ПФ для рег. языков

L - рег. язык

$|L \cap \Sigma^n| = a_n$

$a_0, a_1, a_2, \dots$

$L(t) = a_0 + a_1 t + \dots$

L - рег. спецификация

ψ - рег. выр.: 1) $L(\psi) = L$

2) $\forall x \in L \ \exists!$ способ x удовл. ψ

$\cancel{ab^* | a^*b}$ $\quad ab$

$(ab^*)^*$ - рег. спецификация $L[(ab^*)^*]$

1 (Утв) Σ - кон. алф $L \subset \Sigma^*$

L рег. специфик. $\Longleftrightarrow$ L получ. из элем. Σ 1) дизъюнктн. объед. $+$

2) прямое произв. $\times$

3) применение Seq

$\{a\} \times \{b\} = \{ab\}$

$\mathrm{Seq}\{a\} = \varepsilon, a, aa, \dots = a^*$

$ab^* | a^*b$ — не является рег. специфик.

$a \times \mathrm{Seq}\, b$

$\mathrm{Seq}\, a \times b$

$\Rightarrow$

$\alpha \| \beta$	$\alpha + \beta$
$\alpha\beta$	$\alpha \times \beta$
α^* $\ \varepsilon \notin L(\alpha)$	$\mathrm{Seq}\,\alpha$
ε	ε $\ \varepsilon\varepsilon$

$\Leftarrow$ казалька. не доказали.

T у L $\exists$ рег. спецификация $\Rightarrow$ у L дробно-рац. ПФ.

T (П. Ф. регулярного языка)

L - рег. язык над Σ, расп. ДКА A

Сост. Q, $|Q| = n$ $\quad s \in Q$ - старт

$T \subset Q$ - терм.

$u = (\overbrace{0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots 0}^{n})$, 1 на месте s

$v = (\underbrace{0, 1, 0, 1, \dots, 1, 0}_{T})^T$

$D = (d_{ij}) \quad d_{ij} = |\{c \mid i \xrightarrow{c} j\}|$

$L(t) = \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v}$

D L_i = {мн-во строк, ведущих из i в терм. состояние}

$L_i = \{\varepsilon \mid \text{если } i \in T\} \cup \bigcup_{c \in \Sigma} c \cdot L_{\delta(i,c)}$

$$\begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ \vdots \\ L_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + tD \begin{pmatrix} L_1(t) \\ \vdots \\ L_n(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{L}(t) = \vec{v} + tD\vec{L}(t)$

$(I - tD)\vec{L} = \vec{v} \qquad \vec{L} = (I - tD)^{-1}\vec{v}$

$\boxed{L_s(t) = \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v}}$

$(I-tD)^{-1}$ форм. ст. ряд $\det(I-tD)$ имеет св. член $\ne 0$

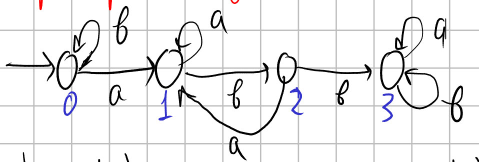
$$L\begin{vmatrix} (1-td_{11}) & -td_{12} & & -td_{ij} \\ & (1-td_{22}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-td_{nn}) \end{vmatrix}$$

какой-то многочлен

$$\prod_i (1-td_{ii}) = 1 + tp$$

$$\sum_{\pi} (-1)^{sign(\pi)} \prod \dots$$

Пример сод abb как подстроку



$$L_0 = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^3)}$$

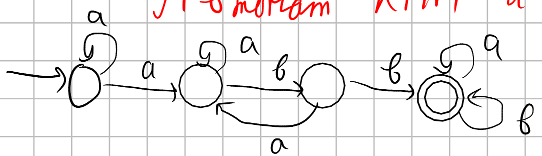
$\varphi^n \sim F_n$

$$\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-t & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & -t & 0 \\ 0 & -t & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1-2t \end{vmatrix}$$

Автомат КМП и автокорр. многочлен

автокорреляционный



Конструкция Гуибаса-Одлызко

$$p \quad \overset{1}{p_1}\ \overset{2}{p_2} \dots \overset{k}{p_k}$$

$(c_0\ c_1 \dots c_{k-1})$

$c_i = [p[i+1..k] = p[1..k-i]]$

$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{k-1} t^{k-1}$

$p =$ aabbaa

$C = (\underset{0}{1}, \underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \underset{3}{0}, \underset{4}{1}, \underset{5}{1})$

$1 + t^4 + t^5$

I $(\Gamma, O,)$ Σ, $|\Sigma| = m$

S_n — #слов длины n, не сод. p

$S(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \dots$

$$S(t) = \frac{c(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$$

D • S — мн-во строк, не сод. p

• T — мн-во слов, сод. p ровно 1 раз в конце

Част. случ.

$T = Sp$, если у p нет бордера. $c(t) = 1$

$T + S = S\Sigma + \varepsilon$

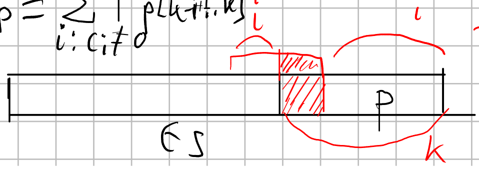
$Sp + S = S\Sigma + \varepsilon$

$St^k + S = S \cdot mt + 1$

$$S = \frac{1}{1 - mt + t^k}$$

$T + S = S\Sigma + \varepsilon$

$Sp = \sum_{i: c_i \ne 0} T p^{[k-i+1..k]}$



t^i есть в $c(t)$

$\to$

$T + S = St + 1$

$$T = \frac{St^k}{c(t)}$$

$St^k = Tc(t)$

$$S\left(1 + \frac{t^k}{c(t)} - mt\right) = 1$$

$$S = \frac{c(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$$

Пентагональная формула Эйлера

$p_0\ p_1,\ p_2,\ p_3, \dots\ p_n \dots$

p_n – кол-во разбиений n на слаг. $\in \mathbb{N}$
порядок не важен

$U = \{o\} \quad U_1 = 1 \quad U(t) = t$

$N = Seq^+ U$ = натур. числа $\quad \frac{t}{1-t} \quad n_1 = n_2 = \dots = 1$

$P = MSet\, N \qquad P(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}$

$Q(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-t^k)$

$R(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+t^k) \quad [t^n]R \to r_n$

r_n – количество разбиений на разл. слаг-е

$$[t^n]R = \sum_{\substack{\text{разб. } n \text{ на} \\ \text{разл. слаг-е}}} 1$$

$$[t^n]Q = \sum_{\substack{\text{разб. } n \text{ на} \\ \text{разл. слаг-е}}} (-1)^{\#\text{слагаемые}}$$

$q_n = e_n - o_n$

e_n – # разб. на чётн. # разл. слагаемых

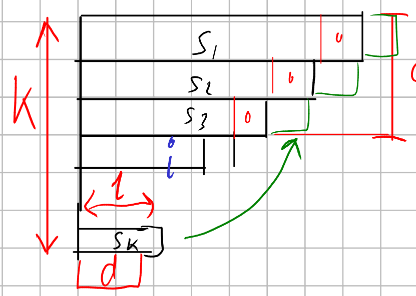
o_n — ~ || — нечётн.

Т $\quad Q(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(t^{\frac{3k^2-k}{2}} + t^{\frac{3k^2+k}{2}}\right)$

Л $\quad$ если $n \neq \frac{3k^2 \pm k}{2}$, то $e_n = o_n$

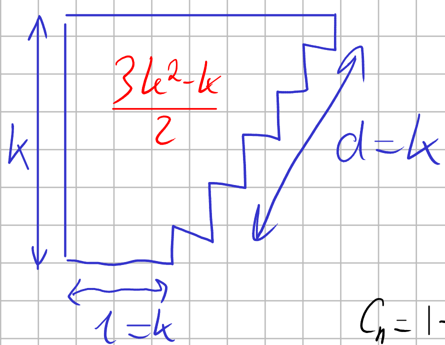
$n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, то $e_n = o_n + (-1)^k$

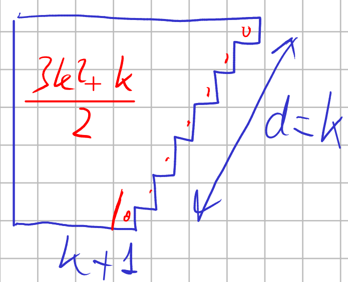
$n = s_1 + s_2 + \dots s_k, \quad s_i > s_{i+1}$



$d < 1$

$1 < d$





$C_n = 1 - \sum q_i c_{n-i}$