió, bajó) \rightarrow (bajó, suba)) = 0{,}5 \tag{30}$$

$$p((subió, bajó) \rightarrow (bajó, baje)) = 0{,}5 \tag{31}$$

$$p((bajó, bajó) \rightarrow (bajó, suba)) = 0{,}3 \tag{32}$$

$$p((bajó, bajó) \rightarrow (bajó, baje)) = 0{,}7 \tag{33}$$