Примеры. λ $\alpha(\lambda) = 4$

1. $\gamma(\lambda) = 3$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{matrix} \end{pmatrix}$
2. $\gamma(\lambda) = 2$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}$ $\underset{?}{\text{или}}$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$
3. $\gamma(\lambda) = 1$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{J}$ $\quad T = (\dots j_1 \dots j_5 \dots)$

Объединение цикл. базисов для всех λ

$$\begin{matrix} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \underset{\text{В Жорд. базисе}}{\mathcal{J}} \\ \updownarrow & & \\ \underset{\text{В исходном}}{A} & & \end{matrix}$$

$\boxed{\mathcal{J} = T^-1AT}$

$\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}}_{1,\,3} \to T\mathcal{J} = AT$

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы $T \rightsquigarrow T$

$\rightsquigarrow$ построить Жорданов базис.

2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \underset{dimK=\alpha}{K}$

   $K_r = Ker(A - \lambda E)^2$

   $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

II

1. Найдем $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m = Ker(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$

   $\Rightarrow dimK_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$\forall\lambda$ $K = K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$m(\lambda) = m$

$\alpha(\lambda) = \alpha$

$K_r = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^r \qquad r = 1 \dots m$

$V_\lambda = K_1$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_m = K_\lambda = K$

Все включения будут строгие:

$\exists\ K_{r+1} = K_r \qquad Ker\mathcal{B}^{r+1} = Ker\mathcal{B}^3$

По Теореме о rg и def: $dimK = rg\mathcal{B}^{r+1} + \cancel{def\mathcal{B}^{r+1}} = rg\mathcal{B}^r + \cancel{def\mathcal{B}^r}$ $(def\mathcal{B}^{r+1} = def\mathcal{B}^r)$

$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$

$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$

$$\begin{array}{lclcl} Im\mathcal{B}^{r+1} & = & Im\mathcal{B}^r & & \to 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие} \\ \| & & & \nearrow & \\ Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) & = & Im\mathcal{B}^r & \overset{\text{либо}}{\to} & \mathcal{B}^r = \mathbb{0} \text{ – противоречие мин. } m \end{array}$$

$Im\mathcal{B}|_K =: BK$

$Z_0 = BK$

$Z_r = BK + K_r$

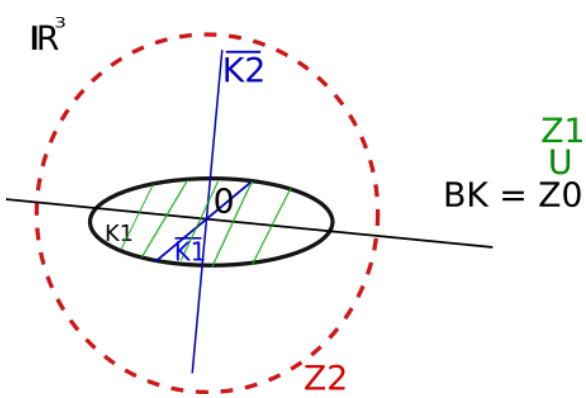
$r = 1, \ldots, m \ \ (K_m = K) \quad B : K \to K$

$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_m = K$

$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$

$\overline{K_r} \subset K_r$

$$K = \underbrace{\underbrace{\underbrace{BK}_{} \oplus \underbrace{\overline{K_1}}_{}}_{Z_1} \oplus \underbrace{\overline{K_2}}_{}}_{Z_2} \oplus \ldots \oplus \overline{K_m}$$



$\underset{dim2}{K_1} \subset \underset{dim3}{K_3}$

$\underset{def\mathcal{B}}{\underset{\|}{dimK_1}} + \underset{dimIm\mathcal{B}}{\underset{\|}{dimBK}} = 3$

$$\begin{array}{lcl} Z_1 & = & BK + K_1 \supset Z_0 \\ \bigcap & & \\ Z_2 & = & BK + K_2 \end{array}$$

$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus BK$

Теорема 1. $0 \leq r \leq m-1$

$B^rK = B^r\overline{K}_{r+1} \oplus B^r\overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r\overline{K}_m \oplus B^{r+1}K$

Доказательство.

$K = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus BK$

$\forall x \in K \quad x = \underset{\in \overline{K}_1}{x_1} + \underset{\in \overline{K}_2}{x_2} + \ldots + \underset{\in \overline{K}_m}{x_m} + \underset{\in BK}{Bx^*}$

$1 \leq r \leq m-1$

$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \ldots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^* \boxed{=}$

$$B^r x_j = B^{r-j} \underset{\mathbb{0}}{\underset{||}{B^j x_j}} = \mathbb{0}$$

$$1 \leq j \leq r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = Ker B^j = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$\boxed{=} B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^*$

Дизъюнктность?

$* \; B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = \mathbb{0}$

$B^r (\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m + Bx^*}_{y}) = \mathbb{0}$

$y \in Ker B^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K_r} \oplus BK$

$\Rightarrow \quad y \quad = x_1 + x_2 + \ldots + x_r + \underset{x_i \in \overline{K_i}}{B} x^{**}$

Однозначно

представим

$||$

$x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m + Bx^* \Rightarrow \boxed{x_i = \mathbb{0}} *$

$x_{r+i} \in \overline{K_{r+i}} \qquad \forall i = 1 \ldots m$

$\Downarrow$ подставим

$\mathbb{0} + \mathbb{0} + \ldots + \mathbb{0} + B^{r+1} x^* = \mathbb{0} \Rightarrow B^{r+1} x^* = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктн. $\square$

Следствие 1.

$K = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus$

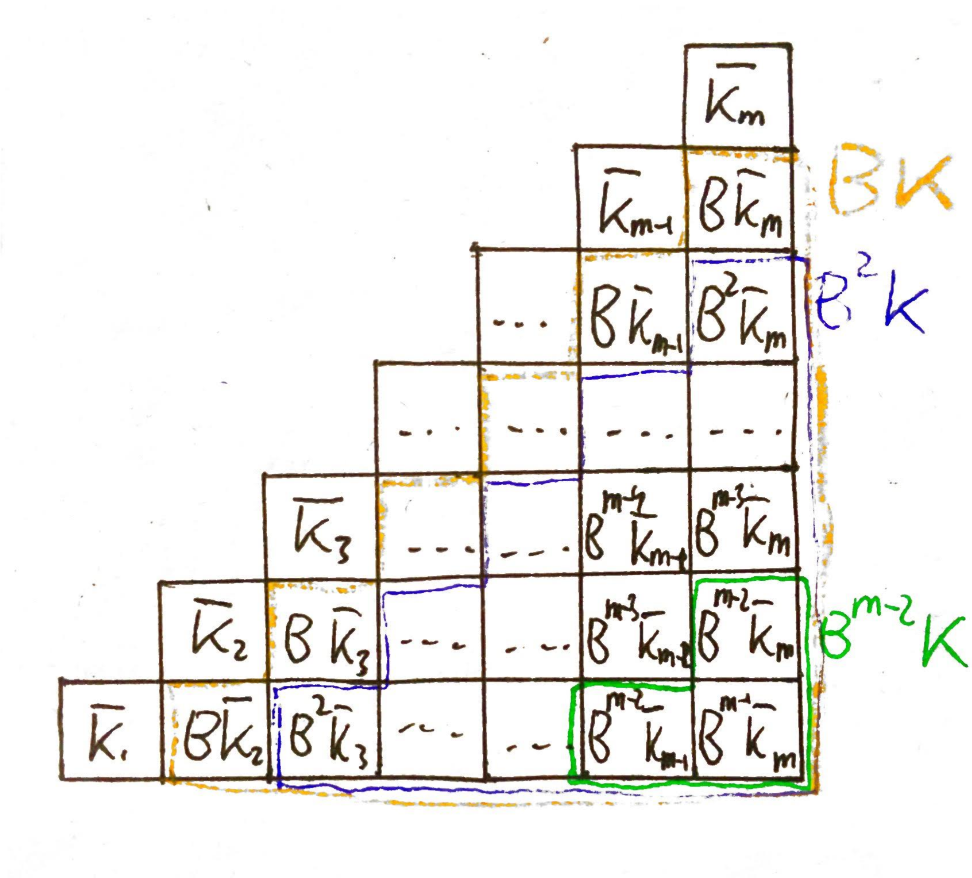
$\oplus \underline{B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4} \oplus \ldots \oplus B^{m-2} \overline{K}_{m-1} \oplus B^{m-2} \overline{K}_m \oplus B^{m-1} \overline{K}_m$

Доказательство.

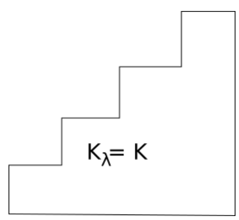
$K = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus BK$

$BK = \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus B^2 K$

$B^2 K = \underline{B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \ldots \oplus B^2 \overline{K}_m} \oplus B^3 K$ $\square$



$\overline{K}_j$ – **Опорные подпространства**



$1 \le r \le m$

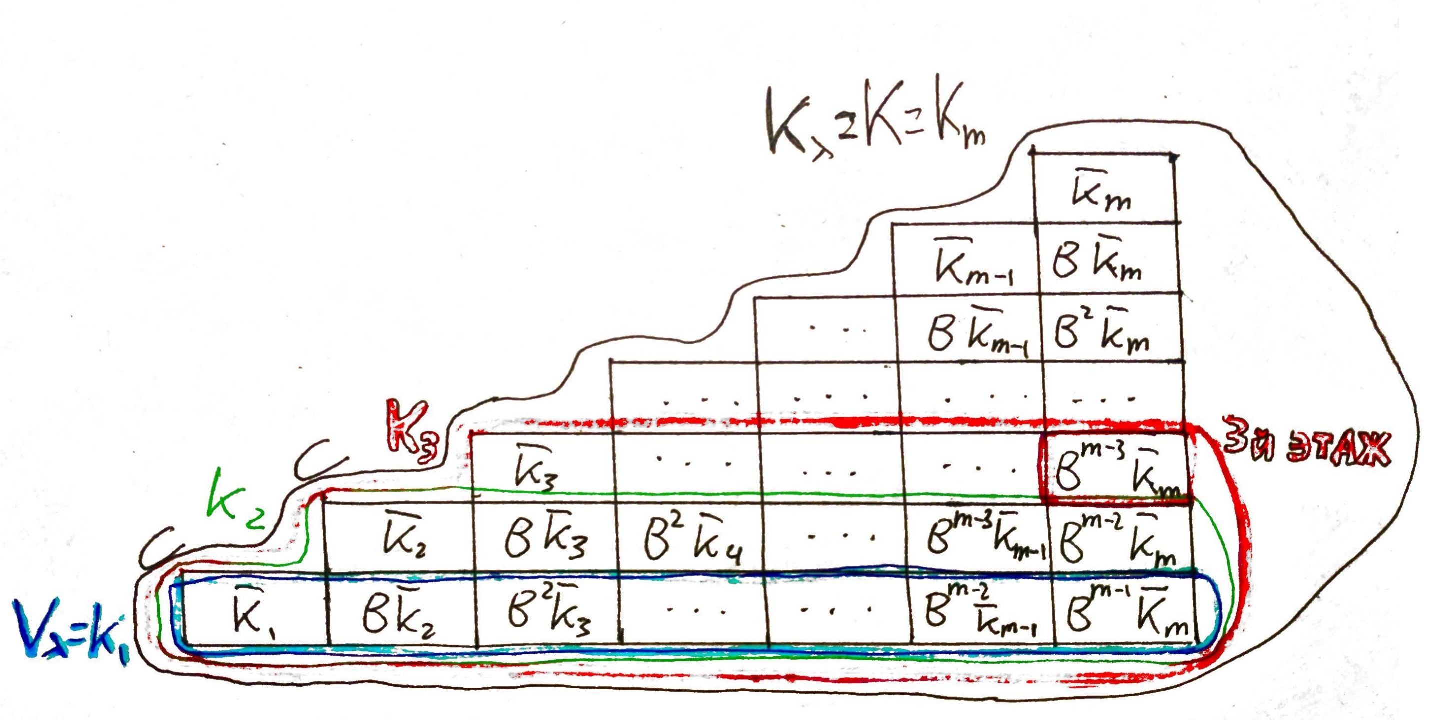
Если $\overline{K_r} \neq \mathbb{0} \longrightarrow \boxed{\tau_r = \overline{K_r} \oplus B\overline{K_r} \oplus B^2\overline{K_r} \oplus \ldots \oplus B^{r-1}\overline{K_r}}$

Башня высоты r. "Башня растет вниз"

"Основание" башни $\equiv$ опорное подпространство $\overline{K_r}$

"Крыша" башни $\equiv B^{r-1}\overline{K_r} \subset V_\lambda$

$x \in B^{r-1}\overline{K_r}$ $\quad \underline{\begin{matrix} x = B^{r-1}y \\ y \in \overline{K_r} \subseteq K_r \end{matrix}}$ $\quad \underline{Bx = B^r y = \mathbb{0}}$ $\quad x \in KerB = V_\lambda$



Если $K_r = \{\mathbb{0}\}$, то башня высоты r отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$1 \leq l \leq m$

$\overline{K}_l, B\overline{K}_{l+1}, B^2\overline{K}_{l+2}, \dots B^{m-1}\overline{K}_m \quad \subset K_l = KerB^l$

– l-ые этажи соотв. башен

Покажем: $B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\overline{K}_{l+j}) = (B^{l+j}) \underbrace{\overline{K}_{l+j}}_{\subset K_{l+j} = KerB^{l+j}} = \mathbb{0} \Rightarrow B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^{m} \tau_r$$

Теорема 2 (О размерности башни)**.**

$\forall \tau_r$ любой этаж башни имеет одну и ту же размерность $d_r = dim\overline{K}_r =$ ширина башни.

$\overline{K}_r$
$B\overline{K}_r$
$B^2\overline{K}_r$
$\dots$
$B^{r-1}\overline{K}_r$

r высота $\updownarrow$

τ_r

$\boxed{d_r = dim\overline{K}_r} =$ *ширина башни*

Доказательство.

$B^j|_{\overline{K}_r} : \overline{K}_r \to B^j\overline{K}_r$

$B^j_{\overline{K}_r}$ изоморфизм "?"

$KerB^j|_{\overline{K}_r} = \{\mathbb{0}\}$ тривиально "?"

$$
\begin{array}{lclcl}
x \in \overline{K}_r \subset K_r \subset Z_r & = & Z_{r-1} & \oplus \overset{\ni x}{\overset{\downarrow}{\overline{K}_r}} \Rightarrow \boxed{x = \mathbb{0}} & \qquad \boxed{Z_{r-1} = BK + K_{r-1}} \\
x \in \underset{j=1\ldots r-1}{KerB^j} = K_j \to & \nearrow & \cup & & \\
 & & K_{r-1} & & \\
 & & \cup & & \\
 & & \vdots & & \\
 & & \cup & & \\
 & & K_1 & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Изоморфизм $\Rightarrow dim(\overline{K_r}) = dim(B^j\overline{K}_r) = d_r$ $\square$

Следствие 1. $\sum\limits_{r=1}^{m} d_r = dimV_\lambda = \gamma(\lambda)$

$\sum\limits_{r=1}^{m} \underbrace{r \cdot d_r}_{dim\ \ \tau_r} = dimK_\lambda = dimK = \alpha(\lambda)$

Следствие 2 (Теорема Фробениуса)**.**
$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$

$(d_m = rgB^{r-1})$

Доказательство.
$B^rK = B^r\overline{K}_{r+1} \oplus B^r\overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r\overline{K}_m \oplus B^{r+1}K$

$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \ldots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$

$$
\begin{aligned}
d_1 + d_2 + \ldots + d_m &= \rho_0 - \rho_1 \\
d_2 + \ldots + d_m &= \rho_1 - \rho_2 && \downarrow - \\
d_3 + \ldots + d_m &= \rho_2 - \rho_3 && \downarrow - \\
d_{m-2} + d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-3} - \rho_{m-2} && \downarrow - \\
d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-2} - \rho_{m-1} && \downarrow - \\
d_m &= \rho_{m-1} && \downarrow - \\
\rho_m &= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}}$ $\square$