1 Тензоры

1.1 Линейные формы(линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контрвариантные преобразования.

Напоминание: $V^* = \{ \underset{\text{лин.}}{f: V \to K} \}$ сопряженное (дуальное) пр-во к V

$V^* \cong K_n$ – пр-во n-мерных строк (не естественный)

$e_1 \ldots e_n$ базис V $\quad \forall x \in V \quad x = x^i e_i \quad f(x) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \text{ коэф-ты } f.} = x^i a_i \leftrightarrow a = (a_1 \ldots a_n) \in K_n$

$\forall f \in V^*$ $\quad \Updownarrow$

$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n$ пр-во n-мерных столбцов.

$\dim V^* = n = \dim V$

Определим: $\omega^i : V \to K \quad \forall x \in V \quad \omega^i(x) = x^i$ iая коор-та x отн-но базиса $e_1 \ldots e_n$

$i = 1 \ldots n$ $\quad$ ω^i – координатные ф-ии

очевидно, ω^i лин. отобр. $\Rightarrow \omega^i \in V^*$

очевидно, $\forall j = 1 \ldots n$, $\forall i = 1 \ldots n$ $\quad \omega^i(e_j) = \underset{\text{символ Кронекера}}{\delta^i_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$\boxed{\text{Теорема 1: } \omega^1, \ldots, \omega^n \text{ базис } V^*}$

Док-во: т.к. $\dim V^* = n$, то достаточно проверить лин. незав. $\omega^1, \ldots, \omega^n$.

$\exists\ \alpha_i \omega^i = 0$, $\alpha_i \in K$

$\Rightarrow \forall x \in V \quad \alpha_i \omega^i(x) = 0 \Rightarrow$ в частности, для $\forall j = 1 \ldots n \quad \alpha_i \underbrace{\omega^i(e_j)}_{\delta^i_j} = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \ldots n$

$\Leftrightarrow \omega^1, \ldots, \omega^n$ лин. незав. $\Rightarrow$ базис V^* ∎

$\boxed{\text{Следствие: } \forall f \in V^* \text{ коэф-ты } \underset{\text{(отн-но базиса } e)}{a_i = f(e_i)} \text{ явл-ся коор-ми формы } f \text{ в пр-ве } V^* \text{ отн-но базиса } \omega^1, \ldots, \omega^n.}$

т.о. $V^* \cong K_n$ – координ. изоморфизм. отн-но базиса $\omega^1 \ldots \omega^n$

док-во: $\forall f \in V^* \ \forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i$, где $a_i = f(e_i)$

т.к. $x^i = \omega^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i \omega^i(x) \quad \forall x \in V \Rightarrow f = a_i \omega^i \Leftrightarrow a = (a_1 \ldots a_n)$ коор-ты f отн-но базиса $\omega^1 \ldots \omega^n$ ∎

def: коорд. ф-ии $\omega^1 \ldots \omega^n$, порожденные базисом $e_1, \ldots, e_n$ пр-ва V наз-ся сопряженным (дуальным) базисом пр-ва V^* к базису $e_1 \ldots e_n$ пр-ва V.

$\boxed{?}$ Всякий ли базис V^* будет сопряженным к некоторому базису пр-ва V?

$\boxed{\text{Теорема 2: } \exists\ \omega'^1, \omega'^2, \ldots, \omega'^n \text{ базис } V^* \Rightarrow \exists \text{ базис } e_1', e_2', \ldots, e_n' \text{ пр-ва } V, \text{ т.ч. базис } \omega' \text{ будет сопряженным к базису } e'}$

Док-во: $\exists\ e_1, \ldots, e_n$ базис V, а $\omega^1, \ldots, \omega^n$ базис V^*, сопряжен. к e.

т.к. ω и ω' базисы пр-ва V^*, то $\quad (\omega'^1 \ldots \omega'^n) = (\omega^1 \ldots \omega^n) \underset{\uparrow \text{ м-ца перехода.}}{T_{\omega \to \omega'}}$

т.к. в координ. представлении эл-там V^* соот-т строки,

то последнее равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = T^T_{\omega \to \omega'} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} \qquad \text{Обозначим } \boxed{S := T^T_{\omega \to \omega'}}$$

м-ца S, очевидно, невырожденная $\Rightarrow \exists\ S^{-1} =: T$

Определим „новый" базис в пр-ве V следующим равенством:

$(e_1' \ldots e_n') = (e_1 \ldots e_n) T$, т.о. $T = T_{e \to e'}$

Покажем, что ω' будет сопряженным к построенному e'.

$S = (s^i_j)_{n\times n}$ ← номер стр, ← номер столбца, аналогично $T = (t^i_j)_{n\times n}$ $\Rightarrow$ $w'^i = s^i_k w^k$

$\forall x \in V$: $w'^i(x) = s^i_k w^k(x) = \underbrace{s^i_k x^k}_{(Sx)_{i\text{-ая коор-та}}} = x'^i$ – i-ая коор-та x в базисе e' $\Rightarrow$ w'^i – координатная ф-я отн-но базиса e', т.е w' сопряж.-базис к e' ∎

т.к. $T = T_{e\to e'}$, то. $x' = T^{-1}x = Sx$

Следствие: e, e' базисы V, $T = T_{e\to e'}$, $S = T^{-1}$
w, w' сопряжен. к e и e', соот-но, базисы V^*

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} \forall x \in V & x' = Sx = T^{-1}x \\ \forall f \in V^* & a' = aT \end{matrix}}$, причем $T_{w\to w'} = S^T = (T^{-1})^T$

док-во: $T^T_{w\to w'} = S$, очевидно, из док-ва т-мы.
также, очевидно, что $x' = T^{-1}x$.
остается показать, что $\forall f \in V^*$ $a' = aT$
т.к. $(w'^1 .. w'^n) = (w^1 .. w^n) T_{w\to w'}$, то $(a')^T = T^{-1}_{w\to w'} a^T \Rightarrow a' = a\underbrace{(T^T_{w\to w'})^{-1}}_{S} = aT$ ∎

Замечание: очевидно, значение лин.-формы f на элементе x не должно зависеть от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (t^i_k x'^k)\cdot(a'_m s^m_i) = \underbrace{(s^m_i t^i_k)}_{(ST)^m_k = \delta^m_k} x'^k a'_m = x'^k a'_k$$

$x = Tx'$
$a = a'S$
$(ST) = E$

– инвариантность формы записи лин.-формы отн-но выбора базиса

def: Векторы, координаты которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с формулой замены e на e', т.е. с той же м-цей $T = T_{e\to e'}$ наз-ся ковариантными векторами или ковекторами ≡ элементы пр-ва V^*

Векторы, коор-ты которых, при замене базиса e на e', меняются по закону, противоположному ф-ле замены e на e', т.е. с матрицей $T^{-1} = S$, наз-ся контрвариантными векторами или просто векторами ≡ элементы пр-ва V

Поэтому, лин. формы, также называют просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во $(V^*)^* = V^{**}$ – дважды сопряженное к V

очевидно, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ (все три пр-ва изоморфны)

Построим изоморфизм между V и V^{**} следующим образом:

$\forall x \in V \xrightarrow[\text{сопоставим}]{} „x" \in V^{**}$: $\forall f \in V^*$ $\boxed{„x"(f) = f(x)}$

очевидно, $„x"$: $V^* \to K$

проверим лин-ть $„x"$: $\forall \lambda \in K$ $\forall f_{1,2} \in V^*$

$„x"(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = „x"(f_1) + \lambda „x"(f_2)$
$\Rightarrow$ лин-но $\Rightarrow$ $„x" \in (V^*)^*$

Теорема 3: соответствие $x \in V \to „x" \in V^{**}$ явл-ся вз-одн. и лин-м, т.е. изоморфизмом. $(V \cong V^{**})$

Док-во: итак, $\forall x \in V \rightsquigarrow „x" \in V^{**}$
покажем, что это отображение обладает св-вом лин-ти: $\forall \lambda \in K$, $\forall x_1, x_2 \in V$

$\underset{\in V}{(\lambda x_1 + x_2)} \longrightarrow \underset{\in V^{**}}{„\lambda x_1 + x_2"}$ $\forall f \in V^*$ $„\lambda x_1 + x_2"(f) = f(\lambda x_1 + x_2) =$
$= \lambda f(x_1) + f(x_2) = \lambda „x_1"(f) + „x_2"(f) \Rightarrow „\lambda x_1 + x_2" = \lambda „x_1" + „x_2"$, т.е. лин-но.

т.о. мы получаем вложение пр-ва V в пр-во V^{**}, обладающее св-вом лин-ти.

В частности, $\exists$ $e_1, .., e_n$ базис V $\longrightarrow$ $„e_1", .., „e_n" \in V^{**}$

$\Rightarrow \forall j = 1..n$ $\forall f \in V$ $„e_j"(f) = f(e_j) = a_j$ – коор-та f в пр.-ве V^* отн-но базиса w^j пр-ва V^*

$\Rightarrow$ $„e_j"$ координ. ф-я и сопряжен. базис к базису w^j $\Rightarrow$ по т-ме 1 $„e_1" .. „e_n"$ базис V^{**}

$\Rightarrow$ т.о. наше вложение пр-в на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис. ∎

Замечания! 1. изоморфизм, построенный в т-ме 3 является естественным изоморфизмом пр-в V и V^{**}, т.к. его построение не зависело от выбора базиса.

2. Принято отождествлять эл-ты x пр-ва V и „x" пр-ва V^{**}, поэтому пишут $x(f) := f(x)$
без кавычек.

$$\forall x\in V \quad \forall f\in V^*: \qquad f(x) = x^i f(e_i) = \omega^i(x)a_i \qquad f(e_i)=e_i(f)=a_i$$
$$x = x^i e_i \qquad f = a_i\omega^i \qquad \overset{\shortparallel}{x(f)} = a_i x(\omega^i) = e_i(f)x^i \qquad x(\omega^i)=\omega^i(x)=x^i$$

т.е. Т-ма 3 показывает, что на самом деле пр-ва V и V^* „равноправные" V^* сопряж. к V, а V сопряж. к V^*. Базис ω сопряжен к e, также как и базис e сопряжен к базису ω.

3. $\forall x\in V \quad \forall f\in V^*$

$$x \updownarrow X=\begin{pmatrix} x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix} \qquad f \updownarrow a=(a_1\dots a_n)$$

$$f(x) = x^i a_i = a\cdot X = (a_1\dots a_n)\cdot\begin{pmatrix} x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}, \qquad f(x) = x(f)$$

„строка * столбец" $\Rightarrow$ т.к. $\omega^i(e_j) = \delta^i_j = e_j(\omega^i)$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}\omega^1\\ \vdots\\ \omega^n\end{pmatrix}(e_1\dots e_n) = E}$$

Примеры! 1) $\mathbb{R}^3$: базис $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Найти сопряж. базис $\omega^1, \omega^2, \omega^3$.

$$\omega^i \longleftrightarrow (a^i_1\, a^i_2\, a^i_3) = a^i$$

$$\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix}(e_1 e_2 e_3) = E \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3\\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3\\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{B} = E$$

$$\Rightarrow \quad A = B^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}=\omega^1\\=\omega^2\\=\omega^3\end{matrix}$$

2) $V = \oplus V_\lambda$ $\quad \underset{\text{проекторы}}{P_\lambda : V\to V_\lambda}$ $\quad \sum\limits_\lambda P_\lambda = \mathcal{E}$ $\quad P_\lambda P_\mu = 0$, $\quad P_\lambda^2 = P_\lambda$

$V = \mathrm{span}(v_1,\dots,v_n) \longrightarrow$ построим $\omega^1,\dots,\omega^n$ сопряж. к $v_1\dots v_n$

$$\Rightarrow \forall x\in V: \quad x = \sum_\lambda x_\lambda = x^i v_i = \omega^i(x)v_i$$

$$\Rightarrow P_\lambda x = x_\lambda = \sum_{v_k\in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k\in V_\lambda}\omega^k(x)v_k$$

$$A = \begin{pmatrix}-1&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\lambda_1 = 1 & \alpha(\lambda_1) = 1 = \mu(\lambda_1)\\ \lambda_2 = -3 & \alpha(\lambda_2) = 2 = \mu(\lambda_2)\end{matrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = v_1$$

$$V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\left(\underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right)$$

построим сопряж. базис! (см. пример 1)

$$\omega^1 = (-\tfrac12\ \tfrac12\ 0) \qquad \omega^2 = (\tfrac12\ \tfrac12\ 0) \qquad \omega^3 = (0\ 0\ 1)$$

$$\omega^i(x) = (a^i_1\, a^i_2\, a^i_3)\cdot\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} \quad i = 1,2,3.$$

$$P_{\lambda_1}(x) = \omega^1(x)\cdot v_1 = \left(-\frac{x^1}{2}+\frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x^1}{2}-\frac{x^2}{2}\\ -\frac{x^1}{2}+\frac{x^2}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda_2}(x) = \omega^2(x)\cdot v_2 + \omega^3(x)\cdot v_3 = \left(\frac{x^1}{2}+\frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x^3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x^1}{2}+\frac{x^2}{2}\\ \frac{x^1}{2}+\frac{x^2}{2}\\ x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12&\frac12&0\\ \frac12&\frac12&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix}\frac12&\frac12&0\\ \frac12&\frac12&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейное пр-во тензоров.

V лин. пр-во над полем K $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

V^* сопряженное пр-во; $\dim V = \dim V^* = n$

def: ($1^{ое}$ def тензора) тензором α типа (p,q) (p-раз ковариантным, q-раз контрвариантным) наз-ся полилинейная функция $f: V^p \times (V^*)^q \to K$

$$V^p = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p \text{ раз}} \qquad (V^*)^q = \underbrace{V^* \times \ldots V^*}_{q \text{ раз}}$$

$\boxed{\text{тензор } \alpha \equiv f \text{ полилин. ф-я}}$

полилинейная $\equiv$ линейная по каждому аргументу.

p и q – валентности тензора

$r = (p+q)$ – ранг или полная валентность тензора.

def: Тензор α типа $(p,0)$, т.е. $f: V^p \xrightarrow[\text{полилин.}]{} K$ наз-т ковариантным тензором валентности p

Тензор α типа $(0,q)$, т.е. $f: (V^*)^q \xrightarrow[\text{полилин.}]{} K$ наз-т контрвариантным тензором валентности q

если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то говорят о тензоре смешанного типа.

если $r = 0$, то тензор типа $(0,0) \equiv$ скаляр $\in K$

Далее, определим операции „$+$" и „$\cdot\lambda$" для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на одном и том же наборе аргументов.

Определим $\underset{\text{нулевой тензор}}{\mathbb{O}}: V^p \times (V^*)^q \to K$, т.ч. $\underset{k=1,..,p}{\forall \xi_k \in V}$ $\underset{m=1,..,q}{\forall \eta^m \in V^*}$ $\mathbb{O}(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^q) = 0$

и $\underset{\text{противопол. тензор}}{-\alpha}$, т.е. $-f: V^p \times V^q \to K$ т.ч. $\underset{k=1,..,p}{\forall \xi_k \in V}$ $\underset{m=1,..,q}{\forall \eta^m \in V^*}$ $-f(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^q) = -1 \cdot f(\xi_1,..,\xi_k,\eta^1 .. \eta^m)$

$$\Rightarrow \quad -f + f = \mathbb{O} = f + (-f)$$

Т.о. вып-ны 1°–8° аксиомы лин. пр-ва (упр.)

def: $T_{(p,q)}$ – лин. пр-во тензоров типа (p,q)

$e_1,..,e_n$ базис V

$\omega^1,..,\omega^n$ базис V^*, сопряженный e

$\xi_k \in V$, $k=1,..,p$ вектор (контрвариантный) $\qquad \xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_k^1 \\ \vdots \\ \xi_k^n \end{pmatrix}$ - коор-ты ξ_k отн-но базиса e

$\eta^m \in V^*$, $m=1,..,q$ ковектор (ковариантный) $\qquad \eta^m = \eta^m_{i_m} \omega^{i_m} \longleftrightarrow (\eta^m_1 \ldots \eta^m_n)$ - коор-ты η^m отн-но базиса ω

$\alpha \equiv f$ полилин. ф-ция $\Rightarrow$

тензор типа (p,q)

$$\boxed{f(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^m) = \xi_1^{j_1} \cdot\cdot \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \cdots \eta^q_{i_q} f(e_{j_1},..,e_{j_p},\omega^{i_1},..,\omega^{i_q})} \quad (1)$$

$\boxed{\alpha \in T_{(p,q)}}$

$$\boxed{\alpha^{i_1..i_q}_{j_1..j_p} := f(e_{j_1},..,e_{j_p},\omega^{i_1},..,\omega^{i_q})} \quad (2)$$

координаты (компоненты) тензора α отн-но базисов e и ω

Т.о, очевидно, значение полилин. ф-ии f (а значит и тензора α), полностью опр-ся её значениями на всевозможных p-наборах базисных векторов e_j и q-наборах базисных ковекторов ω^i

$$\boxed{f(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^m) = \alpha^{i_1..i_q}_{j_1..j_p} \xi_1^{j_1} \cdot\cdot \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \cdot\cdot \eta^q_{i_q}} \quad (1')$$

def: $s = (p+q)$ – мерной матрицей порядка n наз-ся мн-во элементов, занумерованных двумя типами индексов: верхних $i_1,..,i_q$ и нижних $j_1,..,j_p$, при этом все индексы пробегают значения от 1 до n.

$$\boxed{A = (\alpha^{i_1..i_q}_{j_1..j_p})} \qquad \begin{matrix} i_m = 1,..,n & m = 1,..,q \\ j_k = 1,..,n & k = 1,..,p \end{matrix}$$

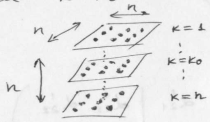
$s=(p+q)$ – мерная м-ца порядка n содержит $\boxed{n^{p+q} = n^s \text{ элементов.}}$

__Примеры:__ 1) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $\quad A=(a^i_j)_{n\times n}$ $\quad A=(a^{ij})_{n\times n}$

__двумерные__ м-цы порядка n (n^2 элементов)

2) $A=(\alpha^i_{jk})_{n\times n\times n}$ __3-хмерная__ м-ца порядка n

фиксируем $k=k_0 \rightsquigarrow$ получаем $(\alpha^i_{jk_0})$ – обычная двумерная м-ца.



„куб" из n^3 чисел.

аналогично, __4-хмерная__ м-ца – упорядоч. набор из n 3-х мерных м-ц.

Т.о. $\forall\ \alpha\in T_{(p,q)} \longrightarrow A$ – $(p+q)$ – мерная м-ца компонент α

Верно и обратное $\forall$ $(p+q)$ – мерной м-це A порядка n $\longrightarrow$ полилин. ф-ю f по формулам (1)(2), где $e_1\ldots e_n$ некоторый фиксир. базис V, а $\omega^1,\ldots,\omega^n$ базис V^*, сопряж. e.

Т.о. получаем $\boxed{\alpha\in T_{(p,q)} \underset{\text{взодн.}}{\longleftrightarrow} A\ (p+q)\ \text{мерн. м-ца порядка } n}$

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующих компонент их матриц, т.е. наше вз-одн. соответствие обладает св-вом лин-ти, т.е. явл-ся __изоморфизмом__

$$\boxed{T_{(p,q)} \cong A=(\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}) \cong K^{n^{p+q}}} \Rightarrow \boxed{\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}}$$

__Соглашение о порядке записи эл-тов многомерной матрицы (т.е. матрицы тензора)__

__общее правило:__ первый индекс всегда верхний левый индекс, далее по верхней строке, а затем по нижней.

$\exists\ n=2$

$r=2$ возможные варианты матриц: $A=(\alpha^i_j)$ $\quad A=(\alpha^{ij})$ $\quad A=(\alpha_{ij})$ $\quad i=1,2$; $j=1,2$

1-й индекс – всегда строка

2-ой индекс – всегда столбец

$$A=(\alpha^i_j)=\begin{pmatrix}\alpha^1_1 & \alpha^1_2\\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2\end{pmatrix} \qquad A=(\alpha^{ij})=\begin{pmatrix}\alpha^{11} & \alpha^{12}\\ \alpha^{21} & \alpha^{22}\end{pmatrix}$$

$r=3$ $\quad A=(\alpha^{ijk})$ $\quad A=(\alpha^{ij}_k)$ $\quad A=(\alpha^i_{jk})$ $\quad A=(\alpha_{ijk})$

1-й индекс – всегда строка

2-ой индекс – всегда столбец.

3-й индекс – всегда „слой"

$$A=(\alpha^i_{jk})=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha^1_{11} & \alpha^1_{21} & \alpha^1_{12} & \alpha^1_{22}\\ \alpha^2_{11} & \alpha^2_{21} & \alpha^2_{12} & \alpha^2_{22}\end{array}\right)\\ \text{1 слой} \qquad \text{2 слой}\end{array}$$

$$A=(\alpha_{ijk})=\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha_{111} & \alpha_{121} & \alpha_{112} & \alpha_{122}\\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \alpha_{212} & \alpha_{222}\end{array}\right)$$

$r=4$ 1-й индекс – всегда строка

2-ой индекс – всегда столбец

3-й индекс – всегда слой

4-й индекс – всегда „сечение"

$$A=(\alpha^{ij}_{km})=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}A_{11} & A_{12}\end{array}\\ \left(\begin{array}{cc|cc}\alpha^{11}_{11} & \alpha^{12}_{11} & \alpha^{11}_{12} & \alpha^{12}_{12}\\ \alpha^{21}_{11} & \alpha^{22}_{11} & \alpha^{21}_{12} & \alpha^{22}_{12}\\ \hline \alpha^{11}_{21} & \alpha^{12}_{21} & \alpha^{11}_{22} & \alpha^{12}_{22}\\ \alpha^{21}_{21} & \alpha^{22}_{21} & \alpha^{21}_{22} & \alpha^{22}_{22}\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{1 слой}\\ \\ \text{2 слой}\end{array}\\ \begin{array}{cc}A_{21} & A_{22}\end{array}\\ \text{1 сечение} \qquad \text{2 сечение}\end{array} = \left(\begin{array}{c|c}A_{11} & A_{12}\\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right)$$

__Примеры:__

1) $f\in V^*$ $\quad f$ – $(1,0)$ __тензор__ (1 раз ковариантный)

$f: V\longrightarrow K$ лин.

$\forall\ \xi\in V$ $\quad \xi=\xi^i e_i$ $\quad f(\xi)=\xi^i \underbrace{f(e_i)}_{\alpha_i} \longleftrightarrow A=(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ 1 мерная м-ца

$e_1\ldots e_n$ базис V

2) V_3 – 3-х мерн. геом. вектора. $\quad f: V_3\times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \forall\ \bar a,\bar b\in V_3$ $\quad \underbrace{f(\bar a,\bar b)=|\bar a||\bar b|\cos\varphi}_{\text{скал. пр-е}}$ $\quad \varphi=\angle(\bar a,\bar b)$

очевидно, f – билинейная ф-я – __тензор типа (2,0)__, $f\in T_{(2,0)}$

$\exists\ e_1=\bar i$, $e_2=\bar j$, $e_3=\bar k$

$f(\bar a, \bar b) = \alpha_{ij} a^i b^j$ $\quad \bar a = a^i e_i, \ \bar b = b^j e_j, \quad \alpha_{ij} = f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

$\Rightarrow f \longleftrightarrow A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$f(\bar a, \bar b) = a^T A b \Rightarrow$ в нашем случае $f(\bar a, \bar b) = a^T b = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i$ (т.к. оба индекса наверху пишем значок Σ)

$\boxed{?}$ Как изменится вид тензора, если выбрать другой – „новый" – базис в пр-ве V?

$e_1 \ldots e_n$, $e_1' \ldots e_n'$ базисы пр-ва V $\quad T = T_{e \to e'}, \ S = T^{-1} = T^T_{\omega \to \omega'}$ $\quad \forall x \in V \quad x = Tx' \quad x = x^i e_i = x'^i e_i'$ $\quad \boxed{x^i = t^i_j x'^j}$

$\omega^1 \ldots \omega^n$, $\omega'^1 \ldots \omega'^n$ базисы пр-ва V^*, сопряжен. к e и e', соот-но $\quad \forall a \in V^* \quad a = a'S \quad a = a_j \omega^j = a_j' \omega'^j$ $\quad \boxed{a_i = a_j' S^j_i}$

$\Rightarrow \forall \xi_k \in V \quad \xi^{j_k}_k = t^{j_k}_{r_k} \xi'^{r_k}_k \qquad j_k = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, p$

$\forall \eta^m \in V^* \quad \eta^m_{i_m} = S^{u_m}_{i_m} \eta'^m_{u_m} \qquad i_m = 1, \ldots, n; \quad m = 1, \ldots, q$

$\Rightarrow$ подставим в (1')

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \boxed{\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} t^{j_1}_{r_1} \ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1} \ldots S^{u_q}_{i_q}} \xi'^{r_1}_1 \ldots \xi'^{r_p}_p \eta'^1_{u_1} \ldots \eta'^q_{u_q} =$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенным вверху и внизу, происходит суммирование (i_m, j_k) $\Rightarrow$ в результате, просуммировав, получим новую компоненту со штрихованными индексами.

$$= \boxed{\alpha'^{u_1 \ldots u_q}_{r_1 \ldots r_p}} \xi'^{r_1}_1 \ldots \xi'^{r_p}_p \eta'^1_{u_1} \ldots \eta'^q_{u_q},$$ т.о. получим снова тензор типа (p,q)

Т.о., при замене базиса тензор типа (p,q) остаётся тензором того же типа, а его координаты меняются по следующему закону:

$$\boxed{\underbrace{\alpha'^{u_1 \ldots u_q}_{r_1 \ldots r_p}}_{\text{коор-ты тензора в „новых" базисах } e', \omega'} = \underbrace{\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p}}_{\text{коор-ты тензора в „старых" базисах } e, \omega} t^{j_1}_{r_1} \ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1} \ldots S^{u_q}_{i_q}} \quad (3)$$

верхние индексы $\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{\ldots}$ преобразуются с м-цей S, т.е. по контрвариантному закону, поэтому наз-ся контрвариантными индексами, а тензор q-раз контрвариантным

Соот-но, нижние индексы $\alpha^{\ldots}_{j_1 \ldots j_p}$ преобразуются с матрицей T, т.е. по ковариантному закону, поэтому наз-ся ковариантными индексами, а тензор p раз ковариантным.

Примеры: 1) тензор типа $(0,0) \equiv \lambda \in K$, очевидно, не меняется при замене базиса, т.е. инвариант

2). $A = (a^i_j)_{n \times n}$ м-ца тензора $\alpha \in T_{(1,1)}$

$a'^k_m = a^i_j t^j_m S^k_i \iff A' = SAT = T^{-1}AT$ получаем ф-лу замены м-цы лин. опер. при замене базиса.

3) $\forall f \in V^*$ тензор типа $(1,0) \longleftrightarrow A = (a_i)_{1 \times n} = a \in K_n$ $\quad a_j' = a_i t^i_j \iff a' = aT$ ковариантн. $\quad a_i = f(e_i)$

$\forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i = x'^j a_j' = a_i \boxed{t^i_j x'^j} = a_i x^i$

$V \cong V^{**} \quad x(f) \quad x: V^* \to K$ тензор типа $(0,1)$ $\quad x'^j = S^j_i x^i \iff x' = Sx \quad x^i = x(\omega^i)$ контрвариант.

$a_i x^i = a_j' x'^j = x^i \boxed{S^j_i a_j'} = x^i a_i$

4) $\alpha \in T_{(1,2)} \Rightarrow A = (\alpha^{ij}_k)$ $\quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{A_1} & \multicolumn{3}{c|}{A_2} & \multicolumn{3}{c}{A_3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -7 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Найти α'^{21}_2

$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & t_2 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad S = T^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} S^1 \\ S^2 \\ \end{array} \qquad \alpha'^{21}_2 = \alpha^{ij}_k t^k_2 S^2_i S^1_j$

2ая строка S

2ой столбец T

1ая строка S

$\exists$ К фиксир. $\alpha^{ij}_k \in A_k$ $\quad \alpha^{ij}_k S^2_i S^1_j \iff S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow \underbrace{(S^2 A_k (S^1)^T) t^k_2}_{\alpha'^{21}_2} = (2 \ -17 \ -5) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -19$

Вернемся к def тензора. Тензор был определен нами как полилинейная ф-ция и наше def не зависило от выбора базиса в пр-ве V. Но, при этом, тензор оказался согласован с заменой базиса, т.е. после замены базиса тензор остался тензором, причем того же типа. Для такого рода объектов исп-ся термин геометрический объект. Поэтому сущ-т другой подход к def. тензора.

def: ($2^{ое}$ def тензора) Тензором α типа (p,q) наз-ся геометрический объект на пр-ве V, который описывается A $(p+q)$ мерной матрицей элементов поля K размерности $n = \dim V$. При этом, каковы бы не были базисы e и e' в пр-ве V и соответствующие им сопряженные базисы V^* ω и ω', соответствующие компоненты матриц A и A' должны быть связаны формулой (3).

Операции „+" и „$\cdot\lambda$" между двумя тензорами одного типа, очевидно, опр-ся в этом случае как операции „+" и „$\cdot\lambda$" соответствующих компонент матриц тензоров.

При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут уд-ть ф-ле (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр снова будет получать тензор того же типа, что и исходные.

Действительно, $\forall \lambda \in K$; $\alpha, \beta \in T(p,q)$

$$(\lambda\alpha+\beta)^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} := \lambda \cdot \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} + \beta^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p}$$

$$(\lambda\alpha+\beta)^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} t^{j_1}_{r_1} \ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1} \ldots S^{u_q}_{i_q} = \left(\lambda\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} + \beta^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p}\right) t^{j_1}_{r_1} \ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1} \ldots S^{u_q}_{i_q} =$$

$$\underset{\alpha,\beta \in T(p,q)}{\overset{\text{т.к.}}{=}} \lambda\alpha'^{u_1 \ldots u_q}_{r_1 \ldots r_p} + \beta'^{u_1 \ldots u_q}_{r_1 \ldots r_p} = (\lambda\alpha'+\beta')^{u_1 \ldots u_q}_{r_1 \ldots r_p} = (\lambda\alpha+\beta)'^{u_1 \ldots u_q}_{r_1 \ldots r_p}$$

Т.о. лин. операциям на пр-ве полилин. ф-й соответствуют лин. опер. над многомерными м-цами с сохранением св-ва (3). Поэтому def 1 $\Leftrightarrow$ def 2.

В зависимости от поставленой задачи, мы будем исп-ть как $1^{ое}$, так и $2^{ое}$ def.

1.3 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

§ 3 Произведение тензоров. Базис пр-ва тензоров. Операция свертки.

def: $\alpha \in T_{(p_1,q_1)}$, $\beta \in T_{(p_2,q_2)}$

Произведением тензоров α и β наз-ся тензор $\boxed{\gamma = \alpha \otimes \beta} \in T_{(p_1+p_2,\, q_1+q_2)}$, компоненты которого опр-ся следующим равенством:

$$\boxed{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}} = \alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} \cdot \beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}}}$$

корректность def: надо проверить выполнение св-ва (3) для новой многомерной м-цы γ:

$$\gamma'^{i_1' \dots i_{q_1}' k_1' \dots k_{q_2}'}_{j_1' \dots j_{p_1}' m_1' \dots m_{p_2}'} = \alpha'^{i_1' \dots i_{q_1}'}_{j_1' \dots j_{p_1}'} \cdot \beta'^{k_1' \dots k_{q_2}'}_{m_1' \dots m_{p_2}'} \underset{\alpha, \beta\text{ - тензоры}}{=} \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} \beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}}}_{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}}} t^{j_1}_{j_1'} \dots t^{j_{p_1}}_{j_{p_1}'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_{q_1}'}_{i_{q_1}} t^{m_1}_{m_1'} \dots t^{m_{p_2}}_{m_{p_2}'} S^{k_1'}_{k_1} \dots S^{k_{q_2}'}_{k_{q_2}} =$$

$$= \gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}} t^{j_1}_{j_1'} \dots t^{j_{p_1}}_{j_{p_1}'} t^{m_1}_{m_1'} \dots t^{m_{p_2}}_{m_{p_2}'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_{q_1}'}_{i_{q_1}} S^{k_1'}_{k_1} \dots S^{k_{q_2}'}_{k_{q_2}} \Rightarrow \text{св-во (3) вып-но} \Rightarrow \gamma \in T_{(p_1+p_2,\, q_1+q_2)}$$

Замечание: $\forall \lambda \in K$ - тензор типа $(0,0)$ $\Rightarrow$ $\lambda \alpha = \lambda \otimes \alpha = \alpha \otimes \lambda$

Тензорное произведение, очевидно, ассоциативно, но не коммутативно! $\boxed{\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha}$

Пример: $\alpha, \beta \in T_{(1,0)}$ $\alpha = (1\ 0\ {-1})$ $\beta = (0\ 3\ 5)$

$\gamma_1 = \alpha \otimes \beta = (\alpha_i \beta_j) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_1$ $\quad \gamma_2 = \beta \otimes \alpha = (\beta_i \alpha_j) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2$

$\gamma_1 \in T_{(2,0)}$ $\quad \gamma_2 \in T_{(2,0)}$

$\gamma_1 \neq \gamma_2$ $\quad A_1 = A_2^T$

Утв: 1) $\alpha \in T_{(p,0)}$, $\beta \in T_{(0,q)}$ $\Rightarrow$ $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$

2) $\otimes$ дистрибутивно

В смысле 1[го] def тензора произведению тензоров будет соот-ть произведение функций, определяющих эти тензоры.

$\alpha \longleftrightarrow f : V^{p_1} \times (V^*)^{q_1} \to K$

$\beta \longleftrightarrow g : V^{p_2} \times (V^*)^{q_2} \to K$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = \alpha \otimes \beta \longleftrightarrow f \cdot g : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \to K}$

$\forall\ \xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V$ $\quad \forall\ \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$

$$f \cdot g(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2}) = \underbrace{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}}}_{\text{подставим выражения компонент } \gamma \text{ через компоненты } \alpha \text{ и } \beta} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \eta^1_{i_1} \dots \eta^{q_1}_{i_{q_1}} \theta^1_{k_1} \dots \theta^{q_2}_{k_{q_2}} =$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \eta^1_{i_1} \dots \eta^{q_1}_{i_{q_1}}}_{f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1})} \cdot \underbrace{\beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \cdot \theta^1_{k_1} \dots \theta^{q_2}_{k_{q_2}}}_{g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})}$$

В частности, $\forall \underset{\text{лин. форма}}{f^j} \in T_{(1,0)}$, $j = 1, \dots, p$ $\quad f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p \in T_{(p,0)}$

$\forall\ \xi_1, \dots, \xi_p \in V$ $\quad \boxed{f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = f^1(\xi_1) \cdot f^2(\xi_2) \cdot \dots \cdot f^p(\xi_p)}$

$\forall\ g_j \in T_{(0,1)}$ $j = 1, \dots, q$ $\quad g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q \in T_{(0,q)}$

$\forall\ \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$ $\quad \boxed{g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q(\eta^1, \dots, \eta^q) = g_1(\eta^1) \cdot g_2(\eta^2) \cdot \dots \cdot g_q(\eta^q)}$

$$\Rightarrow \boxed{f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \dots f^p(\xi_p) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_q(\eta^q)} \quad (4)$$

Теорема: (о базисе пр-ва $T_{(p,q)}$)

$e_1, \dots, e_n$ базис V, $\omega^1, \dots, \omega^n$ базис V^*, сопряжен. e

Совокупность тензоров вида $\boxed{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}}$ по всевозможным наборам индексов $(j_1, \dots, j_p, i_1, \dots, i_q)$, где $j_k = 1, \dots, n$, $i_m = 1, \dots, n$ явл-ся базисом пр-ва $T_{(p,q)}$

Док-во: очевидно, $\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}\in T_{(p,q)}$, т.к. $\underset{\text{лин. форма}}{\omega^j: V\to K}$, а $\underset{\text{лин. отобр.}}{e_i: V^*\to K}$

$\omega^j\in T_{(1,0)}$ $\quad e_i\in T_{(0,1)}$

порождающая: $\forall\, \alpha\in T_{(p,q)} \leftrightarrow f$ полилин. ф-я

$\forall\, \xi_1,\ldots,\xi_p\in V\quad \forall\, \eta^1,\ldots,\eta^q\in V^*\quad f(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q)=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\underbrace{\xi_1^{j_1}\ldots\xi_p^{j_p}\eta^1_{i_1}\ldots\eta^q_{i_q}}_{\omega^{j_1}(\xi_1)\ldots\omega^{j_p}(\xi_p)e_{i_1}(\eta^1)\ldots e_{i_q}(\eta^q)} =$ св-во(4) $=$

$$=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}}\ \Rightarrow \text{порожд.}$$

лин. независимость: $\exists\ \underset{\text{нулевой тензор}}{\mathbb{O}}=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}$

применим нулевой тензор к набору векторов $e_{m_1},\ldots,e_{m_p},\omega^{k_1},\ldots,\omega^{k_q}$

$$0=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,\omega^{j_1}(e_{m_1})\ldots\omega^{j_p}(e_{m_p})\cdot e_{i_1}(\omega^{k_1})\ldots e_{i_q}(\omega^{k_q})=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\underbrace{\delta^{j_1}_{m_1}\ldots\delta^{j_p}_{m_p}\delta^{k_1}_{i_1}\ldots\delta^{k_q}_{i_q}}_{\text{символы Кронекера}}=\alpha^{k_1\ldots k_q}_{m_1\ldots m_p}$$

верно для любого набора индексов $m_1\ldots m_p,k_1\ldots,k_q$ $\Rightarrow$ нулевая комбинация тривиальна $\Rightarrow$ лин. незав ∎

Пример: $\alpha=(\omega^1-2\omega^2+\omega^3)\otimes(3\omega^1+\omega^2)\otimes e_2+(\omega^2+2\omega^3)\otimes\omega^1\otimes e_3$

1) найти значение α на векторах $\xi_1=2e_1-e_2$, $\xi_2=e_1+2e_2-e_3$, $\eta=\omega^2-\omega^3$

2) записать матрицу тензора.

1) $\alpha(\xi_1,\xi_2,\eta)=(\xi_1^1-2\xi_1^2+\xi_1^3)(3\xi_2^1+\xi_2^2)\cdot\eta_2+(\xi_1^2+2\xi_1^3)\cdot\xi_2^1\cdot\eta_3=(2+2+0)(3\cdot1+2)\cdot1+(-1+2\cdot0)1\cdot(-1)=21$

$$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\quad\eta=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

2) $\alpha\in T_{(2,1)}\ \Rightarrow\ \alpha=(\alpha^i_{jk})$

$\alpha^2_{11}=3\quad\alpha^2_{21}=-6\quad\alpha^2_{31}=3$

$\alpha^2_{12}=1\quad\alpha^2_{22}=-2\quad\alpha^2_{32}\ 1$

$\alpha_{21}=1\quad\alpha^3_{31}=2$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\3&-6&3&1&-2&1&0&0&0\\0&1&2&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\\ k=1\qquad k=2\qquad k=3\end{array}$$

Док-во: очевидно, $\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}\in T_{(p,q)}$, т.к. $\underset{\text{лин. форма}}{\omega^j: V\to K}$, а $\underset{\text{лин. отобр.}}{e_i: V^*\to K}$

$\omega^j\in T_{(1,0)}$ $\quad e_i\in T_{(0,1)}$

порождающая: $\forall\, \alpha\in T_{(p,q)} \leftrightarrow f$ полилин. ф-я

$\forall\, \xi_1,\ldots,\xi_p\in V\quad \forall\, \eta^1,\ldots,\eta^q\in V^*\quad f(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q)=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\underbrace{\xi_1^{j_1}\ldots\xi_p^{j_p}\eta^1_{i_1}\ldots\eta^q_{i_q}}_{\omega^{j_1}(\xi_1)\ldots\omega^{j_p}(\xi_p)e_{i_1}(\eta^1)\ldots e_{i_q}(\eta^q)} =$ св-во(4) $=$

$$=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}}\ \Rightarrow \text{порожд.}$$

лин. независимость: $\exists\ \underset{\text{нулевой тензор}}{\mathbb{O}}=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}$

применим нулевой тензор к набору векторов $e_{m_1},\ldots,e_{m_p},\omega^{k_1},\ldots,\omega^{k_q}$

$$0=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,\omega^{j_1}(e_{m_1})\ldots\omega^{j_p}(e_{m_p})\cdot e_{i_1}(\omega^{k_1})\ldots e_{i_q}(\omega^{k_q})=\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\underbrace{\delta^{j_1}_{m_1}\ldots\delta^{j_p}_{m_p}\delta^{k_1}_{i_1}\ldots\delta^{k_q}_{i_q}}_{\text{символы Кронекера}}=\alpha^{k_1\ldots k_q}_{m_1\ldots m_p}$$

верно для любого набора индексов $m_1\ldots m_p,k_1\ldots,k_q$ $\Rightarrow$ нулевая комбинация тривиальна $\Rightarrow$ лин. незав ∎

Пример: $\alpha=(\omega^1-2\omega^2+\omega^3)\otimes(3\omega^1+\omega^2)\otimes e_2+(\omega^2+2\omega^3)\otimes\omega^1\otimes e_3$

1) найти значение α на векторах $\xi_1=2e_1-e_2$, $\xi_2=e_1+2e_2-e_3$, $\eta=\omega^2-\omega^3$

2) записать матрицу тензора.

1) $\alpha(\xi_1,\xi_2,\eta)=(\xi_1^1-2\xi_1^2+\xi_1^3)(3\xi_2^1+\xi_2^2)\cdot\eta_2+(\xi_1^2+2\xi_1^3)\cdot\xi_2^1\cdot\eta_3=(2+2+0)(3\cdot1+2)\cdot1+(-1+2\cdot0)1\cdot(-1)=21$

$$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\quad\eta=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

2) $\alpha\in T_{(2,1)}\ \Rightarrow\ \alpha=(\alpha^i_{jk})$

$\alpha^2_{11}=3\quad\alpha^2_{21}=-6\quad\alpha^2_{31}=3$

$\alpha^2_{12}=1\quad\alpha^2_{22}=-2\quad\alpha^2_{32}\ 1$

$\alpha_{21}=1\quad\alpha^3_{31}=2$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\3&-6&3&1&-2&1&0&0&0\\0&1&2&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\\ k=1\qquad k=2\qquad k=3\end{array}$$

def: $\exists\, p, q \geq 1$ $\alpha \in T_{(p,q)}$. Приравняем один верхний индекс одному нижнему. Тогда, по правилу Эйнштейна, мы должны будем просуммировать соответствующие компоненты. В результате, получим систему элементов, у которых число верхних и нижних будет на единицу меньше.

$$\boxed{\beta^{i_1 \ldots \overset{\text{отсутствует}}{\widehat{i_k}} \ldots i_q}_{j_1 \ldots \underset{\text{отсутствует}}{\widehat{j_m}} \ldots j_p} = \alpha^{i_1 \ldots \overset{k\text{-й индекс}}{\varkappa} \ldots i_q}_{j_1 \ldots \underset{m\text{-й индекс}}{\varkappa} \ldots j_p}}$$

– эта операция наз-ся <u>сверткой тензора</u>

$\alpha \in T_{(p,q)} \rightsquigarrow \beta \in T_{(p-1,q-1)}$

<u>корректность определения:</u> надо проверить выполнение св-ва (3)

$$\beta'^{\,i_1' \ldots \widehat{i_k'} \ldots i_q'}_{\;j_1' \ldots \widehat{j_m'} \ldots j_p'} = \alpha'^{\,i_1' \ldots \varkappa' \ldots i_q'}_{\;j_1' \ldots \varkappa' \ldots j_p'} = \alpha^{i_1 \ldots i_k \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_m \ldots j_p}\, t^{j_1}_{j_1'} \ldots t^{j_m}_{\varkappa'} \ldots t^{j_p}_{j_p'}\, S^{i_1'}_{i_1} \ldots S^{\varkappa'}_{i_k} \ldots S^{i_q'}_{i_q} =$$

$$(\underset{\overset{\|}{E}}{TS})^{j_m}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k} = \begin{cases} 0, & j_m \neq i_k \\ 1, & j_m = i_k = \varkappa \end{cases}$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \ldots \varkappa \ldots i_q}_{j_1 \ldots \varkappa \ldots j_p}}_{\beta^{i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_q}_{j_1 \ldots \widehat{j_m} \ldots j_p}}\; \underbrace{t^{j_1}_{j_1'} \ldots t^{j_p}_{j_p'}}_{\text{нет } t^{j_m}_{\varkappa}}\; \underbrace{S^{i_1'}_{i_1} \ldots S^{i_q'}_{i_q}}_{\text{нет } S^{\varkappa}_{i_k}} \Rightarrow \text{вып-но (3)}$$

$\Rightarrow$ β тензор типа $(p-1, q-1)$

<u>Замечания:</u>

1) Свертка может проводится по нескольким индексам

2) Если в результате свертки получается тензор типа $(0,0)$ (т.е. скаляр), то такая <u>свертка</u> наз-ся <u>полной</u>.

<u>Примеры:</u>

1) $\alpha \in T_{(1,1)} \leftrightarrow A = (\alpha^i_j)_{n \times n}$ $\quad \underset{\text{свертка}}{\beta = (\alpha^i_i)} = \operatorname{tr} A \in K$ $\Rightarrow$ полная свертка; $\beta \in T_{(0,0)}$ инвариант отн-но замен базиса.

2) $f \in T_{(1,0)}$ – ковектор $\longleftrightarrow a = (a_1, \ldots a_n)$

$x \in T_{(0,1)}$ – вектор $\longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$$\alpha = f \otimes x = (a_j x^i) = (\alpha^i_j) \Rightarrow \underset{\text{свертка}}{\beta = (\alpha^i_i)} = a_i x^i = \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{значение}\\ \text{лин. формы } f\\ \text{на векторе } x}} = x(f)$$

3) $\alpha \in T_{(1,1)} \leftrightarrow A = (\alpha^i_j)$

$x \in T_{(0,1)} \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$$\gamma = \alpha \otimes x = (\alpha^i_j x^k) = (\gamma^{ik}_j) \in T_{(1,2)}$$

$$\underset{\text{свертка}}{\beta = (\gamma^{ij}_j)} = (\alpha^i_j x^j) = (\beta^i) \iff b = Ax$$

$(\alpha^i_j x^j) \updownarrow (Ax)^{i\text{-ая коор-та}}$ $\qquad \beta \in T_{(0,1)}$

$\updownarrow$

$b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{свертка}}{\tilde{\beta} = (\gamma^{jk}_j)} = (\alpha^j_j x^k) = (\tilde{\beta}^k) \iff \tilde{b} = (\operatorname{tr} A) \cdot x$$

$\updownarrow$

$\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^n \end{pmatrix}$

4) $\alpha \in T_{(1,1)}$ $\qquad \alpha'^{\,i'}_{\,j'} = \alpha^i_j t^j_{j'} S^{i'}_i$ = свертка по 2-м индексам тензора $\alpha \otimes T \otimes S = \gamma = (\alpha^i_j t^k_m S^\ell_r) = (\gamma^{ik\ell}_{jmr})$

$\Rightarrow \alpha'^{\,i'}_{\,j'} = \gamma^{i\,j\,i'}_{j\,j'\,i}$ свертка.

1.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметричческие тензоры.

8.4 Транспонирование тензора. Симметричные и кососимметричные тензоры.

def: $\exists\ p \geq 2$, $\alpha \in T_{(p,q)}$ $\exists\ \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ перестановка p чисел от 1 до p.

(напоминание! $\varphi: \{1, 2, .., p\} \to \{1, 2, .., p\}$ – подстановка
вз. однозн. отобр. $\sigma_k = \varphi(k)$, $k = 1, .., p$
$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) = (\varphi(1), \varphi(2), .., \varphi(p))$ – перестановка

$\varphi \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & p \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & p \end{pmatrix}$)

$\boxed{\beta = \sigma(\alpha)}$ – наз-ся тензором, полученным транспонированием тензора α перестановкой σ по нижним индексам, если $\boxed{\beta^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} = \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_{\sigma_1} \ldots j_{\sigma_p}}}$

$\boxed{p \geq 2}$

Аналогично опр-ся транспонирование по верхним индексам.

Замечание: для тензоров операция транспонирования опр-ся только по одному типу индексов; либо по нижним, либо по верхним, в отличии от произвольной многомерной м-цы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

корректность def: как и раньше надо проверить выполнение св-ва (3), т.е. что $\beta \in T_{(p,q)}$

Как известно, любая перестановка может быть получена конечным числом транспозиций. Поэтому, достаточно показать, что св-во (3) вып-ся при транспонировании тензора по паре индексов.

$$\exists\ \beta^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_k \ldots j_m \ldots j_p} = \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_m \ldots j_k \ldots j_p} \Rightarrow \beta'^{i'_1 \ldots i'_q}_{j'_1 \ldots j'_k\, j'_m \ldots j'_p} = \alpha'^{i'_1 \ldots i'_q}_{j'_1 \ldots j'_m\, j'_k \ldots j'_p} =$$

т.к. $\alpha \in T_{(p,q)}$ $\Rightarrow$ вып-но (3)

$$= \underbrace{\boxed{\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{\tau_1 \ldots \tau_k \ldots \tau_m \ldots \tau_p}}}_{\beta^{i_1 \ldots i_q}_{\tau_1 \ldots \tau_m \ldots \tau_k \ldots \tau_p}} t^{\tau_1}_{j'_1} \ldots t^{\tau_k}_{j'_m} \ldots t^{\tau_m}_{j'_k} \ldots t^{\tau_p}_{j'_p} S^{i'_1}_{i_1} \ldots S^{i'_q}_{i_q} = \beta^{i_1 \ldots i_q}_{\tau_1 \ldots \tau_m \ldots \tau_k \ldots \tau_p} t^{\tau_1}_{j'_1} \ldots t^{\tau_m}_{j'_k} \ldots t^{\tau_k}_{j'_m} \ldots t^{\tau_p}_{j'_p} S^{i'_1}_{i_1} \ldots S^{i'_q}_{i_q} \Rightarrow (3)$$

вып-но.

Как будет выглядеть транспонирование тензора, если брать за определение тензора def 1?

$\alpha \in T_{(p,q)} \longleftrightarrow \alpha$ полилин. отобр. $\exists\ \boxed{\beta = \sigma(\alpha)}$ $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$

$\forall\ \xi_1, \ldots, \xi_p \in V$, $\forall\ \eta^1, \ldots, \eta^q \in V^*$ $\boxed{\beta(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q)} = \beta^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} \xi^{j_1}_1 \ldots \xi^{j_p}_p \eta^1_{i_1} \ldots \eta^q_{i_q} =$

$$= \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_{\sigma_1} \ldots j_{\sigma_p}} \xi^{j_{\sigma_1}}_{\sigma_1} \ldots \xi^{j_{\sigma_p}}_{\sigma_p} \eta^1_{i_1} \ldots \eta^q_{i_q} = \boxed{\alpha(\xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \ldots, \eta^q)}$$

Замечание: при транспонировании по нижним индексам, очевидно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспонирования по верхним индексам будет обладать теми же св-ми, что и операция транспонирования по нижним. Поэтому все результаты, которые мы получим для нижних индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

Пример: $\alpha = (\omega^1 - 2\omega^2) \otimes \omega^3 \otimes (\omega^1 - \omega^3) + \omega^2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^3$ $(\Rightarrow \alpha \in T_{(3,0)} \Rightarrow (\alpha_{ijk}))$

1) найти $\beta = \sigma(\alpha)$ $\sigma = (3, 1, 2)$, выписать матрицу.

2) найти значение β на векторах $\xi_1 = e_1 + e_2$, $\xi_2 = -e_2 - e_3$, $\xi_3 = e_1 + 2e_2$

1) $\alpha = (\alpha_{ijk}) \Rightarrow \beta = (\alpha_{kij}) = (\beta_{ijk})$ т.е. $i \leftrightarrow j_1$, $j \leftrightarrow j_2$, $k \leftrightarrow j_3$

$\sigma\ (3, 1, 2)$

$\cancel{\boxed{\alpha_{ijk} = \beta_{kij}}}$ неверно! здесь $\sigma = (2\ 3\ 1)$

$$\beta_{ijk} = \beta_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_3 j_1 j_2} = \alpha_{kij}$$

$\boxed{1\ \text{сп.}}$ выпишем м-цу α: $\alpha_{131} = 1$, $\alpha_{231} = -2$, $\alpha_{133} = -1$, $\alpha_{233} = 2$, $\alpha_{213} = 1$, остальные нули

$\Rightarrow$ $\beta_{311} = 1$, $\beta_{312} = -2$, $\beta_{331} = -1$, $\beta_{332} = 2$, $\beta_{132} = 1$, остальные нули

$$\Rightarrow \beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{2\text{ сп}}$ любая перестановка $\equiv$ конечное число транспозиций (т.е. транспонирование м-цы по паре индексов)

транспонирование многомерной м-цы по паре индексов (i,j) $\equiv$ транспонирование двумерных слоёв м-цы, получаемых фиксированием различных сочетаний всех индексов, кроме индексов (i,j).

$\beta_{ijk} = \alpha_{kij}$ $\qquad$ $\alpha_{kij} \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{\tilde{\alpha}}_{ijk} = \beta_{ijk}$

за 2 транспозиции эл-т, стоящий в матрице на позиции $(k\,i\,j)$, должен переместиться на позицию $(i\,j\,k)$

$\alpha_{kij} \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_{ikj}$

j не меняется, поэтому будем фиксировать различные значения $j = 1,2,3$, т.е. извлекать из м-цы тензора двумерные м-цы, которые после обычной операции транспонирования нужно будет поместить обратно в тензор.

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

фиксируем j в α $\rightsquigarrow$ фиксируем слой $\rightsquigarrow$ каждый слой надо транспонировать

$$\tilde{\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\tilde{\alpha}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{\tilde{\alpha}}_{ijk}$ не меняется i $\Rightarrow$ фиксируем $i = 1,2,3$ $\Rightarrow$ извлекаем двумерную м-цу $\Rightarrow$ транспонируем $\Rightarrow$ помещаем обратно.

$i = 1$ (1ая стр) $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ помещаем обратно на исходные позиции

$i = 2$ (2ая стр) $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $i = 3$ (3я стр) $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{\alpha}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \beta$$

2) $\boxed{1\text{ сп.}}$ $\quad \beta = \sigma(\alpha) \qquad \sigma = (3,1,2)$

$$\beta(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \alpha(\xi_3,\xi_1,\xi_2) = (\underbrace{\omega^1(\xi_3)}_{=1} - 2\underbrace{\omega^2(\xi_3)}_{=2}) \cdot \underbrace{\omega^3(\xi_1)}_{=0} \cdot (\omega^1(\xi_2) - \omega^3(\xi_2)) + \underbrace{\omega^2(\xi_3)}_{=2}\underbrace{\omega^1(\xi_1)}_{=1}\underbrace{\omega^3(\xi_2)}_{=-1} =$$

$= -2$

$\boxed{2\text{ сп}}$
$$\beta(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \beta_{ijk}\,\xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k = \underbrace{1}_{\beta_{311}} \cdot \underbrace{0}_{\xi_1^3} \cdots - \underbrace{2}_{\beta_{312}} \cdot \underbrace{0}_{\xi_1^3} \cdots - \underbrace{1}_{\beta_{331}} \cdot \underbrace{0}_{\xi_1^3} \ldots + \underbrace{2}_{\beta_{332}} \cdot \underbrace{0}_{\xi_1^3} \ldots + \underbrace{1}_{\beta_{132}} \cdot \underbrace{1}_{\xi_1^1} \underbrace{(-1)}_{\xi_2^3} \cdot \underbrace{2}_{\xi_3^2} = -2$$

Из def транспонирования $\Rightarrow$ лин. операция $\forall \lambda \in K$ $\forall \alpha_{1,2} \in T(p,q)$ $\boxed{\sigma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda\sigma(\alpha_2)}$

Кроме того, любая подстановка – это вз-одн. отобр. $\Rightarrow$ операция транспон. вз-одн.

$\Rightarrow$ транспонирование – это изоморфизм на $T(p,q)$

Транспонирование ассоциат., но не коммутативно (!) (очевидно, следует из соотв. свойств перестановок)

σ, τ, θ перестановки $\alpha \in T(p,q)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} (\sigma(\tau\theta))(\alpha) = ((\sigma\tau)\theta)(\alpha) \\ \sigma\tau(\alpha) \neq \tau\sigma(\alpha) \end{matrix}}$

упр! док-ть: $\alpha \otimes \beta = \sigma(\beta \otimes \alpha)$

def: тензор $\alpha \in T(p,q)$ наз-ся симметричным (по нижним индексам), если $\forall$ перестановки (нижних индексов) σ: $\boxed{\sigma(\alpha) = \alpha}$

и наз-ся кососимметричным (антисимметричным, альтернированным) (по нижним индексам), если $\forall$ перестановки (нижних индексов) σ: $\boxed{\sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha}$, где $\varepsilon(\sigma)$ – четность перестановки.

Из def автоматически получаем св-во для компонент симм. и кососимм. тензоров. $\forall\ \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} = \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_{\sigma_1} \ldots j_{\sigma_p}} \\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_{\sigma_1} \ldots j_{\sigma_p}} \end{matrix}}$$

Т.к. $\forall$ перестановка $\equiv$ конечное число транспозиций ($\equiv$ транспонирование по паре индексов)

α симм. $\Leftrightarrow \forall\ (j_k, j_m)$ $\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{\cdot j_k \cdot j_m \cdot} = \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{\cdot\cdot j_m \cdot j_k \cdots}$

α кососимм $\Leftrightarrow \forall\ (j_k, j_m)$ $\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{\cdot j_k \cdot j_m \cdots} = -\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{\cdot\cdot j_m \cdot j_k \cdots}$

или если брать $\overset{def}{\vee}$ тензора в смысле def 1:

α симм. $\Leftrightarrow \forall (k,m)$ $\alpha(\ldots, \xi_k, \ldots, \xi_m, \ldots) = \alpha(\ldots \xi_m, \xi_k, \ldots)$

α кососимм. $\Leftrightarrow \forall (k,m)$ $\alpha(\ldots \xi_k, \ldots, \xi_m, \ldots) = -\alpha(\ldots \xi_m, \ldots, \xi_k, \ldots)$

Утв: α кососимм. $\Leftrightarrow \forall (k,m)$ $\alpha(\ldots \xi, \ldots, \xi \ldots) = 0$

док-во: ($\Rightarrow$) α кососимм. $\Rightarrow \forall (k,m)$ $\alpha(\ldots \xi, \ldots, \xi \ldots) = -\alpha(\ldots \xi, \ldots, \xi \ldots) \Rightarrow \alpha(\ldots \xi, \ldots \xi \ldots) = 0$

($\Leftarrow$) $\forall (k,m)$ $\alpha(\ldots(\xi_k+\xi_m), \ldots, (\xi_k+\xi_m), \ldots) = 0$

$$\underbrace{\alpha(\ldots \xi_k, \ldots, \xi_k, \ldots)}_{=0} + \alpha(\ldots \xi_k, \ldots \xi_m \ldots) + \alpha(\ldots \xi_m, \ldots, \xi_k, \ldots) + \underbrace{\alpha(\ldots \xi_m, \ldots, \xi_m, \ldots)}_{=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\ldots \xi_k, \ldots, \xi_m \ldots) = -\alpha(\ldots \xi_m, \ldots, \xi_k \ldots) \Rightarrow \alpha \text{ кососимм.} \ \blacksquare$$

α кососимм. $\Leftrightarrow \forall (k,m)$ $\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{\cdot\cdot j \cdot j \cdots} = 0$

def: $\alpha \in T(p,0)$ наз-ся полилинейной формой. Если α к тому же, кососимметричн., то α наз-ся антисимм. полилин. формой или p-формой или внешней p-формой или внешней формой степени p

$\alpha \in T(0,q)$ наз-ся поливектором. Если α к тому же, кососимметричн, то α наз-ся q-вектором

упр: вспомнить def det из прошлого семестра. и сравнить с def p-формы.

$\alpha \in T(p,q)$ кососимм (по нижним индексам) $\Rightarrow$ 1) если $p > n \Rightarrow \alpha \equiv 0$
2) если $p = n \Rightarrow \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_n} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{1 2 \ldots n}$
$\sigma = (j_1, \ldots, j_n)$ перестановка чисел $(1 2 \ldots n)$

Примеры: 1) V_3 – пр-во 3х мерн. геом векторов.

$\alpha(\bar a, \bar b) = (\bar a, \bar b)$ скал. пр-е $\alpha \in T(2,0)$, симметр.
$\beta(\bar a, \bar b, \bar c) = \bar a \bar b \bar c$ смеш. пр-е. $\beta \in T(3,0)$, кососимм.

упр: 1) вычислить м-цы α, β.
2) убедиться $\forall \sigma: \sigma(\alpha) = \alpha$
$\forall \sigma: \sigma(\beta) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\beta$.

2) $A = (a_{ij}) \leftrightarrow \alpha \in T(2,0)$ α симм. $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow A$ симм. м-ца.
α кососим. $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Leftrightarrow A$ кососим. м-ца.

3) $\alpha \in T(3,0)$ кососимм. (3-форма) $\alpha \equiv 0$ $n > 3$

$\exists\ n = 3$ $\alpha_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{123}$, $\sigma = (j_1, j_2, j_3)$ перестановка $(1 2 3)$
Остальные эл-ты нули.

σ: $(1 2 3) \oplus$ $(2 1 3) \ominus$ $(3 1 2) \oplus$
$(1 3 2) \ominus$ $(2 3 1) \oplus$ $(3 2 1) \ominus$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

упр: как будет выглядеть м-ца α (кососимм) $\in T(3,0)$, если $n = 2$? $n = 4$?

4) $\alpha \in T(3,0)$ симметр. $\exists\ n = 3$ $\alpha_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_{\sigma_1} j_{\sigma_2} j_{\sigma_3}}$ $\forall\ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ перестановка $(1 2 3)$

$\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} =: x$
$\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211} = y$
$\alpha_{113} = \alpha_{131} = \alpha_{311} = z$
$\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122} = t$
.... и т.д. доделать

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_{111} & y & z & y & t & x & z & x & \cdot \\ y & t & x & t & \alpha_{222} & \cdot & x & \cdot & \cdot \\ z & x & \cdot & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{333} \end{array}\right)$$

упр: — // —
1) если $n = 2$?
2) если $n = 4$

1.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров

def: Альтернированием (антисимметризацией) и симметрированием тензора $\alpha \in T_{(p,q)}$ (по нижним индексам) наз-ся операции:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Alt\,\alpha = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma(\alpha) & \\ & S_p \text{ - мн-во всех перестановок чисел от 1 до } p. \\ Sim\,\alpha = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha) & \end{array}}$$

Замечания:

1) очевидно, если $\boxed{\alpha \text{ симм.} \Rightarrow Sim\,\alpha = \alpha}$ $\left(Sim\,\alpha = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} \alpha = \frac{p!}{p!} \alpha, \text{ т.к. } \sigma(\alpha) = \alpha \ \forall \sigma \right)$

если $\boxed{\alpha \text{ кососимм} \Rightarrow Alt\,\alpha = \alpha}$ $\left(Alt\,\alpha = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha = \frac{p!}{p!} \alpha, \text{ т.к. } \sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha \ \forall \sigma \right)$

2) очевидно, Alt и Sim – лин. операции на $T_{(p,q)}$, т.к. σ – лин. операция на $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (нижних) индексов.

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым происходит альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказались индексы, по которым альтернирование (симметрирование) не проводится, то эти индексы, выделяют вертикальными чертами.

например, $\alpha^{(i_1|i_2|i_3|i_4|i_5)}_{[j_1 j_2 j_3]}$ – по верхним индексам проводится симметрирование по индексам $i_1 i_3 i_5$

– по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример: $\alpha \in T_{(3,0)}$ $n=3$ $\alpha = (\alpha_{ijk}) = (\alpha_{j_1 j_2 j_3})$ $\sigma \in \left\{ \begin{matrix} (123) & (213) & (312) \\ (132) & (231) & (321) \end{matrix} \right\} = S_3$

$\sigma = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$

1) $\boxed{\beta = Sim\,\alpha} = \frac{1}{3!} \sum\limits_{\sigma \in S_3} \sigma(\alpha)$ $\underbrace{\beta = \alpha_{(ijk)}}_{\text{симметрир. по всем индексам}} \rightsquigarrow \beta_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6!} \sum\limits_{\sigma \in S_3} \alpha_{j_{\sigma_1} j_{\sigma_2} j_{\sigma_3}}$

$\boxed{\beta_{123}} = \alpha_{(123)} = \frac{1}{6} (\alpha_{123} + \alpha_{132} + \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{312} + \alpha_{321})$

$\alpha_{(123)} = \alpha_{(132)} = \alpha_{(213)} = \alpha_{(231)} = \alpha_{(312)} = \alpha_{(321)} \Rightarrow \beta_{123} = \beta_{132} = \beta_{213} = \beta_{231} = \beta_{312} = \beta_{321} = x$ (см. пример 4)

$\beta_{112} = \underset{j_1 j_2 j_3}{\alpha_{(112)}} = \frac{1}{6} (\underset{\substack{j_1 j_2 j_3 \\ (123)}}{\alpha_{112}} + \underset{\substack{j_1 j_3 j_2 \\ (132)}}{\alpha_{121}} + \underset{\substack{j_2 j_1 j_3 \\ (213)}}{\alpha_{112}} + \underset{\substack{j_2 j_3 j_1 \\ (231)}}{\alpha_{121}} + \underset{\substack{j_3 j_1 j_2 \\ (312)}}{\alpha_{211}} + \underset{\substack{j_3 j_2 j_1 \\ (321)}}{\alpha_{211}})$

$\alpha_{(112)} = \alpha_{(121)} = \alpha_{(211)} \Rightarrow \beta_{112} = \beta_{121} = \beta_{211} = y$ (см. пример 4) и т.д. $\Rightarrow$ $\boxed{\beta \text{ – симметр. тензор.}}$

2) $\boxed{\gamma = Alt\,\alpha} = \frac{1}{3!} \sum\limits_{\sigma \in S_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma(\alpha)$ $\underbrace{\gamma = \alpha_{[ijk]}}_{\text{альтернир. по всем индексам}} \rightsquigarrow \gamma_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6!} \sum\limits_{\sigma \in S_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma_1} j_{\sigma_2} j_{\sigma_3}}$

$\boxed{\gamma_{123}} = \alpha_{[123]} = \frac{1}{6} (\alpha_{123} - \alpha_{132} - \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{312} - \alpha_{321})$ $\varepsilon(\sigma) \in \left\{ \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \end{matrix} \right\}$

$\alpha_{[123]} = -\alpha_{[132]} = \alpha_{[312]} = -\alpha_{[321]} = \alpha_{[231]} = -\alpha_{[213]} \Rightarrow \gamma_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \gamma_{123}$ $\sigma = (j_1 j_2 j_3)$ перестановка (123)

$\gamma_{112} = \underset{j_1 j_2 j_3}{\alpha_{[112]}} = \frac{1}{6} (\underset{\substack{j_1 j_2 j_3 \\ (123)}}{\cancel{\alpha_{112}}} - \underset{\substack{j_1 j_3 j_2 \\ (132)}}{\cancel{\alpha_{121}}} - \underset{\substack{j_2 j_1 j_3 \\ (213)}}{\cancel{\alpha_{112}}} + \underset{\substack{j_2 j_3 j_1 \\ (231)}}{\cancel{\alpha_{121}}} + \underset{\substack{j_3 j_1 j_2 \\ (312)}}{\cancel{\alpha_{211}}} - \underset{\substack{j_3 j_2 j_1 \\ (321)}}{\cancel{\alpha_{211}}}) = 0$

$\alpha_{[112]} = -\alpha_{[121]} = \alpha_{[211]} \Rightarrow \gamma_{112} = \gamma_{121} = \gamma_{211} = 0 \Rightarrow$ все компоненты γ, у которых совпадают хотя бы 2 индекса равны нулю (см. пример. 3)

$\Rightarrow \boxed{\gamma \text{ – кососимм. тензор.}}$

3) $\boxed{\tilde\beta = \alpha_{(i|j|k)}}$ $\rightsquigarrow$ $\tilde\beta_{j_1 j j_2} = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2} \alpha_{j_{\sigma_1} j j_{\sigma_2}} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{j_1 j j_2} + \alpha_{j_2 j j_1}\right) = \alpha_{(j_1|j|j_2)}$

симметрир. по 1 и 3 индексам.

$\sigma \in \{(12)\ (21)\} = S_2 \qquad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$

$$\tilde\beta_{112} = \underset{\alpha_{(2|1|1)}}{\alpha_{(1|1|2)}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\substack{j_1 j j_2\\(12)}}{\alpha_{112}} + \underset{\substack{j_2 j j_1\\(21)}}{\alpha_{211}}\right) \Rightarrow \tilde\beta_{112} = \tilde\beta_{211}$$

$$\tilde\beta_{121} = \alpha_{(1|2|1)} = \frac{1}{2}\left(\underset{\substack{j_1 j j_2\\(12)}}{\alpha_{121}} + \underset{\substack{j_2 j j_1\\(21)}}{\alpha_{121}}\right) = \alpha_{121} \Rightarrow \boxed{\tilde\beta_{iji} = \alpha_{(i|j|i)} = \alpha_{iji}} \quad \forall i,j$$

$$\tilde\beta_{123} = \underset{\alpha_{(3|2|1)}}{\alpha_{(1|2|3)}} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{123} + \alpha_{321}\right) \Rightarrow \tilde\beta_{123} = \tilde\beta_{321} \text{ и т.д. } \Rightarrow \boxed{\tilde\beta_{ijk} = \tilde\beta_{kji}} \quad \forall i,j,k$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde\beta \text{ симметр по 1 и 3 индексам}}$

4) $\boxed{\tilde\gamma = \alpha_{[i|j|k]}}$ $\rightsquigarrow$ $\tilde\gamma_{j_1 j j_2} = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma_1} j j_{\sigma_2}} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{j_1 j j_2} - \alpha_{j_2 j j_1}\right) = \alpha_{[j_1|j|j_2]}$

$\varepsilon(\sigma) \in \{+\ -\}$

$$\tilde\gamma_{112} = \underset{-\alpha_{[2|1|1]}}{\alpha_{[1|1|2]}} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{112} - \alpha_{211}\right) \Rightarrow \tilde\gamma_{112} = -\tilde\gamma_{211}$$

$$\tilde\gamma_{121} = \alpha_{[1|2|1]} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{121} - \alpha_{121}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde\gamma_{iji} = \alpha_{[i|j|i]} = 0 \quad \forall i,j}$$

$$\tilde\gamma_{123} = \underset{-\alpha_{[3|2|1]}}{\alpha_{[1|2|3]}} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{123} - \alpha_{321}\right) \Rightarrow \tilde\gamma_{123} = -\tilde\gamma_{321} \text{ и т.д. } \Rightarrow \boxed{\tilde\gamma_{ijk} = -\tilde\gamma_{kji} \quad \forall i,j,k.}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde\gamma \text{ кососимм. по 1 и 3 индексам}}$

Упр: $\alpha \in T(2,0) \leftrightarrow A = (a_{ij})$ 1) $\mathrm{Sim}\,A = \frac{A+A^T}{2}$, $\mathrm{Act}\,A = \frac{A+A^T}{2}$ 2) Sim A - симм. м-ца? Act A - кососимм. м-ца?