$\Gamma \models \alpha$ α следует из Γ:

при всех оценках, что все $\gamma \in \Gamma$ $[\![\gamma]\!] = И$,

выполнено $[\![\alpha]\!] = И$.

$x=0 \vdash \forall x. x=0$

$x=0 \not\models \forall x\, x=0$

???

Условие для корректности: правила для кванторов по своб. перем. из Γ запрещены.

Тогда: $\Gamma \vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \models \alpha$

оценим θ, и исходя из этого оценим x

$$[\![\alpha[x:=\theta]]\!] = [\![\alpha]\!]^{x:=[\![\theta]\!]}$$

Полнота И.П. Т. Гёделя о полноте И.П.

Опр. Γ - непротиворечивое мн-во формул, если $\Gamma \not\vdash \alpha \& \neg\alpha$ ни при каком α

Пример

непротивор.: $\varnothing$, $A \vee \neg A$; противор.: $A \& \neg A$

Непротивор. мн-во замкнутых бесев. формул

$\{A\}$, $\{0=0\}$

Определ.:

Моделью для непротивор. множ (...) — такая модель, что каждая формула из Γ оценивается в И.

замкн. бесв. формул

Опр. Полное непр. (....) Γ — такая, что для каждой формулы α (замкн. / зам. б.) либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$

Теор. Если непр. з.(б.) формул и α – з.(б.) ф. то либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ — непр. мн. з. (б.) Ф.

Док-во пусть и $\Gamma \cup \{\alpha\}$ и $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ – против.

$\Gamma, \alpha \vdash \beta \& \neg\beta$

$\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta \& \neg\beta$ Δ – замкнуто!

$$\dfrac{\begin{cases} \Gamma \vdash \alpha \to \beta \& \neg\beta \\ \Gamma \vdash \neg\alpha \to \beta \& \neg\beta \end{cases}}{\Gamma \vdash \beta \& \neg\beta}$$

Т.е. Γ – противор.

Теор. Если Γ – непр. з. (б.) ф., то можно построить Δ – полное непр. з.(б.) ф.: $\Gamma \subseteq \Delta$

и в языке – счётное кол-во формул

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ – формулы з.(б.) И.П.

$\Gamma_0 = \Gamma$

$\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$ либо $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi_1\}$ $\to$ смотря что непротивор.

$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\varphi_2\}$ либо $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi_2\}$

$\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$ (1) Γ^* – полное очев.

(2) Γ^* – непр.

Док-во (2)

Пусть $\Gamma^* \vdash \beta \& \neg\beta$

Конечное д-во $\delta_1 \dots \delta_s$, часть из них — гипотезы $\gamma_1 \dots \gamma_k$ $\quad \gamma_i \in \Gamma_{k_i}$.

Возьмём $\Gamma_{max(k_i)}$ $\quad \Gamma_{max(k_i)} \vdash \beta \& \neg\beta$ (??) $\quad \square$

Теор. Любое полное непр. мн. з. б. формул Γ имеет модель

То есть сущ. оценка $[\![\ ]\!]$: если $\gamma \in \Gamma$, то $[\![\gamma]\!] = И$

Док-во: D - все записи из ф.с.

$[\![f_0^n]\!]$ (конст.) $\Longrightarrow$ "f_0^n"

ф.: $[\![f_k^m(\theta_1, \dots, \theta_k)]\!] \Longrightarrow$ "f_k^m(" + $[\![\theta_1]\!]$ + "," + ... + "," + $[\![\theta_n]\!]$ + ")"

п.с.: $$[\![P(\theta_1, \dots, \theta_k)]\!] = \begin{cases} И, & P(\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Gamma \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

своб. предметные перем.: θ,

Так построенная модель — модель для Γ.

Индукция по длине ф-лы : любая формула из Γ, имеющая $\leq n$ связок истинно т.и.т.т.к. $\alpha \in P$

База очев.

Переход $\alpha \& \beta$ $\quad$ при этом

а) Если $[\![\alpha]\!] = И$ ($\alpha \in \Gamma$) и $[\![\beta]\!] = И$ ($\beta \in \Gamma$), то $\alpha \& \beta \in \Gamma$

б) Если $[\![\alpha]\!] \neq И$ ($\alpha \notin \Gamma$) или $[\![\beta]\!] \neq И$ ($\beta \notin \Gamma$), то $\alpha \& \beta \notin \Gamma$

Немного похоже на д-во т. о полноте И.В.

Теор. (Гёделя о полноте) Если Γ — полное непр. м. з. ф., то оно имеет модель.

Следствие: пусть $\models \alpha$ (α — замкн.), тогда $\vdash \alpha$

Пусть $\models \alpha$, но $\nvdash \alpha$. Значит, $\{\neg\alpha\}$ — непр. м. з. ф.

почему н.?

$\varnothing$ — н. м. з. ф. $\quad$ Тогда $\{\alpha\}$ или $\{\neg\alpha\}$ — непр. м. з. ф.

Пусть $\{\alpha\}$ — н. м. з. ф., а $\{\neg\alpha\}$ — прот.

← вроде не нужно

при этом $\quad \neg\alpha \vdash \beta \& \neg\beta \quad\quad \beta \& \neg\beta \vdash \alpha$

$\neg\alpha \vdash \alpha$

$\neg\alpha \vdash \alpha$, $\alpha \vdash \alpha$. Значит, $\vdash \alpha$

Значит, у $\neg\alpha$ есть модель M. $[\![\neg\alpha]\!]_M = И$, значит, $\not\models \alpha$

Γ - п. н. м. з. ф.

перестроим Γ в Γ^Δ бескванторный

Γ^Δ — п. н. м. з. (б.) ф. $\xrightarrow{\text{т. о сущ. модели}} M^\Delta \longrightarrow M$

покажем, что M^Δ — модель для Γ.

↓

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \ldots \ \Gamma_i \ \ldots \subseteq \Gamma^*$ $\qquad \Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$

$\Gamma_0 = \Gamma$, где все ф-лы — в предварённой норм. ф-ме

Опр. ПНФ — ф-ма, где $\forall \exists \forall \ldots (\tau)$ $\quad \tau$ - ф-ла без кв.

Теор. Если φ - ф-ла, то сущ. ψ - в п. ф., что $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$

Переход $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_{i+1}$ $\quad$ Построим семейство ф.с. d_i^j - новые перем.

функ. с.

Рассм. $\varphi_j \in \Gamma_i$

а) φ_j без квантор. — не трогаем

б) $\varphi_j \equiv \forall x. \psi$ - добавим все ф-лы вида $\psi[x := \theta]$, где θ - терм, сост. из f, d_0^{ι}, $d_1^{\iota\iota}$, $\ldots$, $d_{i-1}^{\iota\iota\iota\iota}$

в) $\varphi_j \equiv \exists x. \psi$ - добавим $\psi[x := d_j^i]$

$\forall x. x \geqslant 0$

$\Downarrow$

$0 \geqslant 0$, $1 \geqslant 0$, $2 \geqslant 0$, $73+15 \geqslant 0$

$(24!)^2 + 17 \geqslant 0$

$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{$все добавл. ф-лы$\}$

Теор. Если Γ_i - непр., то Γ_{i+1} - непр.

Теор. Γ^* - непр.

$\Gamma^\Delta = \Gamma^*$ без ф-л с $\forall, \exists$.