

# Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

12 апреля 2020 г.

# Содержание

<b>7 Линейные отображения</b>	<b>2</b>
7.1 Основные определения . . . . .	2
7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса. . . . .	5
7.3 Инварианты линейного отображения . . . . .	10
7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора. . . . .	16
7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)	
Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.	
Функция от матрицы. . . . .	20
7.6 Комплексификация линейноговещ.пространства. Продолжениевещ.линейного оператора. . . . .	29
7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона . . . . .	32
7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства. . . . .	37
7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана . . . . .	42
7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис . . . . .	46
7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме . . . . .	64
<b>8 Тензоры</b>	<b>67</b>
8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования. . . . .	67
8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров. . .	74
8.3 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров. . .	78
8.4 Транспонирование тензора. Симметрические икососимметрические тензоры. . . . .	81
8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров . . . . .	85

# 7 Линейные отображения

## 7.1 Основные определения

**Определение 1.**  $U, V$  – линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением  $\mathcal{A}$  называется  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ , обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не  $\mathcal{A}(u)$ , а  $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3.  $\mathcal{A}\emptyset_U = \emptyset_V$

**Примеры.**

1.  $\emptyset$  – нулевое отображение  $U \rightarrow V$

$$\forall u \in U : \emptyset u = \emptyset_v$$

2.  $\mathcal{E}$  – тождественное отображение:  $V \rightarrow V$

$$\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$$

3.  $U = V = P_n$  – многочлены степени до  $n$

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

$$\mathcal{A}p = p'(t) \text{ – дифференциальный оператор}$$

$$\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p'_1 + \lambda p'_2 = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$$

$$\text{Линейное отображение } \mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

4.  $U = \mathbb{R}^n V = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$$

$$x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$$

5.  $U \cong V$ . То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

**Определение 2.**  $\lambda \in K \mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

**Определение 3.** Суммой линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$  называется  $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad [\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}]$$

**Определение 4.**  $-\mathcal{A}$  – отображение противоположное  $\mathcal{A}$

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$  – множество всех линейных отображений из  $U$  в  $V$ .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями  $\lambda \mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

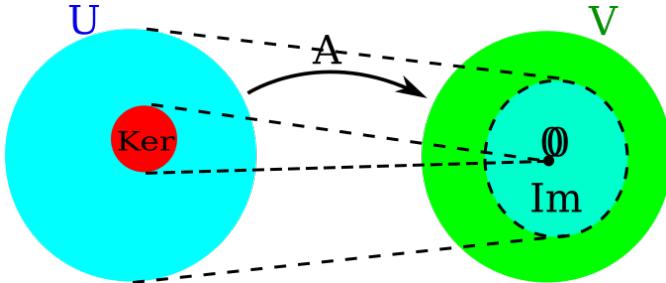
Значит  $[L(U, V) \text{ – линейное пространство}]$

**Определение 5.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$  – ядро линейного отображения.

**Определение 6.**  $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \mid \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$  – образ линейного отображения.



Упр:  $Ker\mathcal{A}$  и  $Im\mathcal{A}$  – это подпространства соответственно пространств  $U$  и  $V$ . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если  $Ker\mathcal{A}$  конечномерное подпространство  $U$ , то

$\dim Ker\mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$  – дефект линейного отображения.

Если  $Im\mathcal{A}$  конечномерное подпространство  $V$ , то

$\dim Im\mathcal{A} = rg\mathcal{A}$  – ранг линейного отображения.

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфно между  $U$  и  $V \Leftrightarrow$

1.  $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2.  $Im\mathcal{A} = V$
3.  $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$  trivialно

*Доказательство.*  $\mathcal{A}$  изоморфно  $\Leftrightarrow$  взаимнооднозначное соответствие + линейность –  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$ , т. к. изоморфизм  $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$

Пусть  $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$

Докажем инъективность  $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$v_1 = \mathcal{A}u_1$   $v_2 = \mathcal{A}u_2$

$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$  т. к. ядро trivialно.

Сюръективность.  $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$ . Последнее и означает сюръекцию.  $\square$

**Определение 7.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

–инъективно, если  $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$

–сюръективно, если  $Im\mathcal{A} = V$

–биективно  $\equiv$  изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

–эндоморфизм  $\equiv$  линейный оператор, если  $U \equiv V$

$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$

–автоморфизм  $\equiv$  эндоморфизм + изоморфизм.

$Aut_k(V) = Aut(V)$

**Определение 8.** Произведением линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$\mathcal{A} \in L(W, V)$   $\mathcal{B} \in L(U, W)$   $U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$

называется  $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ , которое является композицией функций, определяющих отображения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно,  $\mathcal{C}$  – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

1.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  изоморфизмы  $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  изоморфизм

2.  $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$  – дистрибутивность

3.  $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$  – ассоциативность

4.  $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$  – единица  $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

**Определение 9.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  изоморфно.

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$$

$$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$$

Упр:  $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$$

$\mathcal{A} \in End(U)$  – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$  – обратный оператор

**Определение 10.**  $U_0 \subset U$   $\mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения  $\mathcal{A}$  на линейное подпространство  $U_0$  называется

$$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$$

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфизм  $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$  – изоморфизм

**Примеры.**

1.  $\emptyset : U \rightarrow U$  – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.

2.  $\mathcal{E} : U \rightarrow U$  – автоморфизм

3.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : P_n \rightarrow P_n$  – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.

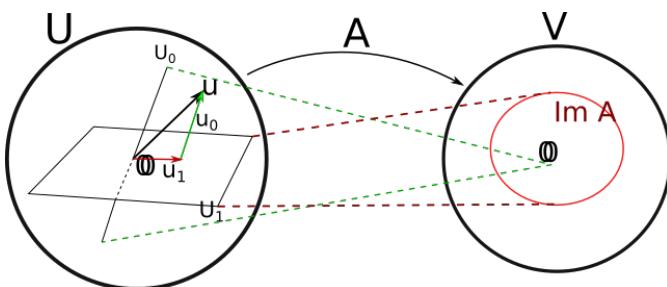
4.  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$  – эндоморфизм.

Сюръекция  $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$  инъекция.

То есть автоморфизм.

**Теорема 1** (о  $rg$  и  $def$  линейного отображения).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = \dim U}$$



*Доказательство.*  $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A}$

Дополним линейное пространство  $U_1$  до пр-ва  $U$ :

$$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{0\}$$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$  (единственным образом)

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad \text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}_1$  – изоморфизм?  $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{A}$  – сюръекция

$$\left. \begin{array}{l} \forall w \in \text{Ker } \mathcal{A}_1 \in U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong \text{Im } \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim U_1 = \dim(\text{Im } \mathcal{A})$  – инъекция.

Т. к.  $U = U_0 \oplus U_1$ , то  $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \dim_{\text{def } \mathcal{A}} \text{Ker } \mathcal{A} + \dim_{\text{rg } \mathcal{A}} \text{Im } \mathcal{A}$

□

**Следствие 1** (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A}$  изоморфно
  2.  $\dim U = \dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
  3.  $\dim U = \dim V$
- $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$
2.  $\dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3.  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

## 7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$  базис  $U$

$\eta_1 \dots \eta_m$  базис  $V$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$  матрица линейного отображения  $\mathcal{A}$  относительно базисов  $(\xi, \eta)$

Частный случай:  $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$   
 $A = (a_{ji})_{n \times n}$  – матрица линейного оператора  
 $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$

Примеры.

$$1. \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

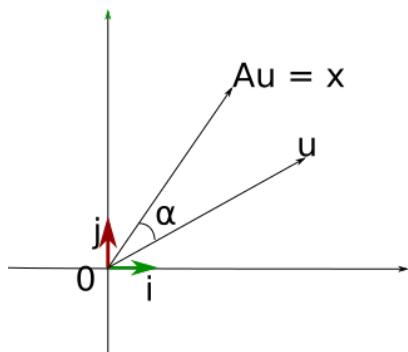
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji}e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

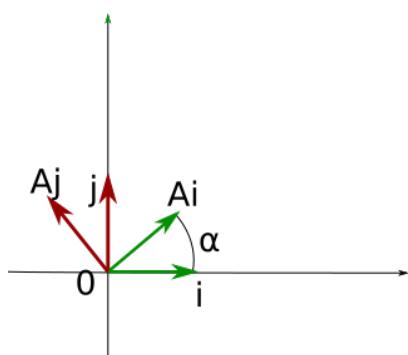


$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол  $\alpha$ .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \mathcal{A} : p_2^{1,t,t^2} \rightarrow p_2^{1,t,t^2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}1 = 1' = 0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}t = t' = 1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : p_2_{1,t,t^2} \rightarrow p_1_{1,t}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Утверждение.**  $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с веш. (компл.) элементами размерности  $m \times n$ .

*Доказательство.* Изоморфизм  $\equiv$  биекция + линейность.

Биекция.  $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$  – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть  $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$$U \xi_1 \dots \xi_n \text{ базис}$$

$$\mathcal{A} : U \rightarrow V$$

$$V \eta_1 \dots \eta_m \text{ базис}$$

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$Au = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xrightarrow{?} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} n_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность  $\Rightarrow$  изоморфизм. □

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$A, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$  – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V\eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \underset{\xi, \eta}{\leftrightarrow} A$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n u_i a_{ji}) \eta_j$$

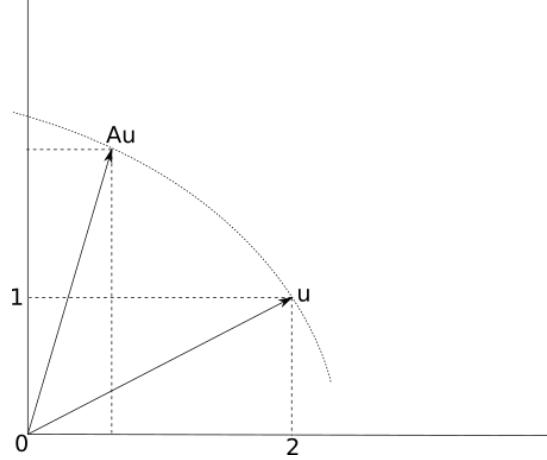
Так как координаты определяются единственным образом:

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \quad \leftrightarrow \quad [v = \mathcal{A}u] \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

### Примеры.

1.  $\mathcal{A}$  поворот на угол  $\alpha$

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



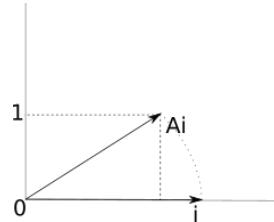
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$2. \quad \mathcal{A} = \frac{d}{dt} : p_2 \underset{1, t, t^2}{\rightarrow} \underset{1, t, t^2}{p_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(3t^3 + 6t + 4)}_{u(t)}' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

**Теорема 1** (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$$

$T_{\eta \rightarrow \eta'}$  – матрица перехода

$$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi', \eta')} A'$$

$$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \cdot A \cdot T_{\xi \rightarrow \xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi_1 \dots \xi_n & \sqsupseteq & \eta_1 \dots \eta_m \\ \mathcal{E}_u \uparrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \mathcal{E}_v \\ U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi'_1 \dots \xi'_n & \sqsupseteq & \eta'_1 \dots \eta'_m \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

$$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \text{ Смотри пример 2}$$

□

**Следствие 1.**

$$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$e_1 \dots e_n$  базис  $V \leftrightarrow A$

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис} \leftrightarrow A'$$

$$\mathcal{A} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{A' = T^{-1} A T}$$

*Замечание.* В условиях теоремы  $v = \mathcal{A}u \xrightleftharpoons{(\xi, \eta)} v = Au$

$$\xrightleftharpoons{(\xi', \eta')} v' = A'u$$

$$V = T_{\eta \rightarrow \eta'} V'$$

$$U = T_{\xi \rightarrow \xi'} U'$$

$$T_{\eta \rightarrow \eta'} v' = A T_{\xi \rightarrow \xi'} u'$$

$$v' = \boxed{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}} u'$$

### 7.3 Инварианты линейного отображения

**Инвариант** - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au$$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.  
 $v' = A'u'$

**Определение 1.**  $A_{m \times n}$

$$ImA = span(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} =$$

$$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \mid x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$rgA = dim ImA - \text{ранг матрицы}$$

$$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\} - \text{ядро матрицы}$$

$$dimKerA = n - rgA = defA - \text{дефект матрицы}$$

$$\boxed{rgA + defA = n} - \text{аналогично теореме о ранге и дефекте}$$

**Теорема 1.**  $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{\begin{aligned} rg\mathcal{A} &= rgA \\ def\mathcal{A} &= defA \end{aligned}},$$

где матрица  $A$  – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств  $U$  и  $V$ .

$rg\mathcal{A}$ ,  $def\mathcal{A}$  инвариантны относительно выбора базиса.

*Доказательство.*  $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi, \eta)}{A} \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$  базис  $U$

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$  базис  $V$

$$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \overset{\leftrightarrow}{\cong} A_i$$

Координатный изоморфизм.

Пусть  $rgA = k \Rightarrow k$  столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, что из  $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$   $k$  линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация  $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dim Im\mathcal{A} = k$

$$dimU = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ n & & rgA \\ & \| & \\ & & k \end{array}$$

$$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim \text{ пространства решений } Ax = 0 = defA$$

□

**Следствие 1.**  $A$  изоморфизм  $\Leftrightarrow A$  невырожденная ( $\exists A^{-1}$ ), где  $A$  матрица в некотором базисе.

*Доказательство.* Изоморфизм  $\Leftrightarrow \frac{\text{def } A = 0}{\dim U = \dim V} \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow A$  невырожденная.  $\square$

**Теорема 2.**  $\det \mathcal{A}$  не зависит от выбора базиса пространства  $V$  (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом  $\det \mathcal{A} = \det A$ , где  $A$  – матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе.

*Доказательство.*  $V e_1 \dots e_n$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_k &= \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\text{det } n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \dots \sum_{i_n=n}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow \det = 0) \\ &= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \underbrace{\det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}_{\substack{\text{все разные} \\ (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \det(e_1 \dots e_n) = 1}} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

$e'_1 \dots e'_n$  базис  $V$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\det \mathcal{A} = \det A' \stackrel{?}{=} \det A$$

$$A' = T^{-1}AT$$

$$\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$

$\square$

**Определение 2.**  $A, B$  называются подобными, если

$$\exists \text{ невырожденная } C : B = C^{-1}AC$$

**Примеры.** Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$$A' = T^{-1}AT$$

$$A, B \text{ подобны} \Rightarrow \det A = \det B$$

**Следствие 1.**  $f$  –  $n$ -форма на  $V$

$$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow [f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1 \dots \xi_n)]$$

*Доказательство.*  $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$$g(\xi_1 \dots \xi_n) = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$$

$$\det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\substack{\text{смотри док-во теоремы}}} = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{\det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{\det A}_{\det \mathcal{A}}$$

$\square$

*Замечание.*  $A$  – линейный оператор,  $B_{n \times n}$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1 \ \dots \ AB_n) =$$

$$= \det A \cdot \det(B_1 \ \dots \ B_n) = \det A \cdot \det B$$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$$

*Доказательство.*  $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$

□

**Следствие 3.**  $\mathcal{A} \in Aut(V)$

$$\Leftrightarrow \det\mathcal{A} \neq 0$$

$$Причем \det\det\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{A}}$$

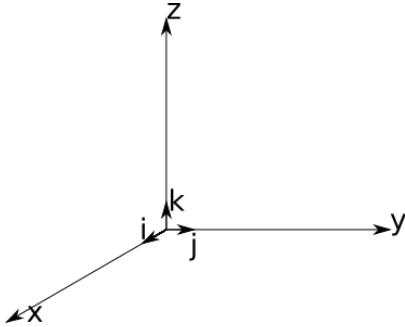
*Доказательство.* Из следствия 2

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{A}^{-1} = \det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$$

□

**Примеры.**  $V_3$



$$V_{abc\text{-правая тройка}} = \underset{\text{смешанное произведение}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f(\underset{3\text{-форма}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\mathcal{A} \in End(V_3) \ u \in V_3 \rightarrow v = \mathcal{A}u \in V_3$$

Как изменится объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$$\mathcal{A}(V_{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}) = f(\mathcal{A}\bar{a}, \mathcal{A}\bar{b}, \mathcal{A}\bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot V(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| \quad \text{Объем увеличится в } \lambda \text{ раз.}$$

$$1. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

Оператор подобия

$$\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\bar{i} = \mu\bar{i} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{j} = \mu\bar{j} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{k} = \mu\bar{k} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| = |\det A| = |\mu^3|$$

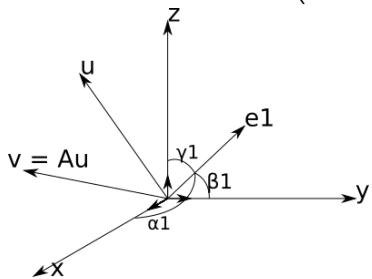
$$2. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

**Оператор поворота**

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \bar{i} \rightarrow e_1 \nearrow \\ \bar{j} \rightarrow e_2 \rightarrow \\ \bar{k} \rightarrow e_3 \searrow \end{array} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} |e_i| &= 1 \\ (e_i, e_j) &= 0 \\ i &\neq j \end{aligned}$$

$${}^n\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}) = \det \mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |\dots| \underset{\text{Смешанное произведение}}{e_1 e_2 e_3} = 1$$

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \det E = 1$$

$$|\det A| = 1$$

**Утверждение.**  $A, B$  подобные матрицы  $\Rightarrow \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

$\operatorname{trace} = \operatorname{след}$

*Доказательство.*  $A, B$  подобные  $\Rightarrow$

$\exists C$  невырожденная:  $C^{-1}(AC) = B$

$$\operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C''^{-1}''(AC)ji = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C''^{-1}'' a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{ki} C''^{-1}''}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \operatorname{tr} A$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}} \quad CC^{-1} = E$$

□

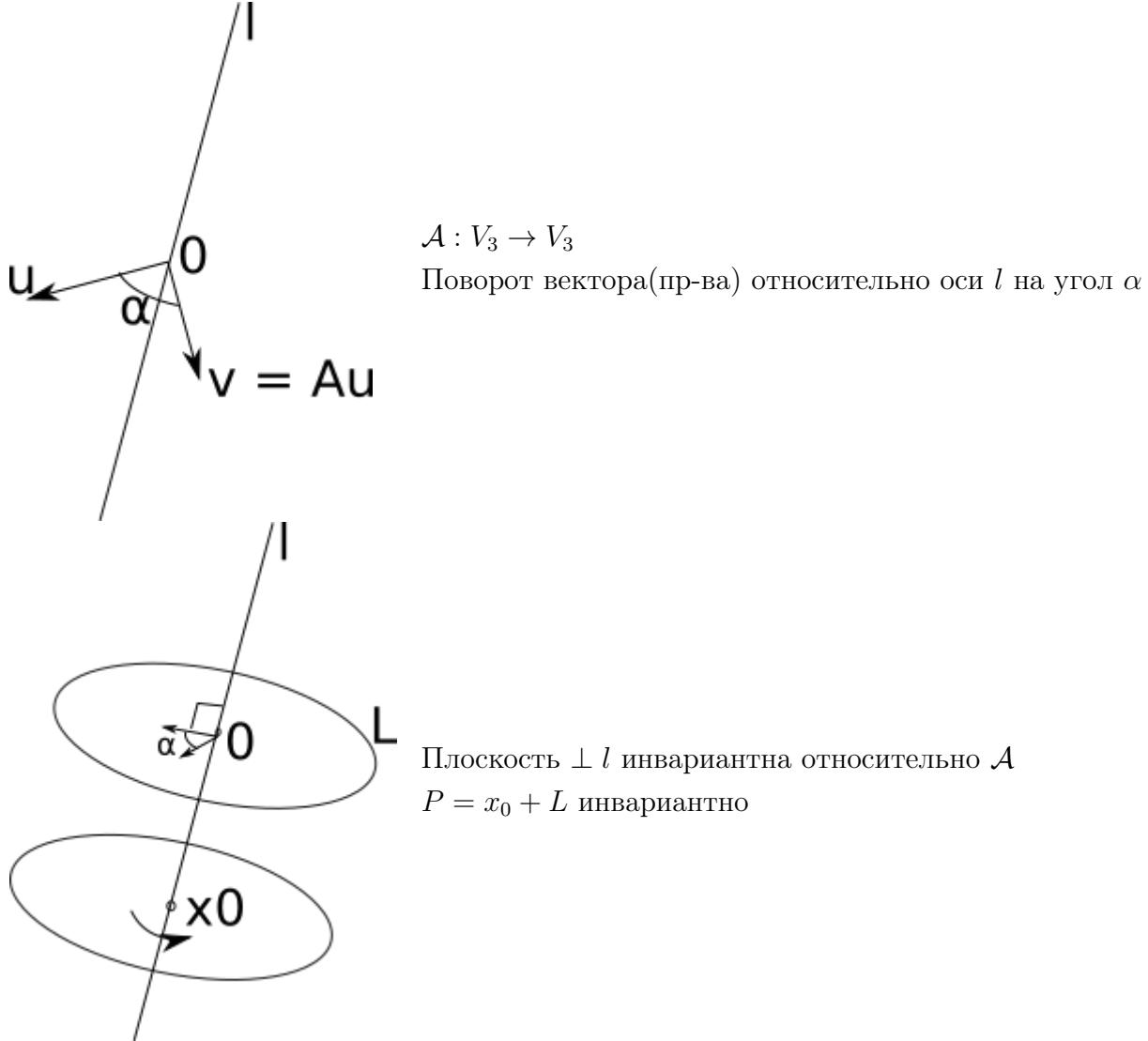
**Определение 3.**  $\operatorname{tr} \mathcal{A} = \operatorname{tr} A$ , где  $A$  – матрица оператора в некотором базисе.

$\operatorname{tr} \mathcal{A} = \operatorname{tr} A'$  – не зависит от выбора базиса, т.к.  $A$  и  $A'$  подобны.

**Определение 4.**  $L \subset V$   $L$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \in End(V)$  если  $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

**Примеры.**

1.  $\emptyset, V$  инвариантны относительно  $\mathcal{A}$
2.  $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$  инвариантны относительно  $\mathcal{A}$



**Теорема 3.**  $L \subset B$   $\mathcal{A} \in End(V)$ . Линейное пространство инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$  базис пространства  $V$ , т.ч. матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе

будет иметь вид:  $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \emptyset & A_3 \end{pmatrix}$

$A_1 k \times k$  где  $k = \dim L$

*Доказательство.*  $L = \underset{\text{базис}}{span}(e_1 \dots e_k)$

Дополним до базиса  $V$ :  $e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i \in L = \sum_{1 \leq i \leq k}^k a_{mi} e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 \cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{k+1 \leq i \leq n}^n a_{ij} e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1i}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ki} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

**Следствие 1.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно  $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$  базис пр-ва  $V$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A^2} & \\ & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{c} A^i \\ \text{размерность матрицы} \end{array} \right) = \dim L_i$$

Доказательство.  $L_1 = \text{span}(e_1^1 \dots e_i^{i_k})$   
базис

т.к.  $\bigoplus$ , то базис  $V$  – объединение базисов  $L_i$

$$V = \text{span}(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$  раскладываем по базису  $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left( \begin{array}{c|cc|c} \frac{L_1}{1 \dots i_1} & \frac{L_2}{i_1+1 \dots i_2} & & \\ * * * & 0 0 0 & 0 & \\ * * * & 0 0 0 & 0 & \\ * * * & 0 0 0 & 0 & \\ \hline 0 0 0 & * * * & * & \\ 0 0 0 & * * * & \vdots & \\ 0 0 0 & * * * & * & \\ \hline 0 0 0 & 0 0 0 & 0 & \\ 0 0 0 & 0 0 0 & 0 & \\ 0 0 0 & 0 0 0 & 0 & \end{array} \right)$$

отвечает позиции базисных элементов пр-ва  $L_i$  в базисе  $V$

**Следствие 2.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

*Доказательство.*  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall u \in V \exists! u = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i$

$$Im\mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

**Верно и " $\supset$ "**

Пусть  $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^m u_i \in V\right) \in Im\mathcal{A}$$

$$Im\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$\oplus$  прямая?

$$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \emptyset \leftarrow$$

Т.к.  $L_i$  инвариантна  $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$ , но  $L_i$  дизъюнктны  $\nwarrow \Rightarrow \forall i : v_i = \emptyset$

$$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i} \text{ дизъюнктны} \Rightarrow \oplus$$

□

## 7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$   $V$  линейное пространство над  $K$

**Определение 1.**  $\lambda \in K$  – *собственное число* (с.ч.) линейного оператора  $\mathcal{A}$ , если

$\exists [v \in V \neq \emptyset]$ , который называется *собственным вектором* (с.в.), такой что  $[\mathcal{A}v = \lambda v]$

Пусть  $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$

**Определение 2.**  $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \{c.v. v \neq \emptyset\}$  называется *собственным подпространством*.

$[\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda]$  – геометрическая кратность с.ч.

$$\gamma \geq 1$$

$V_\lambda$  и  $\gamma(\lambda)$  – инварианты относительно выбора базиса.

$$v \in V_\lambda \quad \mathcal{A}v = \lambda v \stackrel{?}{\in} V_\lambda$$

$$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$$

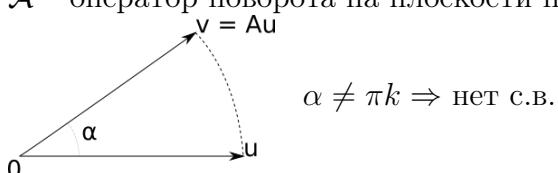
**Примеры.**

1.  $\mathcal{A}$  – оператор подобия:

$$\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$$

$$\mu \text{ с.ч.} \quad V_\lambda = V$$

2.  $\mathcal{A}$  – оператор поворота на плоскости на угол  $\alpha$



$$\alpha \neq \pi k \Rightarrow \text{нет с.в.}$$

3. Пусть  $\lambda$  с.ч.  $= 0$   $\mathcal{A}v = 0$  с.в.  $\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A}$  нетривиально  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  не автоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  необратимо  $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$

4.  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$v_1 \dots v_n \text{ базис, т.ч. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$$

Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч.  $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda$  – с.ч.  $v$  с.в.  $\neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$  нетривиально  $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0$

**Определение 3.**  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$  – характеристический многочлен оператора  $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$  базис  $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(A - tE)$  т.к.  $\det$  оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \underset{\text{tr } A = \text{tr } \mathcal{A}}{\det A}$$

По теореме Виета:  $\det \mathcal{A} = \prod_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)} \lambda_1 \dots \lambda_n$

$\lambda \in K$  с.ч.  $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$  ( $\lambda \in K$ )

$\lambda$  корень характеристического многочлена.

$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$  с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow$  только вещественные корни  $\chi_{\mathcal{A}}$  будут с.ч.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$$

$\alpha(\lambda)$  называется алгебраической кратностью с.ч.  $\lambda$  (если  $\lambda \in K$ )

**Определение 4.** Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется *спектром линейного оператора*.  $(\lambda, \alpha(\lambda))$

Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.

$$\alpha(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$$

**Немножко про алгебраическую кратность**

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod_{a-\text{корень}} (t - a)^{m_a}$$

$a$ -корень  $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \mid (t - a)$

$a$  – корень  $f$  **кратности**  $m \Leftrightarrow \begin{cases} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(t) = (t - a)^m g(t)$$

$a_0$  – произведение всех корней с учетом кратности  $= (-1)^n \prod a$        $a$ –корень с учетом кратности

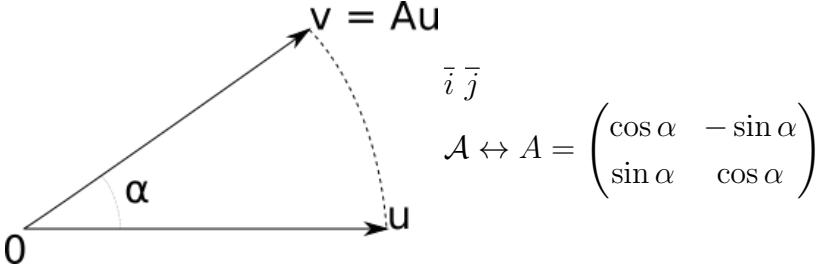
$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$(-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_n)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ с.ч.}$$

**Примеры.**  $\mathcal{A}$  – поворот на угол  $\alpha$



$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - t & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - t \end{pmatrix} =$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha t + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1$$

$$D = 4 \cos^2 \alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$$

нетвещ. корней  $\Rightarrow$  нет с.ч.

$$K = \mathbb{R}$$

**Теорема 1.**  $\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow [1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)]$

*Доказательство.* Пусть  $\gamma(\lambda) = k = \dim V_{\lambda} = \text{span}(v_1 \dots v_k)$  базис

$V_{\lambda}$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$  базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda & \\ \hline 0 & & A^3 \end{array} \right) \quad A_{k \times k}^1$$

$$\text{Базис} = v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$$

$$\mathcal{A}_{i=1 \dots k} v_i \in V_{\lambda} = \lambda v_i \Leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \left( \begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda - t & \\ \hline 0 & & A^3 - tE_{n-k} \end{array} \right) \underset{\text{св-ва}}{=} \det \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{A^3}(t)$$

Очевидно,  $\lambda$  корень  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  кратности не меньше, чем  $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$   $\square$

**Теорема 2.**  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  – различные с.ч.  $\mathcal{A}$

$v_1 \dots v_m$  соответствующие им с.в.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$  линейно независимы.

*Доказательство.* Метод математической индукции

1. База.  $m = 1$   $\lambda_1 v_1$  с.в. – линейно независимы, т.к.  $v_1 \neq 0$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для  $m - 1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для  $m$

От противного. Пусть  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  попарно различные с.ч.  $\mathcal{A}$ ,

а  $v_1 \dots v_m$  линейно зависимы.

$$\text{Пусть } v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

$$\mathcal{A}_{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

||

$$\lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = 0 \quad v_i \text{ линейно независим по инд. предположению}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m - 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_m = 0$  — Противоречие, т.к.  $v_m$  с.в. и значит не может быть 0

□

**Следствие 1.**  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  различные с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$  дизъюнктны.  $\left( \bigoplus_{c.\lambda.} V_\lambda \right)$

*Доказательство.*  $v_1 + \dots + v_m = 0 \quad v_i \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое  $\neq 0 \Rightarrow$  это слагаемое с.в.  $\Rightarrow$  противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч.  $\Rightarrow \forall i : v_i = 0 \Rightarrow$  дизъюнктны. □

**Теорема 3.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \rightarrow L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

*Доказательство.* см. теорему - следствие п. 7.3

Базис  $V$  – объединение базисов  $L_i$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \quad A_{k_i \times k_i}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства det}}{=} |A^1 - tE_{k_1}| |A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\chi_{A^1}(t) \quad \chi_{A^2}(t) \quad \dots \quad \chi_{A^m}(t)$$

$$\begin{array}{ccc} || & || & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}^m \end{array}$$

□

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств  $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$ .

$A_{n \times n}$   $\lambda$  с.ч.  $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

$$y = \begin{array}{c} Ax \\ \uparrow \\ \text{линейный оператор} \end{array}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

с.ч., с.в.?  $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$ ?

$$\chi_A(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$$

$$t_1 = 0 \quad \alpha(0) = 2$$

$$t_2 = 1 \quad \alpha(1) = 1$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) \quad \alpha \in ]R$$

$$V_{\lambda_1} = 0 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$$

$$\lambda_2 \quad 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = 1$$

## 7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)

**Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.**

**Функция от матрицы.**

**Определение 1.**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$\mathcal{A}$  называется о.п.с., если  $\exists$  базис пространства  $V$ , т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$  базис  $V$  из с.ч.  $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} V_\lambda$

$$V = \text{span}(v_1 \dots v_n)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\sum_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

$\Leftrightarrow$  все корни  $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$  все корни  $\chi(t)$  являются с.ч.  $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow \forall c. \forall \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$
--

*Доказательство.*  $\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \dim V = \sum_{\lambda \in \text{ч.}} \gamma(\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{ч.}} \alpha(\lambda)$$

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \quad \nearrow$$

$$\sum_{\lambda \in \text{ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \rightarrow \quad \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$$

1

**Следствие 1.**  $\sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

*Ао.н.с.*  $\Leftarrow$  спектр – простой.

(*n* попарно различных с.ч.  $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$ )

**Определение 2.**  $A_{n \times m}$  называется диагонализируемой, если  $\exists$  невырожденная  $T_{n \times n}$ , т.ч.

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

(“ $A$  подобна диагональной матрице”)

**Следствие 2.** Если матрица  $A_{n \times n}$  – матрица некоторого о.п.с.  $\mathcal{A}$ , то она **диагонализируема**. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.

## *Доказательство.*

$$\begin{array}{lll}
 \mathcal{A} \text{ о.п.с.} & \Leftrightarrow & \exists \text{ базис } v_1 \dots v_n \\
 \uparrow & (e_1 \dots e_n)V & \lambda_1 \dots \lambda_n \\
 A & \text{базис} & \text{с.ч.} \\
 & & \downarrow \\
 & & \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$T = T_{e \rightarrow v}$  невырожденная.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$A = T \Lambda T^{-1}$$

1

$A$  диагонализуема  $\Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n$

$$\forall \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$$

### Определение 3.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Предложение 3.} & & \\
 V = \bigoplus_{i=1}^m L_i & & p_i : V \rightarrow L_i \subset V \\
 \nwarrow \Leftarrow & \Leftrightarrow & \Rightarrow \searrow \\
 L_i \subset V & & \forall v \in V \ \exists! : v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i \\
 \text{линейное подпр.} & & \\
 \boxed{\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i v \stackrel{\text{def}}{=} v_i} & & i = 1 \dots m
 \end{array}$$

## Оператор проектирования (проектор)

$$\mathcal{P}_i \stackrel{?}{\in} End(V)$$

$$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_i \text{ линейный оператор.}$$

$$u + \lambda V = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i + \lambda \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \sum_{i=1}^m \underbrace{(u_i + \lambda v_i)}_{\in L_i}.$$

$$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$$

## Свойства проекторов:

- $\forall i \neq j \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = \emptyset$
  - $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \emptyset_i^k = \mathcal{P}_i)$
  - $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
  - $Ker \mathcal{P}_i = \sum_{j \neq i} L_j \quad \forall i = 1 \dots m$
  - $Im \mathcal{P}_i = L_i$

## *Доказательство.*

- $$1. \forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij}(v) = \mathcal{P}_i v_j \in L_j = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij} = \emptyset$$

Т.к.  $L_i$  дизъюнктны

$$v = v_1 + v_i + \underset{\text{Ед. образом}}{v_j} + \dots + v_n$$

- $$2. \forall v \in V \quad \underline{\mathcal{P}_i} \mathcal{P}_i(v) = v_i = \mathcal{P}_i v$$

$v_i \in L_i$

Т.к. верно  $\forall v \in V$ , то верно и для базиса  $\Rightarrow$  операторы совпадают.  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$

- $$3. \forall v \in V(\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i)v = \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i v = \sum_{i=1}^m v_i = v = \mathcal{E}v \Rightarrow \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^m = \mathcal{E}$$

- $$4. \quad \mathcal{P}_i(v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_m) + \underbrace{\sum_{j \neq i} \mathcal{P}_i v_j}_{0}$$

$$\sum_{j \neq i} L_j \subset \text{Ker } \mathcal{P}_i$$

T.K.  $v = \bigoplus_{j \neq i} L_j \oplus L_i$

$$\Rightarrow \text{Ker } \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$$

*Im*  $\mathcal{P}_i = L_i$  no def "  $\subset$  "

Верно " $\supset$ "  $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P}v_i = v_i$

1

**Утверждение.**  $\mathcal{P}_i \in End(V) : V \rightarrow V$  и выполнены свойства 1, 3  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im} \mathcal{P}_i \quad (\text{m.e. } \mathcal{P}_i \text{ проекторы на } L_i = \text{Im} \mathcal{P}_i)$$

## *Доказательство.*

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i &\stackrel{?}{=} \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \mathcal{E} &= p_i \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_i^2 \\ &\quad \parallel \\ &\quad \emptyset \\ &\quad i \neq j \end{aligned}$$

- $$2. \ v_1 + v_2 + \dots + v_m = \emptyset$$

$v_i \in Im\mathcal{P}_i$  дизъюнктно?

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \quad w_i \in V$$

$$\begin{aligned}
v_i = \mathcal{P}_i w_i &= \mathcal{P}_i \left( \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j} \right) = 0 \\
\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j w_j)}_{=0 \ i \neq j} &= \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i \\
\forall v \in V \quad \mathcal{E}v = v &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j v}_{v_j \in Im \mathcal{P}_j} \quad \Rightarrow v = \sum_{j=1}^m Im \mathcal{P}_j
\end{aligned}$$

□

**Теорема 2** (О спектральном разложении о.п.с.).  $v = \bigoplus_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \quad \mathcal{P}_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$   
 $\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$  ←спектральные проекторы

Доказательство.

$$\begin{aligned}
1. \quad &\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = 0 \\
2. \quad &\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda \\
3. \quad &\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E} \\
\forall v \in V \quad &\mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum_{\lambda} v_\lambda \in V_\lambda) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{=\lambda v_\lambda} = \\
&\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda v
\end{aligned}$$

Доказательство верно  $\forall$  векторного про-ва  $V$ . В частности для базиса  $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda}$$

□

**Следствие 1.**  $A_{n \times n}$  диагонализируема  $\Leftrightarrow \exists \mathcal{P}_\lambda \underset{\text{проекторы}}{n \times n} \quad 1^\circ \ 2^\circ \ 3^\circ$   
 $A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{span } V_3$$

$$\Rightarrow \text{o.п.с. } V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = \text{span}(V_1, V_2, V_3)$$

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad [AT = T\Lambda]$$

$$\mathcal{P}_1 : V \rightarrow V_{\lambda_1} \subset V$$

$$\mathcal{P}_2 : V \rightarrow V_{\lambda_2} \subset V$$

$$\mathcal{P}'_1 \text{ матрица } \mathcal{P}_1 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  – матрицы проекторов в базисе  $e$  (канонич.)

$$\mathcal{P}_1 v_i = \begin{cases} v_i, i = 1, 2 \\ \emptyset, i = 3 \end{cases}$$

$1^\circ 2^\circ 3^\circ$

$$\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 = E$$

$$\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2 = \emptyset \dots$$

$$\mathcal{P}'_2 \text{ матрица } \mathcal{P}_2 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Примеры.**

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}'_i = T^{-1} \mathcal{P}_i T \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}'_i T^{-1} \quad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \emptyset$$

$$\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$$

**Определение 4.**  $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$  – последовательность матриц,

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall i, j \ \exists a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{m=1}^N A_m}_{\substack{S_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad R = \infty \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad \text{либо } x = 1$$

**Определение 5.** Функция от матрицы.

$A_{n \times n}$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m, \text{ где } \boxed{\begin{array}{lcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{array}}$$

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

$$\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A^{2m}$$

**Теорема 3.**  $f$  аналитическая в  $|x| < R$

$A_{n \times n}$  все с.ч.  $|\lambda| < R$

$A$  диагонализируемая То есть:

$$\exists \underset{\text{невырожд.}}{T} : \Lambda = T^{-1}AT$$

$$\exists \mathcal{P}_\lambda : A = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

↓

$$1. \underset{f(A)}{\exists} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$2. \underset{f(A)}{\exists} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Доказательство.

$$1. \quad \begin{aligned} f(A) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \\ A^m &= (T \Lambda T^{-1})^m = \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x| < R \end{array}}$$

$$= T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} =$$

$$= T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m \right) T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$|\lambda_i| < R$$

$$2. A^m = \left( \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda \right)^m \underset{\mathcal{P}_\lambda \neq \mu \in \emptyset}{=} \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left( \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda \right) = \sum_{\lambda} \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m = f(\lambda) \right) \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\lambda} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

□

*Замечание.*  $A$  диагон.  $\Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$$

$$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$t^m A^m = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

**Примеры.**  $e^{At}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_1} : \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_2} : \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\forall \lambda : \left. \begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \gamma(\lambda) \\ \sum_{\lambda} \alpha(\lambda) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ диагонализируемая}$$

$$T_{e \rightarrow v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \xrightarrow[i=1,2]{} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{n \times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x} - \text{производная}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \quad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности

$$(e^{At})' = Ae^{At}$$

$$e^{A \cdot 0} = E$$

$$e^{At} = \left( \sum_{\lambda \text{ c.ч.}} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda \right)' = \sum_{\lambda \text{ c.ч.}} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_{\lambda} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\mu=\lambda} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

*Замечание.*  $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$  все с.ч.  $\lambda \neq 0$   
 (все корни хар. многочлена)

$\square A$  диагонализируема. Все с.ч.  $\lambda \neq 0$

$$A^{-1} = T \Lambda^{-1} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\Lambda \Lambda^{-1} = E$$

$$AA^{-1} = T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda^{-1} T^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$$

( $AA^{-1} = E$  упр.)

$$\sqrt[m]{A} = T \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\square$  все  $\lambda_i \geq 0$

( $m$  нечет  $\Rightarrow \lambda$  любого знака)

$$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$$

$$(\sqrt[m]{A})^m = T \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} \dots T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.:  $(\sqrt[m]{A})^m = A$ )

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

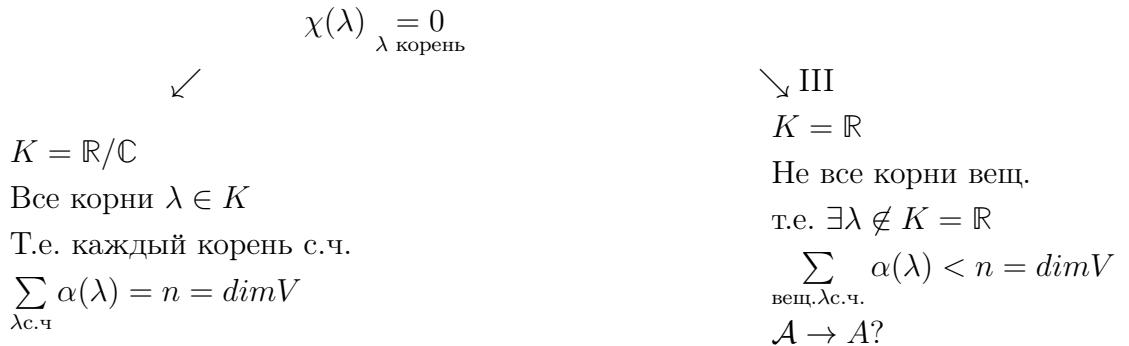
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & A^{-1} &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \mathcal{P}_1 + \frac{1}{(-1)} \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$$

$$A^2 = E$$

## 7.6 Комплексификация линейного веш. пространства. Продолжение веш. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$   $V$  над полем  $K$



$$\begin{array}{ccc}
 \text{I} \swarrow & & \searrow \text{II} \\
 \forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) & & \exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \\
 \mathcal{A} - \text{o.p.c.} \rightarrow A \text{ диагонализир.} & & \mathcal{A} \text{ не о.p.c.} \\
 & & \rightarrow A \text{ приводится к Жордановой форме}
 \end{array}$$

**Определение 1.**  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in V \quad v := x + iy \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \quad \begin{aligned} x &= Re v \\ y &= Im v \end{aligned}$$

Определим

1.  $v = v' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \in V \\ y = y' \end{cases}$
  2.  $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{cases}$
  3.  $\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\alpha x - \beta y}_{\in V_{\mathbb{C}}} + i \underbrace{\beta x + \alpha y}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

$$4. \forall x \in V \Leftrightarrow x + i0 \in V_{\mathbb{C}}$$

$$V \subset V_{\mathbb{C}}$$

$$0 \leftrightarrow 0 + i0$$

Упр.:  $V_{\mathbb{C}}$  – линейное пространство над  $\mathbb{C}$

$V_{\mathbb{C}}$  – комплексификация линейного вещественного пространства  $V$

**Утверждение.**  $e_1 \dots e_n$  базис  $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$  базис  $V_{\mathbb{C}}$

T.e.  $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$  структуры над разными полями.

Доказательство.  $e_1 \dots e_n$  базис  $V_{\mathbb{C}}$ ?

- порождающая?
- линейно независимая?

1.  $\forall v \in V_{\mathbb{C}} \quad v = x \in V + iy \in V = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j =$   
 $\sum_{j=1}^n \underbrace{[x_j + iy_j]}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n$  порождающая.
2.  $\sum_{j=1}^n \gamma_j e_j = \emptyset \quad \gamma_j \in \mathbb{C}$   
 $\left\| \sum_{j=1}^n \underbrace{\alpha_j e_j}_{x} + i \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_j e_j}_{y} = \emptyset \right.$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \emptyset = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \\ y = \emptyset = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \end{cases} \quad e_1 \dots e_n$  линейно независим.  $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall j \alpha_j = 0 \\ \forall j \beta_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall j \gamma_j = 0$   
 $\Rightarrow \underbrace{e_1 \dots e_n}_{\text{лин. незав.}} \text{ в } V_{\mathbb{C}}$

□

**Определение 2.**  $z = x + iy \quad x, y \in V$

вектор сопряженный к  $z$ :

$$\bar{z} = x - iy$$

$$(\bar{z} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \bar{\lambda} \bar{z})$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

**Утверждение.**  $v_1 \dots v_m$  линейно незав. в  $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$  линейно независимы в  $V_{\mathbb{C}}$

Очевидно,  $v_1 \dots v_m$  линейно зависимы  $\Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$  линейно зависимы.

*Доказательство.*

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{v}_j = \bar{0} = 0 \\ \left\| \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^m \gamma'_j v_j \text{ линейно незав.} \right. \end{array} \right| \Leftrightarrow \forall j \gamma'_j = 0 = \bar{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow$  линейно независим.

□

$$rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$$

**Определение 3.**  $\mathcal{A} \in End(V)$

$$V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i \underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$$

Линейность?

1. Аддитивность.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1 + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

Очевидно, из аддитивности  $\mathcal{A}$

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Однородность

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v) &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(x + iy)) = \\ &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)) = \\ &= \mathcal{A}(\alpha x - \beta y) + i\mathcal{A}(\alpha y + \beta x) = \\ &= \alpha \mathcal{A}x - \beta \mathcal{A}y + i\alpha \mathcal{A}y + i\beta \mathcal{A}x = \\ &= (\alpha + i\beta)\mathcal{A}x + i(\alpha + i\beta)\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{A}x + i\lambda \mathcal{A}y = \\ &= \lambda(\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y) = \lambda \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  – продолжение линейного вещ. оператора  $\mathcal{A}$

с пространства  $V$  на его комплексификацию  $V_{\mathbb{C}}$

Свойства  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V(V_{\mathbb{C}}) \\ \text{веществ.} \\ \mathcal{A} \leftrightarrow A \\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Т.е.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр.  $\mathcal{A}$

$$2. \forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z}$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \overline{\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y = \\ &= \mathcal{A}x + i\mathcal{A}(-y) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x - iy) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z} \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} \chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \\ \parallel & & \parallel \end{array} \quad \exists e_1 \dots e_n \text{ базис } V$$

$$\det(A - tE) \quad \det(A_{\mathbb{C}} - tE) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Все корни характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}$  являются собственными числами  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

$$4. \quad \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda) = 0$$

Т.к. многочлен с вещ. коэф.  $\Rightarrow \bar{\lambda}$  тоже корень.

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \quad \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\bar{\lambda}) = 0$$

$v$  соотв. с.в.

$$\Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ :	$\dim V_{\lambda} = \dim V_{\bar{\lambda}}$ (из утв. 2)
	$\gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{v} \underset{\text{св-во 2}}{=} \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{с.в. для } \lambda}}{v}} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda}$$

"III":  $\mathcal{A} \in End(V)$

$V$  над  $\mathbb{R}$

$$\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = \dim V$$

Т.е. не все корни  $\chi_{\mathcal{A}}$  вещ.

$\rightarrow$  строим  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$   $A_{\mathbb{C}} = A$

Все корни с.ч.  $\Rightarrow$  матрица для  $A_{\mathbb{C}}$  будет сведена либо к I, либо к II

**Примеры.**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$$

$$D = -36 < 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ с.ч. } \alpha(\lambda_1) = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3 \quad \alpha(2, 3) = 1$$

$$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 \quad V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 + 3i \quad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$$

Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещественных чисел.

Только теперь арифметические операции с комплексными.

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 + 3i \\ 5 + 3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$$

$\forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$  диагонализирован.

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 - 3i & 3 + 3i \\ 2 & 5 - 3i & 5 + 3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix} T^{-1} = \dots$$

## 7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

**Определение 1.** Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен  $\psi(t)$  называется аннулятором элемента  $v \in V$ , если  $\psi(\mathcal{A})v = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$$

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$$

$$\psi(t) = \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$$

Т.е. перестановочны.

**Определение 2.**  $\psi(t)$  аннулятор элемента  $v \in V$  наименьший возможной степени называется **минимальным аннулятором элемента**  $v$

**Теорема 1** (О минимальном аннуляторе элемента).

$\mathcal{A} \in End(V)$

1.  $\forall v \in V \exists! \text{ минимальный аннулятор } v$
2.  $\forall \text{ аннулятор элемента делится на его минимальный.}$

*Доказательство.*

1. (a)  $\square v = 0 \quad \psi(t) = 1 \quad \text{Очевидно, минимальный аннулятор.}$

$$\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = 0$$

- (b)  $\square v \neq 0$

$$(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \dots, \mathcal{A}^{m-1}v, \mathcal{A}^m v$$

линейно независимая система

линейно зависимая система

$$\dim V = n$$

$$m \leq n + 1$$

$$\mathcal{A}^m v = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$$

$$0 = \mathcal{A}^m v - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow \text{Алгоритм}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$$

Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента  $v$

2.  $\psi_1$  – аннулятор  $v$

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$$

$$\deg r(t) < \deg \psi(t)$$

$$0 = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})v + r(\mathcal{A})v \Rightarrow$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(t) \text{ аннулятор } v \\ \deg r < \deg \psi \end{cases} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdash \psi$$

□

**Определение 3.** Нормализованный многочлен  $\phi(t)$  называется аннулятором  $\mathcal{A}$ ,

если  $\phi(\mathcal{A}) = 0$

$$(\Leftrightarrow \forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = 0)$$

Аннулятор  $\mathcal{A}$  минимальной степени называется **минимальным многочленом**

**Теорема 2** (о минимальном многочлене).  $\mathcal{A} \in End(V)$

1.  $\forall \mathcal{A} \exists! \text{ минимальный многочлен}$
2.  $\forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} \text{ делится на минимальный многочлен}$

*Доказательство.*

$e_1 \dots e_n$  базис  $V$

$\Rightarrow$  по Теореме 1 для  $\forall e_j \exists! \psi_j$  минимальный аннулятор  $e_j$

$$\begin{aligned}
& \psi_j(\mathcal{A})e_j = \emptyset \\
& \psi(t) = \text{H.O.K. } (\psi_1 \dots \psi_n) \\
& \forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n v_i \phi(\mathcal{A})e_i = \\
& = \sum_{i=1}^n v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=0} = \emptyset \\
& \phi : \psi_j \Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = \emptyset \Rightarrow \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A}$$

Давайте покажем, что у  $\phi$  степень минимальная.

От противного.

$$\exists \phi_1 \text{ аннулятор } \mathcal{A} \quad \exists \deg \phi_1 < \deg \phi$$

$$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = \emptyset \Rightarrow \phi_1 \text{ аннулятор элемента } e_j \xrightarrow{\text{по Теореме 1}}$$

$$\Rightarrow \phi_1 \vdots \psi_j \xrightarrow{\substack{\text{аннулятор } e_j \\ \text{минимальный аннулятор } e_j}} \Rightarrow \phi_1 : \phi \Rightarrow \deg \phi_1 \geq \deg \phi. \text{ Противоречие} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \deg \phi \text{ минимальный} \Rightarrow \text{п.2 доказан, т.к. } \forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} : \phi$$

**Единственность?**

$$\exists \phi_1, \phi \xrightarrow{\substack{\text{нормализов.} \\ \nwarrow \nearrow}} \text{минимальные аннуляторы одной степени.}$$

нормализов.  $\Rightarrow$  ст. коэф. 1

$$\deg(\phi_1 - \phi) < \deg(\phi) = \deg(\phi_1)$$

$$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \phi_1(\mathcal{A})v - \phi(\mathcal{A})v = \emptyset \Rightarrow$$

$\Rightarrow \phi_1 - \phi$  аннулятор  $\mathcal{A}$  меньшей степени  $\Rightarrow$  противоречие минимальн.

□

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \phi = ? \text{ минимальный многочлен}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_1 ?$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^2e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

линейно завис.

$$\mathcal{A}^2e_1 = -4e_1 + 4\mathcal{A}e_1$$

$$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^2e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

линейно завис.

$$\mathcal{A}^2e_2 = 4\mathcal{A}e_2 - 4e_2$$

$$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

линейн. нез.

$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$

$$\psi_3(t) = t - 2$$

$$\phi(t) = \text{H.O.K. } ((t - 2)^2, (t - 2)) = (t - 2)^2$$

**Теорема 3** (Кэли-Гамильтона).  $\mathcal{A} \in End(V)$

$$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) \text{ — аннулятор } \mathcal{A}$$

*характерист. многочлен*

Доказательство.  $\chi(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A} - \mathcal{A}) = 0$

□

Я так и не понял это норм доказательство или нет. В любом случае далее идет длинное док-во.

Доказательство.  $\mu$  — не корень  $\chi(t)$

$$\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$$

$e_1 \dots e_n$  базис в.  $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B \leftarrow \text{соузная матрица (прис-ная)}$$

$$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow \text{определитель } (n-1)\text{-го порядка } A - \mu E$$

Т.е. мн-н степени  $n-1$  относительно  $\mu$

$$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \dots + B_1\mu + B_0$$

$$\det(A - \mu E) \cdot E = (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + B_1\mu + B_0)$$

||

$$\chi(\mu) \cdot E$$

||

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k \cdot E$$

$$\begin{array}{ll} \mu^0 : \alpha_0 E = AB_0 & | A^0 \\ \mu^1 : \alpha_1 E = AB_1 - B_0 & | A^1 \\ \mu^2 : \alpha_2 E = AB_2 - B_1 & | A^2 \\ \dots & \\ \mu^{n-1} : \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2} & | A^{n-1} \\ \mu^n : \alpha_n E = -B_{n-1} & | A^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{A}) = \chi(A) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1} \\ &- A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

$\chi$  — аннулятор  $\mathcal{A}$

□

**Теорема 4.**  $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корней характеристического многочлена  $\mathcal{A}$  совпадает с множеством корней минимального многочлена  $\mathcal{A}$  (без учета кратности)

Доказательство.  $\chi(t)$  – характерист.,  $\phi(t)$  – минимальный многочлен.

” $\Leftarrow$ “  $\exists \phi(\lambda) = 0 \Rightarrow$  т.к.  $\chi$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , то по Т-ме 2  $\chi \dot{\mid} \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

” $\Rightarrow$ “  $\exists \chi(\lambda) = 0$

1.  $\exists \lambda \in K \Rightarrow \lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \quad \exists v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0 \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$  минимальный аннулятор  $v$

Т.к.  $\phi \dot{\mid} \psi \Rightarrow \lambda$  корень  $\phi$

$\phi(\lambda) = 0$

2.  $\lambda \notin K$  т.е. III случай:  $K = \mathbb{R}$

$\exists$  комплексные корни характерист. многочлена.

$V \rightarrow V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$  базис  $V \rightarrow$  базис  $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j + i\mathcal{A}\theta = \mathcal{A}e_j$

$e_j = e_j + i\theta$

$\Rightarrow \forall k \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$

$\Rightarrow$  Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).

Получим, что минимальные многочлены  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  и  $\mathcal{A}$  совпадают.

Т.е.  $\phi$  мин. мн-н для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   $\left. \begin{array}{l} \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$  Применим случай а) для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   
 $\Rightarrow \lambda$  с.ч.  $\lambda$  корень  $\phi$

□

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни  $\chi : 2$

Корни  $\phi : 2$

$\rightsquigarrow$  еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

**Следствие 1.**

1.  $\psi \vdots \phi$   
 характерист. (аннулятор) минимальный (аннулятор мин.)

2.  $\deg \phi = n = \dim V \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$\chi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$
$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

## 7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad \sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

$P_{m-1}$  – линейное пространство многочленов степени не выше  $m-1$

$$\dim P_{m-1} = m$$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(t) \quad \begin{array}{l} \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \\ \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \mu \neq \lambda \end{array}$$

вз. прости

**Определение 1.**  $I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p \dot{\cdot} \phi_\lambda\}$

*Главный идеал, порожденный многочленом  $\phi_\lambda$  =*

$$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda \phi_\lambda\}$$

$I_\lambda$  – линейное подпространство  $P_{m-1}$

$$p_{1,2} \dot{\cdot} \phi_\lambda \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \dot{\cdot} \phi_\lambda$$

**Теорема 1.**  $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_\lambda$

*Доказательство.*

1. Дизъюнктность.

$$0 = \sum_{\lambda} \underbrace{f_\lambda \phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda \cdot \phi_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\substack{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}$$

$$\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\Rightarrow f_\lambda \cdot \phi_\lambda \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \underbrace{f_\lambda}_{\substack{\text{вз. прости} \\ \deg f_\lambda = m(\lambda)-1}} \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow f_\lambda \phi_\lambda \equiv 0 \Rightarrow \text{Дизъюнктны}$$

2.  $\dim P_{m-1} = m$

$$\begin{aligned} &|| \\ &\sum_{\lambda} \dim I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \end{aligned}$$

$$I_\lambda \subset P_{m-1}$$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

□

**Следствие 1.**  $\forall p \in P_{m-1} \exists! p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$

$$p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$  – полиномиальное разложение единицы

*Замечание.*

$$1. \lambda \neq \mu$$

$$\begin{array}{ccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu \\ || & & || \\ f_\lambda \phi_\lambda & f_\mu \phi_\lambda & = \eta \cdot \phi \\ \uparrow & & \\ (t - \lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

$$2. \forall \lambda m(\lambda) = 1$$

**Если.** Т. е. все корни  $\phi$  взаимно простые.

$$f_\lambda = \text{const} \quad (\text{def } f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$$

**Теорема 2** (Лагранжа).

$$\forall \lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ll} \text{корень } \phi \rightarrow \mu \neq \lambda & \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ & \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \\ p(t) \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\mu} & \boxed{f_{\mu}} \cdot \phi_{\mu}(t) \\ & \uparrow \\ & \text{const, т.к.} \end{array}$$

корни взаимно

просты

$$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu)$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (t - \lambda) = \underbrace{\sum_{\mu} \phi_{\mu}(t)}_{\phi_{\mu}(t)}$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = \phi_{\lambda}(\lambda) \Rightarrow f_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$0 \mu \neq \lambda$

□

**Следствие 1.**  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow \boxed{t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}}$$

*Доказательство.* По теореме:  $1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_{\lambda}(t)$

$$\text{По теореме: } t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

□

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$\phi$  минимальный многочлен, все корни  $\in K$  ( $\Rightarrow$  все корни  $\chi \in K$

$\Rightarrow$  т.е. все с.ч.  $\in K - I, II$  случаи)

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} := p_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \in End(V)$$

$\mathcal{P}_{\lambda}$  – проекторы ?      ↑ это уже есть

Достаточно проверить  $\mathcal{P}_{\lambda} \cdot \mathcal{P}_{\mu} = \mathbb{0}$

$$\mathcal{P}_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = f_{\mu}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

перестановочны, т.к. многочлены от  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

↑  
содержит

$$(p_{\lambda} \cdot p_{\mu} : \phi \text{ см. замеч. 1}) \quad \eta(\mathcal{A})(t - \mu)^{m(\mu)} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{\lambda}$  проекторы – **спектральные проекторы**  $\mathcal{A}$

$Im \mathcal{P}_{\lambda}$  **спектральное подпространство**

$$7.5 \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_{\lambda}}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{array}$$

$$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow \text{не о.п.с.}$$

$$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$$

$$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$$

$$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$$

$$\text{Прав. дробь } \frac{1}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda}}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda}}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}} \quad \begin{array}{l} \text{Правильн.} \\ \text{Правильн. дробь} \end{array}$$

$$\deg f_{\lambda} < m(\lambda)$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{\left(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}\right)}_{p_{\lambda_1}} \underbrace{(t-3)}_{\phi_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}}_{p_{\lambda_2}} \underbrace{(t+1)^2}_{\phi_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

*Замечание.*  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа  $t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}} \nearrow \quad 1 = \sum p_{\lambda} \quad \text{спектральное разложение о.п.с.}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1} \quad \text{Доказательство позже}$$

**Определение 2.**  $K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$

называется **корневым подпространством**  $\mathcal{A}$

**Теорема 3.**

1.  $K_{\lambda}$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$
  2.  $\text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}$
  3.  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный многочлен  $\mathcal{A}|_{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$
- $\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}}$

*Доказательство.*

$$1. x \in K_{\lambda} \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_{\lambda}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{A}x = \mathcal{A} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{перестановочны} \\ \Rightarrow = 0}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$2. (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{P}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) =$$

$$= f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = 0$$

$$\forall x \in V$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_{\lambda} x}_{\in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}} = 0 \Rightarrow \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$$

$$\text{Обратно: } K_{\lambda} \stackrel{?}{\subseteq} \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$x \in K_{\lambda}$$

$$\mu \neq \lambda \quad \mathcal{P}_{\mu} x = f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A}) x = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{содержит} \\ \uparrow \\ \eta(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$x = \mathcal{E}x = \sum_{\substack{\mu \\ 0 \\ \mu \neq \lambda}} \mathcal{P}_{\mu} x = \mathcal{P}_{\lambda} x \in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \Rightarrow K_{\lambda} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$$

3.  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный многочлен для  $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$ ?

$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$  аннулятор  $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

Минимальный?

$\square$  не минимальный

$\psi_1 = (t - \lambda)^{m(\lambda)-1} \quad \square$  это минимальный многочлен

$\phi_1 := (t - \lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$  аннулятор  $\mathcal{A}$ ?

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$$

$$= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A}) \cdot \phi(\mathcal{A}) = \emptyset$$

$$\forall x \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$$

$$= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda} = \emptyset$$

$$\underbrace{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x}_{\text{мин. многочлен по предположению}}$$

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \emptyset$$

$$\phi_1(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \phi_1(\mathcal{A}) \sum_{\mu} \mathcal{P}_\mu = \emptyset$$

$$\underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}$$

$\Rightarrow \phi_1$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , но степени  $< \phi$

$\deg \phi_1 = m - 1 \Rightarrow$  противоречие мин.  $\phi \Rightarrow (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный мн-н  $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

□

**Следствие 1.**  $A$  о.п.с.  $\Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ )  $\mathcal{A}$  о.п.с.

$\phi(t) \prod_{\lambda} (t - \lambda)$  покажем что это минимальный многочлен  $\mathcal{A}$

$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$  – собственные подпространства  $\mathcal{A}$

$\forall v \in V \exists! v = \sum_{\lambda} v_{\lambda}, v_{\lambda} \in V_{\lambda}$

$$\phi(\mathcal{A})v = \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \sum_{\mu} v_{\mu} =$$

$$= \sum_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) v_{\mu} = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})v_{\mu}}_{\emptyset} = \emptyset$$

$$v_{\mu} \in V_{\mu} = Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \nearrow$$

$\Rightarrow \phi$  аннулятор  $\mathcal{A} \Rightarrow$  очевидно минимальная степень  $\Rightarrow$  минимальный многочлен.

( $\Leftarrow$ )  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$K_{\lambda} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^1 = V_{\lambda}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с.}$$

□

**Примеры.**

$$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A - \lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$$

$$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A - \lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2} \quad \text{— упр.}$$

## 7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

**Определение 1.**  $\mathcal{B} \in End(V)$  называется **нильпотентным**, если  $\phi(t) = t^\nu$

Минимальный многочлен  $\mathcal{B}$ , т.е.  $\mathcal{B}^\nu = \emptyset$

$\nu$  – индекс нильпотентности (мин. степень  $\mathcal{B}^\nu = \emptyset$ )

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

Идемпотентность

Степень минимального многочлена  $\rightarrow \nu \leq \dim V = \underset{\text{степень } \chi}{\uparrow} n$

**Утверждение.**  $\forall \lambda : m(\lambda) \leq \dim V_\lambda$

*Доказательство.*  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный мн-н  $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = \emptyset$$

$\Rightarrow m(\lambda)$  индекс нильпотентности  $\mathcal{B}_\lambda \in End(K_\lambda)$

$$m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$$

□

*Замечание.*  $\sum_{\lambda} m(\lambda) \leq \sum_{\substack{\parallel \\ \deg \chi}} \dim K_\lambda = n$

$$\bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V$$

**Теорема 1** (Разложение Жордана).

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$  можно представить в виде:

$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{D}$  о.п.с.

$\mathcal{B}$  нильпотентный, причем  $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$  перестановочны

*Доказательство.*  $\phi$  – минимальный многочлен  $\mathcal{A}$

$\mathcal{E} = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$  операторн. разложение единицы

$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$   $\mathcal{D}$  о.п.с.?

$V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$

$\exists v_\lambda \neq 0 \in Im \mathcal{P}_\lambda$

$$0 \neq \lambda$$

||

$$\underline{\underline{Dv_\lambda}} = (\sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}) v_\lambda = \sum_{\mu} \mu (\mathcal{P}_{\mu} v_\lambda) = \lambda \mathcal{P}_\lambda v_\lambda = \underline{\underline{\lambda \cdot v_\lambda}}$$

$$\mathcal{P}_{\mu} \mathcal{P}_\lambda = \emptyset$$

$$\lambda \neq \mu$$

$\Rightarrow \lambda$  с.ч.  $\mathcal{D}, v_\lambda$  соотв. с.в.  $\mathcal{D}$

$\Rightarrow$   $Im \mathcal{P}_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathcal{D}}$  собств. подпр-во  $\mathcal{D}$ , отвечающ. с.ч.  $\lambda$   
 $V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$  дизъюнктны  $\Rightarrow Im \mathcal{P}_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$

Объединение базисов  $Im \mathcal{P}_\lambda$  – базис  $V$

Каждый вектор из  $Im \mathcal{P}_\lambda$  – это с.в.  $\mathcal{D}$

$\Rightarrow$  у  $V$  есть базис из с.в.  $\Leftrightarrow \mathcal{D}$  о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \mathcal{A} \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\nu = \max_{\lambda} m(\lambda) \frac{\phi(t)}{\min_{\text{мин. мн-н}} \mathcal{A}} = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda})^{\nu} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \mathcal{P}_{\lambda} =$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = 0$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\lambda}^2 = \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \underbrace{f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_{\lambda}} =$$

все операторы перестановочны

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu-m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})=0} = 0$$

$\mathcal{B}$  нильпотент

$$\mathcal{B} = \sum_{\lambda} \underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}}$$

$$D = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$

□

Замечание.

$$1. \mathcal{B} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}$$

$$\mathcal{B}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{Im \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}}$$

2.  $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$  все три оператора взаимно-перестановочны

$$\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$$B^2 \stackrel{?}{=} \emptyset \quad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Разложение Жордана}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Диагонализ.

Нильпотент.

**Теорема 2** (Единственность разложения Жордана).

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)



Рис. 1

*Доказательство.*  $\square \mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{Нильпотент}}{\mathcal{C}} \quad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

T.K.  $\mathcal{D}'$  o.p.c., to  $\mathcal{D}' = \sum_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

$M$  – множество с.ч.  $\mathcal{D}'$

$Q_\mu$  спектральные проекторы

$$Q_\mu : V \rightarrow V_\mu^\nu$$

$$\sum_{\mu} Q_{\mu} = \mathcal{E}$$

Достаточно доказать:  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

1. Множество  $M$  совпадает с множеством корней  $\phi$  – минимальн. мн-н  $A$

$$\{\mu\} = \{\lambda\}$$

2.  $ImQ_\mu = K_\mu \leftarrow$  корневое подпространство  $\mathcal{A}$ , отвч. с.ч.  $\mu$  ( $Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$ )

$$1. \quad (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})Q_\mu = (\sum_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

$$Q_\nu Q_\mu = 0 \quad \text{for } \nu \neq \mu \quad Q_\mu^2 = Q$$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

↑

Верно, если  $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$\Rightarrow$  докажем:  $CQ_\mu = Q_\mu C$

$$\square \lambda \neq \mu \ (\lambda - \mu) Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = (\lambda Q_\lambda) \mathcal{C} Q_\mu - Q_\lambda \mathcal{C} \underbrace{(\mu Q_\mu)}_{\mathcal{D}' Q_\mu} =$$

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \sum_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu \mathcal{D}'$$

$$Q_\lambda(\mathcal{D}'\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{D}')Q_\mu = 0$$

$$\lambda \neq \mu \quad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \emptyset = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$$

$$\underbrace{\sum_{\lambda} Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu}_{\mathcal{E}} = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \frac{\boxed{\sum_{\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}{\boxed{\mathcal{E}}}$$

$$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

$$k(\mu) = \min K, \text{ такой что } \mathcal{C}^k Q_\mu = \emptyset$$

Такое  $K(\mu)$  обязательно найдется, т.к.  $\mathcal{C}$  – нильпотент.

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

$(t - \mu)^{k(\mu)}$  – минимальный аннулятор элементов  $\text{im} Q_\mu$

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)}$$

$\phi$  минимальный многочлен  $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$  аннулирует любые элементы  $V$ ,

в частности элементы  $\text{Im} Q_\mu$

Т.е.  $\phi(t)$  аннулятор элементов  $\text{Im} Q_\mu \Rightarrow \phi(t) \cdot (t - \mu)^{k(\mu)} \leftarrow$  минимальный аннулятор для  $\text{Im} Q_\mu$

$\Rightarrow$  верно  $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t - \mu)^{k(\mu)}$$

$$\Rightarrow \phi \cdot \psi$$

Покажем, что  $\psi$  аннулятор  $\mathcal{A}$

$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\text{перестановочны}}{( \mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)}} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)} \underbrace{(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}_{\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow \psi$  аннулятор  $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \cdot \phi$  минимальный аннулятор

$$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda - \text{корни } \phi\}$$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$

$$\mu = \lambda$$

$$2. \quad (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

||

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

$\mu$  корень  $\phi$

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = \text{Im} \mathcal{P}_\mu$$

$$\left. \begin{array}{l} \bigoplus_{\mu} K_\mu = V \\ \bigoplus_{\mu} \text{Im} Q_\mu = V \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im} Q_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

□

**Теорема 3.**  $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  разложение Жордана

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$$

Доказательство.  $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$$\mathcal{B}^\nu = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \mu - \text{не корень} & \quad (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\parallel \emptyset}) = \\ & = \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E} - t\mathcal{B}) \cdot \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1}) \end{aligned}$$

**μ – не корень**

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu &= \det \underbrace{[\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}]}_0 \underbrace{[-\mathcal{B}]}_{\mathcal{D}} \cdot \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} = \\ &= \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}} \end{aligned}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

□

**Следствие 1.** Если  $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  разложение Жордана

$$\text{To } \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$$

Доказательство. Очевидно,  $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$

□

**Следствие 2.**  $\boxed{\dim K_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство.  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \stackrel{\text{o.p.c.}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = \dim \mathcal{P}_\lambda = \dim K_\lambda$   
 $\forall \lambda$  корня  $\chi$  с.ч. (I, II)

□

## 7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda \text{ корневые} \quad \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$\chi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \quad \lambda \in K \text{ все корни с.ч.}$$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \quad \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$$

$\bigcap$

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$\forall \lambda K_\lambda \rightsquigarrow$  строим базис  $\rightsquigarrow$  матрица оператора будет иметь  
 $\bigcup_\lambda$  Жорданов базис блочно-диагональную структуру  
– Жорданова форма матрицы

$$\square K_\lambda = K \quad \gamma(\lambda) = \gamma$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha \quad m(\lambda) = m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \quad \dim = \gamma$$

$$K_1 = V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$$

$\cap$

$$K_2 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^2$$

$\vdots$

$\cap$

$$K_m = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad \dim = \alpha$$

**Пример.**

$$\alpha = \dim K_\lambda = \dim K_5 = 24$$

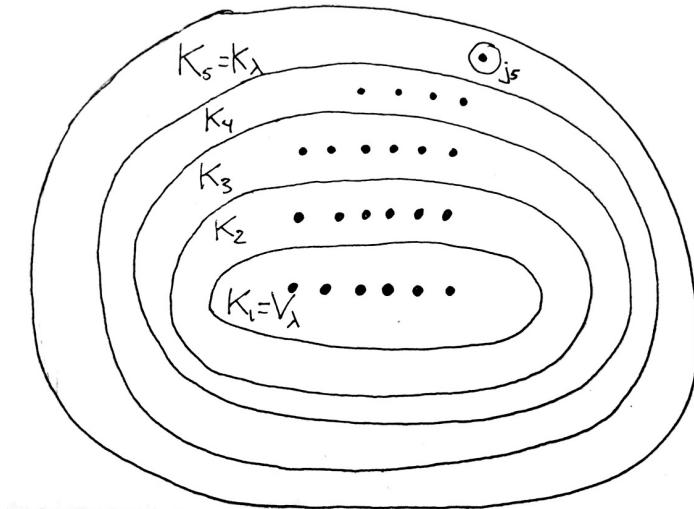
$$m = 5$$

$$\gamma = 7$$

j <sub>5</sub>	$\in K_5 \setminus K_4$
j <sub>4</sub>	$= \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_5 \in K_4$
j <sub>3</sub>	$= \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_4 \in K_3$
j <sub>2</sub>	$= \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_3 \in K_2$
j <sub>1</sub>	$= \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda$

Циклический базис

$$j_1, j_2, j_3, j_4 - \text{присоединенные вектора.}$$



$$\mathcal{A}|_L$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

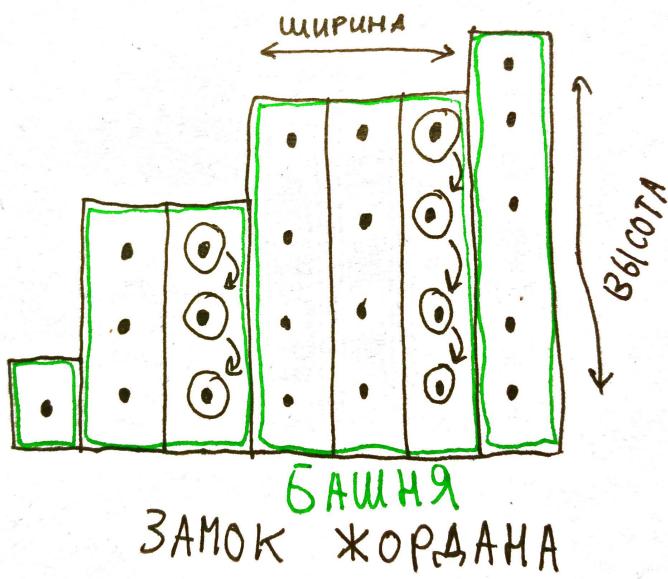
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 \quad \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 \quad \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 \quad \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 \quad \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5$$

Матрица  $\mathcal{A}|_L$  в базисе  $j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  Клетка Жордана  $5 \times 5$   
(блок нижнего уровня)

$$(j_5 \ j_4 \ j_3 \ j_2 \ j_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



**Башня** – циклическое объединение базисов одной длины.

**Высота башни** – количество векторов в базисе.

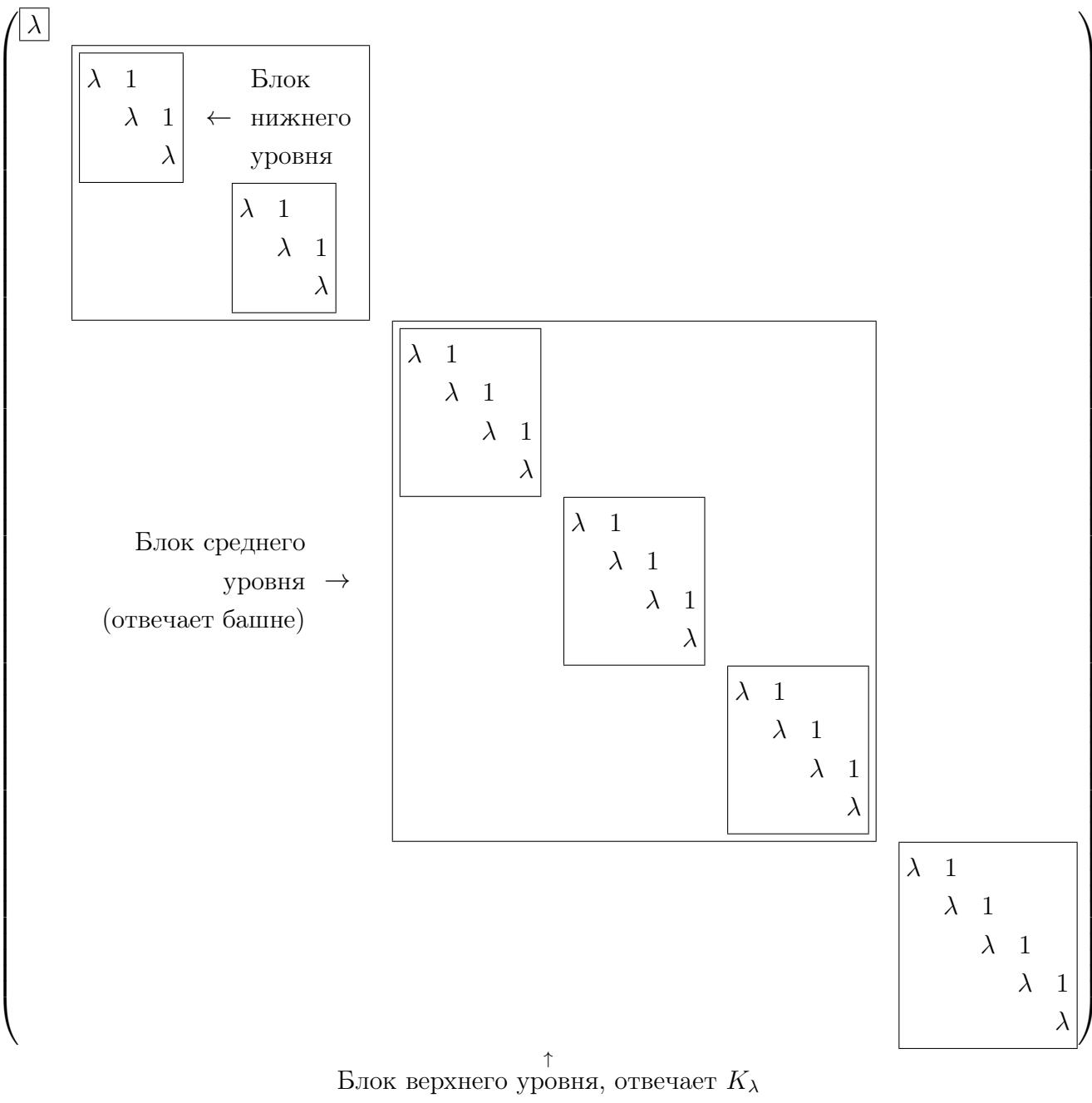
**Ширина башни** – число циклических базисов одной размерности

**Основания** каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов =  $\gamma$

||

Число Жордановых клеток



$\gamma$  = Число блоков нижнего уровня

$\alpha$  = Число  $\lambda$  на диагонали

$\mathcal{A}$  о.п.с.  $\forall \alpha = \gamma$

$V_\lambda$   $\boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$

"Деревня Жордана"

**Примеры.**  $\lambda \alpha(\lambda) = 4$

$$1. \gamma(\lambda) = 3 \begin{pmatrix} \boxed{\lambda & 1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$2. \gamma(\lambda) = 2 \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ или } ? \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$3. \gamma(\lambda) = 1 \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} \quad T = (\dots j_1 \dots j_5 \dots)$$

Объединение цикл. базисов для всех  $\lambda$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \mathcal{J} \\ & & \text{В Жорд. базисе} \\ \uparrow & & \\ A & & \\ & \text{В исходном} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{J} = T^{-1}AT}$$

$$\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}} \rightarrow T\mathcal{J} = AT$$

1, 3

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы  $T \rightsquigarrow T$

$\rightsquigarrow$  построить Жорданов базис.

## 2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем  $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2.  $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \underset{\dim K = \alpha}{K}$
- $K_r = \text{Ker}(A - \lambda E)^2$
- $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$$\forall \lambda \quad K = K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$$m(\lambda) = m$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha$$

$$K_r = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^r \quad r = 1 \dots m$$

$$V_\lambda = K_1$$

$$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$$

Все включения будут строгие:

$$\square K_{r+1} = K_r \quad \text{Ker} \mathcal{B}^{r+1} = \text{Ker} \mathcal{B}^r$$

По Теореме о rg и def:  $\dim K = \text{rg} \mathcal{B}^{r+1} + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^{r+1}} = \text{rg} \mathcal{B}^r + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^r} \quad (\text{def} \mathcal{B}^{r+1} = \text{def} \mathcal{B}^r)$

II

1. Найдем  $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2.  $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = \text{Ker}(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$   
 $\Rightarrow \dim K_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

$$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} = Im\mathcal{B}^r \rightarrow 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие}$$

$$\begin{array}{ccc} || & & \nearrow \\ Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) & = & Im\mathcal{B}^r \xrightarrow{\text{либо}} \mathcal{B}^r = \emptyset - \text{противоречие мин. } m \end{array}$$

$$Im\mathcal{B}|_K =: BK$$

$$Z_0 = BK$$

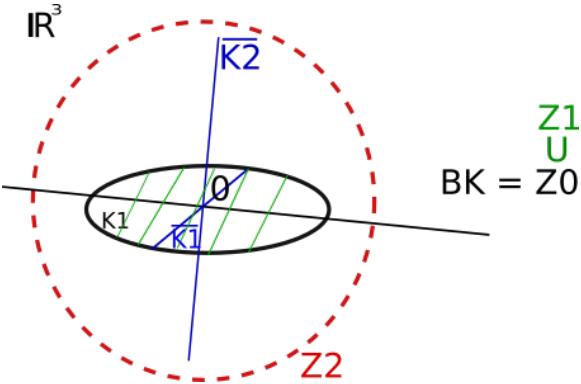
$$Z_r = BK + K_r$$

$$r = 1, \dots, m \quad (K_m = K) \quad B : K \rightarrow K$$

$$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_m = K$$

$$\begin{array}{c} Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r} \\ \overline{K_r} \subset K_r \end{array}$$

$$K = \underbrace{BK}_{Z_1} \oplus \underbrace{\overline{K_1}}_{Z_2} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m}$$



$$\begin{array}{c} K_1 \subset K_3 \\ dim_2 \quad dim_3 \\ dimK_1 + dimBK = 3 \\ \parallel \quad \parallel \\ def\mathcal{B} \quad dimIm\mathcal{B} \end{array}$$

$$Z_1 = BK + K_1 \supseteq Z_0$$

∩

$$Z_2 = BK + K_2$$

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

**Теорема 1.**  $0 \leq r \leq m - 1$

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

*Доказательство.*

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

$$\forall x \in K \quad x = \sum_{\in \overline{K}_1} x_1 + \sum_{\in \overline{K}_2} x_2 + \dots + \sum_{\in \overline{K}_m} x_m + \sum_{\in BK} Bx^*$$

$$1 \leq r \leq m - 1$$

$$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \dots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* [=]$$

$$B^r x_j = B^{r-j} B^j x_j = \underset{\emptyset}{\parallel}$$

$$1 \leq j \leq r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = \text{Ker } B^j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$$\boxed{B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^*}$$

Дизъюнктность?

$$* B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = 0$$

$$B^r (\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^*}_{y}) = 0$$

$$y \in \text{Ker } B^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r \oplus BK$$

$$\Rightarrow y = x_1 + x_2 + \dots + x_r + \underbrace{B}_{x_i \in \overline{K}_i} x^{**}$$

Однозначно представим

$$\begin{aligned} & \| \\ x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^* & \Rightarrow \boxed{x_i = 0} * \\ x_{r+i} \in \overline{K}_{r+i} & \quad \forall i = 1 \dots m \end{aligned}$$

↓ подставим

$$0 + 0 + \dots + 0 + B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow \text{дизъюнктн.}$$

□

**Следствие 1.**

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus$$

$$\underbrace{\oplus B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^{m-2} \overline{K}_{m-1}}_{\text{---}} \oplus B^{m-2} \overline{K}_m \oplus B^{m-1} \overline{K}_m$$

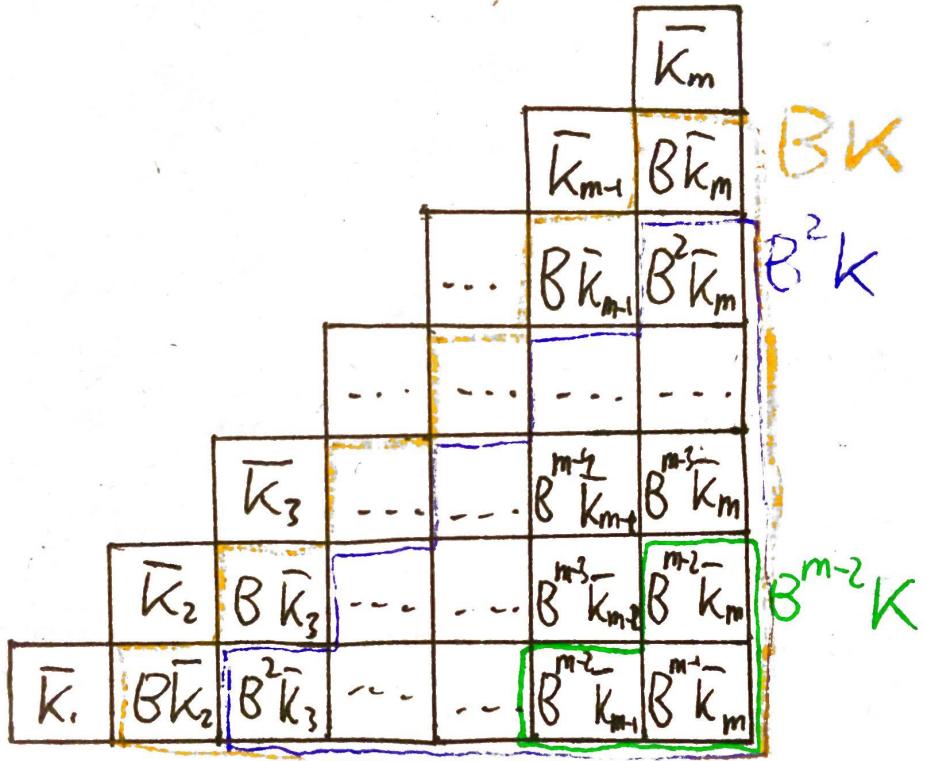
Доказательство.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus BK$$

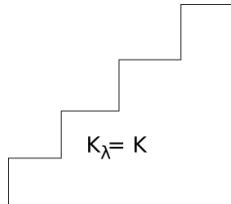
$$BK = \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^2 K$$

$$\underbrace{B^2 K = B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^2 \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^3 K$$

□



$\overline{K}_j$  – Опорные подпространства



$$1 \leq r \leq m$$

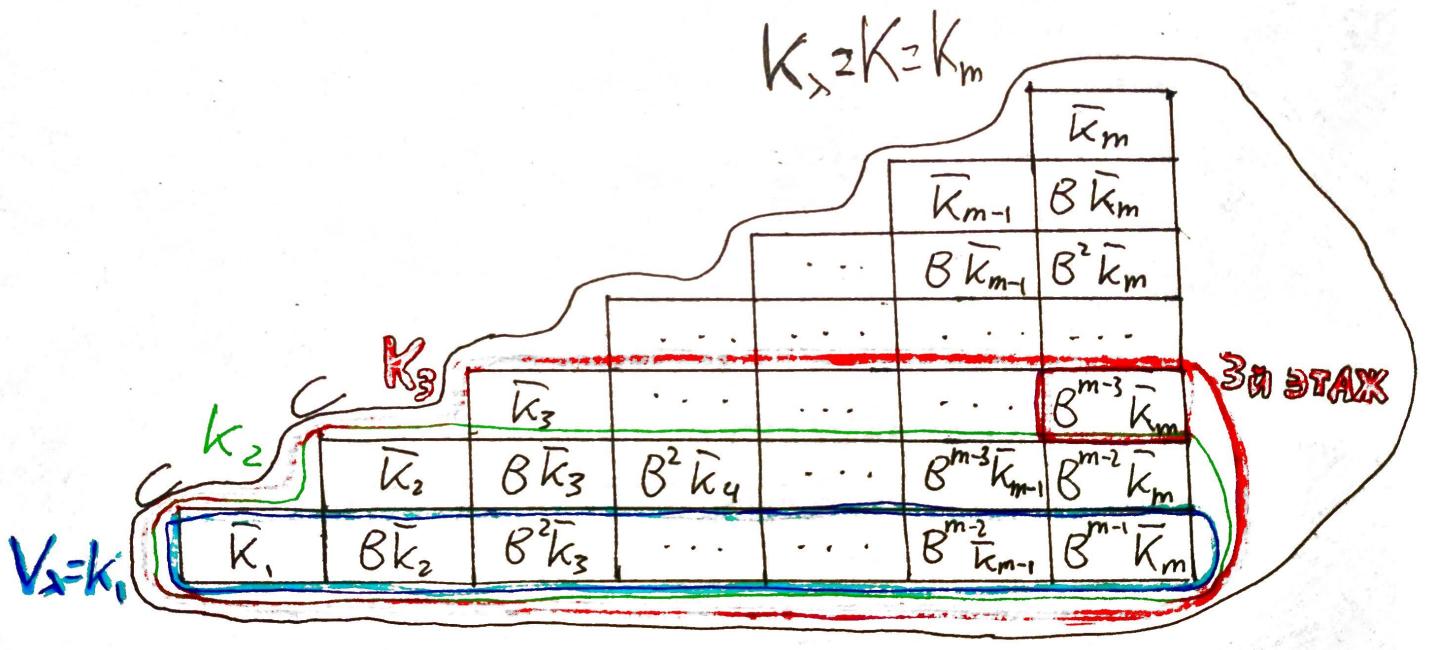
$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset \rightarrow \tau_r = \overline{K}_r \oplus B\overline{K}_r \oplus B^2\overline{K}_r \oplus \dots \oplus B^{r-1}\overline{K}_r$$

Башня высоты  $r$ . "Башня растет вниз"

"Основание" башни  $\equiv$  опорное подпространство  $\overline{K}_r$

"Крыша" башни  $\equiv B^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$

$$x \in B^{r-1}\overline{K}_r \quad \begin{array}{l} x = B^{r-1}y \\ y \in \overline{K}_r \subseteq K_r \end{array} \quad \frac{Bx = B^r y = 0}{x \in \text{Ker } B = V_\lambda}$$



Если  $K_r = \{\emptyset\}$ , то башня высоты  $r$  отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$$1 \leq l \leq m$$

$$\overline{K}_l, B\overline{K}_{l+1}, B^2\overline{K}_{l+2}, \dots, B^{m-1}\overline{K}_m \subset K_l = \text{Ker } B^l$$

—  $l$ -ые этажи соотв. башен

Покажем:  $B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\overline{K}_{l+j}) = (B^{l+j})_{\subset K_{l+j} = \text{Ker } B^{l+j}} \overline{K}_{l+j} = 0 \Rightarrow B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^m \tau_r$$

**Теорема 2** (О размерности башни).

$\forall \tau_r$  любой этаж башни имеет одну и ту же размерность  $d_r = \dim \overline{K}_r$  = ширина башни.

$\overline{K}_r$ $B\overline{K}_r$ $B^2\overline{K}_r$ $\dots$ $B^{r-1}\overline{K}_r$	$d_r = \dim \overline{K}_r$ = ширина башни
$\tau_r$	

Доказательство.

$$B^j|_{\overline{K}_r} : \overline{K}_r \rightarrow B^j\overline{K}_r$$

$B^j|_{\overline{K}_r}$  изоморфизм "?"

$\text{Ker } B^j|_{\overline{K}_r} = \{\emptyset\}$  тривиально "?"

$$\Rightarrow \text{Изоморфизм} \Rightarrow \dim(\overline{K_r}) = \dim(B^j \overline{K_r}) = d_r$$

1

**Следствие 1.**  $\sum_{r=1}^m d_r = \dim V_\lambda = \gamma(\lambda)$

$$\sum_{r=1}^m \underbrace{r \cdot d_r}_{\dim \tau_r} = \dim K_\lambda = \dim K = \alpha(\lambda)$$

**Следствие 2** (Теорема Фробениуса).

$$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$$

$$(d_m = rgB^{r-1})$$

## *Доказательство.*

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

$$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

$$d_2 + \dots + d_m = \rho_1 - \rho_2$$

$\downarrow =$

$$d_3 + \dots + d_m = \rho_2 - \rho_3$$

—

$$d_{m-2} + d_{m-1} + d_m = \rho_{m-3} - \rho_{m-2}$$

—

$$d_{m-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

—

$$d_m = \rho_{m-1}$$

↓ =

$$\rho_m = 0$$

$$d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$$

1

$$\begin{array}{c}
 \leftarrow d \rightarrow \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline
 g_1 & g_2 & \dots & g_d \\ \hline
 Bg_1 & Bg_2 & \dots & Bg_d \\ \hline
 B^2 g_1 & B^2 g_2 & \dots & B^2 g_d \\ \hline
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
 B^{r-1} g_1 & B^{r-1} g_2 & \dots & B^{r-1} g_d \\ \hline
 \end{array} \\
 \mathcal{E}_n = \text{span}(g_1, \dots, g_d) \\
 B\mathcal{E}_n \\
 \mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \mid_{\mathcal{E}_n} \text{изоморфизм} \\
 \text{базис } \mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \rightarrow \text{базис } \mathcal{E}_n \\
 \text{span}(g_1, \dots, g_d, Bg_1, B^2 g_1, B^3 g_1, \dots, B^{r-1} g_1, B^{r-1} g_2, \dots, B^{r-1} g_d) \\
 = \mathcal{E}_n \\
 i=1, \dots, d \quad f: Bg_1, B^2 g_1, \dots, B^{r-1} g_1 \\
 \text{направленные векторы}
 \end{array}$$

изоморфизм  
 базис  $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n}$   $\rightarrow$  базис  $\mathcal{E}_n$   
 $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \mid_{\mathcal{E}_n}$

$i=1, \dots, d$        $f: Bg_1, B^2 g_1, \dots, B^{r-1} g_1$   
 направленные  
 векторы  $g_i$

изоморфизм  
 базис  $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n}$   $\rightarrow$  базис  $\mathcal{E}_n$   
 $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \mid_{\mathcal{E}_n}$

$i=1, \dots, d$        $f: Bg_1, B^2 g_1, \dots, B^{r-1} g_1$   
 направленные  
 векторы  $g_i$

$S_i = \text{span}(g_i, Bg_i, \dots, B^{r-1}g_i)$  циклическое подпр-во

$$T_r = \bigoplus_{i=1}^d S_i$$

$$A \Big|_{S_i} \leftrightarrow \begin{matrix} \text{н-на б} \\ \text{связи} \end{matrix} g_i, Bg_i, \dots, B^{r-1}g_i ?$$

$$A \Big|_{S_i} = (B + \lambda C) \Big|_{S_i}$$

чирнегории  
связи:  
 $B^{r-1}g_i, B^{r-2}g_i, \dots, Bg_i, g_i$

$$Ag_i = Bg_i + \lambda g_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ABg_i = B^2g_i + \lambda Bg_i$$

$$AB^{r-2}g_i = B^{r-1}g_i + \lambda B^{r-2}g_i$$

$$AB^{r-1}g_i = B^rg_i + \lambda B^{r-1}g_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel \quad g_i \in K_r \subset \text{Ker } B^r$$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

диаг. единица  $\gamma_{xy}$  (блок-матрица)  $\gamma_{xy}$  (блок-матрица)

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n} = \lambda E_n + I_n$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_n = \bigoplus_{i=1}^d \zeta_i$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} J_n(\lambda) \\ J_{n-1}(\lambda) \\ \vdots \\ J_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

d krok  
(следует  
последовательно)

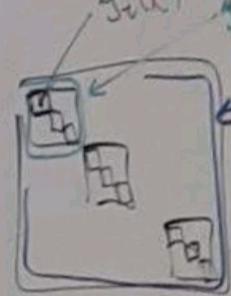
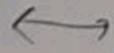
$$k_2 = k = \bigoplus_{i=1}^m \tau_i$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} J_n(\lambda) & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} J_{n-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & J_1(\lambda) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

δια  
діагональ  
у рядах  
(ком-м  
диагональ  
векторів)

δια  
діагональ  
у стовпчиках  
(ком-м  
вертикаль  
направу)

$$A = A / V = \oplus_{\lambda} K_{\lambda}$$



$j_{k_1}$

$j_{k_2}$

$S_{k_3}$

$j_{k_1}$

$j_{k_2}$

$j_{k_3}$

$= y$

нормирована  
ориентированная  
матрица



отображение всех циклических базисов для всех

базисов для всех когомологий  $\Rightarrow$  нормированный  
базис

$$j = (j_1, \dots, j_k, \dots, j_n) \quad T = T_{e-i}$$

$$Y = T^{-1} A T$$

если базис  $V$

$$A \hookrightarrow A$$

в базисе  $e$ .

$$T Y = A T$$

$\Rightarrow$  можно найти  $T$ , решив матрич. систему  
уравнений

3-й алгоритм построения  
диаг. и бл. для матрицы.

$$\lambda! \quad K_\lambda = K = \underbrace{K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m}_{E} \oplus BK$$

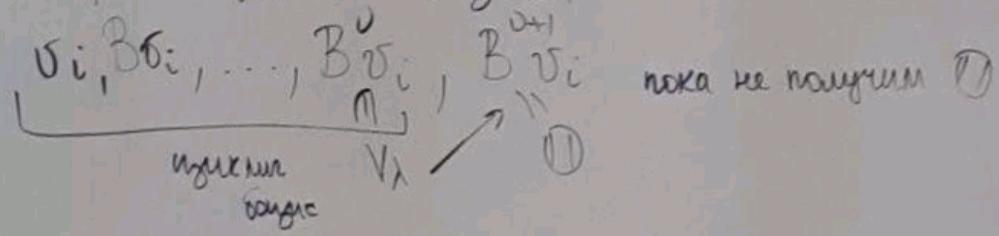
1. найдем  $K = K_\lambda$

$$2. \text{ найдем } BK = \text{Im } B / \ker B \quad B = A - \lambda E$$

3. дополним  $BK$  до  $K$

$$\text{т.е. найдем базисные векторы } \tilde{K} = \overline{K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m} = \text{Span}(v_1, \dots, v_t)$$

4. Ъзгем орнандың күкнөрү. Гаузас!



Түмнөр:

күнкә → ж.оп

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (t-5)(t-4)^3$$

$$\lambda_1 = 5 \quad d(\lambda_1) = 1 \Rightarrow p(\lambda_1) = 1$$

$$\lambda_2 = 4 \quad d(\lambda_2) = 3$$

$$p(\lambda_2) = ?$$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_2 E) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3$$

$$p(\lambda_2) = 1 \rightarrow 1 \text{ күнкә} \\ (\text{1 күнкә, 3 мүнис})$$

$$J = \left( \begin{array}{c|cc} 5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$K = K_3 = \ker(A - \lambda_2 E)^3 =$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} v = k_1$$

$$BK = \text{span}(Bv_1, Bv_2, Bv_3) =$$

$$= \text{span} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$K = BK \oplus \overline{k}_1 \oplus \overline{k}_2 \oplus \overline{k}_3$$

$$= \text{span} \left( \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 3-20 \\ 4-21 \\ 3-10 \\ 1-11 \end{pmatrix} \right) = 3$$

$$K = \text{span}(\mathcal{V}_3) \rightarrow 1 \text{ ungen. Space}$$

*argue  
now*

$$\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^2\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$j = (\mathcal{V}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 1, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

## 7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме

7.11 опр. я от м-цил, привод. к ж.ф.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad |x| < R$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$$

$$A = T J T^{-1}$$

$$f(J_r(\lambda)) = ?$$

$$J_r(\lambda) = \lambda E_r + I_r$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda_r) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{r \times r} \quad I_r = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{r \times r}$$

$$f(J_r(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_r^m(\lambda)$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

7.11 CP-я ом м-уза, нульог. к м.з.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad |x| < R$$

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m x^{m-1}$$

$$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^{m-2}$$

$$f(t\ln(x)) = \left( \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\ln x)^m \right) t^m = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m (\ln x)^{m-1} t^m = \frac{t}{1!} \sum_{m=1}^{\infty} c_m m (\ln x)^{m-1} t^{m-1} = \frac{t^2}{2!} \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1) (\ln x)^{m-2} t^{m-2} = \frac{t^3}{3!} \sum_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2) (\ln x)^{m-3} t^{m-3}$$

$$f(Ax) = T f(\lambda x) T^{-1}$$

$$f(t\ln(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m(\lambda) t^m$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

$$f(\lambda x) + \frac{f'(\lambda x)}{1!} + \frac{f''(\lambda x)}{2!} + \frac{f'''(\lambda x)}{3!}$$

$$f^{(k)}(xt) = \left( f^{(k)}(x) \right) \Big|_{x=xt}$$

Humped:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = c_0 x$$

$$A = T \tilde{\epsilon} T^{-1}$$

$$f(A) = T f(T) T^{-1}$$

## 8 Тензоры

8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования.

Часть VIII      Тензоры

8.1. Линейные формы (линейные функционалы).  
Сопряженное пр-во.    Ковариантное и  
контравариантное преобразования.

$V$  над полем  $K (R, C)$

def:  $f: V \rightarrow K$

отображение, наз. ся линейной формой (линей. ф-м), если

$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in V$   $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$

однородность = НН-НО

## Примеры:

$$1. \quad V = \{ g \mid g \in C(\mathbb{R}) \}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{\delta(g) = g(0)}$$

дельта-ср-я Дурака

мин. фрмца.

$$2. \quad V_3 \quad \bar{a} - \text{сопоставл.}$$

$$\forall v \in V_3 \quad f: V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(v) = (\hat{a}, \bar{v})$$

скел. np. e.

мин. фрмца

3.  $P_n$  ~~мат-кии~~ симметрическими  $\leq_n$

$m \in \mathbb{N}$

$t_0 \in \mathbb{R}$

также

$f_m: P_n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall p \in P_n \quad f_m(p) = \frac{p^{(m)}(t_0)}{m!}$$

мат-форма.

4.  $A_{n \times n} \quad M_{n \times n}$  np-бо  $n \times n$

$f: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A \quad \text{мат-форма.}$$

$$f(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \text{tr } A + \text{tr } B = f(A) + f(B)$$

$V$  координаты.

$e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$

$$\forall x \in V : x = x^i e_i \left( = \sum_{i=1}^n x^i e_i \right)$$

np-коэффициенты

$$\longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{коэффициенты} \\ \text{относительно } e \end{array}$$

$f: V \rightarrow \mathbb{R}$

мат-форма

$$\text{def: } \bigcirc: V \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall v \in V \quad \bigcirc(v) = 0$$

$$\begin{cases} f_1 + f_2 \\ f_1 \end{cases}$$

$$-f: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  противоположная мат-форма

$$\forall v \in V \quad -f(v) = -(f(v))$$

$$V^* = \left\{ f : V \rightarrow K \mid \text{линейные} \right\}$$

беск-кои  $1^\circ - 8^\circ$  аксиомы.  $\equiv$  лин.пр-бо

$$\underline{V^* \text{ компактное (дualное)}}$$

пр-бо  $KV$

$$f \in V^* \quad \forall x \in V$$

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K} = x^i a_i$$

$$\longleftrightarrow (a_1 \dots a_n) = a \in K, \text{ пр-бо } n\text{-мерных строк}$$

$\Leftrightarrow$    
  $\text{отображение в вом}$   
 $\text{линейн.}$

$a_i$  корп.  $f$  отн-но базиса  $e$

$$\begin{aligned} f &\leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \\ g &\leftrightarrow b = (b_1 \dots b_n) \\ f+g &\rightarrow a+b \\ \cdot & \end{aligned}$$

$$V^* \cong K^n \quad (\text{изоморфизм не единич., т.е.})$$

*зависит от*

*базиса)*

$$\Rightarrow \dim V^* = n = \dim V$$

Напоминание:  $V^* = \{ f: V \rightarrow K \}$  сопряженное (дualное)пр-бо  $K$   $V$

$V^* \cong K^n$  - пр-бо  $n$ -мерных строк. (не естественный)

$$\text{т.е. в базис } V \quad \forall x \in V \quad x = x^i e_i \quad f(x) = x^i f(e_i) = x^i a_i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \in K^n$$

$$\forall f \in V^* \quad \downarrow \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n \text{ пр-бо } n\text{-мерных строк базиса}$$

$$\dim V^* = n = \dim V$$

Определение:  $w^i : V \rightarrow K$   $\forall x \in V \quad w^i(x) = x^i$  эти коор-ты  $x$  относительно базиса  $e_1 \dots e_n$

однозначно,  $w^i$  уни-отобр.  $\Rightarrow w^i \in V^*$

$$\text{однозначно, } \forall i=1 \dots n \quad w^i(e_j) = \delta_{ij}^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

символ Кронекера

**Теорема 1:**  $w^1, \dots, w^n$  базис  $V^*$

Док-во! т.к.  $\dim V^* = n$ , то достаточно проверить лин. незав.  $w^1, \dots, w^n$ .

$$\exists d_i w^i = 0, d_i \in K$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad d_i w^i(x) = 0 \Rightarrow \text{в частности, где } \forall j=1 \dots n \quad \underbrace{d_i w^i(e_j)}_{e_j} = 0 \Leftrightarrow d_j = 0 \quad \forall j=1 \dots n$$

$\Leftrightarrow w^1, \dots, w^n$  лин. незав.  $\Rightarrow$  базис  $V^*$

Следствие:  $\forall f \in V^*$  коор-ты  $a_i = f(e_i)$  одна-ая коор-ны формы  $f$  в пр-ве  $V^*$  относительно базиса  $w^1, \dots, w^n$

т.о.  $V^* \cong K^n$  - коорд. изоморфизм. относительно базиса  $w^1, \dots, w^n$

док-во!  $\forall f \in V^* \quad \forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i$ , где  $a_i = f(e_i)$

$$\text{т.к. } x^i = w^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i w^i(x) \quad \forall x \in V \Rightarrow f = a_i w^i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n)$$

коорд-ны  $f$   
относительно базиса  $w^1, \dots, w^n$

def: коорд. ор-ши  $w^1 \dots w^n$ , порожденные базисом  $e_1 \dots e_n$  пр-ва  $V$   
также сопряженный (дualный) базисом пр-ва  $V^*$  к базису  $e_1 \dots e_n$  пр-ва  $V$

[?] Важней ли базис  $V^*$  будет сопряженным к некоторому базису пр-ва  $V$ ?

**Теорема 2!**  $\exists w''_1, w''_2, \dots, w''_n$  базис  $V^* \Rightarrow \exists$  базис  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  пр-ва  $V$ , м.р.  
базис  $w'$  будет сопряженным к базису  $e'$

Док-во!  $\exists e_1, \dots, e_n$  базис  $V$ , а  $w^1, \dots, w^n$  базис  $V^*$ , сопряжен. к  $e$ .

т.к.  $w$  и  $w'$  базисы пр-ва  $V^*$ , то  $(w''_1 \dots w''_n) = (w^1 \dots w^n) T_{w \rightarrow w'}$

т.к. в коорд. представлении в-та  $V^*$  соотв-т строки,  $T$  и-за перехода.

то наилегчее равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} w''_1 \\ w''_2 \\ \vdots \\ w''_n \end{pmatrix} = T_{w \rightarrow w'}^\top \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

обозначим  $S := T_{w \rightarrow w'}^\top$

и-за  $S$ , очевидно, невырожденная  $\Rightarrow \exists S^{-1} = T$

Определение "новый" базис в пр-ве  $V$  следующим равенством:

$$(e'_1 \dots e'_n) = (e_1 \dots e_n) T, \text{ т.о. } T = T_{e \rightarrow e'}$$

таким, что  $w'$  будет сопряженным к построенному  $e'$ .

$$S = (S_{ij}^i)_{n \times n} \text{ номер строка } \begin{cases} i \\ j \end{cases}, \text{ аналогично } T = (t_{ij}^i)_{n \times n} \Rightarrow w'^i = S_k^i w^k$$

$w^i(x) = S_k^i w^k(x) = \underbrace{S_k^i x^k}_{(Sx)_i}$  — вида координа в базисе  $e'$   $\Rightarrow w'^i$  — координа вида  $e'$ , т.е.  $w'$  сопоставлена базису  $e'$

т.к.  $T = T_{e \rightarrow e'}$ , т.о.  $x' = T^{-1}x = Sx$

Следствие:  $e, e'$  базисы  $V$ ,  $T = T_{e \rightarrow e'}$ ,  $S = T^{-1}$   
 $w, w'$  сопоставлены к  $e$  и  $e'$ , соответственно, базисы  $V^*$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \forall x \in V \quad x' = Sx = T^{-1}x \\ \forall f \in V^* \quad f' = fT \end{array}}, \text{ причем } T_{w \rightarrow w'} = S^T = (T^{-1})^T$$

док-во:  $T_{w \rightarrow w'} = S$ , очевидно, из док-ва  $T$ -ли.

такое, очевидно, что  $x' = T^{-1}x$ .

остается показать, что  $\forall f \in V^* \quad f' = fT$

т.к.  $(w^1 \dots w^n) = (w^1 \dots w^n) T_{w \rightarrow w'}$ , то  $(f')^T = T_{w \rightarrow w'} f^T \Rightarrow f' = f \underbrace{(T_{w \rightarrow w'})^T}_{S} = fT$

Замечание: очевидно, значение лин-формы  $f$  на элементе  $x$  не зависит от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (T^i_k x^k) \cdot (a_m S_l^m) = \underbrace{(S_l^m T^i_k)}_{\substack{x = T x' \\ a = a' S'}} x^k a'_m = x'^k a'_m - \text{инвариантность} \\ \text{формы} \quad \text{запись лин-формы} \\ \text{относительно выбора базиса}$$

def: Векторы, координа которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с фундаментальным замене  $e$  на  $e'$ , т.е. с матрицей  $T = T_{e \rightarrow e'}$ , наз-ая координатными векторами или ковекторами  $\equiv$  элементы пр-ва  $V^*$

Векторы, координа которых, при замене базиса  $e$  на  $e'$ , меняются по закону, противоположному т.е. замене  $e$  на  $e'$ , т.е. с матрицей  $T^{-1} = S$ , наз-ая координатными векторами или просто векторами  $\equiv$  элементы пр-ва  $V$

Постановка: лин-формы, такие называются просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во  $(V^*)^* = V^{**}$  — двойное сопоставление к  $V$

очевидно,  $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$  (все тут пр-ва изоморфные)

Построение изоморфизма между  $V$  и  $V^{**}$  следующим образом:

$$\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**} : \quad \forall f \in V^* \quad \boxed{"x"(f) = f(x)}$$

составим.

проверим лин-но "x":  $\forall \lambda \in K \quad \forall f_1, f_2 \in V^*$

$$"x"(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = "x"(f_1) + \lambda "x"(f_2)$$

$\Rightarrow$  лин-но  $\Rightarrow "x" \in (V^*)^*$

Теорема 3:  $\text{сопоставление } x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$   
 явн-ая вз-одн. и лин-и, т.е. изоморфизм. ( $V \cong V^{**}$ )

док-во: итак,  $\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$

показать, что это сопоставление обладает свойством лин-и:  $\forall \lambda \in K, \forall x_1, x_2 \in V$ .

$$(\lambda x_1 + x_2) \rightarrow " \lambda x_1 + x_2" \in V^{**} \quad \forall f \in V^* \quad " \lambda x_1 + x_2" (f) = f(\lambda x_1 + x_2) =$$

$$= \lambda f(x_1) + f(x_2) = "\lambda x_1" (f) + "x_2" (f) \Rightarrow "\lambda x_1 + x_2" =$$

$$= \lambda "x_1" + "x_2",$$

+ е. лин-и.

т.о. мы получаем вложение пр-ва  $V$  в пр-во  $V^{**}$ ,

единственное свойство лин-и.

В частности,  $\exists e_1, \dots, e_n$  базис  $V \rightarrow "e_1", \dots, "e_n" \in V^{**}$

$\Rightarrow \forall j=1 \dots, n \quad \forall f \in V^* \quad "e_j" (f) = f(e_j) = a_j$  — координа  $f$  в пр-ве  $V^*$  относительно базиса  $w^j$  пр-ва  $V^*$

$\Rightarrow "e_j"$  координа. пр-а и сопоставлен. базис к базису  $w^j \Rightarrow$  по т-му  $"e_1", \dots, "e_n"$  базис  $V^{**}$

$\Rightarrow$  т.о. такое вложение пр-а на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис.

Занесена!

- Замечания! 1. изоморфизм, построенный в т.ч. с помощью сопряженных изоморфизмов пр-в  $V$  и  $V^{**}$ , т.к. его построение не зависит от выбора базиса.

2. Используя отождествление элементов  $x$  пр-ва  $V$  и " $x$ " пр-ва  $V^{**}$ , назовем пишут  $x(f) := f(x)$  без кавыек.

$\forall x \in V \quad \forall f \in V^* : \quad f(x) = x^i f(e_i) = w^i(x) a_i \quad f(e_i) = e_i(f) = a_i$

$x(f) = a_i x(w^i) = e_i(f) x^i \quad x(w^i) = w^i(x) = x^i$

т.е. т-маз показывает, что на самом деле пр-ва  $V$  и  $V^*$  "равноправные"  $V^*$  сопряж. к  $V$ , а  $V$  сопряж. к  $V^*$ . Базис  $w$  сопряжен к  $e$ , также как и базис  $e$  сопряжен к базису  $w$ .

3.  $\forall x \in V \quad \forall f \in V^* \quad f(x) = x^i a_i = a_i x \xrightarrow{\text{"стока* столбец"} \Rightarrow} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ a = (a_1 \dots a_n) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ x(f) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{т.к.} \\ \text{"стока* столбец"} \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} (a_1 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \\ \text{или} \\ e_j(w^i) \end{matrix} \quad w^i(e_j) = \delta_j^i$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E}$

## Примеры:

впр! 1)  $\mathbb{R}^3$ :  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\therefore$  линейно независимые векторы  $w^1, w^2, w^3$ .

$$w^i \leftrightarrow (\alpha_1^i \alpha_2^i \alpha_3^i) = \alpha^i \quad \left( \begin{matrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{matrix} \right) (e_1 e_2 e_3) = E \Leftrightarrow \left( \begin{matrix} \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right) = E$$

$$\Rightarrow A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = w_1 \\ = w_2 \\ = w_3$$

2)

$$V = \bigoplus V_\lambda$$

$$P_x : V \rightarrow V_\lambda \quad \sum_x P_x = \mathbb{I}$$

$$D_1 D_2 = \emptyset$$

$$P_1^2 = P_1$$

$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n) \rightarrow \text{nochnoye} w^{\perp}$ .  $w^{\perp}$   $\in \mathbb{R}^n$   $\text{spans}$   $\perp$   $v_1, \dots, v_n$

$$\Rightarrow \forall x \in V : x = \sum x_\lambda = x^i v_i = w^i(x) v_i$$

$$\Rightarrow P_\lambda x = x\lambda = \sum_{v_k \in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k \in V_\lambda} \omega^k(x) v_k$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 1 = g(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -3 \quad \alpha(\lambda_2) = 2 = h(\lambda_2)$$

насторожение *Conspicue*  
(ст. прием 1)

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$P_{\lambda_1}(x) = \omega^+(x) \cdot v_1 = \left( -\frac{x^4+x^2}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{2} & -\frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^1}{2} & +\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda_2}(x) = \omega^2(x) \cdot v_2 + \omega^3(x) \cdot v_3 = \left( \frac{x^1+x^2}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1+x^2}{2} \\ \frac{x^1+x^2}{2} \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица линейное пр-во тензоров

$V$  лин. пр-во над полем  $K (R, C)$

$V^*$  сопряженное пр-во;  $\dim V = \dim V^* = n$

def: (1<sup>oe</sup> def тензора) тензором  $\alpha$  типа  $(p, q)$  ( $p$ -раз ковариантными,  $q$ -раз контравариантными) наз-ся линейная функция  $f$ :  $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$

$$V^p = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз.}}$$

$$(V^*)^q = \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз}}$$

тензор  $\equiv f$  линейн. ф-ция.

линейная  $\equiv$  линейная по каждому аргументу.

$p$  и  $q$  - балансности тензора

$r = (p+q)$  - ранг или полная балансность тензора.

def: Тензор 2 типа  $(p, 0)$ , т.е.  $f: V^p \rightarrow K$  наз-т ковариантные тензоры балансности  $p$  полином.

Тензор 2 типа  $(0, q)$ , т.е.  $f: (V^*)^q \rightarrow K$  наз-т контравариантные тензоры балансности  $q$  полином.

Если  $p \neq 0$  и  $q \neq 0$ , то говорят о тензоре смешанного типа.

Если  $r = 0$ , то тензор типа  $(0, 0) \equiv$  скаляр  $\in K$

Далее, определены операции "+" и " $\cdot \lambda$ " для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на аргументах и臺灣 надежде аргументов.

Определение  $\mathbb{O}$ :  $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$ , т.е.  $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = 0$

и  $-\mathbb{O}$ , т.е.  $-\mathbb{O}: V^p \times V^q \rightarrow K$ , т.е.  $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad -\mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = -1 \cdot \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$

нулевой тензор

$\Rightarrow -\mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O} = \mathbb{O} + (-\mathbb{O})$

Т.о. Выс-вие  $1^{\circ} - 8^{\circ}$  аксиомы или. пр-ва (урп.)

def:  $T_{(p,q)}$  — или. пр-во тензоров типа  $(p,q)$

если в базисе  $V$

$w^1, \dots, w^q$  базис  $V^*$ , сопротивляющей  $e$

$\xi_k \in V, k=1, \dots, p$   
вектор (координатный)

$\xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}$  — коорд. вектор  $\xi_k$  относ. базиса  $e$

$\eta^m \in V^*, m=1, \dots, q$   
ковектор (ковариантный)

$\eta^m = \eta_{i_m}^m w^{i_m} \Leftrightarrow (\eta_1^m \dots \eta_q^m)$  — коорд. вектор  $\eta^m$  относ. базиса  $w$

$d \equiv f$  помимо ф-ции  $\Rightarrow$

$$\text{тензор } T_{(p,q)} \quad \boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})} \quad (1)$$

$$d \in T_{(p,q)} \quad \boxed{d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})} \quad (2) \quad \text{координаты (коэффициенты) тензора } d \text{ относ. базисов } e \text{ и } w$$

Т.о. очевидно, значение помимо ф-ии  $f$  (а значит и тензора  $d$ ), полностью определяется значениями на базисных  $p$ -наборах базисных векторов  $e_j$  и  $q$ -наборах базисных ковекторов  $w^i$ .

$$\boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q}} \quad (1')$$

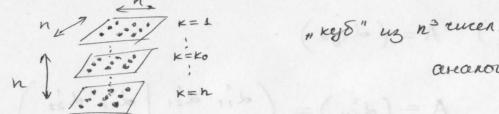
def:  $S = (p+q)$  — шерох матрицы порядка  $n$  наз-са ши-бо элементов, записываемых двумя типа индексов: верхних  $i_1, \dots, i_q$  и нижних  $j_1, \dots, j_p$ , при этом все индексы пробегают значения от 1 до  $n$ .

$$\boxed{A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q})} \quad S = (p+q) \text{-мерная ш-ча порядка } n \text{ содержит } \boxed{n^{p+q} = n^S \text{ элементов.}}$$

Пример: 1)  $A = (a_{ij})_{n \times n}$   $A = (a_j^i)_{n \times n}$   $A = (a^{ij})_{n \times n}$   
двумерные ш-чи порядка  $n$  ( $n^2$  элементов)

2)  $A = (a_{j_k}^i)_{n \times n}$  3-мерная ш-ча порядка  $n$

фиксируем  $k = k_0 \rightsquigarrow$  получаем  $(a_{j_{k_0}}^i)$  — общая двумерная ш-ча.



аналогично, 4-мерная ш-ча — упорядоч. набор из  $n$  3-мерных ш-чи.

Т.о.  $\forall d \in T_{(p,q)} \rightarrow A \text{ (p+q)-мерная ш-ча компонент } d$

Верно и обратное  $\forall A \text{ (p+q)-мерной ш-чи } A \rightarrow$  помимо ф-ии  $f$  по формуле (1)(2), где  $e_1, \dots, e_p$  некоторы фиксир. базис  $V$ , а  $w^1, \dots, w^q$  базис  $V^*$ , сопротивл.  $e$ .

Т.о. получаем  $\boxed{d \in T_{(p,q)} \Leftrightarrow A \text{ (p+q)-мерн. ш-ча.} \text{ Взгл. порядка } n}$

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующих компонент их матриц, т.е. наше вз-вие соотв. соответствует сложению лин-ти, т.е. действ. изоморфизмом

$$\boxed{T_{(p,q)} \cong A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}) \cong K^{n^{p+q}}} \Rightarrow \boxed{\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}}$$

Сопротивление о порядке записи эл-тов многомерной матрицы (т.е. матрицы тензора)

общее правило:

первый индекс всегда верхний первий индекс, далее по верхней строке, а затем по низней.

3)  $n=2$

$$x=2 \quad \text{всхожестные варикатные матрицы: } A = (d_{ij}^i) \quad A = (d_{ij}^{ij}) \quad A = (d_{ijj}) \quad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

$d_{ij}^i$  индекс - веңгә строка  
 $d_{ijj}^i$  индекс - веңгә столбец.

$$A = (d_{ij}^i) = \begin{pmatrix} d_{11}^i & d_{12}^i \\ d_{21}^i & d_{22}^i \end{pmatrix} \quad A = (d_{ijj}) = \begin{pmatrix} d_{11}^{11} & d_{12}^{12} \\ d_{21}^{11} & d_{22}^{12} \end{pmatrix}$$

$$x=3 \quad A = (d_{ijk}^i) \quad A = (d_{jk}^{ij}) \quad A = (d_{ijk}) \quad A = (d_{ijk})$$

$d_{ijk}^i$  индекс - веңгә строка  
 $d_{jk}^{ij}$  индекс - веңгә столбец.  
 $d_{ijk}$  индекс - веңгә "слой"

$$A = (d_{ijk}) = \left( \begin{array}{cc|cc} d_{111}^i & d_{121}^i & d_{112}^i & d_{122}^i \\ d_{211}^i & d_{221}^i & d_{121}^i & d_{222}^i \\ \hline 1 \text{ слой} & 2 \text{ слой} & & \end{array} \right)$$

$$A = (d_{ijk}) = \left( \begin{array}{cc|cc} d_{111} & d_{121} & d_{112} & d_{122} \\ d_{211} & d_{221} & d_{212} & d_{222} \\ \hline & & & \end{array} \right)$$

$x=4$   
 $d_{kem}^i$  индекс - веңгә строка  
 $d_{km}^i$  индекс - веңгә столбец.  
 $d_{km}$  индекс - веңгә слой  
 $d_{kem}$  индекс - веңгә "слойе"

$$A = (d_{kem}) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} d_{1111}^i & d_{1121}^i & d_{1211}^i & d_{1221}^i & d_{2111}^i & d_{2121}^i \\ d_{1112}^i & d_{1122}^i & d_{1212}^i & d_{1222}^i & d_{2112}^i & d_{2122}^i \\ \hline 1 \text{ слой} & 2 \text{ слой} & & & & \\ \hline d_{1111}^i & d_{1121}^i & d_{1211}^i & d_{1221}^i & d_{2111}^i & d_{2121}^i \\ d_{1112}^i & d_{1122}^i & d_{1212}^i & d_{1222}^i & d_{2112}^i & d_{2122}^i \\ \hline 1 \text{ сечение} & 2 \text{ сечение} & & & & A_{22} \end{array} \right) \quad \begin{matrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{matrix}$$

Пример:

1)  $f \in V^*$   $f = (1, 0)$  тензор. (1 ряд ковариантных)

$f: V \rightarrow K$   
или

$$\forall \xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i \quad f(\xi) = \xi^i \frac{f(e_i)}{e_i} \leftrightarrow A = (a_{i...n}) \quad 1 \text{ мережа и-ца.}$$

$e_1 \dots e_n$  базис  $V$

2)  $V_3 - 3 \times$ мерг. геом. вектора.  $f: V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$   $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3 \quad f(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi$   $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$

Очевидно,  $f$  - линейная по-а - тензор типа  $(2, 0)$ ,  $f \in T_{(2,0)}$

$\bar{a}_1 = \bar{i}, \bar{a}_2 = \bar{j}, \bar{a}_3 = \bar{k}$

$$\begin{aligned} f(\bar{a}, \bar{b}) &= a_{ij} \bar{a}^i \bar{b}^j & \bar{a} = a^i e_i, \bar{b} = b^j e_j, \quad a_{ij} = f(e_i, e_j) = \delta_{ij} \\ \Rightarrow f &\Leftrightarrow A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \\ \Rightarrow f(\bar{a}, \bar{b}) &= a^T A b \quad \Rightarrow \text{в нашем случае } f(\bar{a}, \bar{b}) = a^T b = \sum_{i=1}^3 a^i b^i \quad (\text{тк. оба индекса каверху пишем знако} \Sigma) \end{aligned}$$

? Как изменится вид тензора, если выбрать другой - "новый" - базис в пр-ве  $V$ ?

$e_1 \dots e_n$  базис пр-ва  $V$   $T = T_{e \rightarrow e'}, S = T^{-1} = T_{e' \rightarrow e}$   $\forall x \in V \quad x = T x'$   $\text{если } x^i = t_j^i x'^j$

$w^1 \dots w^n$  базис пр-ва  $V^*$ , сопоставл. к  $e^i$  и  $e'^i$ , коорд-ко  $\forall \alpha \in V^* \quad \alpha = \alpha^i S \quad \alpha^i = a_j w^j = a'_j w'^j$

$$\Rightarrow \forall \xi_k \in V \quad \xi_k^{j_k} = t_{i_k}^{j_k} \xi_{i_k}^{i_k}$$

$j_k = 1, \dots, n$   
 $i_k = 1, \dots, p$

$$\forall \eta^m \in V^* \quad \eta^m = S_{im}^{i_m} \eta^m_{i_m}$$

$i_m = 1, \dots, n$   
 $m = 1, \dots, q$

$$\Rightarrow f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \left[ \begin{array}{cccc|c} t_{11}^{i_1} & t_{12}^{i_1} & \dots & t_{1p}^{i_1} & S_{11}^{i_1} & \dots & S_{1q}^{i_1} \\ t_{21}^{i_2} & t_{22}^{i_2} & \dots & t_{2p}^{i_2} & S_{21}^{i_2} & \dots & S_{2q}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{p1}^{i_p} & t_{p2}^{i_p} & \dots & t_{pp}^{i_p} & S_{p1}^{i_p} & \dots & S_{pq}^{i_p} \end{array} \right] \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} =$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенным  
твекрху и внизу, происходит суммирование ( $i_1, \dots, i_p$ :  $j_1, \dots, j_p$ )  
 $\Rightarrow$  в результате, просуммировав, получим  
новую компоненту со штрафованными индексами.

$$= \boxed{d^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}} \quad \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q}, \text{ т.о. получим снова тензор типа } (p, q)$$

Т.о., при замене базиса тензор типа  $(p, q)$  остается тензором того же типа, а  
его координаты меняются по следующему закону:

$$d'^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

коор-тные индексы  
в "новых" базисах

коор-тные индексы  
в "старых" базисах  
 $e, w$

(3)

верхние индексы  $i_1 \dots i_q$   
преобразуются с и-ицей  $S$ , т.е.  
по контравариантному закону,  
постоину наз-ва контравариантными  
индексами, а тензор  
 $q$ -раз контравариантный

След-но, нижние индексы  $d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$  преобразуются с матрицей  $T$ , т.е.  
по ковариантному закону, постину наз-ва ковариантными индексами, а  
тензор  $P$  раз ковариантным.

Пример: 1) тензор типа  $(0,0) \equiv \lambda \in K$ , очевидно, не меняться при замене базиса,  
м.е. инвариант.

2).  $A = (a^i_j)_{n \times n}$  и-ца тензора  $\alpha \in T_{(1,1)}$

$$a'^k_m = a^i_j t^j_m S^k_i \Leftrightarrow A' = SAT = T^{-1}AT \quad \text{получаем форму записи и-ца  
или опр. при замене базиса.}$$

3)  $\forall f \in V^*$  тензор типа  $(1,0) \Leftrightarrow A = (a_i)_{n \times 1} = a \in K_n$

$$\forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i = x^i a'_j = a_i \left[ \begin{smallmatrix} t^i_j & x^j \end{smallmatrix} \right] = a_i x^i$$

$V \cong V^{**}$   $x(f) \quad x: V^* \rightarrow K$  тензор типа  $(0,1)$

$$a_i x^i = a'_j x^j = x^i \left[ \begin{smallmatrix} S^j_i & a'_j \end{smallmatrix} \right] = x^i a_i$$

4)  $\alpha \in T_{(1,2)} \Rightarrow A = (\alpha^i_j)$

Найти  $\alpha'^{2,1}_2$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 20 \\ 1 & 0 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'^{2,1}_2 = \alpha^i_j t^j_2 S^2_i S^1_j$$

$$a'^i_j = a^i t^j_j \Leftrightarrow a' = aT \quad a_i = f(e_i)$$

$$x^i j = S^j_i x^i \Leftrightarrow x' = Sx \quad x^i = x(e^i)$$

контравариант.

$\boxed{\alpha'^{2,1}_2 \in A_k}$  К примеру  $\alpha^i_j S^2_i S^1_j \Leftrightarrow S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow (S^2 A_k (S^1)^T) t^k_2 = (2 - 17 - 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -19$

Вернемся к def тензора. Тензор был определен нами, как полилинейная ф-ция и  
наше def не зависело от выбора базиса. В пр-ве  $V$ . Но, при этом, тензор оказался  
согласован с записью базиса, т.е. после замены базиса тензор остается тензором,  
причем того же типа. Для такого рода объектов иск-ва термин геометрический  
объект. Поэтому сущ-т другой подход к def. тензора.

def: (2<sup>nd</sup> def тензора) Тензором  $\alpha$  типа  $(p,q)$  наз-ва геометрический объект на пр-ве  $V$ ,  
который описывается  $A$   $(p+q)$  мерной матрицей элементов поля  $K$  размерности  $n = \dim V$ .  
При этом, каковы бы не были базисы  $e$  и  $e'$  в пр-ве  $V$  и соответствующие им  
сопряженные базисы  $V^*$  и  $w^*$ , соответствующие компоненты матриц  $A$  и  $A'$   
должны быть связаны формулой (3).

Операции  $"+"$  и  $".\lambda"$  между двумя тензорами одного типа, очевидно, опр-ся в этом  
случае как операции  $"+"$  и  $".\lambda"$  соответствующих континентных тензоров.

При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут  
уд-ть пр-ле (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр ставка будет получать  
тензор того же типа, что и исходные.

Действительно,  $\forall \lambda \in K, \alpha, \beta \in T_{(p,q)}$

$$(\lambda \alpha + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} := \lambda \cdot \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

$$(\lambda \alpha + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}) t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p}$$

$$\alpha + \beta \in T_{(p,q)} = \lambda \alpha^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda \alpha + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda \alpha + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p}$$

Т.о. мат. операция на пр-ве наз-ва ф-и соответствующим и-ицам опр. наст-ва первоначальных  
и-ицам с сохранением сл-ва (3). Наименуем def 1  $\Leftrightarrow$  def 2.

В зависимости от поставленной задачи, она будет иск-м как 1<sup>st</sup>, так и 2<sup>nd</sup> def.

### 8.3 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

83 Произведение танцоров. Былие пр-ва танцоров. Операция сверхки.

def:  $\alpha \in T_{(p_1, q_1)}, \beta \in T_{(p_2, q_2)}$

Произведение тензоров  $a$  и  $b$  наз-ся тензором  $g_1 = a \otimes b \in T_{(p_1+p_2,q_1+q_2)}$ , компонентами которого они са<sup>м</sup> определяются равенством:

компактности, def. - надо профигура

корректность def: надо проверить выполнение (3) для всех

корректность def: надо проверить

Вспомогательное об-ва (3) для новой  
аналогичной задачи р.

Замечание:  $\forall \lambda \in K$  — элемент типа  $(0,0)$   $\Rightarrow \lambda \alpha = \lambda \otimes \alpha = \alpha \otimes \lambda$

Тензорное произведение, очевидно, ассоциативно, но не коммутативно!

$$\text{Пример: } \alpha, \beta \in T_{(1,0)} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \beta^1 = \alpha \otimes \beta = (\alpha_i \beta_j) & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_4 \\ \beta^1 \in T_{(2,0)} & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \beta^2 = \beta \otimes \alpha = (\beta_i \alpha_j) & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2 \\ \beta^2 \in T_{(2,0)} & & \end{array}$$

$$y_1 \neq y_2 \quad A_2 = A_2^{-T}$$

$$\text{Imp. } \rightarrow \alpha \in T(p, q), \beta \in T(q, p) \Rightarrow \alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$$

2)  дистрибутивно

Введем 1-ю def тензора произведения тензоров будем соотн-ть произведение функций, определяющих эти тензоры.

$$\alpha \leftrightarrow f: V^{P_1} \times (V^*)^{q_2} \rightarrow K$$

$$\beta \leftrightarrow g: V^{P_2} \times (V^*)^{q_2} \rightarrow K$$

$$\Rightarrow f \otimes g: V^{P_1+P_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \rightarrow K$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \xi_2, \dots, \xi_{P_2} \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$$

$$f \cdot g (\xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \xi_2, \dots, \xi_{P_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2}) = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_{P_1}} \delta_{j_2 \dots j_{P_2}}}_{\text{подстановка выражения компонент } f \text{ в } g} \underbrace{\delta_{i_1 \dots i_{q_1}} \delta_{i_2 \dots i_{q_2}}}_{\text{подстановка выражения компонент } g \text{ в } f} \underbrace{\xi_1^{i_1} \dots \xi_{P_1}^{i_{q_1}} \xi_2^{i_1} \dots \xi_{P_2}^{i_{q_2}} \eta^1_{j_1} \dots \eta^{q_1}_{j_{q_1}} \theta^1_{k_1} \dots \theta^{q_2}_{k_{q_2}}}_{\text{компоненты } \alpha \text{ и } \beta}$$

$$f(\xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}) \quad g(\xi_1, \dots, \xi_{P_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$$

$$\text{Вещественность, } \forall f^j \in T_{(1,0)}, j=1, \dots, p \quad f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p \in T_{(p,0)}$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad [f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = f^1(\xi_1) \cdot f^2(\xi_2) \dots f^p(\xi_p)]$$

$$\forall g_j \in T_{(0,1)}, j=1, \dots, q \quad g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q \in T_{(0,q)}$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad [g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q (\eta^1, \dots, \eta^q) = g_1(\eta^1) \cdot g_2(\eta^2) \dots g_q(\eta^q)]$$

$$\Rightarrow [f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \dots f^p(\xi_p) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_q(\eta^q)] \quad (4)$$

Проверка: (о борьбе np-ва  $T_{(p,q)}$ )

если ..., в  $V$ ,  $w^1, \dots, w^n$  в  $V^*$ , определен.

Совокупность тензоров  $\alpha$  вида  $w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$  по возможным наборам индексов  $(i_1, \dots, i_p, i_1, \dots, i_q)$ , где  $i_k = 1, \dots, n$ ,  $i_m = 1, \dots, n$

Доказательство: очевидно,  $w^1 \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \in T_{(p,q)}$ , т.к.  $w^i: V \rightarrow K$ , а  $e_i: V^* \rightarrow K$  по определению.

проверка:  $\forall \alpha \in T_{(p,q)} \Leftrightarrow \alpha$  по определению.

$w^i \in T_{(1,0)}$ ,  $e_i \in T_{(0,1)}$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad \alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество }} \underbrace{\xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta^1_{j_1} \dots \eta^q_{j_q}}_{\text{тензора }} = \text{об-во}(4) =$$

$$= \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество }} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество }} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}} \Rightarrow \text{проверка.}$$

Чин. независимость:

$$\boxed{\alpha} = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество }} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$$

применение нулевой тензора к набору векторов  $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q}$

$$0 = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество }} w^{i_1} (e_{i_1}) \dots w^{i_p} (e_{i_p}) \cdot e_{i_1} (w^{i_1}) \dots e_{i_q} (w^{i_q}) = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество }} \underbrace{\delta_{m_1 \dots m_p} \delta_{n_1 \dots n_p}}_{\text{символы произв.}} \delta_{i_1 \dots i_q} = \underbrace{\delta_{m_1 \dots m_p}}_{\text{множество }} \delta_{i_1 \dots i_q} = \text{об-во}$$

верно для любого набора индексов  $m_1, \dots, m_p, k_1, \dots, k_q \Rightarrow$  нулевой комбинация тригонометрических

$$\text{Пример: } \alpha = (w^1 - 2w^2 + w^3) \otimes (3w^1 + w^2) \otimes e_2 + (w^2 + 2w^3) \otimes w^1 \otimes e_3$$

чин. независимость

- 1) линейное выражение  $\alpha$  на векторах  $\xi_1 = 2e_1 - e_2$ ,  $\xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$ ,  $\eta = w^1 - w^3$
- 2) записать матрицу тензора.

$$1) \quad \alpha(\xi_1, \xi_2, \eta) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2) \cdot \eta_2 + (\xi_2^1 + 2\xi_2^2 - \xi_2^3) \cdot \xi_2^1 \cdot \eta_2 = (2+2+0)(3 \cdot 1 + 2) \cdot 1 + (-1+2 \cdot 0)1 \cdot (-1) = 21$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \alpha \in T_{(2,1)} \Rightarrow \alpha = (\alpha_{ik}^i)$$

$$\alpha_{11}^1 = 3 \quad \alpha_{21}^1 = -6 \quad \alpha_{31}^1 = 3$$

$$\alpha_{12}^1 = 1 \quad \alpha_{22}^1 = -2 \quad \alpha_{32}^1 = 1$$

$$\alpha_{21}^2 = 1 \quad \alpha_{31}^2 = 2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$K=1$$

$$K=2$$

$$K=3$$

def:  $\exists p, q \geq 1 \quad \Delta T(p,q)$ . Триадкаем один верхний индекс одному нижнему. Тогда, по правилу единичного, мы должны будем просуммировать соответствующие коэффициенты. В результате, получим систему элементов, у которых число верхних и низших будет на единицу меньше.

$i_1 \uparrow$	стартует	$i_2 \leftarrow$	к концек
$i_3 \leftarrow i_2$		$i_4 \leftarrow i_3$	

- эта операция наз-ся

$$\begin{array}{ccc} \text{anomalous} & \text{inversion, } \delta = -\pi & \text{even} \\ & \text{symmetry} & \\ \text{is} & \text{in. iq} & \xrightarrow{\text{rearrange}} \\ p & \text{d. } \overset{\circ}{\text{dm}} \text{ - jp} & = \text{d. } \overset{\circ}{\text{de}} \text{. iq} \\ & & \text{d. - e. jp} \\ & \xrightarrow{\text{anomalous}} & \xrightarrow{\text{rearrange}} \end{array}$$

- име операций назыв  
сверткой менюра

$$\alpha \in T(p,q) \rightsquigarrow \beta \in T(p-s, q-s)$$

корректность определено! надо проверить выполнение с. 6а (3)

$$\begin{aligned} & \beta^{i_1 \dots i_m \dots i_q} = \alpha^{i_1 \dots i_m \dots i_q} = \alpha^{i_1 \dots i_m \dots i_q} t_{d_1}^{j_1} \dots t_{d_m}^{j_m} S_{i_1}^{j_1} \dots S_{i_q}^{j_q} = \\ & = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_m \dots i_q}}_{\substack{j_1 \dots j_m \dots j_p}} \underbrace{t_{d_1}^{j_1} \dots t_{d_m}^{j_m}}_{\substack{j_1 \dots j_p}} \underbrace{S_{i_1}^{j_1} \dots S_{i_q}^{j_q}}_{\substack{j_1 \dots j_p}} = \text{Basis-No (3)} \\ & \Rightarrow \beta \text{ ist op. Triv. } (p+q-1) \end{aligned}$$

## Задачи №1

- 1) Сборка может проводиться по некоторым индексам
  - 2) Если в результате сборки получается тензор типа  $(0,0)$  (то есть скаляр), то такая сборка называется полной.

*Hyrcanopis*

2)  $\ell \in T_{(L,0)}$  - кобекмоп  $\iff a = (a_1 \dots a_n)$   
 $x \in T_{(0,L)}$  - бекмоп  $\iff x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$a = \ell \otimes x = (a_j x^\ell) = (a_j^c)$   $\Rightarrow \beta = (a_i^c) = a_i x^\ell = f(x) = \mathcal{R}(f)$

обратно  
указание  
помимо  
функции  $f$   
на векторе  $x$ .

$$3) \quad \alpha \in T_{(i,1)} \Leftrightarrow A = (\alpha_j^i) \\ x \in T_{(0,1)} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\beta} = \left( \begin{smallmatrix} y_j^j \\ j \end{smallmatrix} \right) = \left( \begin{smallmatrix} d_j^j x^k \\ j \end{smallmatrix} \right) = (\tilde{\beta}^k) \Leftrightarrow \tilde{\beta} = (t_L A) \cdot x$$

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

$$4) \quad d \in T_{(i,i)} \quad d^{(i)}_{j,j} = d^i_j t^j_{j,j} S^{ii}_i = \text{обратка по 2-му индексу} \quad \text{такова} \quad d \otimes T \otimes S = f = \left( d^i_j t^k_m S^{\ell}_{\ell} \right) = \left( f^{\ell k \ell}_{j,m \ell} \right)$$

$\Rightarrow \quad d^{(i)}_{j,j} = f^{\ell i i}_{j,j i} \quad \text{обратка.}$

## 8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.

### 8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.

def:  $\exists p \geq 2, \alpha \in T_{(p,p)}$   $\exists \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$  перестановка индексов от 1 до  $p$ .

$$\left( \begin{array}{l} \text{Напоминание!} \\ \varphi: \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\} - \text{перестановка} \\ \text{бз. опозн. отвр.} \quad \sigma_k = \varphi(k), \quad k = 1, \dots, p \\ \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(p)) - \text{перестановка} \end{array} \right)$$

$\beta = \sigma(\alpha)$  - наз. тензором, полученным транспонированием тензора  $\alpha$  по перестановке  $\sigma$   
 $\boxed{p \geq 2}$  по нижним индексам, если  $\boxed{\beta^{i_1 \dots i_p} = \alpha^{j_1 \dots j_p}}$

Аналогично опр.-ся транспонирование по верхним индексам.

Замечание: для тензоров операция транспонирования опр.-ся только по одному типу индексов: либо по нижним, либо по верхним, в отличии от производной многомерной м-зы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

Корректность def: как и раньше надо проверить выполнение сб-ва (3), т.е. что  $\beta \in T_{(p,p)}$

Как известно, общая перестановка может быть получена комбинацией циклических транспозиций. Постараемся показать, что сб-во (3) выполняется при транспонировании тензора по паре индексов.

$$\left[ \begin{array}{l} \beta^{i_1 \dots i_p} = \alpha^{j_1 \dots j_p} \\ \text{или} \\ \beta^{i_1 \dots i_p} = \alpha^{j'_1 \dots j'_p} \end{array} \right] \Rightarrow \beta^{i'_1 \dots i'_p} = \alpha^{j'_1 \dots j'_p} \quad \text{т.к. } \alpha \in T_{(p,p)} \Rightarrow \text{сущ-во (3)}$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} \alpha^{i_1 \dots i_p} \\ \hline i_1 \dots i_p \end{array}} \left[ t^{i_1}_{j_1} \dots t^{i_m}_{j_m} \dots t^{i_p}_{j_p} S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} \right] = \boxed{\begin{array}{c} \alpha^{i_1 \dots i_p} \\ \hline i_1 \dots i_p \end{array}} \left[ t^{i_1}_{j'_1} \dots t^{i_m}_{j'_m} \dots t^{i_p}_{j'_p} S^{i_1 \dots i_p}_{j'_1 \dots j'_p} \right] \Rightarrow (3) \text{ б-ко-но.} \quad \text{т.к. } \alpha \in T_{(p,p)} \Rightarrow \text{сущ-во (3)}$$

Как будем вынуждены транспонировать тензора, если обратно за определение тензора def?

$$d \in T_{(p,q)} \iff d \text{ полином. отобр. } \boxed{J \models \beta = \sigma(\alpha)} \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad \boxed{\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta_1^{j_1} \dots \eta_q^{j_q}} = \\ = d_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \xi_1^{\sigma_1} \dots \xi_p^{\sigma_p} \eta_1^{\tau_1} \dots \eta_q^{\tau_q} = \boxed{d(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)}$$

Замечание: при транспонировании по нижним индексам, неявно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспонирования по верхним индексам будет обладать теми же свойствами, что и операция транспонирования по нижним. Поэтому все результаты, которые мы получим для нижних индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

Пример:  $d = (w^1 - 2w^2) \otimes w^3 \otimes (w^4 - w^5) + w^5 \otimes w^4 \otimes w^3 \quad (\Rightarrow d \in T_{(3,0)} \Rightarrow (d_{ijk}))$

1) найти  $\beta = \sigma(\alpha) \quad \sigma = (3,1,2)$ , вспомогательную.

2) найти значение  $\beta$  на векторах  $\xi_1 = e_1 + e_2, \xi_2 = -e_2 - e_3, \xi_3 = e_1 + 2e_2$

3)  $d = (d_{ijk}) \Rightarrow \beta = (d_{kij})$   
 $\sigma = (3,1,2) \quad \begin{array}{l} i \leftrightarrow j_1 \\ j \leftrightarrow j_2 \\ k \leftrightarrow j_3 \end{array}$

~~$d_{ijk} = \beta_{kij}$~~  неверно!  
зато  $\sigma = (2,3,1)$

$$\beta_{ijk} = \beta_{j_1 j_2 j_3} = d_{j_3 j_1 j_2} = d_{kij}$$

**1 cn** вычислим и-и-и  $d$ :  $d_{121} = 1, \quad d_{123} = -1, \quad d_{213} = 1$   
 $d_{232} = -2, \quad d_{233} = 2$  остаточные члены

$$\Rightarrow \begin{array}{lll} \beta_{311} = 1 & \beta_{331} = -1 & \beta_{132} = 1 \\ \beta_{312} = -2 & \beta_{332} = 2 & \text{остаточные члены} \end{array} \Rightarrow \beta = \left( \begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**2 cn** итоговая перестановка  $\equiv$  конечное число транспонирований (т.е. транспонирование индексов по паре индексов)

транспонирование многомерной и-и-и по паре индексов  $(i,j)$   $\equiv$  транспонирование двумерных слоёв и-и-и, получающихся фиксированием различных состояний всех индексов, кроме индексов  $(i,j)$ .

$$\beta_{ijk} = d_{kij}$$

$$d_{kij} \rightsquigarrow \tilde{d}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{d}_{ijk} = \beta_{ijk}$$

это 2 транспонирования эти-и, стоящие в матрице на позиции  $(k, i, j)$ , должны переноситься на позицию  $(i, j, k)$

$$d_{kij} \rightsquigarrow \tilde{d}_{ikj}$$

же имеется, потому будем фиксировать различные значения  $j = 1, 2, 3$ , т.е. извлекать из и-и-и тензора двумерные и-и-и, которое после обычной операции транспонирования и-и-и будет поменяться обратно в тензор.

$$d = \left( \begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

фиксируем  $j = 2 \rightsquigarrow$  фиксируем слой  $\rightsquigarrow$  кванты слоёй  
наго транспонирование

$$\tilde{d} = \left( \begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\tilde{d}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{d}_{ijk}$  не меняется  $i \rightarrow$  фиксируем  $i = 1, 2, 3 \Rightarrow$  извлекаем двумерную и-и-и  $\Rightarrow$  транспонируем  
 $\Rightarrow$  поменяем обратно.

$$i = 1 \quad (1 \text{-я стр})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{поменяли обратно, т.к. исходное положение}$$

$$i = 2 \quad (\text{2-я стр})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i = 3 \quad (3 \text{-я стр}) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{d} = \left( \begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2) 1 cn.  $\beta = \sigma(\alpha)$   $\sigma = (3, 1, 2)$

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = (\omega^1(\xi_3) - 2\omega^2(\xi_2)) \cdot \omega^3(\xi_1) + \omega^2(\xi_3) \omega^1(\xi_1) \omega^3(\xi_2) = \\ = -2$$

2 cn.  $\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \beta_{ijk} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k = \frac{\beta_{311}}{1} \cdot \frac{\beta_{212}}{2} \cdot \frac{\beta_{322}}{0} + \frac{\beta_{322}}{2} \cdot \frac{\beta_{232}}{1} \cdot \frac{\beta_{132}}{-1} = -2$

By def транспонирования  $\Rightarrow$  линейное отображение.  $\forall \lambda \in K \quad \forall d_{1,2} \in T(p,q) \quad \sigma(d_1 + \lambda d_2) = \sigma(d_1) + \lambda \sigma(d_2)$

Кроме того, любая перестановка - это би-одн. отобр.  $\Rightarrow$  линейное транспонир. би-одн.  
 $\Rightarrow$  транспонирование - это линейное отображение на  $T(p,q)$

Транспонирование ассоциативно, но не коммутативно (!) (невидимо, определяется из свойств перестановок)

$$\sigma, \tau, \theta \text{ перестановки } d \in T(p,q) \Rightarrow \begin{cases} (\sigma(\tau(\theta)(d))) = ((\sigma \tau) \theta(d)) \\ \sigma \tau(d) \neq \tau \sigma(d) \end{cases}$$

Упр: док-ть:  $d \otimes \beta = \sigma(p \otimes d)$

def: тензор  $d \in T(p,q)$  наз-ся симметрическим (по низшим индексам), если  
 $\forall$  перестановки (нижних индексов)  $\sigma : \sigma(d) = d$

и наз-ся кососимметрическим (антисимметрическим, альтернирующим)

(по низшим индексам), если  $\forall$  перестановки (нижних индексов)  $\sigma : \sigma(d) = (-1)^{\sigma(d)} d$ , где  $\sigma(d)$  - четность перестановки.

By def двумерические  
 получаются cb-во где компоненты  
 симм. и кососимм. Тензоров.  
 $\forall \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$$\begin{aligned} d \text{ симм.} &\Leftrightarrow d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = d_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(p)}}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}} \\ d \text{ кососимм.} &\Leftrightarrow d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = (-1)^{\sigma(d)} d_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(p)}}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}} \end{aligned}$$

$T_K$ :  $\forall$  перестановка  $\equiv$  конечное число транспозиций ( $\equiv$  транспонирование по паре индексов)

$$d \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad d_{j_k \dots j_m}^{i_1 \dots i_q} = d_{j_m \dots j_k}^{i_1 \dots i_q}$$

$$d \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad d_{j_k \dots j_m}^{i_1 \dots i_q} = -d_{j_m \dots j_k}^{i_1 \dots i_q}$$

Чтобы доказать  $\sigma$ -тензора в случае def 1:

$$d \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots)$$

$$d \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots)$$

Упр:  $d$  кососимм.  $\Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0$

зап-бо!  $(\Rightarrow)$   $d$  кососимм.  $\Rightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \Rightarrow d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0$

$(\Leftarrow)$   $\forall (k, m) \quad d(\dots, (\xi_k + \xi_m), \dots, (\xi_k + \xi_m), \dots) = 0$

$$d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) + d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) + d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_m, \dots) + d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) = 0$$

$$\Rightarrow d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) = 0 \quad \text{d кососимм.}$$

$$d \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d_{j_k \dots j_m}^{i_1 \dots i_q} = 0$$

def:  $d \in T(p, 0)$  наз-ся полиномиальной формой. Если  $d$  не линейна, кососимметрическ., то  
 $d$  наз-ся антисимметрической полином. формой или p-формой или высшей p-формой  
 или высшей полином. степени p

$\alpha \in T_{(1, q)}$  наз. половином. Если  $\alpha$  не имеет ненулевых коэффициентов, то  $\alpha$  наз. q-биквадратом

Упр.: Вспомнимо, что  $\det$  из прошлого семестра, и сравним с  $\det$  в данном.

$$\alpha \in T_{(p, q)} \text{ кососимметрическое (по ненулевым элементам)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &1) \text{ если } p > n \Rightarrow \alpha \equiv 0 \\ &2) \text{ если } p = n \Rightarrow \alpha \underset{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_n}}{=} (-1)^{\sum_{i < j} i(j-i)} \underset{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_n}}{\alpha} \\ &\alpha = (j_1, \dots, j_n) \text{ неперестановка} \\ &\text{иначе } (1, \dots, n) \end{aligned}$$

Пример: 1)  $V_3$  - np-бо 3-мерн. пол. векторов.

$$\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}) \text{ кв. np-e. } \alpha \in T_{(2, 0)}, \text{ симметр.}$$

Упр.: 1) Вспоминаем, что  $\alpha$  кв. np-e.  $\alpha \in T_{(2, 0)}$ , симметр.

$$\beta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \text{ кососимметрическое np-e. } \beta \in T_{(3, 0)}, \text{ кососимметр.}$$

Упр.: 2) Убедимся, что  $\alpha \in T_{(2, 0)}$ .

$$2) A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \alpha \in T_{(2, 0)} \quad \text{данные.} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow A \text{ симметрическое.}$$

Упр.:  $a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Leftrightarrow A \text{ кососимметрическое.}$

$$3) \alpha \in T_{(3, 0)} \quad \alpha \equiv 0 \quad n > 3$$

коэффициенты.  $\exists n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\sum_{i < j} i(j-i)} \alpha_{123}, \quad \alpha = (j_1, j_2, j_3) \text{ неперестановка } (1, 2, 3)$

(3-форма):  $\begin{array}{l} (1, 2, 3) \oplus (2, 1, 3) \oplus (3, 1, 2) \oplus \\ (1, 3, 2) \oplus (2, 3, 2) \oplus (3, 2, 1) \oplus \end{array}$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Упр.: как будем вычислять  $\alpha$ ?  $\alpha \in T_{(3, 0)}$ , если  $n=2$ ?  $n=4$ ?

$$4) \alpha \in T_{(3, 0)} \quad \exists n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_1 0}, \alpha_{j_2 0}, \alpha_{j_3 0} \quad \forall \alpha = (0_1, 0_2, 0_3) \text{ неперестановка } (1, 2, 3)$$

$$\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} = x$$

$$\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211} = y$$

$$\alpha_{113} = \alpha_{131} = \alpha_{311} = z$$

$$\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122} = t$$

... и т. д. запомни

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} x & y & z & y & t & x & z & x & 0 \\ y & + & x & t & + & \alpha_{122} & x & - & * \\ z & x & - & x & + & 0 & * & * & \alpha_{233} \end{array} \right)$$

Упр.: 1) если  $n=2$ ? 2) если  $n=4$ ?

## 8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

### 8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров

def: Альтернированием (антисимметризацией) и симметрированием тензора  $\alpha \in T_{(p,q)}$  (по нижним индексам) называется операции:

$$\text{Alt}\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma(\alpha)$$

$$\text{Sim}\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$$

$S_p$  - мн-во всех перестановок чисел от 0 до  $p$ .

Замечание:

1) очевидно, если  $d$  симм.  $\Rightarrow \text{Sim}d = d$ ,  
если  $d$  косимм.  $\Rightarrow \text{Alt}d = d$

$$(\text{Sim}d = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} d = \frac{p!}{p!} d, \text{ т.к. } \sigma(d) = d \forall \sigma)$$

$$(\text{Alt}d = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} d = \frac{p!}{p!} d, \text{ т.к. } \sigma(d) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} d \forall \sigma)$$

2) очевидно, Alt и Sim - линейные операции на  $T_{(p,q)}$ , т.к.  $\sigma$ -линейные операции на  $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (нижних) индексов.

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым проводят альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказались индексы, по которым альтернирование (симметрирование) не проводится, то эти индексы, выделены вертикальными чертами.

Например,  $\alpha^{(i_1 i_2 | i_3 | i_4 i_5)}_{[j_1 j_2 j_3]}$

- по верхним индексам проводится симметрирование по индексам  $i_1 i_2 i_5$
- по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример:  $\alpha \in T_{(2,0)}$   $n=3$   $\alpha = (\alpha_{ijk}) = (\alpha_{j_1 j_2 j_3})$   $\sigma \in \left\{ \begin{matrix} (123) & (213) & (312) \\ (132) & (231) & (321) \end{matrix} \right\} = S_3$

$$1) \quad \boxed{\beta = \text{Sum} \alpha} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha^{\sigma}$$

$$\beta = \alpha_{(ijk)} \rightarrow \beta_{(ijk)} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_{\sigma(i) \sigma(j) \sigma(k)}$$

$$\boxed{\beta_{123}} = d_{(123)} = \frac{1}{6} (d_{123} + d_{132} + d_{213} + d_{231} + d_{312} + d_{321})$$

$$d_{(132)} = d_{(213)} = d_{(231)} = d_{(312)} = d_{(321)} \Rightarrow \beta_{123} = \beta_{132} = \beta_{213} = \beta_{231} = \beta_{312} = \beta_{321} = x \quad (\text{см. пример 4})$$

$$\boxed{\beta_{112}} = d_{(112)} = \frac{1}{6} (d_{112} + d_{121} + d_{121} + d_{121} + d_{211} + d_{211})$$

$$\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \quad \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow$$

$$2) \quad \boxed{f^1 = A \cdot \alpha} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha^{\sigma} \quad f^1 = \alpha_{(ijk)} \rightarrow f^1_{(ijk)} = \frac{1}{6!} \sum_{\sigma \in S_6} (-1)^{\epsilon(\sigma)} d_{\sigma(i) \sigma(j) \sigma(k)}$$

$$\boxed{f^1_{123}} = d_{[123]} = \frac{1}{6} (d_{123} - d_{132} - d_{213} + d_{231} + d_{312} - d_{321}) \quad \epsilon(\sigma) \in \{+, -, +, -\}$$

$$-d_{[132]} = d_{[312]} = d_{[321]} = d_{[231]} = -d_{[213]} \Rightarrow f^1_{123} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} f^1_{123}$$

$$\sigma = (j_1, j_2, j_3)$$

$$\boxed{\beta_{112}} = d_{[112]} = \frac{1}{6} (d_{112} - d_{121} - d_{121} + d_{121} + d_{211} - d_{211}) = 0$$

$$\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \quad \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow$$

$$\Rightarrow \beta_{112} = f^1_{121} = f^1_{211} = 0 \Rightarrow \text{бескоординатные } f^1, \text{ у которых обозначение} \\ \text{хочет две 2 индекса, чтобы можно было}\quad (\text{см. пример 3})$$

$\Rightarrow \boxed{f^1 - \text{кососимм. тензор.}}$

$$3) \quad \boxed{\tilde{\beta} = \alpha_{(ij|k)}} \rightarrow \tilde{\beta}_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} d_{j_1 j_2 j_3 \sigma_2} = \frac{1}{2} (d_{j_1 j_2 j_3} + d_{j_2 j_1 j_3}) = \alpha_{(i|j|j_2)}$$

$$\sigma \in \{ (12) (21) \} = S_2 \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\tilde{\beta}_{112} = d_{(1112)} = \frac{1}{2} (d_{112} + d_{211}) \Rightarrow \tilde{\beta}_{112} = \tilde{\beta}_{211}$$

$$\uparrow \downarrow \quad \uparrow \downarrow \quad \uparrow \downarrow$$

$$\tilde{\beta}_{121} = d_{(1121)} = \frac{1}{2} (d_{121} + d_{121}) = d_{121} \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta}_{i,j,i} = d_{(i|j|i)} = \alpha_{i,j,i}}$$

$$\forall i, j, i$$

$$\tilde{\beta}_{123} = d_{(1123)} = \frac{1}{2} (d_{123} + d_{321}) \Rightarrow \tilde{\beta}_{123} = \tilde{\beta}_{321} \quad u.m.g. \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta} \text{ симм. по } 1 \times 3 \text{ индексам.}} \quad \boxed{\tilde{\beta}_{i,j,k} = \tilde{\beta}_{k,j,i}} \quad \forall i, j, k$$

$$4) \quad \boxed{f^1 = \alpha_{[i|j|k]}} \rightarrow \tilde{f}^1_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^{\epsilon(\sigma)} d_{j_1 j_2 j_3 \sigma_2} = \frac{1}{2} (d_{j_1 j_2 j_3} - d_{j_2 j_1 j_3}) = \alpha_{[i|j|j_2]}$$

$$\epsilon(\sigma) \in \{+, -\}$$

$$\tilde{f}^1_{112} = d_{[1112]} = \frac{1}{2} (d_{112} - d_{211}) \Rightarrow \tilde{f}^1_{112} = -\tilde{f}^1_{211}$$

$$\uparrow \downarrow \quad \uparrow \downarrow$$

$$\tilde{f}^1_{121} = d_{[1121]} = \frac{1}{2} (d_{121} - d_{121}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{f}^1_{i,j,i} = d_{[i|j|i]} = 0 \quad \forall i, j, i}$$

$$\tilde{f}^1_{123} = d_{[1123]} = \frac{1}{2} (d_{123} - d_{321}) \Rightarrow \tilde{f}^1_{123} = -\tilde{f}^1_{321} \quad u.m.g. \Rightarrow \boxed{\tilde{f}^1_{i,j,k} = -\tilde{f}^1_{k,j,i} \quad \forall i, j, k}$$

Упр.  $\alpha \in T_{(2,0)} \Leftrightarrow A = (\alpha_{ij})$  1)  $\text{Sum } A = \frac{A+A^T}{2}$ ,  $A \cdot \alpha = \frac{A+A^T}{2}$  2)  $\text{Sum } A - \text{симм. инд-ва?}$   
 $A \cdot \alpha - \text{кососимм. ин-ва?}$