Повторение про топологию

1) $\bigcup_\alpha a_\alpha \in \Omega \quad a_\alpha \in \Omega$ $\qquad S \subseteq \Omega$, то $\bigcup S \in \Omega$

2) $a_1 \ldots a_n \in \Omega$
тогда $\bigcap_{i=1}^{n} a_i \in \Omega$

3) $\varnothing, X \in \Omega$

Изоморфизм Карри-Ховарда

p - программа (функция, например)
p: a -> b
берет a, возвращает b

p - доказательство, что из a следует b
f a = a
f будет доказывать, что A -> A для любого A.

Логическое исчисление	Типизированное лямбда-исч.
Логическая формула	Тип
Доказательство	Значение
Доказуемая формула	Обитаемый тип
$\rightarrow$	функция
&	уп. пара
$\vee$	алг. тип (тип - сумма)

Тип, у которого есть хотя бы 1 экземпляр

```
type list: record
    nul: Boolean;
    case nul of
        true: ;
        false: next: ^list
    end
end;
```

```
struct list {
    next: *list;
}
```

```
struct tree {
    int kind;
    tree *left;
    tree *right;
    int value;
};
```

Определение отмеченное (дизъюнктное) объединение мн-в.

A, B
$A \sqcup B = A \uplus B = \{\langle \text{"A"}, a\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle \text{"B"}, b\rangle \mid b \in B\}$

Пусть $S \in A \sqcup B$
мы же знаем, откуда S
в C++ это variant

```
struct list {
    next: *list
}
data List a = nil | cons a (List a)
```

[1,2,3]: cons 1 (cons 2 (cons 3 nil))

В C это union {
    int a;
    char b;
}

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \to \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$

Nil cons count $\alpha \vee \beta$ int

```
let rec string_of_list l =
  match l with
  | Nil → "[]"                       0
  | Cons (hd, tl) →                  α → int
      hd ^ ";" ^ string_of_list tl
      1 + count tl
                                     β → int
```

Исчисление предикатов

1) Язык И.П.
   логические выражения "предикаты"/формулы
   предметные выражения "термы"

Θ – метаперем. для термов

Термы:

- Атомы: $a, b, c, d, \ldots$ (предм. перем.)

x, y, z – метаперем. для предметн. перемен.

- Применение ф.с.: $f(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$

f - метаперем. тоже

Функциональные символы: f, g, h / если $n=0$, будем писать f, g без скобок

Логич. выражения:

- Применение предикатных символов $P(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ P – метаперем. для ПС (п.с. – это A, B, C)
- Связки $\&, \vee, \neg, \to$
- Кванторы: $\forall x. \varphi$ или $\exists x. \varphi$ $\forall, \exists$ – жадные

Сокращения записи:

И.В. + жадная $\forall, \exists$

$\forall x. (P(x) \& (\forall y. P(y)))$

$\forall a. (B(a) \& (\forall b. B(b)))$

Теория моделей

Оценка формул в И.П.:

1) Фиксируем D – предметное мн-во
2) Каждому $f_i(x, \ldots x_n)$ сопоставляем ф-ю $D^n_{f_n} \to D$
3) Каждому $P_j(x, \ldots x_m)$ сопоставляем ф-ю $D^m_{P_m} \to V$ (предикат) истинностные зн-я
4) Каждой x_i сопоставим эл-т из D. f_{x_i}

Пример

$\forall x. \forall y. E(x,y)$

пусть $D = \mathbb{N}$

$$E(x,y) = \begin{cases} И, & x = y \\ Л, & x \neq y \end{cases}$$

$\forall x. \forall y. E(x,y)$

$[\![\forall x. \forall y. E(x,y)]\!] = Л,$

т.к. $[\![E(x,y)]\!] \overset{x:=1,\, y:=2}{=} Л$

$[\![x]\!] = f_{x_i}$

$[\![\alpha \star \beta]\!]$ — см. ИВ

$[\![P_i(\theta_1, \dots, \theta_n)]\!] = f_{P_i}([\![\theta_1]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$

$[\![f_j(\theta_1, \dots, \theta_m)]\!] = f_{f_j}([\![\theta_1]\!], \dots, [\![\theta_m]\!])$

$$[\![\forall x. \varphi]\!] = \begin{cases} И, & \text{если } [\![\varphi]\!] \overset{f_x = k}{=} И \text{ при всех } k \in D \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$[\![\exists x. \varphi]\!] = \begin{cases} И, & \text{если } [\![\varphi]\!] \overset{f_x = k}{=} И \text{ при некотором } k \in D \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\square$ — терм $\quad$ $\square$ — предикат

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \; |a_n - a| < \varepsilon$ — на неполноценном языке

$\forall \varepsilon.\ \varepsilon > 0 \to \exists N.\ \forall n\ (n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)$

$\forall e.\ \underbrace{G(e, m_0)}_{\text{лог.}} \to \exists n_0.\ \forall n.\ \underbrace{\underbrace{G(n, n_0)}_{\text{лог. выр.}} \to G(e, m_{|}(\underbrace{m_-(m_a(n), a)}_{\text{терм}}))}_{\text{лог. выраж.}}$

$(>)(a,b) = G(a,b)$

$|a| = m_|(a)$

$(-)(a,b) = m_-(a,b)$

$a_n = m_a(n)$

$0() = m_0$

Теория доказательств

Все акс. ИВ + М.Р.

(сх. 11) $\quad (\forall x. \varphi) \to \varphi[x := \theta]$

(сх. 12) $\quad \varphi[x := \theta] \to \exists x. \varphi$

Замена переменной

// если θ свободен для подстан. вместо x в φ

Т.е. никакое свободное вхождение x в θ не станет связанным

```
int y;
int f( int x){
   x=y //?
}
```

$\Rightarrow y := x$

(правило $\forall$) $\quad \dfrac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x. \psi}$

(правило $\exists$) $\quad \dfrac{\psi \to \varphi}{\exists x. \psi \to \varphi}$

x не входит своб. в φ.

$$\frac{x = 5 \to x^2 = 25}{x = 5 \to \forall x.\ x^2 = 25}$$

Нарушено ограничение

$\exists y.\ x = y$ $\quad$ 11 сх. аксиом

$\forall x.\ \exists y.\ x = y \to \exists y.\ y + 1 = y \quad / x := y + 1$

?!