Производящая функция Дирихле

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \frac{1}{n^s} + \dots$$

$a_1, a_2 \dots a_n$

$$A(s) = \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \dots + \frac{a_n}{n^s} + \dots$$

$$\frac{1}{1-t} \leftrightarrow e^t \leftrightarrow \zeta(s)$$

$$A(s) \pm B(s) = C(s)$$

$$c_n = a_n \pm b_n$$

$$A(s) \cdot B(s) = C(s)$$

$$\left(\frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots\right)\left(\frac{b_1}{1^s} + \frac{b_2}{2^s} + \dots\right) = \frac{c_1}{1^s} + \frac{c_2}{2^s} + \dots$$

$$\frac{c_n}{n^s} \qquad c_n = \sum_{n=k \cdot l} a_k b_l = \sum_{\substack{d \mid n \\ \uparrow \\ \text{делит}}} a_d b_{\frac{n}{d}}$$

$$A(s) \cdot \zeta(s) = C(s)$$

$$c_n = \sum_{d \mid n} a_d$$

$$\frac{A(s)}{B(s)} = C(s)$$

$$a_1 = c_1 b_1$$

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1}$$

$$a_n = \sum_{d \mid n} c_{\frac{n}{d}} b_n$$

$$c_n = \frac{a_n - \sum\limits_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} b_d \cdot c_{\frac{n}{d}}}{b_1}$$

$$\frac{A(s)}{B(s)} \qquad A(s) = 1 \qquad B(s) = \zeta(s)$$

$$c_1 = 1$$

$$c_n = -\sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} c_{\frac{n}{d}} = -\sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} c_d$$

p - простое

$c_p = -1$

$c_2 = -1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 0$, $c_5 = -1$, $c_6 = -1$, $c_7 = -1$, $c_8 = 0$, $c_9 = 0$, $c_{10} = 1$

$c_{11} = -1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = -1$, $c_{14} = 1$, $c_{15} = 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = M(s)$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$

$\mu(n) = \mu_n$

функция Мёбиуса

$$\text{Т} \quad \mu_n = \begin{cases} 1, & n \text{ произведение чётн. числа различных простых делителей} \\ -1, & \text{— // — нечёт} \\ 0, & p^2 \mid n \end{cases}$$

$$\Delta \quad \prod_{p\text{-простое}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s)$$

$$(1 + 2^{-s} + 4^{-s} + 8^{-s} + \dots)(1 + 3^{-s} + 9^{-s} + 27^{-s} + \dots)(1 + 5^{-s} + \dots)\dots = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots \qquad [n^{-s}] = 1$$

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots$$

$$M(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\text{-простое}} (1 - p^{-s}) \qquad [n^{-s}] M(s)$$

$$f(n) \quad g(n) \qquad g(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$$

$f(n)$ f_n

$$G(s) = F(s)\zeta(s)$$

$$F(s) = \frac{G(s)}{\zeta(s)} = G(s) \cdot M(s)$$

$$\to \quad f(n) = \sum_{d \mid n} g(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} g\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d)$$

Формула обращения Мёбиуса

$\zeta(s)^2 = ? = \sigma(s)$

$\sigma_n = \sum_{d|n} 1\cdot 1 = \#$ делителей числа n

сумма делителей — ?

Нам нужно найти $1, 2, 3, 4, \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s-1)} = \zeta(s-1)$$

ПФД для суммы делителей — $\zeta(s-1)\cdot\zeta(s)$

Сумма делителей в квадрате

$\zeta(s)\cdot\zeta(s-2)$

Мультипликативность

если $a \perp b$: $f(ab) = f(a)f(b)$

$f(n) = 1$ — мультипл.

d — делитель ab

$d = d_a \cdot d_b$

d_a — делитель a

d_b — делитель b

$\Uparrow$ $\sigma_0(n)$ — мультипл.

$\#$ делителей

$\underline{\underline{\Lambda}}$ $f(n)$ — мультипликативна

$\Uparrow$

$$F(s) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} f_{p^k}\cdot p^{-ks}$$

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$

$f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdot \ldots \cdot f(p_k^{a_k})$

$f_1, f_2, f_4, f_8 \dots$

f_1, f_3, f_9, f_{27}

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{p_1^{a_1}} f_{p_2^{a_2}} \cdot\ldots\cdot f_{p_k^{a_k}} \left(p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}\right)^{-s} = \prod_{p\text{-простое}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{p^k}\cdot p^{-ks}\right)$$

$\underline{\underline{\Lambda}}$ $F(s)$, $G(s)$ — ПФД мультипликативных последовательностей

Тогда таковы $F(s)\cdot G(s)$ и $\dfrac{F(s)}{G(s)}$

ПФД $\varphi(n)$ — число взаимно простых с n, $\le n$

$\varphi(n)$ — мультипликативна

$a \perp b$ $\quad a_1 \perp b$, $\quad b_1 \perp b \;\longmapsto\; x \perp ab$

плохие

$a \quad b_a \quad b_a\, x \quad x = 1\dots b$

$b \quad b_b \quad b_b\, y \quad y = 1\dots a$

$a - b_a - b_b + b_a b_b = (a - b_a)(b - b_b)$

$$\varphi_n = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$$

$\underline{\underline{T}}$ $\Phi(s) = \dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$

$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} \qquad \varphi(0) = 1$

$$\Phi(s) = \prod_{p\text{-простое}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(p^k)\cdot p^{-ks} =$$

$$= \prod_{p\text{-простое}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (p^k - p^{k-1}) p^{-ks}\right) =$$

$$= \prod_{p\text{-простое}} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(s-1)}}_{= \frac{1}{1-p^{-(s-1)}}} - p^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(s-1)} =$$

$$= \prod_{p\text{-простое}} \left(\frac{1}{1-p^{-(s-1)}}\left(1 - p^{-s}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\prod_{p\text{-простое}} \frac{1}{1-p^{-(s-1)}}}_{= \zeta(s-1)} \underbrace{\prod (1 - p^{-s})}_{= \frac{1}{\zeta(s)}} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$