$Cov(X,Y) = E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))$ — что-то непонятное

поэтому есть другая штука

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Какие есть свойства?

1) $\rho \in [-1;1]$

2) X и Y — независ. $\Rightarrow \rho(X,Y)=0$

3) $|\rho(X,Y)|=1 \Longleftrightarrow \exists c.\ (X-E[X]) = c\cdot(Y-E[Y])$

4) $\rho(aX+b,Y) = \frac{a\,Cov(X,Y)}{|a|\,\sigma_X \sigma_Y} = sign(a)\cdot\rho(X,Y)$

Давайте докажем 1) и 3)

$X, Y:\ E[X]=E[Y]=0$, $Var[X]=Var[Y]=1$ $\qquad X' = \frac{X-E[X]}{\sigma_X}$ $\qquad \rho^2 \leq 1 \Leftrightarrow \rho \in [-1;1]$

$Z = (X-\rho Y)^2$ $\quad x=\rho Y$ получилось

$$E[Z] = E[X^2 - 2\rho XY + \rho^2 Y^2] = \underset{1}{\underset{\parallel}{E[X^2]}} - 2\rho \underset{\rho}{\underset{\parallel}{\underset{cov(x,y)}{\underset{\parallel}{E[XY]}}}} + \rho^2 \underset{1}{\underset{\parallel}{E[Y^2]}} = \underset{0 \Leftrightarrow |\rho|=1}{\underset{\parallel}{1-\rho^2}} \geq 0$$

Z, U, V — независ. $\sim N(0,1)$ $\quad E=0$

$X = Z+U$ $\qquad Var(X) = Var(Z)+Var(U) = 2 = Var(Y)$

$Y = Z+V$ $\qquad Cov(X,Y) = E[XY] = E[Z^2 + \underset{0}{\underset{\parallel}{UZ}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{VZ}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{UV}}] = E[Z^2] = 1$

$\rho(X,Y) = \frac{1}{2}$

Как делать **Деньги**?

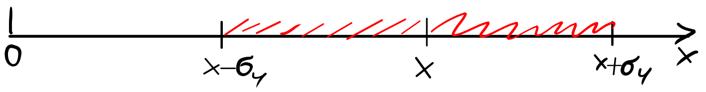
10р. $\qquad$ 10 источников

если в 1 инвестировать X $\quad \sigma^2$ $\qquad$ Прибыли от компаний независимы

прибыль: $Y \sim N(X, 1.1X)$ $\qquad \sigma_Y = \sqrt{11}$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{10} Var(Y_i) = 10\cdot 1.1 = 11$$

хороший шанс попасть сюда



$\sigma_Y = \sqrt{100}$

$$\rho(Y_i,Y_j)_{i\neq j} = 0.9 \quad Var(Y) = \sum_{i=1}^{10} Var(Y_i) + \sum_{i\neq j} Cov(Y_i,Y_j) = 10\cdot 1.1 + 90\cdot 0.9\cdot 1.1 \approx 100$$

Типы сл.в.

1) Сингулярные — вся p сконцентр. на A: $\mu(A)=0$

2) Абс. непр. — есть $f_X(x)$

3) Смешанные — Z: $F_Z = p\underbrace{F_X}_{\text{сингуляр.}} + (1-p)\underbrace{F_Y}_{\text{непрер.}}$

Сингулярные разделяются на 2 типа: 1.а) Дискретные: есть ф-ция вероятности

1.б) Все остальные — лестница Кантора

$p_X(x) = \underbrace{F(x+\varepsilon)-F(x)}_{0} \to 0$ как ф-ция распределения

С этим не будем сталкиваться

$$F_Z = \underbrace{p}_{p\in(0,1)} \underbrace{F_X}_{\text{дискр.}} + \underbrace{q}_{(0;1-p)} \underbrace{F_Y}_{\text{абс. непр.}} + (1-p-q)\cdot \underbrace{F_U}_{\text{сингулярн. непр.}}$$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$g(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g(X): \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$g(y) = E[X|Y=y]$ $\quad\underbrace{g(Y)}_{\text{с.в.}} = \underbrace{E[X|Y]}_{\text{с.в.}}$

$$E[E[X|Y]] = \sum_y p_Y(y)\cdot E[X|Y=y] = E[X]$$

$$E[E[X|Y]] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\cdot E[X|Y=y]\,dy = E[X]$$

Ломаем палки

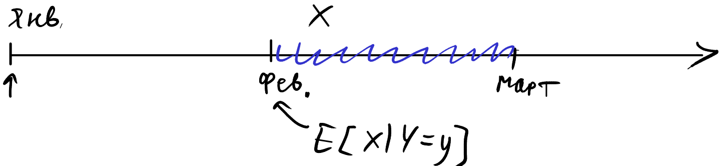
$Y \sim U(0,1)$

$X \sim U(0,Y)$

$$E[X] = E[\underbrace{E[X|Y]}_{=\frac{Y}{2}}] = E\left[\frac{Y}{2}\right] = \frac{1}{2}E[Y] = \frac{1}{4}$$

$$E[X|Y=y] = \frac{y}{2}$$

Вы - синоптик



$E[X]$

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$

$$g(y) = Var[X|Y=y] = E[(X - E[X|Y=y])^2 | Y=y]$$

$g(Y) = Var[X|Y]$ - с.в.

$$Var[X] = E[\underbrace{Var(X|Y)}_{\text{с.в. } g(Y)}] + Var[\underbrace{E[X|Y]}_{\text{с.в. } h(Y)}]$$

$$E[Var(X|Y)] = E[E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2] = E[X^2] - E((E[X|Y])^2)$$

+

$$Var(E[X|Y]) = E((E[X|Y])^2) - \underbrace{(E(E(X|Y)))^2}_{\to (E[X])^2}$$

$$\underbrace{E[X^2] - (E(X))^2}_{= Var(X)}$$

Примеры

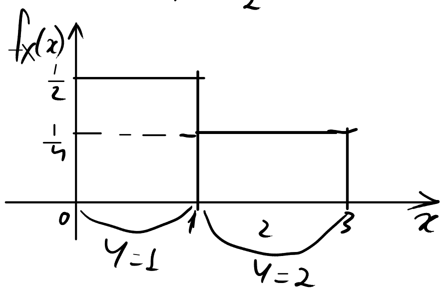
X, Y: $p_1 = \frac{1}{2}$ $\quad Y=1,\ X \sim U(0,1)$

$p_2 = \frac{1}{2}$ $\quad Y=2,\ X \sim U(1,3)$

$Var[X|Y=1] = \frac{1}{12}$

$Var[X|Y=2] = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$E[Var[X|Y]] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{24}$



$E[X|Y=1] = 0{,}5$

$E(X|Y=2] = 2$

$E[X] = E[E[X|Y]] = \frac{1}{2}\cdot 0.5 + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{5}{4}$

$Var[E[X|Y]] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{5}{4}\right)^2 = \ldots$ $\quad Var(X) = \frac{5}{24} + \ldots$

N групп, в кажд. группе n чел. $\quad m = \sum_i n_i$

у кажд. человека есть оценка: X_j

$E(X|Y=n)$ — Номер группы

$Var(X|Y=n)$ — Номер группы

$E[X] = E[E(X|Y)] = \sum_i \frac{n_i}{m}\cdot E[X|Y=i]$

$Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var(E[X|Y])$

- $Var(X|Y)$
- $E[Var[X|Y]]$
- $Var(E[X|Y])$

$X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$

N - с.в

$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$

1) все X_i не зависят друг от друга (в совокупности)

2) все X_i не зависят от N

(N может зависеть от X_i)

3) все X_i имеют одинаковое распределение

$g(n) = E[Y|N=n] = E[\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = n\,E[X_1]$

$E[Y|N] = N\,E[X_1]$

$E[Y] = E[N\cdot E[X_1]] = E[N]\cdot E[X_1]$ $\quad$ Wald

$Var[Y] = Var[E[Y|N]] + E[Var[Y|N]]$

$Var[E[Y|N]] = Var[N E[X_i]] = [E[X_i]]^2 \cdot Var[N]$

$Var[Y|N=n] = Var(\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n) = Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = n\,Var[X_i]$

$E[Var[Y|N]] = E[N\,Var[X_i]] = Var[X_i]\cdot E[N]$

$Var(Y) = (E[X])^2\cdot Var(N) + E[N]\cdot Var(X_1)$