Теория вычислимости.

Что можно решить на компьютере?

$\Sigma \quad \Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$

$L \subset \Sigma^*$ - формальный язык

<u>Опр.</u> L - разрешимый (рекурсивный)

$\exists$ программа p, такая что $x \in L \Rightarrow p(x) = 1$

$x \notin L \Rightarrow p(x) = 0$

```
p(x)
| while True;
  return 0
```

— не задаёт никакой язык

<u>Зам.</u> Мн-во разрешимых языков счётно

(мн-во программ счётно)

<u>Зам.</u> $|L| < +\infty \Rightarrow L$ - разр.

```
p(x):
  when(x)
    x1 → true
    x2 → true
    ⋮
    xn → true
    else → false
```

<u>Зам.</u>

2^{Σ^*} несчётно

<u>Опр.</u> L - полуразрешимый (перечисл., рек. перечисл.)

$\exists$ прогр. p $\quad x \in L \Rightarrow p(x) = 1$

$x \notin L \Rightarrow p(x) \neq 1$ - может не завершится

<u>Зам.</u> Мн-во полуразрешимых языков счётно

<u>Утв.</u> Разреш. $\Rightarrow$ Полуразреш.

$\Sigma^* \leftrightarrow \mathbb{N}^+ \leftrightarrow \mathrm{Prog}$ - градуированный лексикограф.

Считаем, что программа и строки - одно и то же

Некомпилирующаяся пр-ма <-> зависает на любом вводе

арифм. опер,
if / while / for
Вызов функций — допустимые операции

P   x
ЗАПУСТИТЬ p на x
ЗАПУСТИТЬ p на x с $TL = t$
$ML = m$

Опр. L - перечисл.
$\exists p$: на пустом входе выводит все слова L
$\forall x \in L \; \exists t(x) : P|_{TL=t}$ выведет x

Пример.
```
zeros()
    for(i=0; true, i++)
        s = "0" * i
        print(s)
```

$\underline{\underline{\text{I}}}$ L-перечисл $\Rightarrow$ L полуразреш.
пусть listL() - перечисл. L
```
inL(x)
    run listL() in thread
    if x is printed
        return 1
    (return 0)
```

$\underline{\underline{\text{I}}}$ L - полуразрешим $\Rightarrow$ L-перечислим
inL() - п/разреш. L

1)
```
listL()
    for (x ∈ Σ*)
        if inL(x):
            print(x)
```

2)
```
listL()
    for (t=0; true; t++)
        for (x ∈ Σ*)
            if inL(x)|TL=t
                print(x)
```
— 2 вход. бесконечн фор а

Правильный вариант:
```
listL()
    for(t=0; true; t++)
        for(x ∈ Σ*[0..t-1])
            if inL(x)|TL=t
                print(x)
```

Кодировать пару $\langle x, y \rangle$ $\langle 0101, 11 \rangle \longmapsto 0011\,0011\,|01|\,1\,1$

$U = \{ \langle p, x \rangle \mid$ программа $p(x) = 1 \}$
Универсальный язык
Утв. U - полуразрешим
Тьюринг-полный

Т U − неразрешим

$\exists$ $inU(\langle p,x\rangle)$ разрешает U

```
q(x)
    if inU(<x,x>)
        return 0
    else
        return 1
```

q не зависает

$q(q)$?

$inU(\langle q,q\rangle)=0 \Rightarrow \langle q,q\rangle \notin U \Rightarrow q(q)\neq 1$; $\quad inU(\langle q,q\rangle)=0 \Rightarrow q(q)=1$

$inU(\langle q,q\rangle) = 1 \Rightarrow \langle q,q\rangle \in U \Rightarrow q(q)=1$; $\quad inU(\langle q,q\rangle) = 1 \Rightarrow q(q)=0$

A, B разр.

$A \cup B$ разр. $\quad A \cap B$ разр. $\quad \overline{A} = \Sigma^* \setminus A$ − разр.

A, B полуразр.

$A \cup B \qquad A \cap B$ ✓ $\qquad \overline{A}$

в двух потоках

или с таймером

for $t=0..+\infty$

  if$(inA|_{TL=t} \vee inB|_{TL=t})$ return 1

Т L и $\overline{L}$ оба полуразреш. $\Rightarrow$ L − разреш.

$\widetilde{inL}(x)$

  for $t=0..+\infty$

    if $inL(x)|_{TL=t}$ return 1

    if $in\overline{L}(x)|_{TL=t}$ return 0

Следствие $\overline{U}$ не полуразрешим

$p \mapsto \quad x_0\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n \dots$

$\qquad\quad 0\ 1\ 1\ 001\ 01\dots$

Т 1) код не зависает

2) $\forall$ разрешимых языка расп. 1 из кодов

3) $\langle p,x\rangle \longmapsto p(x)$ является вычислимой

Нельзя выполнить все 3 свойства (придумать систему кодов)

Д-во

	x_0	x_1	x_2	....	x_i
c_1	0	0			
c_2	1	1			
c_3					
$\vdots$					
c_i					0
$\vdots$					

$A = \{i \mid c(x_i)=0\}$

$c_i \equiv i \equiv x_i$