Глава VIII Тензоры

8.1. Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пр-во. Ковариантное и контрвариантное преобразования.

V над полем K ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

def: $f: V \to K$

отображение наз-ся лин. формой (лин. ф-ном), если

$\forall \lambda \in K, \ \forall u, v \in V$ $\boxed{f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)}$

одн + адд = лин-но

1.

Примери:

1. $V = \{ g \mid g \in C(\mathbb{R}) \}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\delta : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{\delta(g) = g(0)}$$

лин. форма.

дельта-ф-я Дирака

2. V_3 $\bar{a}$ – фиксирует.

$f : V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall v \in V_3 \quad f(\bar{v}) = (\bar{a}, \bar{v})$

скал. пр-е.

лин. форма

3. P_n мн-ны степени $\le n$

$m \in \mathbb{N}$

$t_0 \in \mathbb{R}$ фикс

$$f_m : P_n \to \mathbb{R}$$

$$\forall p \in P_n \quad f_m(p) = \frac{p^{(m)}(t_0)}{m!}$$ лин-форма.

4 $A_{n\times n}$ $M_{n\times n}$ пр-во м-ц $n \times n$

$$f : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$$

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}\, A$$ лин. форма.

$$f(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, \lambda B = f(A) + f(\lambda B)$$

V конечномерн.

$e = (e_1 \dots e_n)$ базис V

$\forall x \in V : \quad x = x^i e_i \left(= \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right)$

пр-ло Эйнштейна

$\longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ коэф-ты x отн-но e

$f : V \to \mathbb{R}$

лин. форма

„+" „$\cdot\lambda$" как у обычных ф-й

$f_1 + f_2$
λf_1

def: $\mathbb{O} : V \to \mathbb{R}$ лин. форма $\quad \forall v \in V \quad$ "$\mathbb{O}(v)$" $= 0$

$-f : V \to \mathbb{R}$ противопол f лин форма $\quad \forall v \in V \quad$ "$-f(v)$" $= -(f(v))$

$V^* = \{ f : V \to K$ лин-формы $\}$

вып-ны $1° - 8°$ аксиомы $=$ лин. пр-во

V^* $\underline{\text{сопряженное (дуальное)}}$
$\underline{\text{пр-во к } V}$

$f \in V^*$ $\quad \forall x \in V$

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K} = x^i a_i$$

$\longleftrightarrow (a_1 \dots a_n) = a \in K_n$ пр-во n-мерных строк

вз одн соотв. $\quad$ строка

$\underline{a_i \text{ коэф-ты } f \text{ отн-но базиса } e}$

обладает св-вом лин-ти.

$f \leftrightarrow a = (a_1 .. a_n)$
$g \leftrightarrow b = (b_1 .. b_n)$

$f + \lambda g \longrightarrow a + \lambda b$

$$V^* \cong K_n$$ (изоморфизм не естеств, т.е. зависит от базиса)

$$\Rightarrow \dim V^* = n = \dim V$$