Определение 1. *Кв. ф называется:*

1. *Положительно (отрицательно) определенной, если* $\forall x \neq 0 \quad \underset{(<0)}{f(x) > 0} \Leftrightarrow \underset{(f<0)}{f > 0}$
2. *Положительно (отрицательно) полуопределенной, если* $\forall x \neq 0 \quad \underset{(\leq 0)}{f(x) \geq 0} \Leftrightarrow \underset{(f \leq 0)}{f \geq 0}$
3. *Неопределенной, если* $\exists x : f(x) > 0 \qquad \exists y : f(y) < 0 \Leftrightarrow f <> 0$

Замечание.

1. Сравним с оператором $\mathcal{A} > 0$ и т.п.
2. $f > 0 \Leftrightarrow \forall x : f(x) \geq 0$, причем $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ и т.д.

   $f \geq 0 \Leftrightarrow \forall x : f(x) \geq 0$ и $\exists x \neq \mathbb{0} : f(x) > 0$ и т.д.

Критерий знакоопределенности кв. ф.

$$\underset{(f<0)}{f > 0} \Leftrightarrow \underset{(<0)}{A > 0} \Leftrightarrow \text{все с.ч. } \underset{(\lambda<0)}{\lambda > 0} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sigma(f) = (n, 0, 0) \qquad (\text{невырожд. } rgf = n = \sigma^+) \\ (\sigma(f) = (0, n, 0) \qquad (rgf = n = \sigma^-)) \end{array}$$

$$\underset{(\lambda \leq 0)}{\lambda \geq 0} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sigma(f) = (k \neq 0, 0, m \neq 0) \qquad (\text{вырожд. } rgf = \sigma^+ = k < n \qquad k + m = n) \\ (\sigma(f) = (0, k \neq 0, \neq 0) \qquad (rgf = k = \sigma^- < n \qquad k + m = n)) \end{array}$$

$$f <> 0 \Leftrightarrow A <> 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists \text{ с.ч. } \lambda > 0 \\ \exists \text{ с.ч. } \mu < 0 \end{array} \Leftrightarrow \sigma(f) = (k \neq 0, m \neq 0, l)$$

Примеры.

1. $f(x) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2$

   $\sigma(f) = (2, 1, 0) \qquad \mathbb{R}^3$

   $\sigma(f) = (2, 1, n-3) \qquad \mathbb{R}^n \quad n > 3$

   $$f \neq 0 \qquad \begin{array}{lcl} x_2 = 0 \quad x_1 = x_3 = 1 & : & f(x) = 4 > 0 \\ x_1 = x_3 = 0 \quad x_2 = 1 & : & f(x) = -2 < 0 \end{array}$$

2. $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 0 \cdot x_4^2$

   $\sigma(f) = (3, 0, n-3) \qquad \mathbb{R}^n$

   $$\begin{array}{l} n = 3 \quad f > 0 \\ n > 3 \quad f \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \qquad x \neq \mathbb{0} \\ f(x) = 0 \Rightarrow f \geq 0 \end{array}$$

Теорема 1 (Критерий Сильвестра)**.**
$\triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n \Rightarrow \qquad\qquad \triangle_k = detA_k$

$f > 0 \Leftrightarrow \triangle_1 > 0 \quad \triangle_2 > 0 \quad \triangle_3 > 0 \quad \dots \triangle_n > 0$

$f < 0 \Leftrightarrow \triangle_1 < 0 \quad \triangle_2 > 0 \quad \triangle_3 < 0 \quad \dots (-1)^n \triangle_n > 0$

Доказательство. Метод Якоби: $x = Qy \qquad Q$ унитреуг. $\qquad f(x) = x^T A x$

$f(x) = \triangle_1 y_1^2 + \frac{\triangle_2}{\triangle_1} y_2^2 + \dots + \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} y_n^2$

$f > 0 \Leftrightarrow \triangle_1 > 0 \quad \frac{\triangle_2}{\triangle_1} > 0 \quad \dots \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \triangle_k > 0 \quad \forall k = 1 \dots n$

$f < 0 \Leftrightarrow \triangle_1 < 0 \quad \frac{\triangle_2}{\triangle_1} < 0 \quad \dots \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \triangle_1 < 0 \quad \triangle_2 > 0 \quad \triangle_3 < 0 \dots$ ∎

Следствие 1. $\triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1$

$f \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \triangle_1 > 0 \quad \dots \triangle_{n-1} > 0 \quad \triangle_n = 0 \qquad$ *($f \leq 0$ аналогично)*

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \triangle_1 = 0 \Rightarrow \text{нельзя применять критерий Сильвестра}$$

$f(x) = x^T Ax$

$$\begin{matrix} x_1 \to y_2 \\ x_2 \to y_1 \rightsquigarrow g(y) = y^T By \\ x_3 \to y_3 \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x = Qy \qquad \underset{\text{невыр}}{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\boxed{f > 0 \Leftrightarrow -f < 0}$ $\qquad det \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & & \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^n detA$

$$-(\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2) = -\lambda_1 y_1^2 - \dots - \lambda_n y_n^2$$

Применение в исследовании экстремумов

$$f(\overset{=P}{x, y}) = f(\overset{=P_0}{x_0, y_0}) + \underbrace{\cancel{\tfrac{df}{1!}(P_0)}}_{\text{необходимое условие экстр.}} + \frac{d^2 f}{2!}(P_0) + \cancel{o}\left(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}^2\right)$$

P_0 – (.) экстремума

$$\sqsupset P_0 \ min \qquad \underbrace{f(P) - f(P_0)}_{>0} = \frac{1}{2}\underbrace{(f''_{xx}(P_0)dx^2 + 2f''_{xy}(P_0)dxdy + f''_{yy}(P_0)dy^2)}_{>0} + \cancel{o}(\dots)$$

Кв. ф. от $\triangle x, \triangle y$ $\qquad \begin{matrix} dx = \triangle x \\ dy = \triangle y \\ \triangle P = \begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix} \end{matrix}$

$\downarrow$ матрица

$$A = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \qquad \text{кв. ф. } (\triangle P)^T A(\triangle P)$$

Критерий Сильвестра: кв. ф. $= d^2 f > 0 \Leftrightarrow f''_{xx}(P_0) > 0, f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$ достаточное усл-е для min

$< 0 \Leftrightarrow f''_{xx}(P_0) < 0, f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$ достат. усл-е max

$$\underset{\text{нет экстр}}{f \neq 0} \qquad f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$$

И такой еще есть случай: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \Rightarrow f \neq 0$

0.1 Некоторые задачи из теории кв. форм

Задача 1: $f, g \quad f \overset{Q?}{\rightsquigarrow} g$

$$\begin{matrix} f(x) = x^T A x \\ g(y) = y^T B y \end{matrix} \qquad \underset{\text{невыр.}}{\exists\, Q?} \qquad A = Q^T B Q$$

"Да"$\Leftrightarrow \sigma(f) = \sigma(g)$

$\boxed{x = Q_1 Q_2^{-1} y} \qquad \boxed{Q = Q_1 Q_2^{-1}}$

$f(x) \to g(y) \qquad \downarrow y = Q_2 z \qquad \uparrow z = Q_2^{-1} y$

$f(x) \to$ нормальн. вид $t(z)$ т.к. $\sigma(f) = \sigma(g)$

Задача 2: $f(x), g(x) \overset{Q?}{\rightsquigarrow}$ канонич.

"Не всегда $\exists Q$"

<u>Пример:</u> $\quad f(x) = x_1^2 \qquad g(x) = x_1 x_2 \qquad \mathbb{R}^2$

$\sqsupset\ \exists Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ т.ч. $f, g \to$ канонич.

$x = Qy \qquad f(x) = (q_{11} y_1 + q_{12} y_2)^2 \Rightarrow q_{11} q_{12} = 0 \Rightarrow \sqsupset q_{12} = 0$ т.к. Q невыр. $q_{11} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = q_{11} y_1 \cdot (q_{21} y_1 + q_{22} y_2) \Rightarrow q_{11} \cdot q_{22} = 0 \Rightarrow q_{22} = 0 \Rightarrow Q$ вырожд. $\Rightarrow$ невозможно.

$\boxed{\sqsupset \underline{\underline{\underline{f > 0}}}} \Rightarrow$ "$\exists Q$"

$f > 0 \quad \underset{\text{f к норм. виду}}{\longrightarrow} \quad x = Q_1 y \qquad \tilde{f}(y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \qquad y = \overset{\text{ортогон. преобр.}}{Q_2 z} \qquad \tilde{\tilde{f}}(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$

$g \qquad \tilde{g}(y) \qquad \tilde{g}$ к канон. виду $\to \tilde{\tilde{g}}(z)$ канон.

$\tilde{f} \leftrightarrow E$

$\tilde{\tilde{f}} \leftrightarrow Q_2^T E Q_2 = \overset{=Q_2^{-1}}{Q_2^T} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ортог.}}}{Q_2} = E$

0.2 Приведение поверхности второго порядка к каноническому виду

$V_3(x, y, z) \leftrightarrow \mathbb{R}^3$

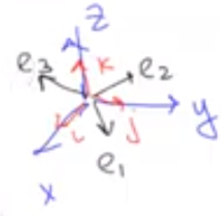
$$\underbrace{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz}_{\text{квадрат. форма } f(x,y,z) = v^T A v} + 2a_1 x + 2a_2 y + 2a_3 z + a_0 = 0$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$v^T A v + 2a^T v + a_0 = 0 \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A = A^T$$

$f(v) = 2(a, v) + a_0 = 0$

Осуществим поворот.



$T_{\underset{\text{о.н.б.}}{(ijk)}\to \underset{\text{о.н.б.}}{e_1e_2e_3}} = Q_{\text{ортог.}}$, т.ч. $f(v) \rightsquigarrow$ канонич. вид

e_1, e_2, e_3 – с.в. A попарно-ортог. и норм. <u>пр. тройка</u> $\Leftrightarrow det(e_1e_2e_3) = 1$

$$\underset{v}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \overset{Q}{\overset{\|}{T}} \underset{v'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$f(v) + 2(a, v) + a_0 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \boxed{2a^T(Q}v') + a_0 = 0$$

λ_i с.ч. A

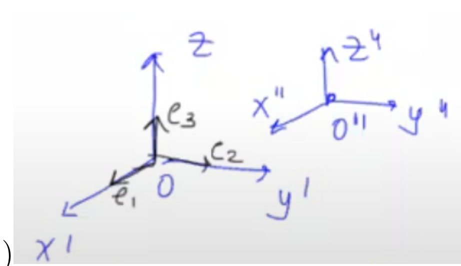
$$\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0}$$

I. $\lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 \neq 0 \quad \lambda_3 \neq 0$

Если $a'_i \neq 0$ выделяем полные квадраты по этой переменной

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_1 x' = \lambda_1 \underbrace{(x'^2 + 2\frac{a'_1}{\lambda_1} x' + \frac{a'^2_1}{\lambda_1^2}}_{(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1})^2}) - \frac{a'^2_1}{\lambda_1}$$

$$\left[\begin{array}{lcl} x'' & = & x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \\ y'' & = & y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \\ z'' & = & z' + \frac{a'_3}{\lambda_3} \end{array}\right. \quad \text{Параллельный перенос с.к. } Ox'y'z' \rightsquigarrow O''x''y''z''$$



$O'' = (-\frac{a'_1}{\lambda_1}, -\frac{a'_2}{\lambda_2}, -\frac{a'_3}{\lambda_3})$

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a'_0 = 0}$$

<u>$a'_0 \neq 0$</u>

$\to \alpha x''^2 + \beta y''^2 + \gamma z''^2 = 1$

$\alpha, \beta, \gamma > 0$ Эллипсоид

$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ однополостной гипербол.

$\alpha, \beta < 0, \gamma > 0$ двуполостной гиперболоид

$\alpha, \beta, \gamma < 0 - \emptyset$

$\underline{a_0' = 0}$

$\alpha x''^2 + \beta y''^2 = z''^2$

$\alpha, \beta > 0$
$\alpha \cdot \beta < 0$ — конус

$\alpha, \beta < 0 \quad x'' = y'' = z'' = 0$ — точка

II. $\lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 \neq 0 \quad \lambda_3 = 0$

Аналогично I выделяем полные квадраты для $\lambda_1, \lambda_2 \rightsquigarrow$ параллельный перенос

если $a_3 \neq 0 \rightsquigarrow$ парал. перенос

$$\left[\begin{array}{lcl} x'' & = & x' + \frac{a_1'}{\lambda_1} \\ y'' & = & y' + \frac{a_2'}{\lambda_2} \\ z'' & = & z' + \frac{a_0'}{2a_3} \end{array}\right. \underset{\text{парал. перенос}}{\rightsquigarrow} Ox'y'z' \rightsquigarrow O''x''y''z''$$

$O'' = (-\frac{a_1'}{\lambda_1}, -\frac{a_2'}{\lambda_2}, -\frac{a_3'}{2a_3})$

1. $a_3' \neq 0$ $\quad \boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a_3' z'' = 0}$ $\quad \alpha \cdot \beta > 0$ <u>Эллиптич. парабол.</u>

   $\alpha x''^2 + \beta y''^2 = z''$ $\quad \alpha \cdot \beta < 0$ <u>Гипербол. парабол.</u>

2. $a_3' = 0, \quad z'' = z'$ $\quad \boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0' = 0}$

   $\underline{a_0' \neq 0}$

   $\alpha x''^2 + \beta y''^2 = 1$

   $\alpha, \beta > 0$ – эллимптич. цилиндр

   $\alpha \cdot \beta < 0$ – гиперб. цилиндр

   $\alpha, \beta < 0 - \emptyset$

   $\underline{a' = 0}$

   $\alpha x''^2 = y''^2$

   $\alpha > 0 \quad y'' = \pm\sqrt{\alpha} x''$ – пара пересек. пл-тей

   $\alpha < 0 \quad x'' = y'' = 0$ – прямая, вдоль оси z"

III. $\lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + 2a_2' y' + 2a_3' z' + a_0' = 0}$ $\quad x'' = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}$ паралл. перенос

1. $a_2' \neq 0 \quad a_3' \neq 0$ поворот в плоскости $O''y'z'$ чтобы убрать слагаемое с переменной z

   $$\left[\begin{array}{lcl} y' & = & \cos\phi y'' - \sin\phi z'' \\ z' & = & \sin\phi y'' + \cos\phi z'' \end{array}\right. \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow 2a_2'(\cos\phi y'' - \sin\phi z'') + 2a_3'(\sin\phi y'' + \cos\phi z'') = y''(\underbrace{\dots}_{a''/2}) + z''(\underbrace{-2a_2' sin\phi + 2a_3'\cos\phi}_{=0})$$

   $\tan\phi = \frac{a_3'}{a_2'}$

$\rightsquigarrow \boxed{\lambda_1 x''^2 + 2a_2'' y'' + a_0' = 0}$ парабол. цилиндр

2. $a_2' \neq 0 \quad a_3' = 0$ попадает сразу в конец первого случая

3. $a_2' = a_3' = 0 \quad \boxed{\lambda_1 x''^2 + a_0' = 0} \to x''^2 = \alpha \to$

$\alpha > 0$	$x'' = \pm\sqrt{\alpha}$ – пара паралл. пл-тей
$\alpha = 0$	$x'' = 0$ – пл-ть (две совп)
$\alpha < 0$	$\emptyset$