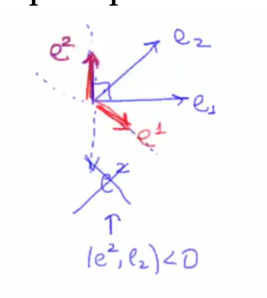
$G = (g_{ij})$ ковариантный метр. тензор
$G^{-1} = (g^{ij})$ контрвариантный метр. тензор

Определение 1. *$e_1 \dots e_n$ базис V евклидово пространство. $e^1 \dots e^n$ незывается <u>взаимным</u> для базиса $e_1 \dots e_n$, если* $\boxed{(e^i, e_j) = \delta^i_j = (e_j, e^i)}$

$e_1 \dots e_n$ *<u>взаимный</u> для базиса* $e^1 \dots e^n$

<u>Взаимные базисы $e_1 \dots e_n$ и $e^1 \dots e^n$</u>

Примеры.



$$(e_i, e^j) = \delta^j_i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, \neq j \end{cases}$$

Теорема 1. *$\forall$ базиса $e_1 \dots e_n$ пространства V $\exists!$ взаимный базис $e^1 \dots e^n$*

Доказательство. $e_1 \dots e_n$

$e^j = t^i_j e_i \quad t^i_j \leftrightarrow T_j \quad (e_i, e^j) = \delta^j_i \qquad T_{e_i \to e^j} = (T_1 \dots T_j \dots T_n)$

$$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \qquad \delta^j_i = (e_i, e^j) = \underset{\substack{\updownarrow \\ E_i^T}}{x^T}\Gamma \underset{\substack{\updownarrow \\ T_j}}{y} \Leftrightarrow E = E\Gamma T \Leftrightarrow \underset{\substack{\Updownarrow \\ T = \Gamma^{-1} \Rightarrow \exists! \text{ взаимный базис } e^j}}{\Gamma T} = E$$

∎

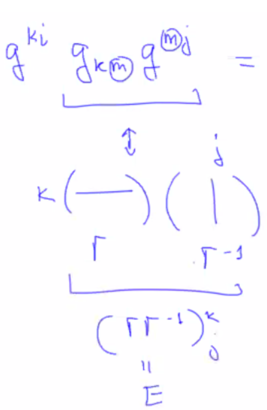
Следствие 1. *e_i, e^j взаимные базисы V*

$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \Rightarrow G(e^1 \dots e^n) = \Gamma^{-1}$, *при этом*

$$\boxed{\begin{matrix} (e^1 \dots e^n) = (e_1 \dots e_n)\Gamma^{-1} \\ (e_1 \dots e_n) = (e^1 \dots e^n)\Gamma \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} e^j = g^{ij} e_i = g^{ji} e_i \\ e_i = g_{ij} e^j = g_{ji} e^j \end{matrix}}$$

Доказательство.
$$(e^j, e^i) = \underset{\substack{\updownarrow \\ \text{скал. пр. в } V}}{\Big(\underset{\substack{\updownarrow \\ x = T_i = (\Gamma^{-1})_i}}{e^i}, \underset{\substack{\updownarrow \\ y = T_j = (\Gamma^{-1})_j}}{e^j}\Big)} = x^T \Gamma y = g^{ki} g_{km} g^{mj} =$$

$= g^{ki}\delta^j_k = g^{ji} = g^{ij} \Rightarrow G(e^1 \dots e^n) = \Gamma^{-1}$

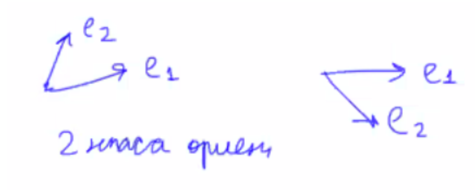


∎

Отступление:

$\left.\begin{matrix} e_1 \dots d_n \\ e'_1 \dots e'_n \end{matrix}\right.$ базисы V

Говорят, что базисы принадлежат одному классу ориентации, если $detT_{e \to e'} > 0$



В $\forall$ пространстве $\exists$ 2 класса ориентации на плоскости:

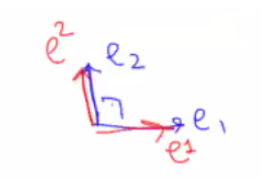
в пространстве: $\begin{matrix} \text{правая тройка} \\ \text{левая тройка} \end{matrix}$

В нашем случае, <u>взаимные базисы</u> всегда $\in$ <u>одному классу ориентации</u>,

т.к. $T_{e_i \to e^j} = \Gamma^{-1} = G(e^1 \dots e^n) > 0$

Следствие 2. *$e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \Rightarrow \underbrace{e^i = e_i \quad \forall i = 1 \dots n}_{\text{взаимные совпадают с исходными}}$*

Доказательство. e о.н.б. $\Rightarrow G(e_1 \dots e_n) = E = \Gamma \Rightarrow \Gamma^{-1} = E = T_{e_i \to e^j} \Rightarrow e^i = e_i$ □



Теорема 2.

$V \cong V^*$ из Теоремы Рисса ($\forall y \in V \leftrightarrow f \in V^* : \forall x \in V \ f(x) = (x, y)$)

$e_1 \dots e_n$ базис V

$w^1 \dots w^n$ сопряженный базис V^*

$V^* \ni \omega^i \underset{\text{изоморф.}}{\leftrightarrow} e^i \in V \ \Rightarrow e^i$ взаимные базисы к e_j

Доказательство. $\omega^i \overset{\text{Т-ма Рисса}}{\leftrightarrow} e^i$

$\forall x \in V : \omega^i(x) = (x, e^i)$

$\forall e_j : \underset{\substack{// \\ \delta^i_j \text{ т.к. сопряж. базисы}}}{\omega^i(e_j)} = (e_j, e^i) \Rightarrow e^i$ взаимный к e_j □

Примеры.

$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \ e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \ e_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ Найти взаимный базис!

Координаты e_i заданы относительно о.н.б. $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$

1 сп. $\Gamma = G(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 65 & 18 & 23 \\ 18 & 38 & 53 \\ 23 & 53 & 74 \end{pmatrix}$

$(e^1e^2e^3) = (e_1e_2e_3)\Gamma^{-1}$

$e^1\ e^2\ e^3 \leftarrow$ координаты векторов взаимного базиса в исходном о.н.б.

$$(e^1e^2e^3) = \begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&3\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}65&17&23\\18&38&53\\23&53&74\end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix}3&-113&80\\-113&4201&-3031\\80&-3031&2146\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1&-38&27\\-1&41&-29\\1&-34&24\end{pmatrix}$$

$e^1\ e^2\ e^3$ координаты базиса относительно базиса $e_1\ e_2\ e_3$

$\Gamma^{-1} = T_{e_i \to e^j}$

2 сп.

$\omega^1\omega^2\omega^3$ сопряж. к $e_1e_2e_3$

$$\begin{pmatrix}\omega^1\\\omega^2\\\omega^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix} = E \Rightarrow \begin{pmatrix}\omega^1\\\omega^2\\\omega^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}\begin{matrix}\to\omega^1\\\to\omega^2\\\to\omega^3\end{matrix}$$

По теореме 2: $(\mathbb{R}^3)^* \equiv \mathbb{R}_3 \underset{\text{изоморф. т-ма 2}}{\cong} \mathbb{R}^3$

$\omega^i \leftrightarrow e^i$

$\omega^i(x) = (x, e^i)$

$$e^1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad e^2 = \begin{pmatrix}-38\\41\\-34\end{pmatrix}\quad e^3 = \begin{pmatrix}27\\-29\\24\end{pmatrix}$$

Определение 2. e^i *и* e_j *взаимные базисы* V

$\forall x \in V \quad x = x^ie_i = x_je^j$

x^i – *<u>контрвариант.</u> координаты вектора*

x_j – *<u>ковариант.</u> координаты вектора*

$e^j \leftrightarrow \underset{\text{сопряж. к } e_i}{\omega^j} \in V^*$

$$\boxed{\begin{aligned}x^i &= \omega^i(x) = (x, e^i)\\ x_j &= e_j(x) = (x, e_j)\end{aligned}}$$

$T = T_{e \to e'} \quad S = T^{-1}$
$$\boxed{\begin{aligned}x'^i &= s^i_jx^j\\ x'_j &= t^i_jx_i\end{aligned}}$$

$e_1 \dots e_n\ \ e'_1 \dots e'_n$
$e^1 \dots e^n\ e'^1 \dots e'^n$

$$\boxed{\begin{aligned} x = x^i e_i = (x, e^i)e_i \\ x = x_j e^j = (x, e_j)e^j \end{aligned}}$$ формулы Гибса

Определение 3.
(x^i) *контрвар. координаты вектора* x *– тензор типа* $(0,1)$

(x_j) *ковар. координаты вектора* x *– тензор типа* $(1,0)$

Сверткой этих тензоров с метрическими тензорами Γ *и* Γ^{-1}*, соответственно, называются следующие операции:*

$\boxed{g_{ji}x^i = g_{ij}x^i}$ *и* $\boxed{g^{ij}x_i = g^{ji}x_i}$ *(⇔ свертка произв. тензоров)*

$$\boxed{\begin{aligned} g_{ij}x^i = g_{ij}(x, e^i) = (x, g_{ij}e^i) = (x, e_j) = x_j \\ g^{ij}x_i = g^{ij}(x, e_i) = (x, g^{ij}e_i) = (x, e^j) = x^J \end{aligned}}$$ *операции поднятия и опускания индекса тензора*

Примеры. $\forall x, y \in V \qquad (x,y) = \underbrace{g_{ij}x^i}_{x_j} y^j = x_j \underset{\underbrace{g^{ij}y_i}}{\underset{||}{y^j}} = g^{ij}x_jy_i = \xi^T\Gamma^{-1}\eta = (x,y)$

$$\begin{array}{cc} x^T\Gamma y & \Gamma^{-1} = G(e^1 \dots e^n) \\ \Gamma = G(e_1 \dots e_n) & \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \\ x = x^i e_i & x = \xi_i e^i \\ y = y^j e_j & y = \eta_j e^j \end{array}$$

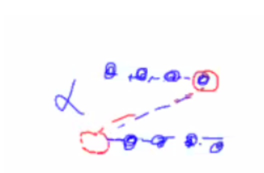
V Евклидово пространство, Γ, Γ^{-1} метр. тензоры.

Определение 4. $\alpha \in T(p,q)$ $q \geq 1$ *опусканием верхнего индекса тензора* α *называется его свертка с ковариантн. метр. тензором* (Γ) *по тому верхнему индексу, который следует опустить. В результате, получаем тензор* $\in T_{(p+1,q-1)}$

Определение 5. $\alpha \in T(p,q)$ $p \geq 1$ *поднятием нижнего индекса* α *называется его свертка с контрвариантн. метр. тензором* (Γ^{-1}) *по тому нижнему индексу, который следует поднять. В результате, получаем тензор* $\in T(p-1, q+1)$

При опускании верхнего индекса он всегда записывается нижними левым. Если опускаются несколько индексов, то они записываются в том же порядке, в котором стояли сверху.

При поднятии нижнего индекса он всегда записывается правым верхним. Если поднимаются несколько индексов, то они записываются в том же порядке, в котором стояли внизу.



$g_{j_0 s}\alpha^{i_1 \dots i_{q-1} s}_{j_1 \dots j_p} \in T(p,q) = \alpha^{i_1 \dots i_{q-1}}_{j_0 j_1 \dots j_p} \in T(p+1, q-1)$

$g^{s i_{q+1}}\alpha^{j_1 \dots j_q}_{s j_2 \dots j_p} \in T(p,q) = \alpha^{i_1 \dots i_q i_{q+1}}_{j_2 \dots j_p} \in T(p-1, q+1)$

Стандартный порядок следования индексов (сначала верхние, потом нижние)

В остальных случаях, дополнительно прежнее место индекса отмечается точкой.

Например, $\begin{matrix} g_{is}\alpha_k^{sj} = \alpha_{ik}^{\cdot j} \\ g^{sk}\alpha_{js}^{i} = \alpha_{j\cdot}^{ik} \end{matrix}$

$$g_{is}g_{kr}\alpha_m^{sjrl} = \alpha_{ikm}^{\cdot j \cdot l}$$

i стр
j стол.
k слой
l срез
m след. слой

$\alpha_{242}^{\cdot 3 \cdot 1}$ элемент расположен во
2 стр.
3 стол.
4 слое
1 срезе
2...

Примеры.

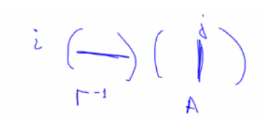
1. $\alpha \in T(2,0) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (g_{ij})$$

(a) найти матрицу тензора с поднятым 1-м индексом
(b) ... с 2-м индексом
(c) ... с 2-мя индексами

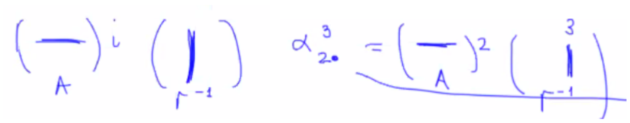
$$\Gamma^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha_j^i = g^{\boxed{ik}}_{\;ki}\,\alpha_{kj} = g^{ik}\alpha_{kj} \leftrightarrow \Gamma^{-1}A$



$$(\alpha_j^i) = \Gamma^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 9 & 25 \end{pmatrix}$$

(b) $\alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha_{i\cdot}^{j} = g^{jk}_{\boxed{kj}}\alpha_{ik} = \alpha_{ik}g^{kj} \leftrightarrow A\Gamma^{-1} \quad (\alpha_{i\cdot}^{j}) = A\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 8 & 9 & 19 \\ 13 & 7 & 25 \end{pmatrix}$



(c) $\alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha^{ij} = g^{ik}g^{mj}\alpha_{km} \leftrightarrow \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$

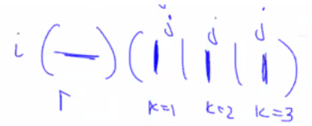
$$(\alpha^{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & 17 & 51 \\ 18 & 9 & 71 \\ 49 & 69 & 87 \end{pmatrix}$$

2. $\alpha \in T(2,1)$ Γ та же

$$\alpha^i_{jk} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\qquad\qquad A_1 \qquad\qquad\qquad A_2 \qquad\qquad\qquad A_3$$

(a) Найти матр. с опущенным верхним индексом

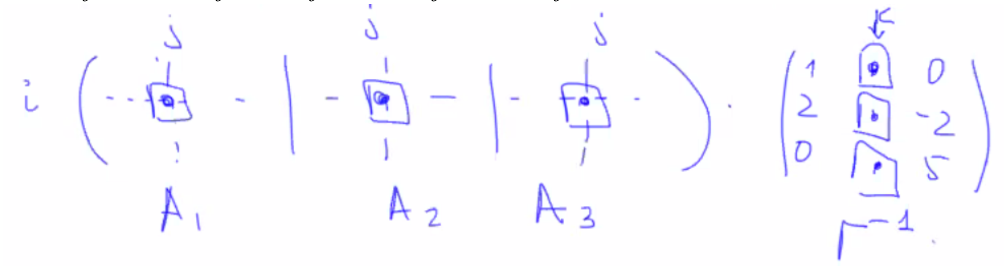
(b) С поднятым 2-м нижним



(a) $\alpha^i_{jk} \rightsquigarrow \alpha_{ijk} = g_{im}\alpha^m_{jk} = (\Gamma A_k)^i_j$

$$(\alpha_{ijk}) = (\Gamma A_1|\Gamma A_2|\Gamma A_3) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} -6 & -25 & 31 & & \\ 3 & 12 & -15 & \dots & \dots \\ 1 & 5 & -5 & & \end{array}\right)$$

(b) $\alpha^i_{jk} \rightsquigarrow \alpha^{ik}_{j\cdot} = g^{mk}\alpha^i_{jm} = \alpha^i_{j1}g^{1k} + \alpha^i_{j2}g^{2k} + \alpha^i_{j3}g^{3k} =$

$=$  $=$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot A_1 + 2A_2 + 0A_3 & 2A_1 + 5A_2 - 2A_3 & 0A_1 - 2A_2 + 5A_3 \\ k=1 & k=2 & k=3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 3 & -3 & & \\ -3 & 0 & 3 & \dots & \dots \\ 3 & -3 & 0 & & \end{array}\right)$$

$\sqsupset$ о.н.б. V $\quad \Gamma = E = \Gamma^{-1} \Rightarrow$ все тензоры, которые получены сверткой с такими метр. тензорами будут отличаться друг от друга только расположением верхних и нижних индексов.

Например, $\alpha_{ik}^{\cdot j} = \underbrace{g_{is}}_{=\delta_{is}}\alpha^{si}_k = \alpha^{ij}_k$ $\quad$ Элементы в обеих матрицах одинаковые.

e, e' о.н.б. V

$T = \underset{\text{ортог.}\to}{T_{e\to e'}}$ $\boxed{T^{-1} = S = T^T}$

$$\alpha'^{i'_1\dots i'_q}_{j'_1\dots j'_p} = \alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\; t^{j_1}_{j'_1}\dots t^{j_p}_{j'_p}\; \underset{\displaystyle s^{i'_1}_{i_1}}{\overset{t^{i_1}_{i'_1}}{\|}}\dots \underset{\displaystyle s^{i'_q}_{iq}}{\overset{t^{t_q}_{i'_q}}{\|}} = \sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_q=1}^{n}\alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\; t^{j_1}_{j'_1}\dots t^{j_p}_{j'_p}\; t^{i_1}_{i'_1}\dots t^{i_q}_{i'_q}$$

Определение 6. *Все тензоры, которые после преобразования к* <u>*одному*</u> *о.н.б.* <u>*евкл. пр-ва*</u>*, отличающиеся только расположением верхних и нижних индексов, считаем равными и* *называем* <u>*евклидовыми тензорами*</u>.

r – *валентность* $\underset{p+q}{\shortparallel}$ $\quad \alpha_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} \qquad T(p,q) \leftrightarrow$ *определяет* $(p+q)$ *евкл. тензор*

$$\boxed{\alpha'_{i'_1 \ldots i'_r} = \alpha_{i_1 \ldots i_r} t^{i_1}_{i'_1} \ldots t^{i_r}_{i'_r}}$$