Лекция 8

Т Теорема Геделя о полноте И.П.

У любого з. н. м. ф. И. П. существует модель
(непротиворечивого множества замкнутых формул)

Теорема

Если phi - замкн. ф-ла И.П., то найдется psi - замкнутая ф-ла И.П., что
|-- phi -> psi и |-- psi -> phi
phi - с поверхностными кванторами

Док-во: смотри дом. задание

Рассмотрим Г - н. м-во з. ф. -- рассмотрим Г' -- полное расширение Г.
Можем сказать следующее:
Пусть phi - формула из Г'. Тогда найдется psi из Г', что psi с пов. кв. и $\vdash \varphi \to \psi$ и $\vdash \psi \to \varphi$

Рассмотрим новое мн-во констант d_j^i

Построим $\{\Gamma_j\}$

$$\Gamma' = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_j \subseteq \ldots$$

Переход: $\Gamma_j \Rightarrow \Gamma_{j+1}$

Рассмотрим все формулы из Γ_j: $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\}$

(1) γ_i — формула без кванторов сверху - оставим на месте.

(2) $\gamma_i \equiv \forall x.\varphi$ — добавим к Γ_{j+1} все формулы вида $\varphi[x := \theta]$, θ — составлен из всех ф.с.и.п. и констант вида $d_1^k \ldots d_j^k$

d_j^i
Γ_0
Γ_1 — d_1^i
Γ_2 — d_1^i, d_2^i
⋮
Γ_j — $d_1^i, d_2^i, \ldots d_j^i$

(3) $\gamma_i \equiv \exists x.\varphi$ — добавим $\varphi[x := d_{j+1}^i]$

Утв. 1 Γ_{i+1} непротиворечив., если Γ_i непр.

Док-во: от противного. $\Gamma_{i+1} \vdash \beta \& \neg\beta$.

$\Gamma_i, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \beta \& \neg\beta$, $\quad \gamma_i \in \Gamma_{i+1} \setminus \Gamma_i$

$\Gamma_i \vdash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \ldots \to \gamma_n \to \beta \& \neg\beta$ (γ_i — з анкн. => т. о. дедукции)

Докажем, что $\Gamma_i \vdash \beta \& \neg\beta$ по индукции

$\Gamma_i \vdash \gamma \to \varepsilon$ т. е. γ получен из $\forall x.\xi$ / $\exists x.\xi$

покажем: $\Gamma_i \vdash \varepsilon$

$\forall x.\xi$ заметим, что $\Gamma_i \vdash \forall x.\xi$ ← ведь это $\in \Gamma_i$

Γ_i :
⋮ ← по усл. (инд. предпол.)
$\gamma \to \varepsilon$
$(\forall x.\xi) \to (\xi[x := \theta])$ $\quad$ $\overset{\text{\\}}{=}\gamma$ — по построению Γ_{i+1} (сх. акс. 11)
(очев.) ...
$(\forall x.\xi) \to \varepsilon$

$\forall x. \xi$ (гип.)

ε (М.Р.)

$\exists x. \xi$

$\Gamma_i \vdash \overbrace{\xi[x := d^k_{i+1}]}^{\gamma} \to \varepsilon$

Заметим, что d^k_{i+1} не входит в ε

Заменим все d^k_{i+1} в доказательстве на y — нов. перем.

$$\frac{\Gamma_i \vdash \xi[x := y] \to \varepsilon}{\exists y. \xi[x:=y] \to \varepsilon}$$

$(\exists x. \xi) \to (\exists y. \xi[x:=y])$ (д/з)

$\wedge$: (очев.) ...

$(\exists x. \xi) \to \varepsilon$

$\exists x. \xi$ (гип)

ε

$\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$

Утв. 2 Γ^* — непр.

$\gamma_i \in \Gamma_i$

$\Gamma_0 \vdash \gamma_1 \to \ldots \to \gamma_n \to \beta \,\&\, \neg\beta$

$\Gamma_{\max_i(0..n)} \vdash \beta \,\&\, \neg\beta$

$\square$

Значит Γ_{max} — прот.

$\Gamma^\circ = \Gamma^*$ без кванторов

Значит, у Γ° есть модель M

Утв. 3 $\gamma \in \Gamma'$, то $[\![\gamma]\!]_M = И$

Индукция по числу кванторов в γ

Расм. 1) $\gamma \equiv \forall x. \delta$

2) $\gamma \equiv \exists x. \delta$ — аналогично.

$[\![\forall x. \delta]\!] = И$, если $[\![\delta]\!]^{x:=k} = И$, $k \in D$

Расм. $[\![\delta]\!]^{x:=k}$ $k \in D$

k содерж. константы и функциональн. символы. K осмысленно Γ_p.

δ добавлена на шаге q.

$\forall x. \delta$:

Шаг $\Gamma_{max(p,q)}$

$\Gamma_{max(p,q)+1}$ доб. $\delta[x:=k]$

$\delta[x:=k]$ — меньше на 1 кв.

$[\![\delta[x:=k]]\!] = И$

$\blacksquare$

Теор. И.П. неразрешимо

Опр. язык — мн-во слов

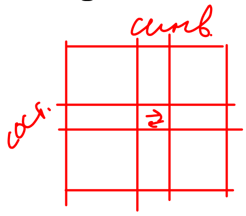
Язык $\mathcal{L}$ разрешим, если сущ. А-алг., что по слову w

$A(w)$ – ост. в "1", если $w \in \mathcal{L}$.

"0", если $w \notin \mathcal{L}$.

Проблема останова: не сущ. алгоритма, кот. по программе для М.Т. ответит, остановится она или нет.

Пусть $\mathcal{L}'$ – язык всех ост. программ для М.Т. $\mathcal{L}'$ неразрешим.



$[a, b, c, d, e] = cons(a, cons(b, cons(c, cons(d, cons(e, nil)))))$

A - Алфавит ленты.

S_x, $x \in A$ } 0-местные функц. симв.

e – nil

$C(a,b)$ ⊢ 2-местный ф.с.

$[a, b, c, d, e]$

$c(s_c, c(s_b, c(s_a, e)))$ $\quad$ $c(s_d, c(s_e, e))$

b_s $\quad s \in S$

мн-во сост.

b_0 – нач. сост.

Нач. сост.:

$R(\alpha, e, b_0)$

слева и под головкой; справа; сост.

М.Т. запущена на строке α.

переход:

$(s_x, b_s) \to (s_y, b_t, \overset{\leftarrow}{\rightarrow})$

$\underbrace{z}\ s_x, \underbrace{w}$

$\forall z.\forall w.R(c(s_x,z), w, b_s) \to R(c(s_y,z), w, b_t)$

—— || —— $R(z, c(s_y, w), b_t)$ $\quad$ $(s_x, b_s) \to (s_y, b_t, \leftarrow)$

$\underbrace{R(\ \ )\ \&\ R(\ \ )\ \&\ R(\ \ )}_{\text{зад. М.Т.}} \to \underbrace{\exists z.\exists w.R(z, w, b_b)}$

Мы придумали идею, как закодировать машину тьюринга.
Все правила записали в виде формул
Каждый шаг машины тьюринга соответствует какому-то правилу
Берем исходные формул и получаем целевые формулы, ...

Пример.

1) $R(c(s_u, e), e, b_0)$

2) $(\forall x.\forall y.R(c(s_u,x), y), b_0) \to R(x, c(s_u,y), b_1)) \to R(c(s_u, e)e, b_0) \to R(e, c(s_u,e), b_1)$