ПФ для рег. языков

L - рег. язык

$|L \cap \Sigma^n| = a_n$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$

$L(t) = a_0 + a_1 t + \ldots$

L - рег. спецификация

ψ - рег. выр.: 1) $L(\psi) = L$

2) $\forall x \in L$ $\exists!$ способ x удовл. ψ

$\cancel{ab^* | a^* b}$ $\quad ab$

$(ab^*)^*$ - рег. спецификация $L[(ab^*)^*]$

1 (Утв) Σ - кон. алф $L \subset \Sigma^*$

L рег. специфик. $\Leftrightarrow$ L получ. из элем. Σ 1) дизъюнктн. объед. $+$

2) прямое произв. $\times$

3) применение Seq

$\{a\} \times \{b\} = \{ab\}$

$Seq\{a\} = \varepsilon, a, aa, \ldots = a^*$

$ab^* | a^* b$ — не является рег. специфик.

$a \times Seq\, b$

$Seq\, a \times b$

$\Rightarrow$ $\qquad\qquad$ $\Leftarrow$

$\alpha | \beta \qquad \alpha + \beta$

$\alpha\beta \qquad \alpha \times \beta$

$\alpha^* \qquad Seq\,\alpha$

$\varepsilon \notin L(\alpha)$

$\varepsilon \qquad \varepsilon$

$\varepsilon\varepsilon$

Касаемо, не доказали.

T У L $\exists$ рег. спецификация $\Rightarrow$ у L дробно-рац. ПФ.

T (П. Ф. регулярного языка)

L - рег. язык над Σ, расп. ДКА A

Сост. Q, $|Q| = n$ $\quad s \in Q$ - старт.

$T \subset Q$ - терм.

$u = (\overbrace{0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots 0}^{n})$, 1 на позиции s

$v = (\underbrace{\overbrace{0, 1, 0, 1, \ldots, 1, 0}^{n}}_{T})^T$

$D = (d_{ij}) \qquad d_{ij} = |\{c \mid i \xrightarrow{c} j\}|$

$L(t) = \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v}$

D L_i = {мн-во строк, ведущих из i в терм. состояние}

$L_i = \{\varepsilon \mid \text{если } i \in T\} \cup \bigcup\limits_{c \in \Sigma} c \cdot L_{\delta(i,c)}$

$$\begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ \vdots \\ L_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + tD \begin{pmatrix} L_1(t) \\ \vdots \\ L_n(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{L}(t) = \vec{v} + tD\vec{L}(t)$

$(I - tD)\vec{L} = \vec{v} \qquad \vec{L} = (I - tD)^{-1}\vec{v}$

$\boxed{L_s(t) = \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v}}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cdot d_{11} + L_2 \cdot d_{12} \\ L_1 \cdot d_{21} + L_2 \cdot d_{22} \end{pmatrix}$$

$(I-tD)^{-1}$ форм. ст. ряд $\det(I-tD)$ имеет св. член $\neq 0$

Формула Крамера
Док-ть, что на её определ. можно делить (св. член $\neq 0$)

$$L\begin{vmatrix} (1-td_{11}) & -td_{12} & & -td_{ij} \\ & (1-td_{22}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-td_{nn}) \end{vmatrix}$$

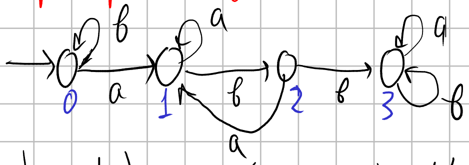
конст-то многочлен

$$\prod_i (1-td_{ii}) = 1+tp$$

$$\sum_{\pi} (-1)^{\operatorname{sign}(\pi)} \prod \ldots$$

∎

Пример сод abb как подстроку



$$L_0 = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^3)}$$

J^n-F_n

Знаменатель ∃ одаёт φ

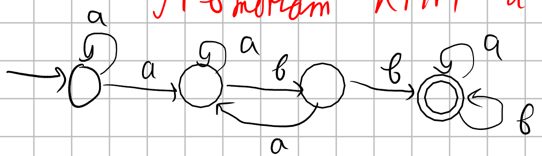
определителя

$$\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-t & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & -t & 0 \\ 0 & -t & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1-2t \end{vmatrix}$$

Автомат КМП и автокорр. многочлен

автокорреляционный



Конструкция Гуибаса-Одлызко

p $\overset{1}{p_1}\ \overset{2}{p_2} \ldots \overset{k}{p_k}$

$(c_0\ c_1 \ldots\ c_{k-1})$

$c_i = [p[i+1..k] = p[1..k-i]]$

$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{k-1} t^{k-1}$

$p =$ aabbaa

$C = (\underset{0}{1}, \underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \underset{3}{0}, \underset{4}{1}, \underset{5}{1})$

$1 + t^4 + t^5$

$c_i = [p[1..k-i] = p[i+1..k]]$

abb $\Rightarrow \dfrac{1}{t^3 + (1-2t)\cdot 1} = \dfrac{1}{1-2t+t^3}$

$\dfrac{1}{(1-t)(1+t-t^2)}$

I (Г.О.) Σ, $|\Sigma| = m$

S_n – #слов длины n, не сод. p

$S(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \ldots$

$$S(t) = \frac{c(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$$

D
- S – мн-во строк, не сод. p
- T – мн-во слов, сод. p ровно 1 раз в конце

Частн. случ.

$T = Sp$, если у p нет бордера. $c(t) = 1$

$T + S = S\Sigma + \varepsilon$

$Sp + S = S\Sigma + \varepsilon$ $\qquad S = \dfrac{1}{1-mt+t^k}$

$St^k + S = S\cdot mt + 1$

$T + S = St + 1$ $\qquad T = \dfrac{St^k}{c(t)}$

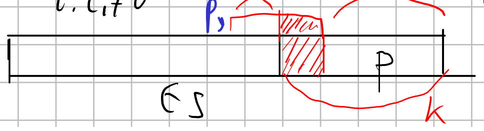
$St^k = Tc(t)$

$S\left(1 + \dfrac{t^k}{c(t)} - mt\right) = 1$

$$S = \frac{c(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$$

$T + S = S\Sigma + \varepsilon$

$Sp = \sum_{i:\, c_i \neq 0} T p[k-i+1..k]$



t^i есть в $c(t)$ $\to$

Пентагональная формула Эйлера

$p_0\ p_1, p_2, p_3, \dots p_n \dots$

p_n - кол-во разбиений n на слаг. $\in \mathbb{N}$ порядок не важен

$U=\{o\}$ $U_1=1$ $U(t)=t$

$N=Seq^+U=$ пол. цел. числа $\frac{t}{1-t}$ $n_1=n_2=\dots=1$

$P=MSetN$ $P(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^k}$

$Q(t)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k)$

$R(t)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+t^k)$ $[t^n]R \to r_n$

r_n - количество разбиений на разл. слаг-е

$[t^n]R=\sum_{\substack{\text{разб. } n \text{ на} \\ \text{разл. слаг-е}}} 1$

$[t^n]Q=\sum_{\substack{\text{разб. } n \text{ на} \\ \text{разл. слаг-е}}} (-1)^{\#\text{слагаемые}}$

$q_n=e_n-o_n$

e_n - # разб. на чётн. # разл. слагаемых

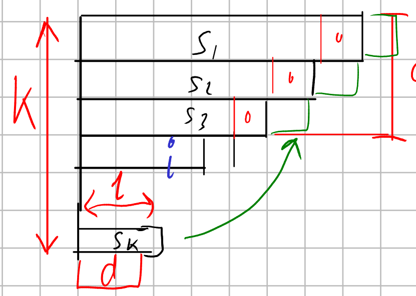
o_n — —//— нечётн.

Т $Q(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(t^{\frac{3k^2-k}{2}}+t^{\frac{3k^2+k}{2}}\right)$

Д если $n\neq\frac{3k^2\pm k}{2}$, то $e_n=o_n$

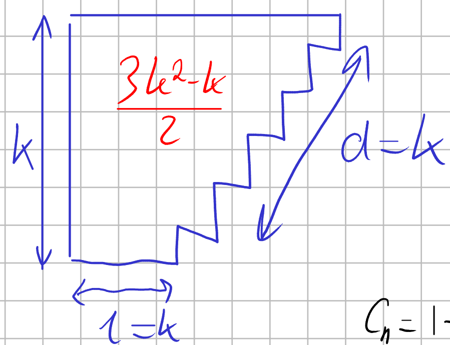
$n=\frac{3k^2\pm k}{2}$, то $e_n=o_n+(-1)^k$

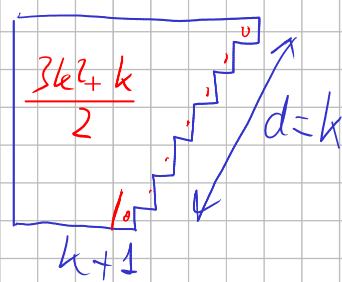
$n=S_1+S_2+\dots S_k,\ S_i>S_{i+1}$



$d<l$

$l<d$





$C_n=1-\sum q_i\,c_{n-i}$