Теорема 1 (LDU – разложение)**.**

$\forall k = 1\dots n-1 \qquad \triangle_k \neq 0 \Leftrightarrow$ $\exists! L$ *унитарная нижняя матрица*

$\exists! U$ *унитарная верхняя матрица*

$\exists! D = diag(\alpha_1 \dots \alpha_k)$

$\boxed{A = LDU} \qquad \alpha_i \neq 0 \ \ i = 1\dots n-1$

$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{нижнетр.}}}{L} \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{верхнетр.}}}{U}$ *неоднозначн. (не обязательно унитреугольные)*

Доказательство. $(\Leftarrow)$

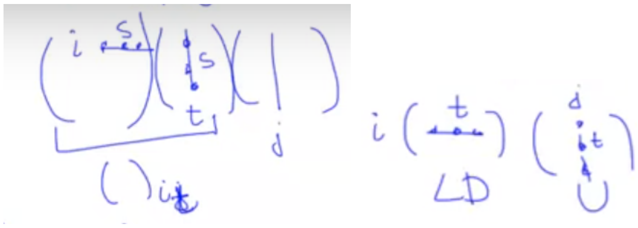
$A = LDU$

$detA = \underset{=1}{detL}\ detD\ \underset{=1}{detU} = d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n$

<u>Докажем:</u> $\begin{matrix} A_k = L_k D_k U_k \\ \triangle_k = detA_k \end{matrix}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

$$A = LDU \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \underset{\substack{\| \\ 0 \\ s > i}}{l_{is}} \ d_{st} \ \underset{\substack{\| \\ 0 \\ t > j}}{u_{tj}} = \underset{\substack{1 \le i, j \le k \\ \Updownarrow \\ (L_k D_k U_k)_{ij}}}{\sum_{s=1}^{i} \sum_{t=1}^{j} l_{is} d_{st} u_{tj}}$$



$\triangle_k = detA_k = \underset{=1}{detL_k}\ detD_k\ \underset{=1}{detU_k} = detD_k = d_1 \dots d_k$

$\triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \qquad d_k \neq 0$

$\boxed{d_k = \frac{\triangle_k}{\triangle_{k-1}}}\ k = 1\dots n$

$\triangle_0 = 1$

$(\Rightarrow) \underset{\neq 0}{\triangle_1} \dots \underset{\neq 0}{\triangle_{n-1}}$

<u>М.м.и.</u>

1. база $n = 1 \ \ \triangle_1 \neq 0 \qquad a_{11} = \underset{=L}{1} \cdot \underset{=d_1}{a_{11}} \cdot \underset{=U}{1}$
2. Инд. предпол: $\sqsupset$ верно для $n = k \qquad \triangle_1 \neq 0 \dots \triangle_k \neq 0$

   $A_k = L_k D_k U_k$ единств. образом $D_k = diag(d_1 \dots d_k)$

   $d_i \neq 0 \ \ i = 1 \dots k$
3. Инд. переход: $n = k+1$?

$$A_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_k & b_{k+1} \\ \hline C_{k+1} & d_{k+1\ k+1} \end{array}\right) \qquad L_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} L_k & 0 \\ \hline x & 1 \end{array}\right) \qquad U_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} U_k & y \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$D_{k+1} = diag(d_1 \dots d_k d_{k+1})$

$\underline{A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} U_{k+1}}$ $\quad x, y, d_{k+1}$? и единств?

$$A_{k+1} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} L_k & 0 \\ \hline x & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} D_k & 0 \\ \hline 0 & d_{k+1} \end{array}\right)}_{\left(\begin{array}{c|c} L_k D_k & 0 \\ \hline x D_k & d_{k+1} \end{array}\right)} \left(\begin{array}{c|c} U_k & y \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{L_k D_k U_k} & L_k D_k y \\ \hline x D_k U_k & x D_k y + d_{k+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{A_k} & b_{k+1} \\ \hline c_{k+1} & a_{k+1\ k+1} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{L_k D_k}^{\text{невырожд}} \; y = b_{k+1} \\ x \; \underbrace{D_k U_k}_{\text{невырожд}} = c_{k+1} \\ x D_k y + d_{k+1} = a_{k+1 k+1} \end{cases}$$

$det D_k = d_1 \dots d_k$

$$d_k = \frac{\triangle_k}{\triangle_{k-1}} \neq 0 \qquad \Rightarrow \begin{matrix} \exists! y = (L_k D_k)^{-1} b \\ \exists! x = c_{k+1} (D_k U_k)^{-1} \end{matrix} \rightsquigarrow \exists! d_{k+1} = a_{k+1\ k+1} - x D_k y$$

$$\underset{\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow}{\underbrace{\triangle_1 \triangle_2 \dots \triangle_{n-1}}_{\neq 0}} \; \underset{?}{\triangle_n} \qquad \text{проще } d_{k+1} = \frac{\triangle_{k+1}}{\triangle_k}$$

■

Следствие 1. $\boxed{A_{n\times n} = A^*}$ *самосопряженная матрица (симметр., эрмит)*

$\forall k = 1 \dots n-1 \;\; \triangle_k \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists! L$ *унитреуг. нижняя матрица:* $\boxed{A = LDL^*}$

$\exists! U$ *унитреугольная верхняя матрциа:* $\boxed{A = U^* D U}$

$$\boxed{B^* = \overline{B}^T}$$

где $D = diag(d_1 \dots d_n)$ $\quad \begin{matrix} d_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \\ d_k \neq 0 \;\; k = 1 \dots n-1 \end{matrix}$

Доказательство.

$$\begin{matrix} A & = & LDU & & & \\ \| & & & & & \\ A^* & = & U^* D^* L^* & = & \underbrace{\overline{U}^T}_{\text{нижняя унитреуг.}} \quad \overline{D} & \underbrace{\overline{L}^T}_{\text{верхняя унитр.}} \end{matrix}$$

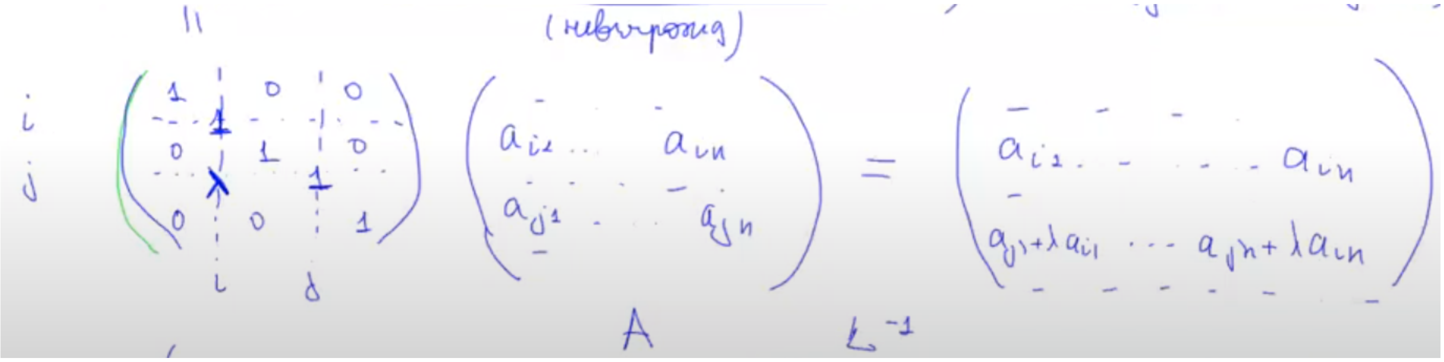
Т.к. разложение единственно $\begin{matrix} L = \overline{U}^T = U^* \\ U = \overline{L}^T = L^* \end{matrix} \qquad D = \overline{D} \Rightarrow d_k \in \mathbb{R}$ ■

Алгоритм построения LU − разложения

$$\triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \qquad (A|E) \quad \underset{\substack{\text{метод} \\ \text{гаусса} \\ \text{”прямой ход”}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{matrix}}_{DU} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}} \end{array}\right)$$

покажем: L, D, U
из теоремы

$L_{ij}(\lambda)$ <u>элемент нижней унитреуг</u>; $L_{ij}^{-1}(\lambda) = L_{ij}(-\lambda)$
$\|$



$$(\underbrace{L_m \dots \underbrace{\underbrace{L_1 A}}}_{\text{"прямой ход"}} = DU \qquad | \quad \overbrace{L_m \dots L_1 E}^{L^{-1}})$$

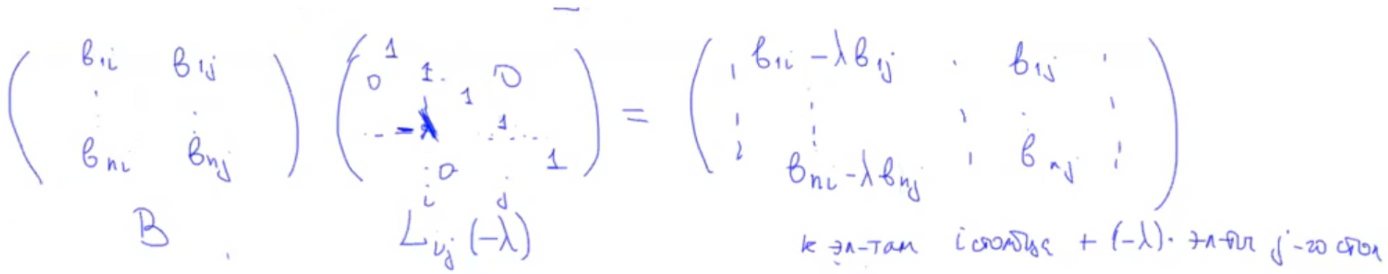
$$L_m \dots L_1 = L^{-1}$$
$$(L_m \dots L_1)^{-1} = L$$
$$\boxed{L_1^{-1} \dots L_m^{-1} = L}$$

L_i – элемент нижнетреугольн.

$L_m \dots L_1 A = DU$

$L = L_1^{-1} \dots L_m^{-1}$ $\quad \boxed{LDU = L_1^{-1} \underbrace{\dots \underbrace{L_m^{-1} L_m}_{E} \dots}_{E} L_1 A = A}$

$$(A|E) \rightsquigarrow (\underbrace{L_m \dots L_1}_{DU} A | \underbrace{E L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_m^{-1}}_{L})$$



<u>Алгоритм</u>: (к j-й стр. $A + (\lambda) \cdot i$ стр. A | i столб. $+(-\lambda) \cdot j$ столб)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad LDU?(LU)$

$\triangle_1 = 3 \qquad \triangle_2 = 5 \qquad \triangle_3 = -4 - 4 - 12 - 3 = -23 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & -23/5 \end{matrix}}_{DU} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -7/5 & 1 \end{matrix}}_{L} \end{array}\right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = diag(\underset{=\triangle_1}{3}, \underset{=\frac{\triangle_2}{\triangle_1}}{5/3}, \underset{=\frac{\triangle_3}{\triangle_2}}{-23/5})$$

$$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -7/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & -23/5 \end{pmatrix} \underset{=U}{\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = LDL^* = U^*DU$$

$A = A^*$

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V)$ *V унит. (евкл.)* $(\cdot, \cdot)$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ *самосопр.*

— *положит.(отрицат.) определен, если* $\forall u \neq \mathbb{0}$ $\quad (\mathcal{A}u, u) \underset{(<0)}{>0} \Leftrightarrow \mathcal{A} \underset{(<0)}{>0}$

— *положит. (отриц.) полуопред., если* $\forall u \neq \mathbb{0}$ $\quad (\mathcal{A}u, u) \underset{\leq 0}{\geq 0} \Leftrightarrow \mathcal{A} \underset{\leq 0}{\geq 0}$

— *неопредел., если* $\exists u, v :$ $\quad \begin{matrix} (\mathcal{A}u, u) > 0 \\ (\mathcal{A}v, v) < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \mathcal{A} <> 0$

Замечание.

1. $\mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}u, u) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow u = 0$

   если $u = 0$, то очевидно, $(\mathcal{A}u, u) = 0$
2. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \qquad (\mathcal{A}u, u) = (u, \mathcal{A}u)$
3.

   Утверждение.

   $\mathcal{A} \underset{(<0)}{>0} \Leftrightarrow$ *все с.ч.* $\lambda \underset{(<0)}{>0}$

   $\mathcal{A} \underset{(\leq 0)}{\geq 0} \Leftrightarrow$ *все с.ч.* $\lambda \underset{(\leq 0)}{\geq 0}$ $\qquad \mathcal{A} <> 0 \Leftrightarrow \exists$ *с.ч.* $\lambda, \mu : \begin{matrix} \lambda > 0 \\ \mu < 0 \end{matrix}$

   Доказательство. $\mathcal{A}$ самосопр. $\Leftrightarrow \underset{\lambda \text{ вещ.}}{\mathcal{A}}$ о.п.с. $\qquad V = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ \text{вещ. с.ч.}}} \underset{\text{собств. подпр.}}{V_\lambda} \qquad \underset{\lambda \neq \mu}{V_\lambda \perp V_\mu}$

   $$\forall u \in V : u = \sum_\lambda \overset{\in V_\lambda}{v_\lambda}$$

   $$(\mathcal{A}u, u) = (\sum_\lambda \mathcal{A}v_\lambda, \sum_\mu v_\mu) = \sum_\lambda \sum_\mu (\lambda v_\lambda, v_\mu) = \sum_\lambda \sum_\mu \lambda(\underset{=0 \ \lambda \neq \mu}{v_\lambda, v_\mu}) = \sum_\lambda \lambda(\underset{>0 \text{ если } v_\lambda \text{ с.в.}}{v_\lambda, v_\lambda})$$

   $(\Leftarrow) \quad \sqsupset$ все $\lambda > 0 \underset{u \neq \mathbb{0}}{\Rightarrow} (\mathcal{A}u, u) = \sum \lambda(\overset{\geq 0}{v_\lambda, v_\lambda}) > 0 \qquad$ т.к. $\exists \lambda_0 : \ \underset{>0}{\lambda_0}(\underset{>0}{v_{\lambda_0}, v_{\lambda_0}}) > 0 \quad v_{\lambda_0}$ с.в. $\neq \mathbb{0}$

   $(\Rightarrow) \ \underset{\mathcal{A}>0}{\overset{\neq \mathbb{0}}{v_\lambda}}$ с.в. $\ (\underset{>0}{\mathcal{A}v_\lambda, v_\lambda}) = \lambda(\underset{>0}{v_\lambda, v_\lambda}) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$ ■
4. Все def из замечаний 1, 2, 3 переносятся на самосопряженные матрицы (симм., эрмитовы) $A = A^*$

   $\forall x \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$

$$\begin{array}{ccc} (Ax,x) & = & x^T A^T \overline{x} \\ || & & \\ (x,Ax) & = & x^T\ \overline{A}\ \overline{x} \end{array} \qquad \begin{array}{c} A > 0\ \ \forall x \neq 0 \\ x^T A^T \overline{x} > 0 \\ || \\ x^T \overline{A} \overline{x} \text{ и т.д.} \end{array}$$

Теорема 2 (разложение Холецкого или метод квадратного корня)**.**

$$\forall A > 0, \text{ т.ч. } \triangle_k \neq 0\ \ \forall k = 1 \ldots \underline{\underline{n}} \quad \begin{array}{l} \exists! L \text{ нижнетреуг. (причем } l_{ii} > 0) \\ \exists! U \text{ верхнетруг. (причем } u_{ii} > 0) \end{array}$$

$$\boxed{A = L^* = U^* U}$$

Доказательство. $A = A^* \underset{\text{по следствию}}{\Rightarrow} \exists!\ \ A = \underset{\text{унитреуг. нижн.}}{\overset{\uparrow}{}}{L_0}\quad DL_0^* = U_0^* D \quad \underset{\text{унитр. верх.}}{\overset{\uparrow}{}}{U_0}$

$$\forall x \neq \mathbb{0} \qquad 0 < (Ax,x) = (L_0 D L_0^*, x) = (D\,\underbrace{L_0^*}_{y}, \underbrace{L_0^* x}_{y}) = \underset{D = diag(d_1 \ldots d_n)}{(Dy,y)} = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots + d_n y_n^2$$

$$\begin{array}{l} \quad L_0 \text{ невырожд.} \\ \Rightarrow \left.\begin{array}{r} L_0^* \text{ невыр.} \\ x \neq \mathbb{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{=y}{L_0^* x} \neq \mathbb{0} \end{array}$$

Будем брать $y = e_j$ канон. базиса $\Rightarrow d_j < 0 \quad j = 1 \ldots n \Rightarrow$

$\Rightarrow D = \sqrt{D}\sqrt{D} \qquad \sqrt{D} := diag(\sqrt{d_1} \ldots \sqrt{d_n})$

$$A = \underbrace{L_0\sqrt{D}}_{L}\,\underbrace{\sqrt{D}L_0^*}_{L^*} = \underbrace{U_0^*\sqrt{D}}_{U^*}\,\underbrace{\sqrt{D}U_0}_{U} \qquad L^* = (L_0\sqrt{D})^* = (\sqrt{D})^* L_0 = \sqrt{D} L_0^*$$

$l_{ii} = \sqrt{d_i} > 0 \qquad u_{ii} = \sqrt{d_i} > 0 \qquad$ Аналогично U^*

$$(\sqrt{D}U_0)^* = U_0^* \sqrt{D}$$

■