$$
\begin{array}{c|c}
 & \overset{d_r = d}{\longleftrightarrow} \\
r \updownarrow &
\begin{array}{cccc}
g_1 & g_2 & \dots & g_d \\
Bg_1 & Bg_2 & \dots & Bg_d \\
B^2 g_1 & B^2 g_2 & \dots & B^2 g_d \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
B^{r-1} g_1 & B^{r-1} g_2 & \dots & B^{r-1} g_d
\end{array}
\end{array}
$$

Z_r

$\bar{K}_r = \mathrm{span}(g_1, \dots, g_d)$

$B\bar{K}_r$

$\vdots$

$B^{r-1}\bar{K}_r$

$B^j\big|_{\bar{K}_r}$ изоморфизм

базис $\xrightarrow{B^j}$ базис

$\mathrm{span}(g_1, \dots, g_d, Bg_1, \dots, Bg_d, B^2 g_1 \dots B^2 g_d, \dots B^{r-1} g_1, B^{r-1} g_2 \dots B^{r-1} g_d)$

$= Z_r$

$i = 1, \dots, d$ $\quad g_i, Bg_i, B^2 g_i, \dots, B^{r-1} g_i$ наз-ся <u>циклическим базисом</u>, порождённым вектором g_i

присоединённые вектора

$$S_i = \mathrm{span}(g_i, Bg_i, \ldots, B^{r-1} g_i)$$ циклическое подпр-во

$$\tilde{I}_r = \bigoplus_{i=1}^{d} S_i$$

$$A\Big|_{S_i} \longleftrightarrow$$ м-ца в базисе $g_i, Bg_i, \ldots, B^{r-1} g_i$?

$$A\Big|_{S_i} = (B + \lambda \mathcal{E})\Big|_{S_i}$$

упорядочим базис:

$B^{r-1} g_i \; B^{r-2} g_i \ldots Bg_i \; g_i$

$$Ag_i = Bg_i + \lambda g_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$ABg_i = B^2 g_i + \lambda B g_i$$

$$AB^{r-2} g_i = B^{r-1} g_i + \lambda B^{r-2} g_i$$

$$AB^{r-1} g_i = \underset{\overset{\parallel}{0}}{B^r g_i} + \lambda B^{r-1} g_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_i \in \bar{K}_r \subset K_r = \mathrm{Ker}\, B^r$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

жорд клетка $r \times r$ (блок нижн уровня)

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r} = \lambda E_r + I_r$$

$$I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\Big|_{\tau_r = \bigoplus\limits_{i=1}^{d} S_i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{J_r(\lambda)} & & & 0 \\ & \boxed{J_r(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r(\lambda)} \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

d клеток (блоков нижнего уровня)

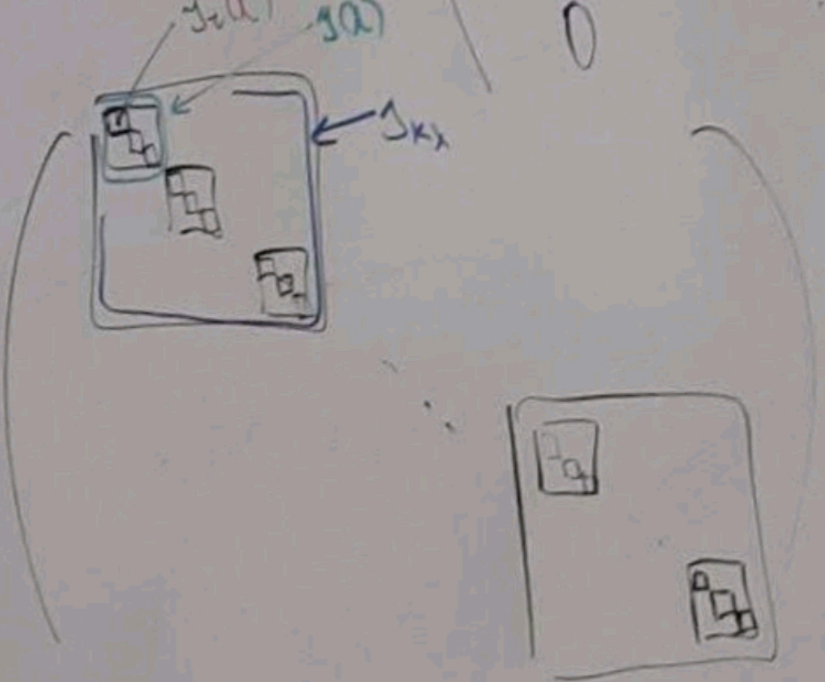
← блок среднего уровня (соот-т башне высоты r)

$$A\Big|_{K_\lambda = K = \bigoplus\limits_{r=1}^{m} \tau_r} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} J_{\cdot}(\lambda) & \\ & \ddots \\ & & J(\lambda) \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} J(\lambda) & \\ & \ddots \\ & & J(\lambda) \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} J_{\cdot}(\lambda) & \\ & \ddots \\ & & J(\lambda) \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

← блок верхнего уровня (соот-т корневому подпр-ву)

$$A = A\big|_{V = \oplus_\lambda K_\lambda} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{J_{K_\lambda}} & & & 0 \\ & \boxed{J_{K_\mu}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{K_\nu}} \end{pmatrix}$$

$=$



$= J$ жорданова форма матрицы

объединение всех циклич. базисов для всех башен для всех корневых подпр-в $=$ жорданов базис

$$j = (j_1 \dots j_k \dots j_n) \qquad T = T_{e \to j}$$

$$\boxed{J = T^{-1} A T}$$

$e_1 \ldots e_n$ базис V

$\mathcal{A} \longleftrightarrow A$

в базисе e.

$$TJ = AT$$

$\Rightarrow$ можно найти T, решив матрич. сист. ур-й

3-й алгоритм построения ЖНФ и Ж.Б для м-цы.

$$\lambda: \quad K_\lambda = K = \underbrace{\bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2 \oplus \ldots \oplus \bar{K}_m}_{\bar{K}} \oplus BK$$

1. найдем $K = K_\lambda$
2. найдем $BK = \operatorname{Im} B|_K \qquad B = A - \lambda\mathcal{E}$
3. дополним BK до K

т. е. найдем базисные вектора $\bar{K} = \bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2 \oplus \ldots \oplus \bar{K}_m = \operatorname{span}(v_1 \ldots v_t)$

4. будем строить циклич. базисы:

$$\underbrace{v_i, Bv_i, \dots, B^{\upsilon} v_i}_{\text{циклич. базис}\ \cap\ V_\lambda}, \ B^{\upsilon+1} v_i \ \text{пока не получим } 0$$

$$B^{\upsilon+1} v_i = 0$$

$\to$ клетка $\to$ Ж.ф.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = (t-5)(t-4)^3$$

$\lambda_1 = 5 \quad d(\lambda_1) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 4 \quad d(\lambda_2) = 3$

$\gamma(\lambda_2) = ?$

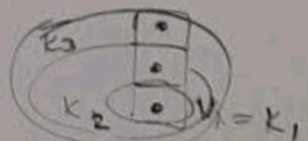
$$rg(A - \lambda_2 E) = rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-3} \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 + rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 + 1 = 3$$

$\gamma(\lambda_2) = 1 \to 1$ клетка (1 цикл. базис)

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$K = K_3 = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 E)^3 =$$



$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \Big)$$

$$BK = \operatorname{span}(Bv_1, Bv_2, Bv_3) =$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}}^{\bar{K}}$$

$$K = BK \oplus \bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2 \oplus \bar{K}_3$$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

an

$\bar{K} = \operatorname{span}(v_3) \longrightarrow$ 1 цикл. базис.

базис жорд.

v_3

$$Bv_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to V_{\lambda_2} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 v_3 = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \operatorname{span}(v)$$

$$j = \left(v_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$