1) Скобки

Так же, как и в ИВ, но есть еще кванторы

$\forall$, $\exists$ имеют наименьший приоритет

$\forall x.\ A \& B \& \forall y.\ C \& D \vee \exists z.\ E$

$\forall x.\left(A \& B \& \forall y.\left(C \& D \vee \exists z.(E)\right)\right)$

$$\frac{\varphi \to \psi}{(\exists x. \varphi) \to \psi} \qquad \frac{\psi \to \varphi}{\psi \to (\forall x. \varphi)}$$

← скобки для Правил

$\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x.(\varphi \to \psi)}$ — не правило, но доказуемо

Опр. $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ — док-во

если α_i — акс.

либо сущ. j, k, что $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$

либо сущ. j: $\alpha_j = \varphi \to \psi$

и $\alpha_i = (\exists x. \varphi) \to \psi$

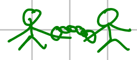
причём x не вх. своб. в ψ

либо сущ. j: $\alpha_j = \psi \to \varphi$

и $\alpha_i = \psi \to \forall x. \varphi$

причём x не вх. св. в ψ

(1) Вхождение



$$\left(P(\underset{1}{x}) \vee Q(\underset{2}{x})\right) \to \left(R(\underset{3}{x}) \& \overline{(\forall \underset{4}{x}.\ P_1(\underset{5}{x}))}\right)$$

связанное вхождение

свободные

связывающее вхождение

$$\underbrace{\forall x. \forall y. \underbrace{\forall x. \forall y. \overline{\forall x. P(x)}}}$$

связано

Вхождение свободно, если не связано

Перемменная входит свободно, если сущесвтует ее свободное вхождение

Срезать углы мы можем в русском языке, в заменителях (метапеременных).
Мы не имеем права резать углы во всем, что связано с предметным языком.

Ограничения под формулу проверять после того, как подставили предметные переменные

То есть если хотим доказать схему для формулы, то можно поставить ограничения, при которых формула будет верна.

$\alpha_1 \quad x=0 \to x=0$

$\alpha_2 \quad (\exists x. x=0) \to x=0$ не доказано!

(n) $x=0 \to y=0$ (?)

(n+1) $(\exists x, x=0) \to y=0$

(пр. $\exists$ n)

Есть волшебная фраза: возьмем свежую (fresh) переменную. Она никуда не будет входить

④ Свобода для подстановки

- Θ свободен для подстановки вместо x в φ, если никакая (своб.) перем. в Θ не станет связанной в $\varphi[x:=\Theta]$

$\varphi[x:=\Theta]$ – берем все свободные вхождения x и заменяем на Θ

Пример когда Θ не своб. для подст.

$(\forall y.\ x=y)\ [x:=\underset{\Theta}{y}] \equiv \forall y. \underset{\Theta}{\boxed{y}}=y$ ← стало связанным

$Fv(\Theta)=\{y\}$

Пример 2)

$P(x) \& \forall y. x=y\ [x:=\boxed{y}+z] \equiv P(y+z) \& \forall y$

$\boxed{y}+z=y$

← связанное

Лемма пусть $\vdash \alpha$

Тогда $\vdash \forall x. \alpha$

Док-во

① Т.к. $\vdash \alpha$, то сущ. $\gamma_1 \dots \gamma_n$: $\gamma_n = \alpha$

(1) γ_1

$\vdots$

(n) $\gamma_n\ (\equiv \alpha)$

(n+1) $A \& A \to A$ (акс.)

(n+2) $\alpha \to ((A \& A \to A) \to \alpha)$

(n+3) $(A \& A \to A) \to \alpha$ // M.P. n, n+2

(n+4) $(A \& A \to A) \to \forall x. \alpha$ // вв. $\forall$, n+3

(n+5) $\forall x. \alpha$ (M.P. n+1, n+4)

Теорема о дедукции

Пусть зад. Γ, α, β

(1) Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$,
при условии, если в док-ве
для $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ не применялись правила $\forall, \exists$ по перем., вх. свободно в α

(2) Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

- док-во (2) аналогично (полностью) исходно для И.В.

Δ $\qquad$ Δ'

δ_1 $\qquad$ $\alpha \to \delta_1$

$\vdots$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\vdots$

δ_n $\qquad$ (n) $\alpha \to \delta_n$

δ_{n+1} $\qquad$ (n+1) $\alpha \to \delta_{n+1}$

Пусть $\alpha \to \delta_1$
$\alpha \to \delta_n$ - доказаны

Докажем $\alpha \to \delta_{n+1}$

Рассм. случаи:

(1) сх. акс. 1-10 - анал.

(2) М.Р. - анал.

(3) Акс. 11-12 - анал.(1)

(4) Пусть δ_{n+1} получено в правиле $\forall$

$\delta_{n+1} \equiv \varphi \to \forall x. \psi$ и сущ. $\delta_k \equiv \varphi \to \psi$ $(k \leq n)$

Причём x не вх. св. в φ

При этом $\alpha \to \delta_k$ доказано в Δ'

Докажем $\alpha \to \varphi \to \forall x. \psi$

Лемма: $(\alpha \to \varphi \to \psi) \to \alpha \& \varphi \to \psi$

Лемма: $(\alpha \& \varphi \to \psi) \to (\alpha \to \varphi \to \psi)$

Док-во: Т. о полноте И.В.

(k) $\alpha \to (\varphi \to \psi)$

(n) $\alpha \to \delta_n$

$\vdots$

(n+0.1) $(\alpha \to \varphi \to \psi) \to (\alpha \& \varphi \to \psi)$ лемма

(n+0.2) $\alpha \& \varphi \to \psi$ (М.Р.)

(n+0.3) $\alpha \& \varphi \to \forall x. \psi$ (вр. $\forall$)

(n+0.4) $(\alpha \& \varphi \to \forall x. \psi) \to (\alpha \to \varphi \to \forall x. \psi)$ (л.2)

(n+1) $\alpha \to \varphi \to \forall x. \psi$ (М.Р.)