INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
CADENAS DE MARKOV
Práctica de Laboratorio #19
Tiempos de Retorno

Nombre: CARLOS EDUARDO SANCHEZ TORRES (sanchezcarlosjr.com) Fecha: 03/11/2021

1. En un día soleado, MiniGolf puede tener ingresos de $2000. Si el día está nublado, los ingresos se reducen 20%. Un día lluvioso reducirá los ingresos en 80%. Si hoy está soleado hay 80% de probabilidades de que mañana esté soleado sin amenaza de lluvia. Si está nublado, hay 20% de probabilidad de que mañana llueva, y 30% de probabilidad de que esté soleado. Seguirá lloviendo hasta el día siguiente con una probabilidad de 0.8, pero con 10% de probabilidad de que esté soleado.

Si, tomamos como estado del sistema el estado del clima. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \text{ } el\ estado\ del\ clima\ en\ el\ día\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{soleado, nublado, lluvioso\} = \{1, 2, 3\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.8 0.2 0.0
0.3 0.5 0.2
0.1 0.1 0.8
]

a) Determine los ingresos diarios esperados para MiniGolf.

Las probabilidades de estado estable son precisamente las π_j que se presentaron anteriormente. Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T

$$\pi P = \pi \Rightarrow \pi = [1/2\ 1/4\ 1/4]$$

Entonces, la ganancia diaria esperada será:

$$G = 2000\pi_1 + (2000 * 0.8)\pi_2 + (2000 *.2)\pi_3 = \$1500$$

b) Determina el promedio de días que no estarán soleados.

El promedio de días que no estarán soleados = $\pi_2 + \pi_3 = \frac{1}{2}$

2. A Joe le encanta salir a comer a los restaurantes del área. Sus comidas favoritas son la mexicana, la italiana, la china y la tailandesa. En promedio, Joe paga $10 por una comida mexicana, $15 por una comida italiana, $9 por una comida china y $11 por una comida tailandesa. Los hábitos alimenticios de Joe son predecibles: hay 70% de probabilidad de que la comida de hoy sea una repetición de la de ayer y probabilidades iguales de que cambie a una de las tres restantes.

Tomemos como estado del sistema la comida del área. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \ la\ comida\ del\ \text{área}\ en\ el\ día\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{mexicana,\ italiana,\ china,\ tailandesa\} = \{1, 2, 3, 4\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.70 0.10 0.10 0.10
0.10 0.70 0.10 0.10
0.10 0.10 0.70 0.10
0.10 0.10 0.10 0.70
]

a) ¿Cuánto paga Joe en promedio por su comida diaria?

Las probabilidades de estado estable son precisamente las π_j que se presentaron anteriormente. Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T.

$$\pi P = \pi \Rightarrow \pi = [1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4]$$

Entonces, el costo esperado es:

$$C = 10\pi_1 + 15\pi_2 + 9\pi_3 + 11\pi_4 = \$11.25$$

b) ¿Con qué frecuencia consume Joe comida mexicana?

$$Frecuencia\ de\ comida\ mexicana = \frac{1}{\pi_1} = 4\ días$$

3. Una agencia de renta de automóviles tiene oficinas en Phoenix, Denver, Chicago y Atlanta. La agencia permite rentas en una y en dos direcciones de modo que los automóviles rentados en un lugar pueden terminar en otro. Las estadísticas muestran que al final de cada semana 70% de todas las rentas son en dos direcciones. En cuanto a las rentas en una dirección: desde Phoenix 20% van a Denver; 60% a Chicago y el resto va Atlanta; desde Denver 40% a Atlanta y 60% a Chicago; de Chicago 50% a Atlanta y el resto a Denver; y desde Atlanta 80% va Chicago, 10% a Denver y 10% a Phoenix.

a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

Tomemos como estado del sistema la ubicación de la oficina. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \; la\ ubicación\ en\ la\ semana\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{Phoenix,\ Denver,\ Chicago,\ Atlanta\} = \{1, 2, 3, 4\}$, la matriz de transición está dada por:

P=[
0.70 0.06 0.18 0.06
0.00 0.70 0.18 0.12
0.00 0.15 0.70 0.15
0.03 0.03 0.24 0.70
]

Glosario.

Una dirección. Rentar en una ciudad A para ir a ciudad B. Esta la entendemos por la información siguiente: “En cuanto a las rentas en una dirección: desde … van a ...” (sic).

Dos direcciones. Rentar en una ciudad A para ir a la ciudad B y B a A.

Por tanto, usamos el primer conjunto de definiciones:

$P(Phoenix\ \rightarrow Phoenix) = 0.7$
$P(Phoenix\ \rightarrow Denver) = (1 - 0.7)0.2 = 0.06$
$P(Phoenix\ \rightarrow Chicago) = (1 - 0.7)0.6 = 0.18$
$P(Phoenix\ \rightarrow Atlanta) = 1 - 0.7 - 0.06 - 0.18 = 0.06$
$\cdots$

b) Si la agencia inicia la semana con 100 autos en cada lugar, ¿cómo será la distribución en 2 semanas?

$p = [100\ 100\ 100\ 100]/400 = [1/4\ 1/4\ 1/4\ 1/4]$

$$pP^2 = [97/716\quad 247/1065\quad 285/782\quad 229/854]$$

Estado	p_i	No. de carros.
$Phoenix$	97/716	54

$Denver$	$247/1065$	93
$Chicago$	$285/782$	146
$Atlanta$	$229/854$	107
Total	1	400

c) Si cada lugar está diseñado para manejar un máximo de 110 autos, ¿habría a la larga un problema de disponibilidad de espacio en cualquiera de los lugares?

$$\pi P = \pi$$

Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T.

Estado	π_i	No. de carros.
$Phoenix$	35/1126	12
$Denver$	275/1126	98
$Chicago$	233/563	166
$Atlanta$	175/563	124
Total	1	400

A largo plazo habría un problema en **Denver**, **Chicago** y **Atlanta**.

d) Determine el promedio de semanas que transcurren antes de que un auto regrese a su lugar de origen.

Estado	$1/\pi_i$
$Phoenix$	35
$Denver$	4
$Chicago$	2
$Atlanta$	3

4. Una librería repone las existencias de un libro popular a nivel de 100 ejemplares al inicio de cada día. Los datos de los últimos 29 días proporcionan las siguientes posiciones de inventario al final del día: 1, 2, 0, 3, 1, 0, 0, 3, 0, 1, 1, 3, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 3, 0, 0, 3, 2, 1, 2, 2.

a) Represente el inventario diario como una cadena de Markov.

Tomemos como estado del sistema las posiciones de inventario. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \ la\ posición\ de\ inventario\ en\ el\ día\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, \ldots\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{0, 1, 2, 3\}$, i seguido por j:

	0	1	2	3	Total
0	2	2	1	3	8
1	2	1	2	2	7
2	2	3	1	1	7
3	2	0	4	1	7

Matriz de transición:

	0	1	2	3

0	2/8	2/8	1/8	3/8
1	2/7	1/7	2/7	2/7
2	2/7	3/7	1/7	1/7
3	2/7	0	4/7	1/7

P=[
2/8 2/8 1/8 3/8
2/7 1/7 2/7 2/7
2/7 3/7 1/7 1/7
2/7 0 4/7 1/7
]

b) Determine la probabilidad de estado estable de que la librería se quede sin libros en cualquier día.

$$\pi P = \pi$$

Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T.

$$\pi = [8/29 \quad 413/1914 \quad 259/957 \quad 455/1914]$$

Probabilidad de estado estable de que la librería se quede sin libros en cualquier día es $\pi_1 = 8/29$

c) Determine el inventario diario esperado.

$$Inventario\ diario\ esperado\ = 0\pi_1 + 1\pi_2 + 2\pi_3 + 3\pi_4$$

$$Inventario\ diario\ esperado\ = 1.47$$

d) Determine el promedio de días entre inventarios cero sucesivos.

$$\frac{1}{\pi_1} = 3.625$$

5. Una tienda vende un artículo especial cuya demanda diaria puede ser descrito por la siguiente función de densidad de probabilidad:

Demanda diaria D	0	1	2	3
P(D)	0.1	0.3	0.4	0.2

La tienda pide hasta tres unidades cada 3 días si el nivel de las existencias es menor que 2; de lo contrario, no se pide ninguna unidad. El costo fijo por ordenar, por envió es de $300, y el costo de retener las unidades excedentes por unidad y por día, es de $3. Se espera una entrega inmediata.

Tomemos como estado del sistema la existencia D. Definamos la variable aleatoria:

$$X_n: \ las\ existencias\ del\ inventario\ en\ el\ día\ n.$$

El proceso estocástico $\{X_0, X_1, ...\}$ es entonces una cadena de Markov con espacio de estados $I = \{0_A, 1, 0, 1_A, 2, 3\}$.

Note que la demanda (D) es contraria a la existencia (E): $3 \geq E - D \geq 0$
El caso de memoria (cada tres vuelve a 3):

$$P(3 -> 0) = 0.1$$
$$P(0 -> 0_A) = 1$$
$$P(0_A -> 3) = 1$$

Si la existencia es menor no puede aumentar hasta que se cumpla la política:

$$P(2 -> 3) = 0$$
$$P(0 -> 1) = 0$$
$$P(1 -> 2) = 0$$

La matriz de transición es:

	0	0_A	1	1_A	2	3
0	0	1	0	0	0	0
0_A	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1_A	0	0	0	0	0	1
2	0.4	0	0.3	0	0.3	0
3	0.2	0	0.4	0	0.3	0.1

P=[

0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0

0.4 0.0 0.3 0.0 0.3 0.0
0.2 0.0 0.4 0.0 0.3 0.1
]

a) ¿Cuál es el costo diario total esperado de pedir y retener?

$$\pi P = \pi$$

Para determinarlas usamos Octave ([M,D]=eig(P)) y L=(M^T)^{-1}(D^n)M^T.

	π_i	Costo
0	13/113	0
0_A	13/113	300*13/113=34.5
1	37/226	3*1*37/226=0.49
1_A	37/226	(3+300)*37/226=49.60
2	15/113	3*2=6
3	35/113	3*3=9
Total		99.59

b) Calcule el promedio de días entre agotamientos sucesivos del inventario.
Agotamiento sucesivo: $\{0,\ 0_A\}$

El promedio de agotamiento sucesivo es igual a $1/\pi_1 = 8.69$