Производящая функция Дирихле

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \frac{1}{n^s} + \dots$$

$a_1, a_2 \dots a_n$

$$A(s) = \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \dots + \frac{a_n}{n^s} + \dots$$

$$\frac{1}{1-t} \leftrightarrow e^t \leftrightarrow \zeta(s)$$

$$A(s) \pm B(s) = C(s)$$

$$c_n = a_n \pm b_n$$

$$A(s) \cdot B(s) = C(s)$$

$$\left(\frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots\right)\left(\frac{b_1}{1^s} + \frac{b_2}{2^s} + \dots\right) = \frac{c_1}{1^s} + \frac{c_2}{2^s} + \dots$$

$$\frac{c_n}{n^s} \qquad c_n = \sum_{n=k\cdot l} a_k b_l = \sum_{\substack{d|n \\ \uparrow \\ \text{делит}}} a_d b_{\frac{n}{d}}$$

$$A(s) \cdot \zeta(s) = C(s)$$

$$c_n = \sum_{d|n} a_d$$

$$\frac{A(s)}{B(s)} = C(s)$$

$a_1 = c_1 b_1$

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1}$$

$$a_n = \sum_{d|n} c_{\frac{n}{d}} b_d$$

$$c_n = \frac{a_n - \sum\limits_{\substack{d|n \\ d\neq 1}} b_d \cdot c_{\frac{n}{d}}}{b_1}$$

$$\frac{A(s)}{B(s)} \qquad A(s) = 1 \qquad B(s) = \zeta(s)$$

$c_1 = 1$

$$c_n = -\sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1}} c_{\frac{n}{d}} = -\sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} c_d$$

p-простое

$c_p = -1$

$c_2 = -1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 0$, $c_5 = -1$, $c_6 = -1$, $c_7 = -1$, $c_8 = 0$, $c_9 = 0$, $c_{10} = 1$

$c_{11} = -1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = -1$, $c_{14} = 1$, $c_{15} = 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = M(s)$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$

$\mu(n) = \mu_n$

функция Мёбиуса

Т
$$\mu_n = \begin{cases} 1, & n \text{ произведение чётн. числа простых делителей} \\ -1, & \text{—//— нечёт} \\ 0, & p^2 | n \end{cases}$$

Д
$$\prod_{p\text{-простое}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s)$$

$$(1+2^{-s}+4^{-s}+8^{-s}+\dots)(1+3^{-s}+9^{-s}+27^{-s}+\dots)(1+5^{-s}+\dots)\dots = 1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\dots$$

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\dots+t^n+\dots \qquad [n^{-s}] = 1$$

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\dots$$

$$M(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\text{-простое}} (1-p^{-s}) \qquad [n^{-s}]M(s)$$

$f(n)$ $g(n)$
$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \qquad f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$$

$f(n)$ f_n

$G(s) = F(s)\zeta(s)$ $\rightarrow$ Формула обращения Мёбиуса

$$F(s) = \frac{G(s)}{\zeta(s)} = G(s)\cdot M(s)$$

$\zeta(s)^2 = ? = \sigma(s)$

$\sigma_n = \sum_{d|n} 1\cdot 1 = \#$ делителей числа n

сумма делителей – ?

Нам нужно найти $1, 2, 3, 4, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s-1)} = \zeta(s-1)$$

ПФД для суммы делителей – $\zeta(s-1)\cdot\zeta(s)$

Сумма делителей в квадрате

$\zeta(s)\cdot\zeta(s-2)$

Мультипликативность

если $a\perp b$: $f(ab)=f(a)f(b)$

$f(n)=1$ – мультип.

d – делитель ab

$d = d_a\cdot d_b$

d_a – делитель a

d_b – делитель b

$\sigma(n)$ – мультип.

$\#$делителей

$n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$

$f(n) = f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\cdot\ldots\cdot f(p_k^{a_k})$

$f_1\ f_2\ f_4\ f_8\ldots$

$f_1\ f_3\ f_9\ f_{27}$

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{-s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_{p_1^{a_1}} f_{p_2^{a_2}}\cdot\ldots\cdot f_{p_k^{a_k}} (p_1^{a_1}\ldots p_k^{a_k})^{-s} =$$

$$= \prod_{p\text{-простое}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{p^k}\cdot p^{-ks}\right)$$

$\underline{\underline{\Lambda}}$ $f(n)$ – мультипликативна

$\Uparrow$

$$F(s) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} f_{p^k}\cdot p^{-ks}$$

$\underline{\underline{\Lambda}}$ $F(s)$, $G(s)$ – ПФД мультипликативных последовательностей

Тогда таковы $F(s)\cdot G(s)$ и $\frac{F(s)}{G(s)}$

ПФД $\varphi(n)$ – число взаимно простых с n $\leq n$

$\varphi(n)$ – мультипликативна

$a\perp b$ $\quad$ $a_1\perp b$, $b_1\perp b$ $\mapsto x\perp ab$

плохие

$a\ \ b_a\ \ b_a\ x\ \ x=1\ldots b$

$b\ \ b_b\ \ b_b\ y\ \ y=1\ldots a$

$a-b_a-b_b+b_ab_b=(a-b_a)(b-b_b)$

$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ $\quad$ $\varphi(0)=1$

$$\Phi(s) = \prod_{p\text{-простое}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(p^k)\cdot p^{-ks} =$$

$$= \prod_{p\text{-простое}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(p^k - p^{k-1})p^{-ks}\right) =$$

$$= \prod_{p\text{-простое}} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(s-1)}}_{=\frac{1}{1-p^{-(s-1)}}} - p^{-s}\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(s-1)} =$$

$$= \prod_{p\text{-простое}} \left(\frac{1}{1-p^{-(s-1)}}\left(1-p^{-s}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\prod_{p\text{-простое}} \frac{1}{1-p^{-(s-1)}}}_{=\zeta(s-1)} \underbrace{\prod(1-p^{-s})}_{=\frac{1}{\zeta(s)}} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

$$\varphi_n = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$$

$\underline{\underline{T}}$ $\Phi(s) = \dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$