

## повторение про монады

$$1) \bigcup_a a \in \Omega \quad a \in \Omega$$

$S \subseteq \Omega$ , то  $\bigcup S \in \Omega$

$$2) a_1, \dots, a_n \in \Omega$$

тогда  $\bigcap_{i=1}^n a_i \in \Omega$

$$3) \emptyset, X \in \Omega$$

## Изоморфизм Карри-Ховарда

$p$  - программа (функция, например)

$p: a \rightarrow b$

берет  $a$ , возвращает  $b$

$p$  - доказательство, что из  $a$  следует  $b$

$f a = a$

$f$  будет доказывать, что  $A \rightarrow A$  для любого  $A$ .

Логическое исчисление	Типизированное лямбда-исч.
Логическая формула	Тип
Доказательство	Значение
Доказуемая формула	Обитаемый тип
$\rightarrow$	функция
$\&$	yn. para
$\vee$	am, mun (mun - сумма)

Тип, у которого есть хотя бы 1 элемент

```

type list: record
  nil: Boolean;
  case nil of
    true: ;
    false: next: ^list;
  end
end;

```

```

struct list {
  next: *list;
}

```

```

struct tree {
  int kind;
  tree *left;
  tree *right;
  int value;
};

```

## Определение

отмеченное (дизъюнктивное) объединение мн-в.

$$A, B$$

$$A \sqcup B = A \vee B = \left\{ \langle "A", a \rangle \mid a \in A \right\} \cup \left\{ \langle "B", b \rangle \mid b \in B \right\}$$

пусть  $S \in A \sqcup B$   
мы же знаем, откуда  $S$   
в C++ это variant

```

struct list {
  next: *list;
}
data list a = nil | cons a (list a)

```

$[1, 2, 3]: \text{cons } 1 (\text{cons } 2 (\text{cons } 3 \text{ nil}))$

B C  $\Rightarrow$  mo Union {  
 int a;  
 char b;  
 }

$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$   $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$   $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$  let rec string-of-list l =  
 match l with  
 | Nil  $\rightarrow$  "[ ]"  $\alpha \rightarrow \text{int}$   
 | Cons(hd, tl)  $\rightarrow$  hd ^ "[" ^ string-of-list tl  
 1 + count tl  $\beta \rightarrow \text{int}$

## Исчисление предикатов

### 1) Язык И.П.

логические выражения "предикаты"/формулы  
 предметные выражения "термы"

$\theta$  - метанерм. для термов

Термы:

► Атомы: a, b, c, d, ...  
 (предм. перемен.)

► Приложение ф.с.:  $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$

Функциональные символы: f, g, h

x, y, z - метанерм. для предметн. переменн.

f - метанерм. конст

/ если n=0, будет только f, g без скобок

Логич. выражения:

► Приложение предикатных символов  $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$  P - метанерм. для ПС  
 (п.с. - это A, B, C)

► Связки  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$

► Кванторы:  $\forall x. \varphi$  или  $\exists x. \varphi$   $\forall, \exists$  - жадные

Сокращения записи:

И.Р. + жадная  $\forall, \exists$

$\forall x. (P(x) \wedge (\forall y. P(y)))$

$\forall a. (B(a) \wedge (\forall b. B(b)))$

## Теория моделей

Оценка формул в И.П.:

- 1) Фиксируем D - предметные мн-во
- 2) Каждому  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  сопоставляем ф-ю  $D_{f_i}^n \rightarrow D$  истинностные значения
- 3) Каждому  $P_j(x_1, \dots, x_m)$  сопоставляем ф-ю  $D_{P_j}^m \rightarrow \{0, 1\}$  (предикат)
- 4) Каждой  $x_i$  сопоставим эл-т из D,  $f_{x_i}$

# Пример

$$\forall x. \forall y. E(x, y)$$

$$\text{мысли } D = \mathbb{N}$$

$$E(x, y) = \begin{cases} 1, & x=y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

$$\forall x. \forall y. E(x, y)$$

$$\llbracket \forall x. \forall y. E(x, y) \rrbracket = 1, \text{ т.к. } \llbracket E(x, y) \rrbracket \stackrel{x:=1, y:=2}{=} 1$$

□ - терм

□ - предикат

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon. \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N. \forall n (n > N) \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon. \underbrace{G(\varepsilon, m_0)}_{\text{л.с.}} \rightarrow \exists n_0. \forall n. \underbrace{G(n, n_0)}_{\text{л.с. выраж.}} \rightarrow \underbrace{G(\varepsilon, m_1(m_-(m_a(n), a)))}_{\text{терм}}$$

## Теория доказательств

Все акс. ИВ + М.Р.

$$(cx, 11) (\forall x. \varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$$

$$(cx, 12) \varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x. \varphi$$

замена переменной

// если  $\theta$  свободна где не стоит, в него  $x$  в  $\varphi$

т.е. никакое свободное вхождение  $x$  в  $\theta$  не станет связанным

```
int y;
int f(int x) {
  x = y; // ?
}
```

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \rightarrow \varphi \\ \varphi \rightarrow \forall x. \varphi \\ \varphi \rightarrow \varphi \\ (\exists x. \varphi) \rightarrow \varphi \end{array} \right\}$$

$x$  не входит своб. в  $\varphi$ .

$$\frac{x=5 \rightarrow x^2=25}{x=5 \rightarrow \forall x. x^2=25}$$

Нарушено ограничение

$$\exists y. x=y$$

$$\forall x. \exists y. x=y \rightarrow \exists y. y+1=y \quad / x := y+1$$

?!