Помеченные К.О. и экспоненциальные производящие функции

$a_0 \; a_1 \; a_2 \dots a_n \dots$ $\qquad A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$

ЭПФ $\qquad A(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} t^n + \dots$

Пример $\quad 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

ОПФ: $\frac{1}{1-t}$

Э.ПФ. $1 + 1t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n = e^t = \exp(t)$

$1, 1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots \qquad a_n = n!$

ОПФ $\quad 1 + t + 2t^2 + 6t^3 + 24t^4 + \dots + n!\, t^n + \dots$ — нечто непонятное

ЭПФ: $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$

Это все для того, чтобы можно было записать производящую функцию для некоторых других последовательностей

$a_0 \; a_1 \; a_2 \dots a_n \dots$

ЭПФ $\qquad A(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} t^n + \dots$

$b_0 \; b_1 \; b_2 \dots b_n \qquad B(t) = \frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!} t + \frac{b_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{b_n}{n!} t^n + \dots$

$C(t) = A(t) \pm B(t) \qquad c_n = a_n \pm b_n$

$C(t) = A(t) \cdot B(t) \qquad \frac{c_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n b_{n-k}$

$C = (\underset{k}{A}, \underset{n-k}{B})$ $\qquad \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$ раздаём пометки $\binom{n}{k}$ способами

$C(t) = \frac{A(t)}{B(t)} \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} + b_0 \cdot c_n$

$b_0 \neq 0 \qquad c_n = \frac{a_n - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k}}{b_0}$

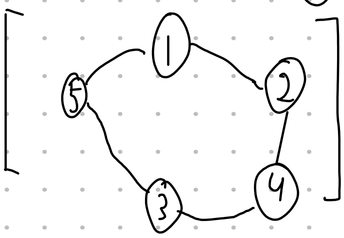
Перестановки $(1, 2, 3, 5, 4)$ $\quad P_n = n!$

1, 1, 2, 6, 24, ... ЭПФ $\dfrac{1}{1-t}$

Пустые графы $\{ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \}$ $\quad E_n = 1$

1, 1, 1, ... $\exp(t)$

Циклы



направление обхода важно $\Rightarrow C_n = (n-1)! = \dfrac{n!}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n} \cdot \frac{1}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}$$

1) Дизъюнктное объединение

$A \quad B \qquad A \cap B = \varnothing \qquad C = A \cup B \qquad c_n = a_n + b_n \qquad C(t) = A(t) + B(t)$

2) Пара (произведение)

$$\boxed{C(t) = A(t)B(t)}$$

$A \quad B \qquad C = A \times B \qquad A = [1, 2] \qquad B = [1, 2, 3]$

$C = \{ \langle \underbrace{a}_{k \text{ атомов}} \in A, \underbrace{b}_{n-k \text{ атомов}} \in B \rangle \}$

$(3\ 5) \to 1\ 2 \qquad (1\ 2\ 4) \to 1\ 2\ 3$

Одной паре помеченных объектов соотв.

$\binom{n}{k}$ корр. перенумераций

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

$\underbrace{c_1\ c_2 \ldots}\underbrace{\ldots c_n}$ корректная перенумерация

$c_1 \ldots c_k \qquad c_{k+1} \ldots c_n$

$\downarrow \qquad\qquad \to$

$d_1 \ldots d_k \qquad e_1 \ldots e_{n-k}$

$d_i = |\{ c_j \mid 1 \le j \le k, c_j \le c_i \}| \qquad e_i = |\{ c_j \mid k+1 \le j \le n, c_j \le c_{i+k} \}|$

$d_i = a_i \qquad\qquad e_i = b_i$

$\langle [1 \quad 2] \ [1 \quad 2 \quad 3] \rangle$

перестановки: $\dfrac{1}{1-t} \to C(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2} \qquad [t^n] \dfrac{1}{(1-t)^2} = n+1 \Rightarrow \underline{C_n = (n+1)n!}$

$\overbrace{[1\ 2\ 3 \mid 5\ 4\ 6]}^{n}$ $\leftarrow$ n+1 мест

3) Последовательность

$\text{Seq}\, A = [\,] + A \times \text{Seq}\, A \qquad C(t) = 1 + A(t)\, C(t) \qquad C(t) = \dfrac{1}{1 - A(t)}$

$\mathcal{U} = \{0\} \qquad \mathcal{U}(t) = t \qquad \text{Seq}\, \mathcal{U} = P \qquad P(t) = \dfrac{1}{1-t}$

$[1\ 2\ 3\ 5\ 4]$

4) Set $\quad Set\, A = \bigcup_{k=0}^{\infty} Set_k A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(t)^k}{k!} = e^{A(t)}$

Perm × Perm

атом

$Set_k A$ - мн-ва, содержащие k объектов

$B_k = Seq_k A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k} \qquad B_k(t) = A(t)^k$

$C_k \quad Set_k A = Seq_k A/\sim \qquad [x_1 x_2 \dots x_k] = [y_1 y_2 \dots y_k]$

$\exists$ перестановка π: $x_i = y_{\pi[i]}$

$C_k(t) = \frac{1}{k!} B_k(t) = \frac{A(t)^k}{k!}$

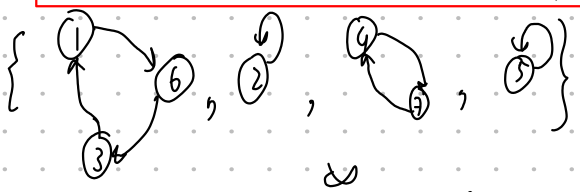
$U(t) = t \quad U = \{0\} \quad Set\, U = E \quad E(t) = e^t$

пустые графы

циклы

$B = Set\, Cyc\, U$

$\boxed{B(t) = e^{C(t)} = e^{\ln\frac{1}{1-t}} = \frac{1}{1-t}}$ → ЭПФ для перестановок



4) $Cyc\, A = \bigcup_{k=1}^{\infty} Cyc_k A \qquad C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A(t)^k = \ln \frac{1}{1-A(t)}$

$Cyc_k A$ - циклы длины k (не вес)

$Cyc_k A = Seq_k A/\sim$

равны с точностью до цикл. сдвига

$[x_1 \dots x_k] \sim [y_1 \dots y_k]$

$\exists i : x_j = y_{(i+j)\%k+1}$ | $C_k(t) = \frac{1}{k} A(t)^k$

$U \quad Cyc\, U = \ln\frac{1}{1-t} \qquad Set\, Cyc\, U = P$

$\boxed{Set\, Cyc\, A \cong Seq\, A}$

1) $A + B \qquad A(t) + B(t)$
2) $A \times B \qquad A(t) \cdot B(t)$
3) $Seq\, A \qquad \frac{1}{1-A(t)}$
4) $Set\, A \qquad e^{A(t)}$
5) $Cyc\, A \qquad \ln\frac{1}{1-A(t)}$

перест $\frac{1}{1-t}$

пуст. граф e^t

цикл $\ln\frac{1}{1-t}$

Теорема (о подстановке)

A – помеченные к.о. $A(t)$

B – помеченные к.о. $B(t)$

$A[B(t)]$ Вместо каждого атома подставляем к.о. B, перенумеровываем полученные атомы произвольным образом

$$C(t) = A(B(t))$$

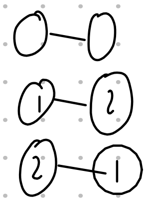
$A \times A$

$\downarrow$

$A^2(t)$

Пара атомов

их две



$$B(t) = t^2 = \frac{2!}{2!} \cdot t!$$