

Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

1 июня 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения	3
7.1 Основные определения	3
7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.	6
7.3 Инварианты линейного отображения	11
7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.	17
7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)	
Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.	
Функция от матрицы.	21
7.6 Комплексификация линейноговещ.пространства. Продолжениевещ.линейного оператора.	30
7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона	33
7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.	38
7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана	43
7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис	47
7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме	65
8 Тензоры	69
8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования.	69
8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.	76
8.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Операция свертки.	80
8.4 Транспонирование тензора. Симметрические икососимметрические тензоры.	83
8.5 Операции альтернирования исимметрирования тензоров	87
8.6 p -формы. Внешнее произведение p -формы.	90
9 Евклидовы и унитарные пространства	94
9.1 Скалярное, псевдоскалярное произведение в Евкл. и унитарном про-вах. Норма в Евклидовом и унитарном пространствах.	94
9.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис (о.н.б.) Ортогональные системы векторов.	97
9.3 Матрица Грама. Объем к-мерного паралл-да. Ортогональная и унитарная матрица	101
9.4 Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Теорема Пифагора. Теорема о наилучшем приближении. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя.	106
9.5 Изометрия унитарных (евклидовых) пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидового пространства и сопряженного к нему.	112
9.6 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический тензор. Взаимные базисы. Операции поднятия и опускания индексов.	113
10 Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах	120
10.1 Сопряженный оператор в унитарном и евклидовом пространствах	120

10.2 Нормальные операторы в евклидов. и унит. пространствах	123
10.3 Самосопряженные операторы. Изометрические операторы	129
10.4 Разложения матриц: LU , Холецкого, QR и полярное	134
11 Квадратичные формы	143
11.1 Основные понятия	143
11.2 Методы приведения кв. ф. к канонич. виду	145
11.3 Закон инерции кв. формы. Критерий Сильвестра	149

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением \mathcal{A} называется $\mathcal{A} : U \rightarrow V$, обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}0_U = 0_V$

Примеры.

1. 0 – нулевое отображение $U \rightarrow V$

$$\forall u \in U : 0u = 0_v$$

2. \mathcal{E} – тождественное отображение: $V \rightarrow V$

$$\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$$

3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

$\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p'_1 + \lambda p'_2 = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$$

Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

4. $U = \mathbb{R}^n$ $V = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$$

$$x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$$

5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K$ $\mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

Определение 3. Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$ называется $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad [\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}]$$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ – отображение противоположное \mathcal{A}

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

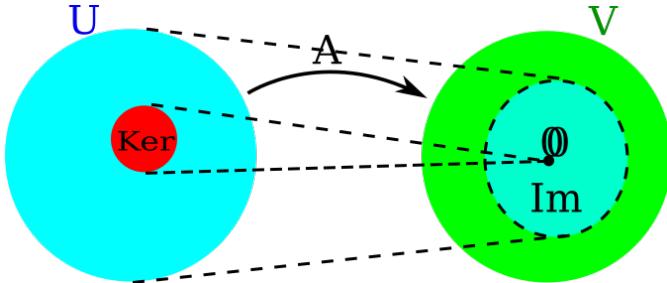
Значит $[L(U, V) – линейное пространство]$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$ – ядро линейного отображения.

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \mid \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$ – образ линейного отображения.



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ – это подпространства соответственно пространств U и V . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U , то

$\dim Ker\mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$ – дефект линейного отображения.

Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V , то

$\dim Im\mathcal{A} = rg\mathcal{A}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. \mathcal{A} изоморфно между U и $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $Im\mathcal{A} = V$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$ trivialно

Доказательство. \mathcal{A} изоморфно \Leftrightarrow взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$

Пусть $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$

Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$v_1 = \mathcal{A}u_1$ $v_2 = \mathcal{A}u_2$

$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$ т. к. ядро trivialно.

Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. ■

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

–инъективно, если $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$

–сюръективно, если $Im\mathcal{A} = V$

–биективно \equiv изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

–эндоморфизм \equiv линейный оператор, если $U \equiv V$

$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$

–автоморфизм \equiv эндоморфизм + изоморфизм.

$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. Произведением линейных отображений \mathcal{A}, \mathcal{B}

$\mathcal{A} \in L(W, V)$ $\mathcal{B} \in L(U, W)$ $U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$

называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, которое является композицией функций, определяющих отображения \mathcal{A} и \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно, \mathcal{C} – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

$$1. \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ изоморфизмы} \Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \text{ изоморфизм}$$

$$2. (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2 - \text{дистрибутивность}$$

$$3. \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} - \text{ассоциативность}$$

$$4. \lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

\mathcal{E} – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ изоморфно.

$$\forall v \in V \exists !u \in U : v = \mathcal{A}u$$

$$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$$

$$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$$

$$\text{Упр: } \mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения \mathcal{A} на линейное подпространство U_0 называется

$$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$$

Утверждение. \mathcal{A} изоморфизм $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ – изоморфизм

Примеры.

1. $\emptyset : U \rightarrow U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.

2. $\mathcal{E} : U \rightarrow U$ – автоморфизм

3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : P_n \rightarrow P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.

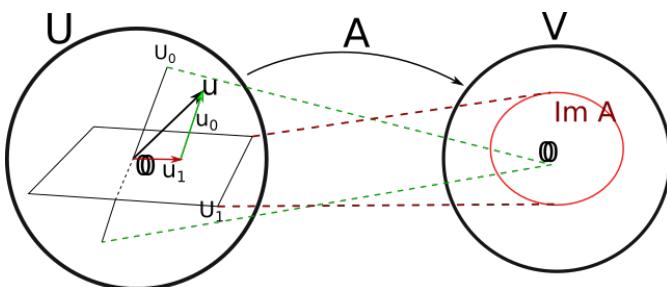
4. $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.

Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.

То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = \dim U}$$



Доказательство. $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U :

$$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad \text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

\mathcal{A}_1 – изоморфизм? $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{A}$ – сюръекция

$$\left. \begin{array}{l} \forall w \in \text{Ker } \mathcal{A}_1 \in U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong \text{Im } \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim U_1 = \dim(\text{Im } \mathcal{A})$ – инъекция.

$$\text{T. к. } U = U_0 \oplus U_1, \text{ то } \dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \dim_{\text{def } \mathcal{A}} \text{Ker } \mathcal{A} + \dim_{\text{rg } \mathcal{A}} \text{Im } \mathcal{A}$$

■

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{A} изоморфно
 2. $\dim U = \dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
 3. $\dim U = \dim V$
- $\text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$
2. $\dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$ матрица линейного отображения \mathcal{A} относительно базисов (ξ, η)

Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$
 $A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора
 $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$

Примеры.

$$1. \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

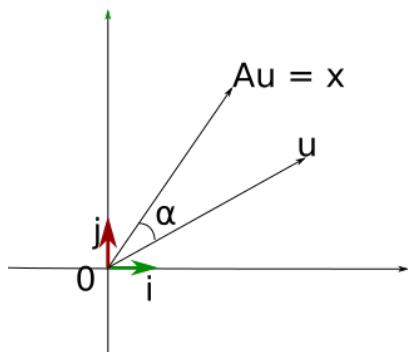
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji}e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

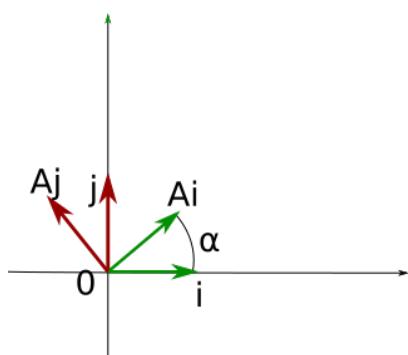


$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол α .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \mathcal{A} : p_2^{1,t,t^2} \rightarrow p_2^{1,t,t^2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}1 = 1' = 0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}t = t' = 1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : p_2_{1,t,t^2} \rightarrow p_1_{1,t}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с веш. (компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм \equiv биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$$U \xi_1 \dots \xi_n \text{ базис}$$

$$\mathcal{A} : U \rightarrow V$$

$$V \eta_1 \dots \eta_m \text{ базис}$$

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xrightarrow{?} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность \Rightarrow изоморфизм. ■

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$A, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V\eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \underset{\xi, \eta}{\leftrightarrow} A$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n u_i a_{ji}) \eta_j$$

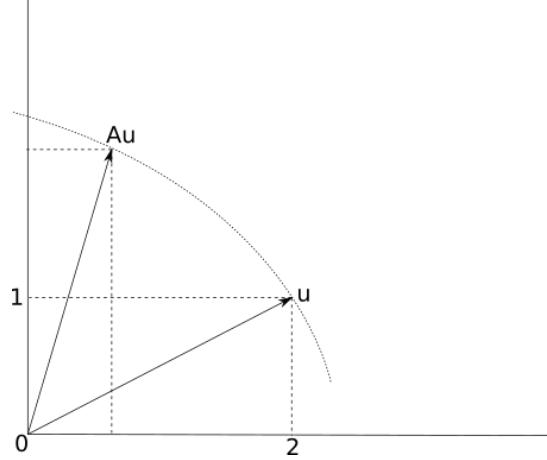
Так как координаты определяются единственным образом:

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \quad \leftrightarrow \quad [v = \mathcal{A}u] \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

Примеры.

1. \mathcal{A} поворот на угол α

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



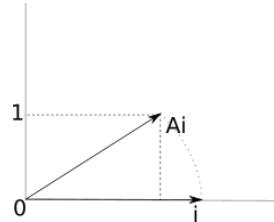
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$2. \quad \mathcal{A} = \frac{d}{dt} : p_2 \underset{1,t,t^2}{\rightarrow} \underset{1,t,t^2}{\rightarrow} p_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(3t^3 + 6t + 4)}_{u(t)}' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$$

$T_{\eta \rightarrow \eta'}$ – матрица перехода

$$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi', \eta')} A'$$

$$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \cdot A \cdot T_{\xi \rightarrow \xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi_1 \dots \xi_n & \sqsupseteq & \eta_1 \dots \eta_m \\ \mathcal{E}_u \uparrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \mathcal{E}_v \\ U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi'_1 \dots \xi'_n & \sqsupseteq & \eta'_1 \dots \eta'_m \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

$$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \text{ Смотри пример 2}$$

■

Следствие 1.

$$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$e_1 \dots e_n$ базис $V \leftrightarrow A$

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис} \leftrightarrow A'$$

$$\mathcal{A} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{A' = T^{-1} A T}$$

Замечание. В условиях теоремы $v = \mathcal{A}u \xrightleftharpoons{(\xi, \eta)} v = Au$

$$\xrightleftharpoons{(\xi', \eta')} v' = A'u$$

$$V = T_{\eta \rightarrow \eta'} V'$$

$$U = T_{\xi \rightarrow \xi'} U'$$

$$T_{\eta \rightarrow \eta'} v' = A T_{\xi \rightarrow \xi'} u'$$

$$v' = \boxed{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}} u'$$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au$$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.
 $v' = A'u'$

Определение 1. $A_{m \times n}$

$$ImA = span(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} =$$

$$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \mid x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$rgA = dim ImA - \text{ранг матрицы}$$

$$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\} - \text{ядро матрицы}$$

$$dimKerA = n - rgA = defA - \text{дефект матрицы}$$

$$\boxed{rgA + defA = n} - \text{аналогично теореме о ранге и дефекте}$$

Теорема 1. $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{\begin{aligned} rg\mathcal{A} &= rgA \\ def\mathcal{A} &= defA \end{aligned}},$$

где матрица A – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств U и V .

$rg\mathcal{A}$, $def\mathcal{A}$ инвариантны относительно выбора базиса.

Доказательство. $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi, \eta)}{A} \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V

$$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \overset{\leftrightarrow}{\cong} A_i$$

Координатный изоморфизм.

Пусть $rgA = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, что из $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$ k линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dim Im\mathcal{A} = k$

$$dimU = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ n & & rgA \\ & \| & \\ & & k \end{array}$$

$$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim \text{ пространства решений } Ax = 0 = defA$$

■

Следствие 1. A изоморфизм $\Leftrightarrow A$ невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \frac{\text{def } A = 0}{\dim U = \dim V} \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow A$ невырожденная. ■

Теорема 2. $\det \mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $\det \mathcal{A} = \det A$, где A – матрица оператора \mathcal{A} в некотором базисе.

Доказательство. $V e_1 \dots e_n$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_k &= \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\text{det } n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \dots \sum_{i_n=n}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow \det = 0) \\ &= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \underbrace{\det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}_{\substack{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \\ \text{все разные}}} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\det \mathcal{A} = \det A' \stackrel{?}{=} \det A$$

$$A' = T^{-1}AT$$

$$\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$
 ■

Определение 2. A, B называются подобными, если

$$\exists \text{ невырожденная } C : B = C^{-1}AC$$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$$A' = T^{-1}AT$$

$$A, B \text{ подобны} \Rightarrow \det A = \det B$$

Следствие 1. f – n -форма на V

$$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow [f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1 \dots \xi_n)]$$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$$g(\xi_1 \dots \xi_n) = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$$

$$\det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\substack{\text{смотри док-во теоремы}}} = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{\det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{\det A}_{\det \mathcal{A}}$$
 ■

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n \times n}$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1 \ \dots \ AB_n) =$$

$$= \det A \cdot \det(B_1 \ \dots \ B_n) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$$

Доказательство. $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$ ■

Следствие 3. $\mathcal{A} \in Aut(V)$

$$\Leftrightarrow \det\mathcal{A} \neq 0$$

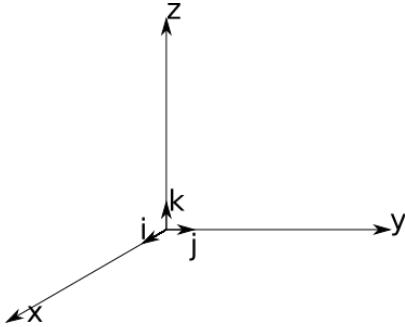
$$Причем \det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{A}}$$

Доказательство. Из следствия 2

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{A}^{-1} = \det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$$
 ■

Примеры. V_3



$$V_{abc\text{-правая тройка}} = \underset{\text{смешанное произведение}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f(\underset{3\text{-форма}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\mathcal{A} \in End(V_3) \ u \in V_3 \rightarrow v = \mathcal{A}u \in V_3$$

Как изменится объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$$\mathcal{A}(V_{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}) = f(\mathcal{A}\bar{a}, \mathcal{A}\bar{b}, \mathcal{A}\bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot V(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| \quad \text{Объем увеличится в } \lambda \text{ раз.}$$

$$1. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

Оператор подобия

$$\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$$

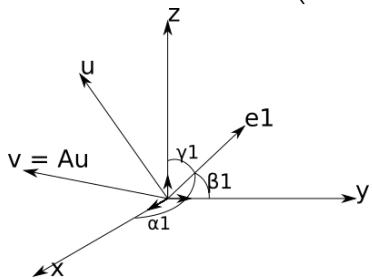
$$\begin{aligned} \mathcal{A}\bar{i} = \mu\bar{i} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{j} = \mu\bar{j} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{k} = \mu\bar{k} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| = |\det A| = |\mu^3|$$

2. $\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

Оператор поворота

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \bar{i} \rightarrow e_1 \nearrow \\ \bar{j} \rightarrow e_2 \rightarrow \\ \bar{k} \rightarrow e_3 \searrow \end{array} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} |e_i| &= 1 \\ (e_i, e_j) &= 0 \\ i &\neq j \end{aligned}$$

$${}^n\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}) = \det \mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |\dots| \underset{\text{Смешанное произведение}}{e_1 e_2 e_3} = 1$$

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \det E = 1$$

$$|\det A| = 1$$

Утверждение. A, B подобные матрицы $\Rightarrow \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

$\operatorname{trace} = \operatorname{след}$

Доказательство. A, B подобные \Rightarrow

$\exists C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$\operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}^{''-1''}(AC)ji = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ij}^{''-1''} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{ki} C_{ij}^{''-1''}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \operatorname{tr} A$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}} \quad CC^{-1} = E$$

■

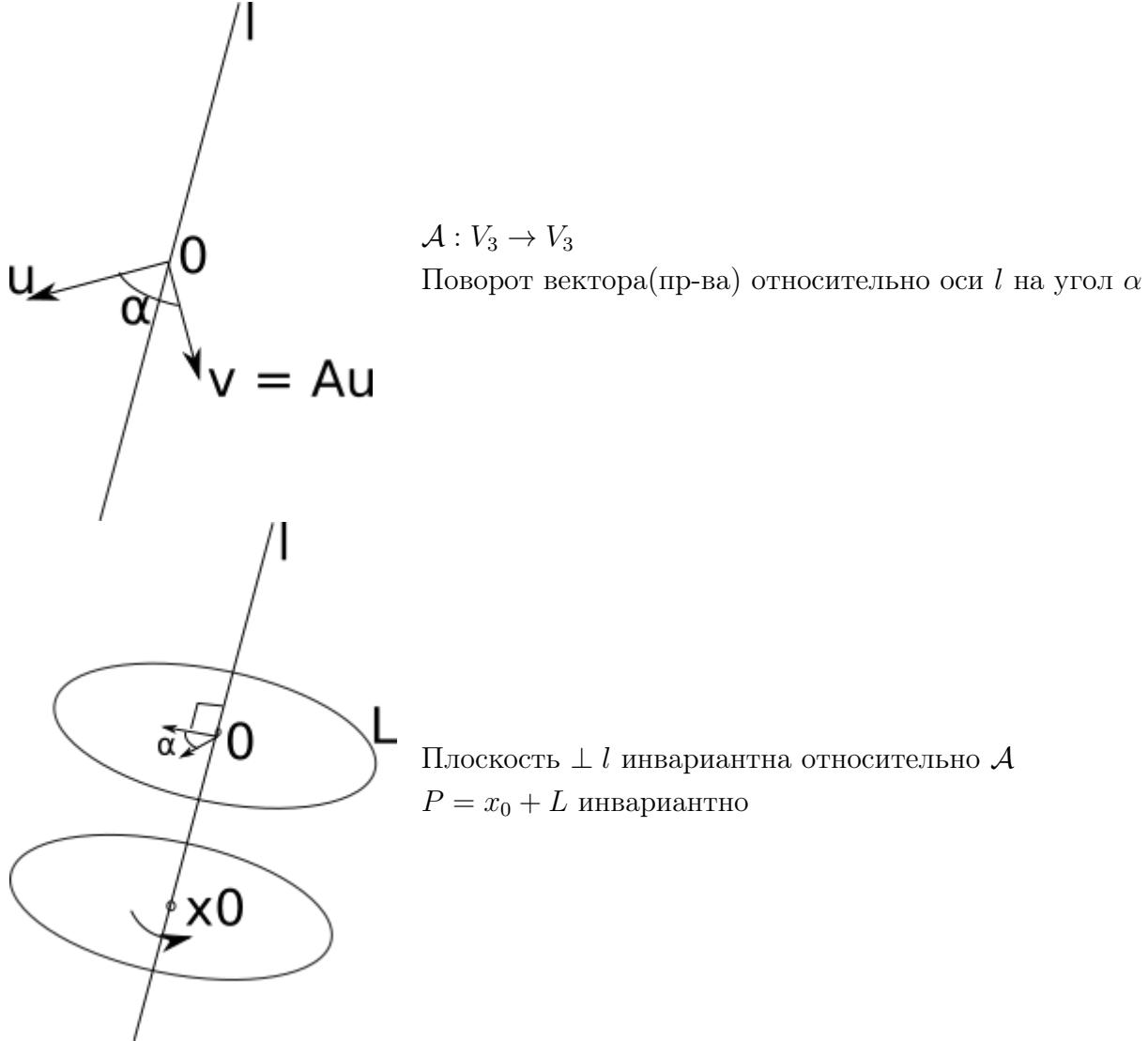
Определение 3. $\operatorname{tr} \mathcal{A} = \operatorname{tr} A$, где A – матрица оператора в некотором базисе.

$\operatorname{tr} \mathcal{A} = \operatorname{tr} A'$ – не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

Определение 4. $L \subset V$ L инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$ если $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

Примеры.

1. \emptyset, V инвариантны относительно \mathcal{A}
2. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ инвариантны относительно \mathcal{A}



Теорема 3. $L \subset B$ $\mathcal{A} \in End(V)$. Линейное пространство инвариантно относительно \mathcal{A}

$\Rightarrow \exists$ базис пространства V , т.ч. матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе

будет иметь вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \emptyset & A_3 \end{array} \right)$

$A_1 k \times k$ где $k = \dim L$

Доказательство. $L = \underset{\text{базис}}{span}(e_1 \dots e_k)$

Дополним до базиса V : $e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i \in L = \sum_{1 \leq i \leq k}^k a_{mi} e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 \cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{k+1 \leq i \leq n}^n a_{ij} e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1i}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ki} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Следствие 1. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно \mathcal{A}

$\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V , в котором матрица оператора \mathcal{A} будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A^2} & \\ & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} A^i \\ \text{размерность матрицы} \end{array} \right) = \dim L_i$$

Доказательство. $L_1 = \text{span}(e_1^1 \dots e_i^{i_k})$

т.к. \bigoplus , то базис V – объединение базисов L_i

$$V = \text{span}(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \frac{L_1}{1 \dots i_1} & & & \frac{L_2}{i_1+1 \dots i_2} & & & \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

отвечает позиции базисных элементов пр-ва L_i в базисе V

Следствие 2. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Доказательство. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall u \in V \exists! u = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i$

$$Im\mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

Верно и " \supset "

Пусть $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^m u_i \in V\right) \in Im\mathcal{A}$$

$$Im\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

\oplus прямая?

$$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \emptyset \leftarrow$$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнктны $\nwarrow \Rightarrow \forall i : v_i = \emptyset$

$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i}$ дизъюнктны $\Rightarrow \oplus$

■

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(v)$ V линейное пространство над K

Определение 1. $\lambda \in K$ – *собственное число* (с.ч.) линейного оператора \mathcal{A} , если

$\exists [v \in V \neq \emptyset]$, который называется *собственным вектором* (с.в.), такой что $[\mathcal{A}v = \lambda v]$

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$

Определение 2. $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \{c.v. v \neq \emptyset\}$ называется *собственным подпространством*.

$[\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda]$ – геометрическая кратность с.ч.

$$\gamma \geq 1$$

V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$$v \in V_\lambda \quad \mathcal{A}v = \lambda v \stackrel{?}{\in} V_\lambda$$

$$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$$

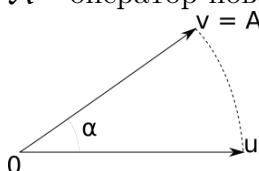
Примеры.

1. \mathcal{A} – оператор подобия:

$$\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$$

$$\mu \text{ с.ч.} \quad V_\lambda = V$$

2. \mathcal{A} – оператор поворота на плоскости на угол α



$$\alpha \neq \pi k \Rightarrow \text{нет с.в.}$$

3. Пусть λ с.ч. $= 0$ $\mathcal{A}v = 0$ с.в. $\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A}$ нетривиально $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ не автоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ необратимо $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$

4. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$v_1 \dots v_n \text{ базис, т.ч. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$$

Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ – с.ч. v с.в. $\neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$ нетривиально $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$ базис $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(A - tE)$ т.к. \det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} = \\ = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \underset{\text{tr } A = \text{tr } \mathcal{A}}{\det A}$$

По теореме Виета: $\det \mathcal{A} = \prod_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)} \lambda_1 \dots \lambda_n$

$\lambda \in K$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ ($\lambda \in K$)

λ корень характеристического многочлена.

$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни $\chi_{\mathcal{A}}$ будут с.ч.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$$

$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется *спектром линейного оператора*. $(\lambda, \alpha(\lambda))$

Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.

$$\alpha(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$$

Немножко про алгебраическую кратность

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod_{a-\text{корень}} (t - a)^{m_a}$$

a -корень $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \mid (t - a)$

a – корень f **кратности** $m \Leftrightarrow \begin{cases} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(t) = (t - a)^m g(t)$$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a$ a – корень с учетом кратности

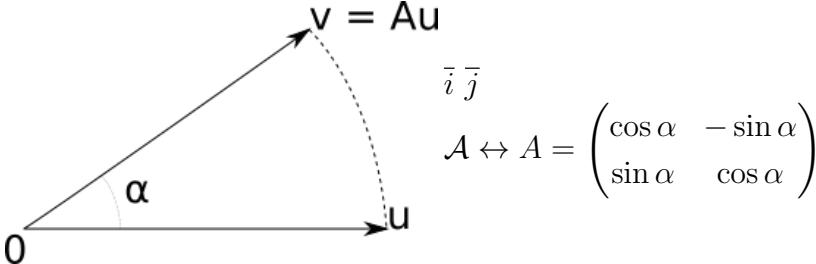
$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$(-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_n)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ с.ч.}$$

Примеры. \mathcal{A} – поворот на угол α



$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - t & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - t \end{pmatrix} =$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha t + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1$$

$$D = 4 \cos^2 \alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$$

нет веществ. корней \Rightarrow нет с.ч.

$$K = \mathbb{R}$$

Теорема 1. λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow [1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)]$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = \dim V_{\lambda} = \text{span}(v_1 \dots v_k)$ базис

V_{λ} инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda & \\ \hline 0 & & A^3 \end{array} \right) \quad A_{k \times k}^1$$

$$\text{Базис} = v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$$

$$\mathcal{A}_{i=1 \dots k} v_i \in V_{\lambda} = \lambda v_i \Leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda - t & \\ \hline 0 & & A^3 - tE_{n-k} \end{array} \right) \underset{\text{св-ва}}{=} \det \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{A^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$

Теорема 2. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ – различные с.ч. \mathcal{A}

$v_1 \dots v_m$ соответствующие им с.в. \Rightarrow

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1$ $\lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq 0$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m - 1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. \mathcal{A} ,

а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

$$\text{Пусть } v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

$$\mathcal{A}_{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

||

$$\lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = 0 \quad v_i \text{ линейно независим по инд. предположению}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m - 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_m = 0$ — Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть 0

■

Следствие 1. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ дизъюнктны. $\left(\bigoplus_{c.\lambda.} V_\lambda \right)$

Доказательство. $v_1 + \dots + v_m = 0 \quad v_i \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq 0 \Rightarrow$ это слагаемое с.в. \Rightarrow противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall i : v_i = 0 \Rightarrow$ дизъюнктны.

■

Теорема 3. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \rightarrow L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \quad A_{k_i \times k_i}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства det}}{=} |A^1 - tE_{k_1}| |A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\chi_{A^1}(t) \quad \chi_{A^2}(t) \quad \dots \quad \chi_{A^m}(t)$$

$$\begin{array}{ccc} || & || & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}^m \end{array}$$

■

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n \times n}$ λ с.ч. $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

$$y = \begin{array}{c} Ax \\ \uparrow \\ \text{линейный оператор} \end{array}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$$\chi_A(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$$

$$t_1 = 0 \quad \alpha(0) = 2$$

$$t_2 = 1 \quad \alpha(1) = 1$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) \quad \alpha \in]R$$

$$V_{\lambda_1} = 0 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$$

$$\lambda_2 \quad 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = 1$$

7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)

Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.

Функция от матрицы.

Определение 1. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

\mathcal{A} называется о.п.с., если \exists базис пространства V , т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$ базис V из с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} V_\lambda$

$$V = \text{span}(v_1 \dots v_n)$$

Теорема 1. Пусть $\sum_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

\Leftrightarrow все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. \mathcal{A}

\mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \forall c. \forall \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$
--

Доказательство. \mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \dim V = \sum_{\lambda \in \text{ч.}} \gamma(\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{ч.}} \alpha(\lambda)$$

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \quad \nearrow$$

$$\sum_{\lambda \in \text{ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \rightarrow \quad \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$$

Следствие 1. $\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

Ао.н.с. \Leftarrow снектр - нростой.

(*n* попарно различных с.ч. $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$)

Определение 2. $A_{n \times m}$ называется диагонализируемой, если \exists невырожденная $T_{n \times n}$, т.ч.

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

(“*A* подобна диагональной матрице”)

Следствие 2. Если матрица $A_{n \times n}$ – матрица некоторого о.п.с. \mathcal{A} , то она **диагонализируема**. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.

Доказательство.

$$\begin{array}{lll}
 \mathcal{A} \text{ о.п.с.} & \Leftrightarrow & \exists \text{ базис } v_1 \dots v_n \\
 \Updownarrow (e_1 \dots e_n)V & & \text{с.в.} \\
 A & & \lambda_1 \dots \lambda_n \\
 & & \text{с.ч.} \\
 & & \updownarrow \\
 & & \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$T = T_{e \rightarrow v}$ невырожденная.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

Определение 3.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{определение 3.} & & \\
 V = \bigoplus_{i=1}^m L_i & & p_i : V \rightarrow L_i \subset V \\
 \nwarrow \Leftarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \Rightarrow \searrow & & \\
 L_i \subset V & & \forall v \in V \ \exists! : v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i \\
 \text{линейное подпр.} & & \\
 \boxed{\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i v \stackrel{\text{def}}{=} v_i} & & i = 1 \dots m
 \end{array}$$

Оператор проектирования (проектор)

$$\mathcal{P}_i \stackrel{?}{\in} End(V)$$

$$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_i \text{ линейный оператор.}$$

$$u + \lambda V = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i + \lambda \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \underbrace{\sum_{i=1}^m (u_i + \lambda v_i)}_{\in L_i}$$

$$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$$

Свойства проекторов:

- $\forall i \neq j \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = \emptyset$
 - $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \emptyset_i^k = \mathcal{P}_i)$
 - $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
 - $Ker \mathcal{P}_i = \sum_{j \neq i} L_j \quad \forall i = 1 \dots m$
 - $Im \mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

- $$1. \forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j(v) = \mathcal{P}_i v_j \in L_j = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = \emptyset$$

Т.к. L_i дизъюнктны

$$v = v_1 + v_i + \underset{\text{Ед. образом}}{v_j} + \dots + v_n$$

- $$2. \forall v \in V \quad \underline{\mathcal{P}_i} \mathcal{P}_i(v) = v_i = \mathcal{P}_i v$$

$v_i \in L_i$

Т.к. верно $\forall v \in V$, то верно и для базиса \Rightarrow операторы совпадают. $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$

- $$3. \forall v \in V(\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i)v = \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i v = \sum_{i=1}^m v_i = v = \mathcal{E}v \Rightarrow \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^m = \mathcal{E}$$

- $$4. \quad \mathcal{P}_i(v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_m) + \underbrace{\sum_{j \neq i} \mathcal{P}_i v_j}_{0}$$

$$\sum_{j \neq i} L_j \subset \text{Ker } \mathcal{P}_i$$

T.K. $v = \bigoplus_{j \neq i} L_j \oplus L_i$

$$\Rightarrow \text{Ker } \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$$

Im $\mathcal{P}_i = L_i$ no def " \subset "

Верно " \supset " $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P}v_i = v_i$

1

Утверждение. $\mathcal{P}_i \in End(V) : V \rightarrow V$ и выполнены свойства 1, 3 \Rightarrow $i=1..m$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m Im\mathcal{P}_i \text{ (m.e. } \mathcal{P}_i \text{ проекторы на } L_i = Im\mathcal{P}_i)$$

Доказательство.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i &\stackrel{?}{=} \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \mathcal{E} = p_i \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j &= \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_i^2 \\ &\quad \parallel \\ &\quad \emptyset \\ i &\neq j \end{aligned}$$

- $$2. \ v_1 + v_2 + \dots + v_m = \emptyset$$

$v_i \in Im\mathcal{P}_i$ дизъюнктно?

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \quad w_i \in V$$

$$\begin{aligned}
v_i = \mathcal{P}_i w_i &= \mathcal{P}_i \left(\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j} \right) = 0 \\
\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j w_j)}_{=0 \ i \neq j} &= \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i \\
\forall v \in V \quad \mathcal{E}v = v &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j v}_{v_j \in Im \mathcal{P}_j} \quad \Rightarrow v = \sum_{j=1}^m Im \mathcal{P}_j
\end{aligned}$$

■

Теорема 2 (О спектральном разложении о.п.с.). $v = \bigoplus_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \quad \mathcal{P}_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$

\mathcal{A} o.n.c. $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda \leftarrow \text{спектральные проекторы}$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
1. \quad &\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = 0 \\
2. \quad &\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda \\
3. \quad &\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E} \\
\forall v \in V \quad &\mathcal{A}v = \mathcal{A} \left(\sum_{\lambda} v_\lambda \in V_\lambda \right) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{= \lambda v_\lambda} = \\
&\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda v
\end{aligned}$$

Доказательство верно \forall векторного про-ва V . В частности для базиса \Rightarrow

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda}$$

■

Следствие 1. $A_{n \times n}$ диагонализируема $\Leftrightarrow \exists \mathcal{P}_\lambda \underset{\text{проекторы}}{n \times n} \quad 1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ$

$$A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{span } V_3$$

$$\Rightarrow \text{o.p.c. } V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = \text{span}(V_1, V_2, V_3)$$

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad \boxed{AT = T\Lambda}$$

$$\mathcal{P}_1 : V \rightarrow V_{\lambda_1} \subset V$$

$$\mathcal{P}_2 : V \rightarrow V_{\lambda_2} \subset V$$

$$\mathcal{P}'_1 \text{ матрица } \mathcal{P}_1 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ – матрицы проекторов в базисе e (канонич.)

$$\mathcal{P}_1 v_i = \begin{cases} v_i, i = 1, 2 \\ \emptyset, i = 3 \end{cases}$$

$1^\circ 2^\circ 3^\circ$

$$\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 = E$$

$$\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2 = \emptyset \dots$$

$$\mathcal{P}'_2 \text{ матрица } \mathcal{P}_2 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}'_i = T^{-1} \mathcal{P}_i T \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}'_i T^{-1} \quad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \emptyset$$

$$\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$$

Определение 4. $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$ – последовательность матриц,

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall i, j \ \exists a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{m=1}^N A_m}_{\substack{S_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad R = \infty \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad \text{либо } x = 1$$

Определение 5. Функция от матрицы.

$A_{n \times n}$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m, \text{ где } \boxed{\begin{array}{lcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{array}}$$

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

$$\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A^{2m}$$

Теорема 3. f аналитическая в $|x| < R$

$A_{n \times n}$ все с.ч. $|\lambda| < R$

A диагонализируемая То есть:

$$\exists \underset{\text{невырожд.}}{T} : \Lambda = T^{-1}AT$$

$$\exists \mathcal{P}_\lambda : A = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

↓

$$1. \underset{f(A)}{\exists} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$2. \underset{f(A)}{\exists} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Доказательство.

$$1. \quad \begin{aligned} f(A) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \\ A^m &= (T \Lambda T^{-1})^m = \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x| < R \end{array}}$$

$$= T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} =$$

$$= T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m \right) T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$|\lambda_i| < R$$

$$2. A^m = \left(\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda \right)^m \underset{\mathcal{P}_\lambda \neq \mu \in \emptyset}{=} \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda \right) = \sum_{\lambda} \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m = f(\lambda) \right) \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\lambda} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

■

Замечание. A диагон. $\Leftrightarrow A = T \Lambda T^{-1}$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$$

$$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$t^m A^m = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Примеры. e^{At}

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_1} : \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\forall \lambda : \left. \begin{array}{rcl} \alpha(\lambda) & = & \gamma(\lambda) \\ \sum_{\lambda} \alpha(\lambda) & = & 3 \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ диагонализируемая}$$

$$T_{e \rightarrow v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \xrightarrow[i=1,2]{} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{n \times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x} - \text{производная}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \quad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности

$$(e^{At})' = Ae^{At}$$

$$e^{A \cdot 0} = E$$

$$e^{At} = \left(\sum_{\lambda \text{ c.ч.}} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda \right)' = \sum_{\lambda \text{ c.ч.}} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_{\lambda} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\mu=\lambda} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

Замечание. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \neq 0$
 (все корни хар. многочлена)

$\square A$ диагонализируема. Все с.ч. $\lambda \neq 0$

$$A^{-1} = T \Lambda^{-1} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\Lambda \Lambda^{-1} = E$$

$$AA^{-1} = T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda^{-1} T^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$$

($AA^{-1} = E$ упр.)

$$\sqrt[m]{A} = T \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

\square все $\lambda_i \geq 0$

(m нечет $\Rightarrow \lambda$ любого знака)

$$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$$

$$(\sqrt[m]{A})^m = T \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} \dots T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.: $(\sqrt[m]{A})^m = A$)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

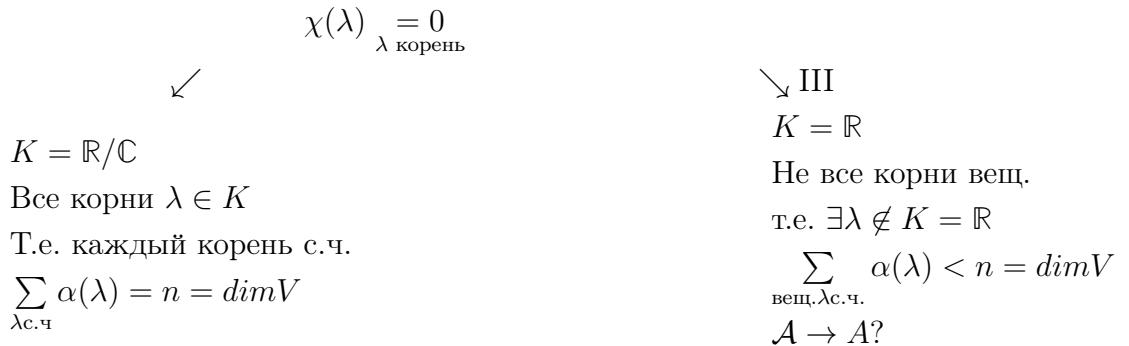
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & A^{-1} &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \mathcal{P}_1 + \frac{1}{(-1)} \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$$

$$A^2 = E$$

7.6 Комплексификация линейного веш. пространства. Продолжение веш. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$ V над полем K



$$\begin{array}{ccc} \text{I} \swarrow & & \searrow \text{II} \\ \forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) & & \exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \\ \mathcal{A} - \text{o.p.c.} \rightarrow A \text{ диагонализир.} & & \mathcal{A} \text{ не o.p.c.} \\ & & \rightarrow A \text{ приводится к Жордановой форме} \end{array}$$

Определение 1. V – линейное пространство над \mathbb{R}

$$\forall x, y \in V \quad v := x + iy \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} \forall v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \quad x &= Re v \\ &\quad y = Im v \end{aligned}$$

Определим

1. $v = v' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \in V \\ y = y' \end{cases}$
 2. $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{cases}$
 3. $\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\alpha x - \beta y}_{\in V_{\mathbb{C}}} + i \underbrace{\beta x + \alpha y}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

$$4. \forall x \in V \Leftrightarrow x + i0 \in V_{\mathbb{C}}$$

$$V \subset V_{\mathbb{C}}$$

$$0 \leftrightarrow 0 + i0$$

Упр.: $V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство над \mathbb{C}

$V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация линейного вещественного пространства V

Утверждение. $e_1 \dots e_n$ базис $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

T.e. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$ структуры над разными полями.

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$?

- порождающая?
- линейно независимая?

1. $\forall v \in V_{\mathbb{C}} \quad v = x \in V + iy \in V = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j =$
 $\sum_{j=1}^n \left[\begin{array}{c} x_j + iy_j \\ \alpha_j \in \mathbb{C} \end{array} \right] e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n$ порождающая.
2. $\sum_{j=1}^n \gamma_j e_j = \emptyset \quad \gamma_j \in \mathbb{C}$
 $\left| \left| \sum_{j=1}^n \underbrace{\alpha_j}_{x} e_j + i \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_j}_{y} e_j = \emptyset \right. \right.$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \emptyset = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \\ y = \emptyset = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall j \alpha_j = 0 \\ \forall j \beta_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall j \gamma_j = 0$
 $\Rightarrow \underbrace{e_1 \dots e_n}_{\text{лин. незав.}} \text{ в } V_{\mathbb{C}}$

■

Определение 2. $z = x + iy \quad x, y \in V$

вектор сопряженный к z:

$$\bar{z} = x - iy$$

$$(\bar{z} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \bar{\lambda} \bar{z})$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

Утверждение. $v_1 \dots v_m$ линейно незав. в $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ линейно независимы в $V_{\mathbb{C}}$

Очевидно, $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы $\Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{v}_j = \bar{0} = 0 \\ \left| \left| \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^m \gamma'_j v_j \text{ линейно незав.} \right. \right. \end{array} \right. \right. \Leftrightarrow \forall j \gamma'_j = 0 = \bar{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

\Rightarrow линейно независим.

■

$$rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$

$$V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i \underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$$

Линейность?

1. Аддитивность. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1 + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

Очевидно, из аддитивности \mathcal{A}

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Однородность

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v) &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(x + iy)) = \\ &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)) = \\ &= \mathcal{A}(\alpha x - \beta y) + i\mathcal{A}(\alpha y + \beta x) = \\ &= \alpha \mathcal{A}x - \beta \mathcal{A}y + i\alpha \mathcal{A}y + i\beta \mathcal{A}x = \\ &= (\alpha + i\beta)\mathcal{A}x + i(\alpha + i\beta)\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{A}x + i\lambda \mathcal{A}y = \\ &= \lambda(\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y) = \lambda \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ – продолжение линейного вещ. оператора \mathcal{A}

с пространства V на его комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V(V_{\mathbb{C}}) \\ \text{веществ.} \\ \mathcal{A} \leftrightarrow A \\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Т.е. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр. \mathcal{A}

$$2. \forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z}$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \overline{\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y = \\ &= \mathcal{A}x + i\mathcal{A}(-y) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x - iy) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z} \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} \chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \\ || & & || \end{array} \quad \exists e_1 \dots e_n \text{ базис } V$$

$$\det(A - tE) \quad \det(A_{\mathbb{C}} - tE) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ являются собственными числами $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

$$4. \quad \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda) = 0$$

Т.к. многочлен с вещ. коэф. $\Rightarrow \bar{\lambda}$ тоже корень.

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \quad \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\bar{\lambda}) = 0$$

v соотв. с.в.

$$\Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:	$\dim V_{\lambda} = \dim V_{\bar{\lambda}}$ (из утв. 2)
	$\gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{v} \underset{\text{св-во 2}}{=} \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{с.в. для } \lambda}}{v}} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda}$$

"III": $\mathcal{A} \in End(V)$

V над \mathbb{R}

$$\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = \dim V$$

Т.е. не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещ.

\rightarrow строим $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$ $A_{\mathbb{C}} = A$

Все корни с.ч. \Rightarrow матрица для $A_{\mathbb{C}}$ будет сведена либо к I, либо к II

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$$

$$D = -36 < 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ с.ч. } \alpha(\lambda_1) = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3 \quad \alpha(2, 3) = 1$$

$$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 \quad V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 + 3i \quad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$$

Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещественных чисел.

Только теперь арифметические операции с комплексными.

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 + 3i \\ 5 + 3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$$

$\forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$ диагонализирован.

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 - 3i & 3 + 3i \\ 2 & 5 - 3i & 5 + 3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix} T^{-1} = \dots$$

7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение 1. Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен $\psi(t)$ называется аннулятором элемента $v \in V$, если $\psi(\mathcal{A})v = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$$

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$$

$$\psi(t) = \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$$

Т.е. перестановочны.

Определение 2. $\psi(t)$ аннулятор элемента $v \in V$ наименьший возможной степени называется **минимальным аннулятором элемента** v

Теорема 1 (О минимальном аннуляторе элемента).

$\mathcal{A} \in End(V)$

1. $\forall v \in V \exists! \text{ минимальный аннулятор } v$
2. $\forall \text{ аннулятор элемента делится на его минимальный.}$

Доказательство.

1. (a) $\square v = 0 \quad \psi(t) = 1 \quad \text{Очевидно, минимальный аннулятор.}$

$$\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = 0$$

- (b) $\square v \neq 0$

$$(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \dots, \mathcal{A}^{m-1}v, \mathcal{A}^m v$$

линейно независимая система

линейно зависимая система

$$\dim V = n$$

$$m \leq n + 1$$

$$\mathcal{A}^m v = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$$

$$0 = \mathcal{A}^m v - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow \text{Алгоритм}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$$

Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента v

2. ψ_1 – аннулятор v

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$$

$$\deg r(t) < \deg \psi(t)$$

$$0 = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})v + r(\mathcal{A})v \Rightarrow$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(t) \text{ аннулятор } v \\ \deg r < \deg \psi \end{cases} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdash \psi$$

■

Определение 3. Нормализованный многочлен $\phi(t)$ называется аннулятором \mathcal{A} ,

если $\phi(\mathcal{A}) = 0$

$$(\Leftrightarrow \forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = 0)$$

Аннулятор \mathcal{A} минимальной степени называется **минимальным многочленом**

Теорема 2 (о минимальном многочлене). $\mathcal{A} \in End(V)$

1. $\forall \mathcal{A} \exists! \text{ минимальный многочлен}$
2. $\forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} \text{ делится на минимальный многочлен}$

Доказательство.

$e_1 \dots e_n$ базис V

\Rightarrow по Теореме 1 для $\forall e_j \exists! \psi_j$ минимальный аннулятор e_j

$$\psi_j(\mathcal{A})e_j = \emptyset$$

$$\psi(t) = \text{H.O.K. } (\psi_1 \dots \psi_n)$$

$$\forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n v_i \phi(\mathcal{A})e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=0} = 0$$

$$\phi : \psi_j \Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)$$

$$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A}$$

Давайте покажем, что у ϕ степень минимальная.

От противного.

$$\exists \phi_1 \text{ аннулятор } \mathcal{A} \quad \exists \deg \phi_1 < \deg \phi$$

$$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = 0 \Rightarrow \phi_1 \text{ аннулятор элемента } e_j \xrightarrow{\text{по Теореме 1}}$$

$$\Rightarrow \phi_1 \vdots \psi_j \xrightarrow{\substack{\text{аннулятор } e_j \\ \text{минимальный аннулятор } e_j}} \Rightarrow \phi_1 : \phi \Rightarrow \deg \phi_1 \geq \deg \phi. \text{ Противоречие} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \deg \phi \text{ минимальный} \Rightarrow \text{п.2 доказан, т.к. } \forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} : \phi$$

Единственность?

$$\exists \phi_1, \phi \xrightarrow{\substack{\nearrow \\ \searrow}} \text{минимальные аннуляторы одной степени.}$$

нормализов. \Rightarrow ст. коэф. 1

$$\deg(\phi_1 - \phi) < \deg(\phi) = \deg(\phi_1)$$

$$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \phi_1(\mathcal{A})v - \phi(\mathcal{A})v = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \phi_1 - \phi$ аннулятор \mathcal{A} меньшей степени \Rightarrow противоречие минимальн.

■

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \phi = ?$ минимальный многочлен

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_1 ?$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ae_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A^2e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

$$A^2e_1 = -4e_1 + 4Ae_1$$

$$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^2e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

$$A^2e_2 = 4Ae_2 - 4e_2$$

линейно завис.

$$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

линейн. нез.

$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$

$$\psi_3(t) = t - 2$$

$$\phi(t) = \text{H.O.K. } ((t - 2)^2, (t - 2)) = (t - 2)^2$$

Теорема 3 (Кэли-Гамильтона). $\mathcal{A} \in End(V)$

$$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) \text{ — аннулятор } \mathcal{A}$$

характерист. многочлен

Доказательство. μ — не корень $\chi(t)$

$$\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$$

$e_1 \dots e_n$ базис в. $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B \leftarrow \text{соузная матрица (прис-ная)}$$

$$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow \text{определитель } (n-1)\text{-го порядка } A - \mu E$$

Т.е. мн-н степени $n-1$ относительно μ

$$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \dots + B_1\mu + B_0$$

$$\det(A - \mu E) \cdot E = (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + B_1\mu + B_0)$$

||

$$\chi(\mu) \cdot E$$

||

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k \cdot E$$

$\mu^0 : \alpha_0 E = AB_0$ $\mu^1 : \alpha_1 E = AB_1 - B_0$ $\mu^2 : \alpha_2 E = AB_2 - B_1$ \dots $\mu^{n-1} : \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2}$ $\mu^n : \alpha_n E = -B_{n-1}$	A^0 A^1 A^2 \vdots A^{n-1} A^n
--	---

$$\chi(\mathcal{A}) = \chi(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1}$$

$$- A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = 0$$

χ — аннулятор \mathcal{A}

■

Теорема 4. $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корней характеристического многочлена \mathcal{A} совпадает с множеством корней минимального многочлена \mathcal{A} (без учета кратности)

Доказательство. $\chi(t)$ – характерист., $\phi(t)$ – минимальный многочлен.

” \Leftarrow ” $\exists \phi(\lambda) = 0 \Rightarrow$ т.к. χ аннулятор \mathcal{A} , то по Т-ме 2 $\chi \dot{\mid} \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

” \Rightarrow ” $\exists \chi(\lambda) = 0$

1. $\exists \lambda \in K \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \quad \exists v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0 \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$ минимальный аннулятор v

Т.к. $\phi \dot{\mid} \psi \Rightarrow \lambda$ корень ϕ

$\phi(\lambda) = 0$

2. $\lambda \notin K$ т.е. III случай: $K = \mathbb{R}$

\exists комплексные корни характерист. многочлена.

$V \rightarrow V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$ базис $V \rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j + i\mathcal{A}\theta = \mathcal{A}e_j$

$e_j = e_j + i\theta$

$\Rightarrow \forall k \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$

\Rightarrow Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).

Получим, что минимальные многочлены $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и \mathcal{A} совпадают.

Т.е. ϕ мин. мн-н для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}}$ \Rightarrow Применим случай а) для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
 $\Rightarrow \lambda$ с.ч. λ корень ϕ

■

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни $\chi : 2$

Корни $\phi : 2$

\rightsquigarrow еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

Следствие 1.

1. $\psi \vdots \phi$
характер. (аннулятор) минимальный (аннулятор мин.)
2. $\deg \phi = n = \dim V \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$\chi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$
$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad \sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$$\dim P_{m-1} = m$$

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda}(t) &= \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)} \\ \phi(t) &= (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) \quad \phi_{\lambda}(\lambda) \neq 0 \\ &\text{вз. просты} \quad \phi_{\lambda}(\mu) = 0 \\ &\mu \neq \lambda \end{aligned}$$

Определение 1. $I_{\lambda} = \{p \in P_{m-1} \mid p \dot{\colon} \phi_{\lambda}\}$

Главный идеал, порожденный многочленом $\phi_{\lambda} =$

$$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} \mid p = f_{\lambda} \phi_{\lambda}\}$$

I_{λ} – линейное подпространство P_{m-1}

$$p_{1,2} \dot{\colon} \phi_{\lambda} \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \dot{\colon} \phi_{\lambda}$$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\lambda} \underbrace{f_{\lambda} \phi_{\lambda}}_{\in I_{\lambda}} = f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} + \sum_{\mu \neq \lambda} f_{\mu} \underbrace{\phi_{\mu}}_{\substack{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}} \\ &\quad \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \underbrace{f_{\lambda}}_{\substack{\text{вз. просты} \\ \deg f_{\lambda} = m(\lambda)-1}} \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_{\lambda} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_{\lambda} \equiv 0 \Rightarrow f_{\lambda} \phi_{\lambda} \equiv 0 \Rightarrow \text{Дизъюнктны}$$

2. $\dim P_{m-1} = m$

$$\begin{aligned} \parallel \\ \sum_{\lambda} \dim I_{\lambda} &= \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \end{aligned}$$

$$I_{\lambda} \subset P_{m-1}$$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

■

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1} \exists! p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$

$$p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$ – полиномиальное разложение единицы

Замечание.

$$1. \lambda \neq \mu$$

$$\begin{array}{ccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu \\ || & & || \\ f_\lambda \phi_\lambda & f_\mu \phi_\lambda & = \eta \cdot \phi \\ \uparrow & & \\ (t - \lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

$$2. \forall \lambda m(\lambda) = 1$$

Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

$$f_\lambda = \text{const} \quad (\text{def } f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$$

Теорема 2 (Лагранжа).

$$\forall \lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

Доказательство.

$$\begin{array}{ll} \text{корень } \phi \rightarrow \mu \neq \lambda & \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ & \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \\ p(t) \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\mu} & \boxed{f_{\mu}} \cdot \phi_{\mu}(t) \\ & \uparrow \\ & \text{const, т.к.} \end{array}$$

корни взаимно

просты

$$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu)$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (t - \lambda) = \sum_{\mu} \underbrace{\phi_{\mu}(t)}_{\phi_{\mu}(t)}$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = \phi_{\lambda}(\lambda) \Rightarrow f_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$0 \mu \neq \lambda$$

■

Следствие 1. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow \boxed{t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}}$$

Доказательство. По теореме: $1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_{\lambda}(t)$

$$\text{По теореме: } t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

■

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

ϕ минимальный многочлен, все корни $\in K$ (\Rightarrow все корни $\chi \in K$

\Rightarrow т.е. все с.ч. $\in K - I, II$ случаи)

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} := p_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \in End(V)$$

\mathcal{P}_{λ} – проекторы ? ↑ это уже есть

Достаточно проверить $\mathcal{P}_{\lambda} \cdot \mathcal{P}_{\mu} = \mathbb{0}$

$$\mathcal{P}_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = f_{\mu}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

перестановочны, т.к. многочлены от \mathcal{A}

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

↑
содержит

$$(p_{\lambda} \cdot p_{\mu} : \phi \text{ см. замеч. 1}) \quad \eta(\mathcal{A})(t - \mu)^{m(\mu)} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{\lambda}$ проекторы – **спектральные проекторы** \mathcal{A}

$Im \mathcal{P}_{\lambda}$ **спектральное подпространство**

$$7.5 \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_{\lambda}}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{array}$$

$$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow \text{не о.п.с.}$$

$$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$$

$$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$$

$$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$$

$$\text{Прав. дробь } \frac{1}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda}}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda}}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}} \quad \begin{array}{l} \text{Правильн.} \\ \text{Правильн. дробь} \end{array}$$

$$\deg f_{\lambda} < m(\lambda)$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{\left(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}\right)}_{p_{\lambda_1}} \underbrace{(t-3)}_{\phi_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}}_{p_{\lambda_2}} \underbrace{(t+1)^2}_{\phi_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}} \nearrow \quad 1 = \sum p_{\lambda} \quad \text{спектральное разложение о.п.с.}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1} \quad \text{Доказательство позже}$$

Определение 2. $K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$

называется **корневым подпространством** \mathcal{A}

Теорема 3.

1. K_{λ} инвариантно относительно \mathcal{A}
 2. $\text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}$
 3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен $\mathcal{A}|_{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$
- $\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}}$

Доказательство.

$$1. x \in K_{\lambda} \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_{\lambda}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{A}x = \mathcal{A} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{перестановочны} \\ \Rightarrow = 0}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$2. (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{P}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) =$$

$$= f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = 0$$

$$\forall x \in V$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_{\lambda} x}_{\in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}} = 0 \Rightarrow \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$$

$$\text{Обратно: } K_{\lambda} \stackrel{?}{\subseteq} \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$x \in K_{\lambda}$$

$$\mu \neq \lambda \quad \mathcal{P}_{\mu} x = f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A}) x = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{содержит} \\ (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$x = \mathcal{E}x = \sum_{\substack{\mu \\ 0 \\ \mu \neq \lambda}} \mathcal{P}_{\mu} x = \mathcal{P}_{\lambda} x \in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \Rightarrow K_{\lambda} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$$

3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$?

$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

Минимальный?

\square не минимальный

$\psi_1 = (t - \lambda)^{m(\lambda)-1} \quad \square$ это минимальный многочлен

$\phi_1 := (t - \lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$ аннулятор \mathcal{A} ?

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$$

$$= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A}) \cdot \phi(\mathcal{A}) = \emptyset$$

$$\forall x \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$$

$$= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda} = \emptyset$$

$$\underbrace{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x}_{\text{мин. многочлен по предположению}}$$

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \emptyset$$

$$\phi_1(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \phi_1(\mathcal{A}) \sum_{\mu} \mathcal{P}_\mu = \emptyset$$

$$\underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}$$

$\Rightarrow \phi_1$ аннулятор \mathcal{A} , но степени $< \phi$

$\deg \phi_1 = m - 1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

■

Следствие 1. A о.п.с. $\Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. (\Rightarrow) \mathcal{A} о.п.с.

$\phi(t) \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ покажем что это минимальный многочлен \mathcal{A}

$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$ – собственные подпространства \mathcal{A}

$\forall v \in V \exists! v = \sum_{\lambda} v_{\lambda}, v_{\lambda} \in V_{\lambda}$

$$\phi(\mathcal{A})v = \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \sum_{\mu} v_{\mu} =$$

$$= \sum_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) v_{\mu} = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})v_{\mu}}_{\emptyset} = \emptyset$$

$$v_{\mu} \in V_{\mu} = Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \nearrow$$

$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень \Rightarrow минимальный многочлен.

(\Leftarrow) $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$K_{\lambda} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^1 = V_{\lambda}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с.}$$

■

Примеры.

$$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A - \lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$$

$$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A - \lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2} \quad \text{— упр.}$$

7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. $\mathcal{B} \in End(V)$ называется **нильпотентным**, если $\phi(t) = t^\nu$

Минимальный многочлен \mathcal{B} , т.е. $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

ν – индекс нильпотентности (мин. степень $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$)

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

Идемпотентность

Степень минимального многочлена $\rightarrow \nu \leq \dim V = n$

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \leq \dim V_\lambda$

Доказательство. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_\lambda \in End(K_\lambda)$

$$m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$$

Замечание. $\sum_{\lambda} m(\lambda) \leq \sum_{\substack{\deg \chi \\ \deg \phi}} \dim K_\lambda = n$

$$\bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана).

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ можно представить в виде:

$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где \mathcal{D} о.п.с.

\mathcal{B} нильпотентный, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ перестановочны

Доказательство. ϕ – минимальный многочлен \mathcal{A}

$\mathcal{E} = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$ операторн. разложение единицы

$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$ \mathcal{D} о.п.с.?

$V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$

$\exists v_\lambda \neq 0 \in Im \mathcal{P}_\lambda$

$$0 \neq \lambda$$

||

$$\underline{\underline{Dv_\lambda}} = (\sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}) v_\lambda = \sum_{\mu} \mu (\mathcal{P}_{\mu} v_\lambda) = \lambda \mathcal{P}_\lambda v_\lambda = \underline{\underline{\lambda \cdot v_\lambda}}$$

$$\mathcal{P}_{\mu} \mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0}$$

$$\lambda \neq \mu$$

$\Rightarrow \lambda$ с.ч. \mathcal{D}, v_λ соотв. с.в. \mathcal{D}

\Rightarrow $Im \mathcal{P}_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathcal{D}}$ собств. подпр-во \mathcal{D} , отвечающ. с.ч. λ
 $V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$ дизъюнктны $\Rightarrow Im \mathcal{P}_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$

Объединение базисов $Im \mathcal{P}_\lambda$ – базис V

Каждый вектор из $Im \mathcal{P}_\lambda$ – это с.в. \mathcal{D}

\Rightarrow у V есть базис из с.в. $\Leftrightarrow \mathcal{D}$ о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \mathcal{A} \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\nu = \max_{\lambda} m(\lambda) \frac{\phi(t)}{\min_{\text{мин. мн-н}} \mathcal{A}} = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda})^{\nu} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \mathcal{P}_{\lambda} =$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = 0$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\lambda}^2 = \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \underbrace{f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_{\lambda}} =$$

все операторы перестановочны

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu - m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A}) = 0} = 0$$

\mathcal{B} нильпотент

$$\mathcal{B} = \sum_{\lambda} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}}_{\text{перестановочны}}$$

$$D = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$

■

Замечание.

$$1. \mathcal{B} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}$$

$$\mathcal{B}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{Im \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}}$$

2. $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ все три оператора взаимно-перестановочны

$$\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$$B^2 \stackrel{?}{=} \mathbb{0} \quad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Разложение Жордана}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Диагонализ.

Нильпотент.

Теорема 2 (Единственность разложения Жордана).

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)



Рис. 1

Доказательство. $\square \mathcal{A} = \frac{\mathcal{D}'}{\text{о.п.с.}} + \frac{\mathcal{C}}{\text{Нильпотент}} \quad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

T.K. \mathcal{D}' o.p.c., to $\mathcal{D}' = \sum_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

M – множество с.ч. \mathcal{D}'

Q_μ спектральные проекторы

$$Q_\mu : V \rightarrow V_\mu^\nu$$

$$\sum_{\mu} Q_{\mu} = \mathcal{E}$$

Достаточно доказать: $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

1. Множество M совпадает с множеством корней ϕ – минимальн. мн-н A

$$\{\mu\} = \{\lambda\}$$

2. $ImQ_\mu = K_\mu \leftarrow$ корневое подпространство \mathcal{A} , отвч. с.ч. μ ($Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$)

$$1. \quad (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})Q_\mu = (\sum_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

$$Q_\nu Q_\mu = 0 \quad \quad \nu \neq \mu \quad \quad Q_\mu^2 = Q$$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

↑

Верно, если $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

\Rightarrow докажем: $CQ_{\mu} = Q_{\mu}C$

$$\square \lambda \neq \mu \ (\lambda - \mu) Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = (\lambda Q_\lambda) \mathcal{C} Q_\mu - Q_\lambda \mathcal{C} (\mu Q_\mu) =$$

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \sum_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu \mathcal{D}'$$

$$Q_\lambda(\mathcal{D}'\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{D}')Q_\mu = \mathbb{0}$$

$$\lambda \neq \mu \quad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \emptyset = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$$

$$\underbrace{\sum_{\lambda} Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu}_{\mathcal{E}} = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \frac{\boxed{\sum_{\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}{\boxed{\mathcal{E}}}$$

$$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

$$k(\mu) = \min K, \text{ такой что } \mathcal{C}^k Q_\mu = \emptyset$$

Такое $K(\mu)$ обязательно найдется, т.к. \mathcal{C} – нильпотент.

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

$(t - \mu)^{k(\mu)}$ – минимальный аннулятор элементов $\text{im} Q_\mu$

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)}$$

ϕ минимальный многочлен $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулирует любые элементы V ,

в частности элементы $\text{Im} Q_\mu$

Т.е. $\phi(t)$ аннулятор элементов $\text{Im} Q_\mu \Rightarrow \phi(t) \cdot (t - \mu)^{k(\mu)} \leftarrow$ минимальный аннулятор для $\text{Im} Q_\mu$

\Rightarrow верно $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t - \mu)^{k(\mu)}$$

$$\Rightarrow \phi \cdot \psi$$

Покажем, что ψ аннулятор \mathcal{A}

$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)}} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)} \underbrace{(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}_{\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow \psi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \cdot \phi$ минимальный аннулятор

$$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda - \text{корни } \phi\}$$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$

$$\mu = \lambda$$

$$2. \quad (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

||

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

μ корень ϕ

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = \text{Im} \mathcal{P}_\mu$$

$$\left. \begin{array}{l} \bigoplus_{\mu} K_\mu = V \\ \bigoplus_{\mu} \text{Im} Q_\mu = V \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im} Q_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

Теорема 3. $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$$

Доказательство. $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$$\mathcal{B}^\nu = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \mu - \text{не корень} & \quad (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\parallel \emptyset}) = \\ & = \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E} - t\mathcal{B}) \cdot \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1}) \end{aligned}$$

μ – не корень

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu &= \det \underbrace{[\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}]}_0 \underbrace{[-\mathcal{B}]}_{\mathcal{D}} \cdot \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} = \\ &= \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}} \end{aligned}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

Следствие 1. Если $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана

$$To \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$$

Доказательство. Очевидно, $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$

Следствие 2. $\boxed{\dim K_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \underset{\text{o.p.c.}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = \dim \mathcal{P}_\lambda = \dim K_\lambda$
 $\forall \lambda$ корня χ с.ч. (I, II)

7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda \text{ корневые} \quad \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$\chi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \quad \lambda \in K \text{ все корни с.ч.}$$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \quad \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$$

\bigcap

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$\forall \lambda K_\lambda \rightsquigarrow$ строим базис \rightsquigarrow матрица оператора будет иметь
 \bigcup_λ Жорданов базис блочно-диагональную структуру
– Жорданова форма матрицы

$$\square K_\lambda = K \quad \gamma(\lambda) = \gamma$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha \quad m(\lambda) = m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \quad \dim = \gamma$$

$$K_1 = V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$$

\cap

$$K_2 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^2$$

\vdots

\cap

$$K_m = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad \dim = \alpha$$

Пример.

$$\alpha = \dim K_\lambda = \dim K_5 = 24$$

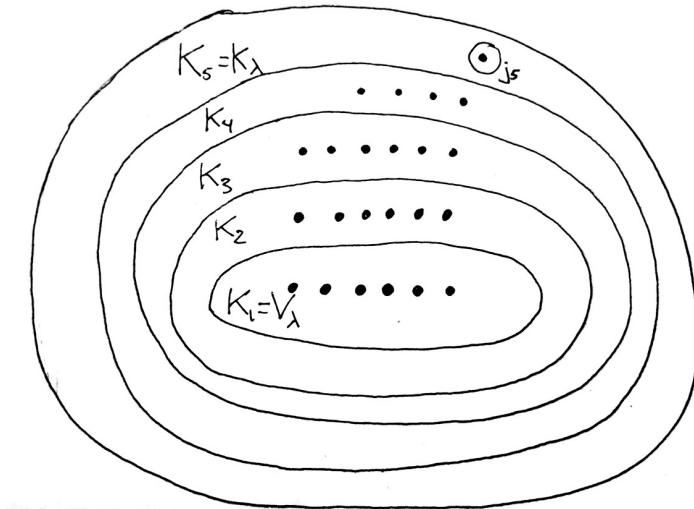
$$m = 5$$

$$\gamma = 7$$

j ₅	$\in K_5 \setminus K_4$
j ₄	$= \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_5 \in K_4$
j ₃	$= \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_4 \in K_3$
j ₂	$= \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_3 \in K_2$
j ₁	$= \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda$

Циклический базис

$$j_1, j_2, j_3, j_4 - \text{присоединенные вектора.}$$



$$\mathcal{A}|_L$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

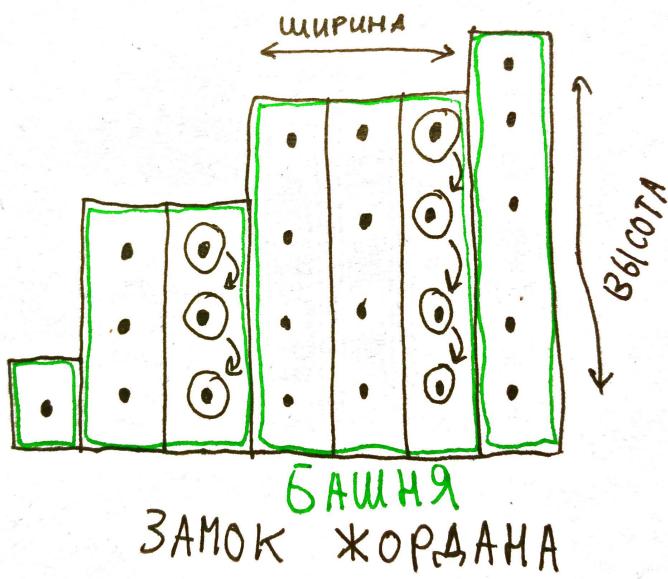
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 \quad \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 \quad \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 \quad \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 \quad \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5$$

$$\text{Матрица } \mathcal{A}|_L \text{ в базисе } j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Клетка Жордана 5×5
(блок нижнего уровня)

$$(j_5 \ j_4 \ j_3 \ j_2 \ j_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



Башня – объединение циклических базисов одной длины.

Высота башни – количество векторов в базисе.

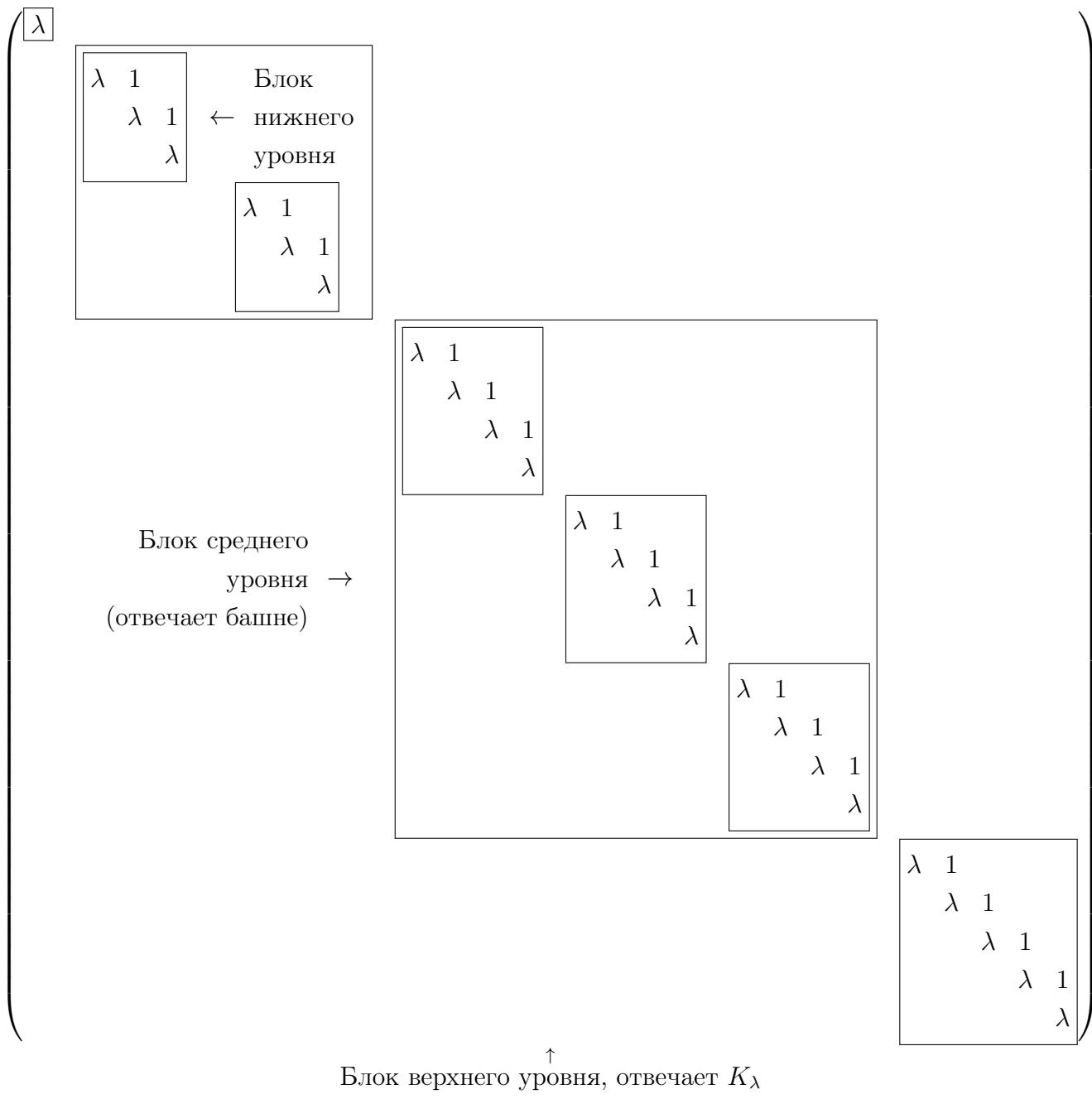
Ширина башни – число циклических базисов одной размерности

Основания каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов = γ

||

Число Жордановых клеток



γ = Число блоков нижнего уровня

α = Число λ на диагонали

\mathcal{A} о.п.с. $\forall \alpha = \gamma$

V_λ $\boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$

"Деревня Жордана"

Примеры. $\lambda \ \alpha(\lambda) = 4$

$$1. \ \gamma(\lambda) = 3 \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$2. \gamma(\lambda) = 2 \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ или } ? \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$3. \gamma(\lambda) = 1 \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} \quad T = (\dots j_1 \dots j_5 \dots)$$

Объединение цикл. базисов для всех λ

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \mathcal{J} \\ & & \text{В Жорд. базисе} \\ \uparrow & & \\ A & & \end{array}$$

В исходном

$$\boxed{\mathcal{J} = T^{-1}AT}$$

$$\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}} \rightarrow T\mathcal{J} = AT$$

1, 3

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы $T \rightsquigarrow T$

\rightsquigarrow построить Жорданов базис.

2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \underset{\dim K = \alpha}{K}$
- $K_r = \text{Ker}(A - \lambda E)^2$
- $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$$\forall \lambda \quad K = K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$$m(\lambda) = m$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha$$

$$K_r = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^r \quad r = 1 \dots m$$

$$V_\lambda = K_1$$

$$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$$

Все включения будут строгие:

$$\square K_{r+1} = K_r \quad \text{Ker} \mathcal{B}^{r+1} = \text{Ker} \mathcal{B}^r$$

По Теореме о rg и def: $\dim K = \text{rg} \mathcal{B}^{r+1} + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^{r+1}} = \text{rg} \mathcal{B}^r + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^r} \quad (\text{def} \mathcal{B}^{r+1} = \text{def} \mathcal{B}^r)$

II

1. Найдем $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = \text{Ker}(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$
 $\Rightarrow \dim K_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

$$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} = Im\mathcal{B}^r \rightarrow 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие}$$

$$\parallel$$

$$Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) = Im\mathcal{B}^r \xrightarrow{\text{либо}} \mathcal{B}^r = \emptyset - \text{противоречие мин. } m$$

$$Im\mathcal{B}|_K =: BK$$

$$Z_0 = BK$$

$$Z_r = BK + K_r$$

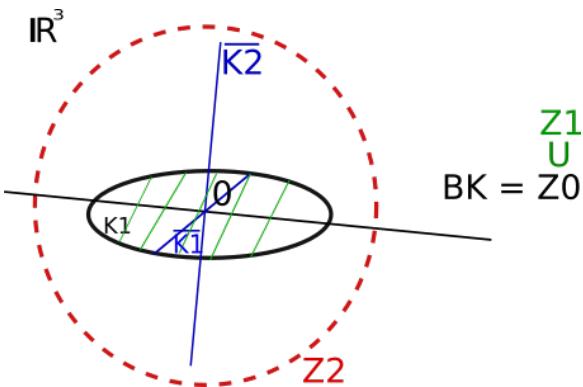
$$r = 1, \dots, m \quad (K_m = K) \quad B : K \rightarrow K$$

$$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_m = K$$

$$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$$

$$\overline{K_r} \subset K_r$$

$$K = \underbrace{BK \oplus \overline{K_1}}_{Z_1} \oplus \underbrace{\overline{K_2}}_{Z_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m}$$



$$\underset{dim 2}{\parallel} \quad \underset{dim 3}{\parallel}$$

$$\underset{def\mathcal{B}}{\parallel} + \underset{dim Im\mathcal{B}}{\parallel} = 3$$

$$Z_1 = BK + K_1 \supseteq Z_0$$

∩

$$Z_2 = BK + K_2$$

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

Теорема 1. $0 \leq r \leq m - 1$

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

Доказательство.

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

$$\forall x \in K \quad x = \underset{\in \overline{K_1}}{x_1} + \underset{\in \overline{K_2}}{x_2} + \dots + \underset{\in \overline{K_m}}{x_m} + \underset{\in BK}{Bx^*}$$

$$1 \leq r \leq m - 1$$

$$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \dots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* [=]$$

$$B^r x_j = B^{r-j} B^j x_j = \underset{\emptyset}{\parallel}$$

$$1 \leq j \leq r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = \text{Ker } B^j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$$\boxed{B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^*}$$

Дизъюнктность?

$$* B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = 0$$

$$B^r (\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^*}_{y}) = 0$$

$$y \in \text{Ker } B^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r \oplus BK$$

$$\Rightarrow y = x_1 + x_2 + \dots + x_r + \underbrace{B}_{x_i \in \overline{K}_i} x^{**}$$

Однозначно представим

$$\begin{aligned} & \| \\ x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^* & \Rightarrow \boxed{x_i = 0} * \\ x_{r+i} \in \overline{K}_{r+i} & \quad \forall i = 1 \dots m \end{aligned}$$

↓ подставим

$$0 + 0 + \dots + 0 + B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow \text{дизъюнктн.}$$

■

Следствие 1.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus$$

$$\underbrace{\oplus B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^{m-2} \overline{K}_{m-1}}_{\text{---}} \oplus B^{m-2} \overline{K}_m \oplus B^{m-1} \overline{K}_m$$

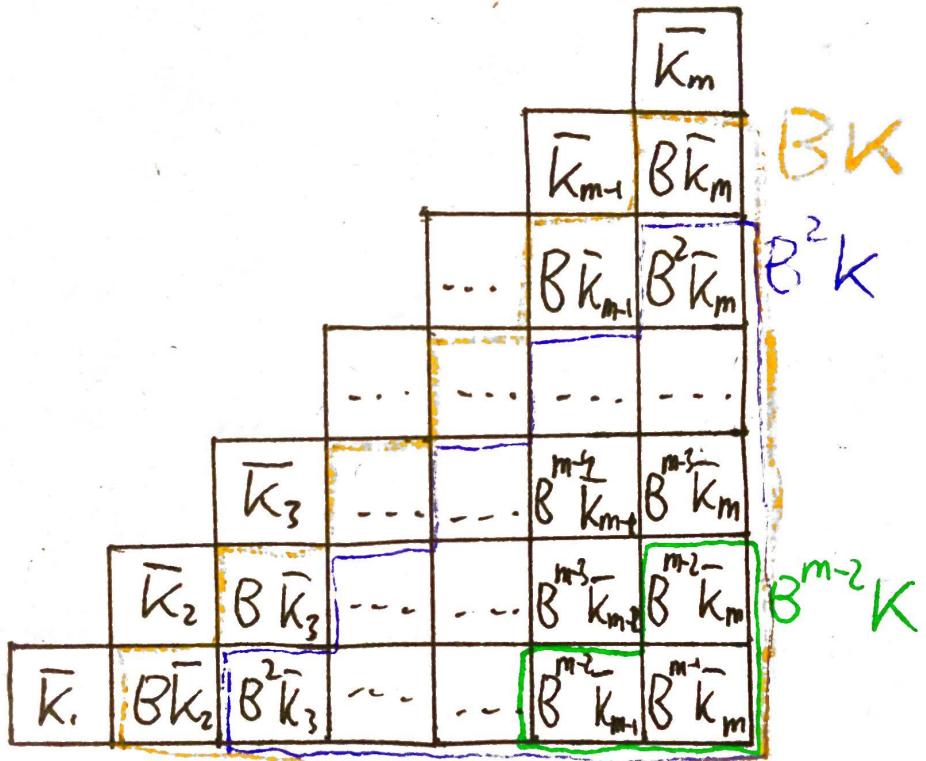
Доказательство.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus BK$$

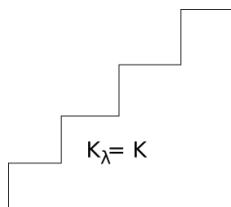
$$BK = \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^2 K$$

$$\underbrace{B^2 K = B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^2 \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^3 K$$

■



\overline{K}_j – Опорные подпространства



$$1 \leq r \leq m$$

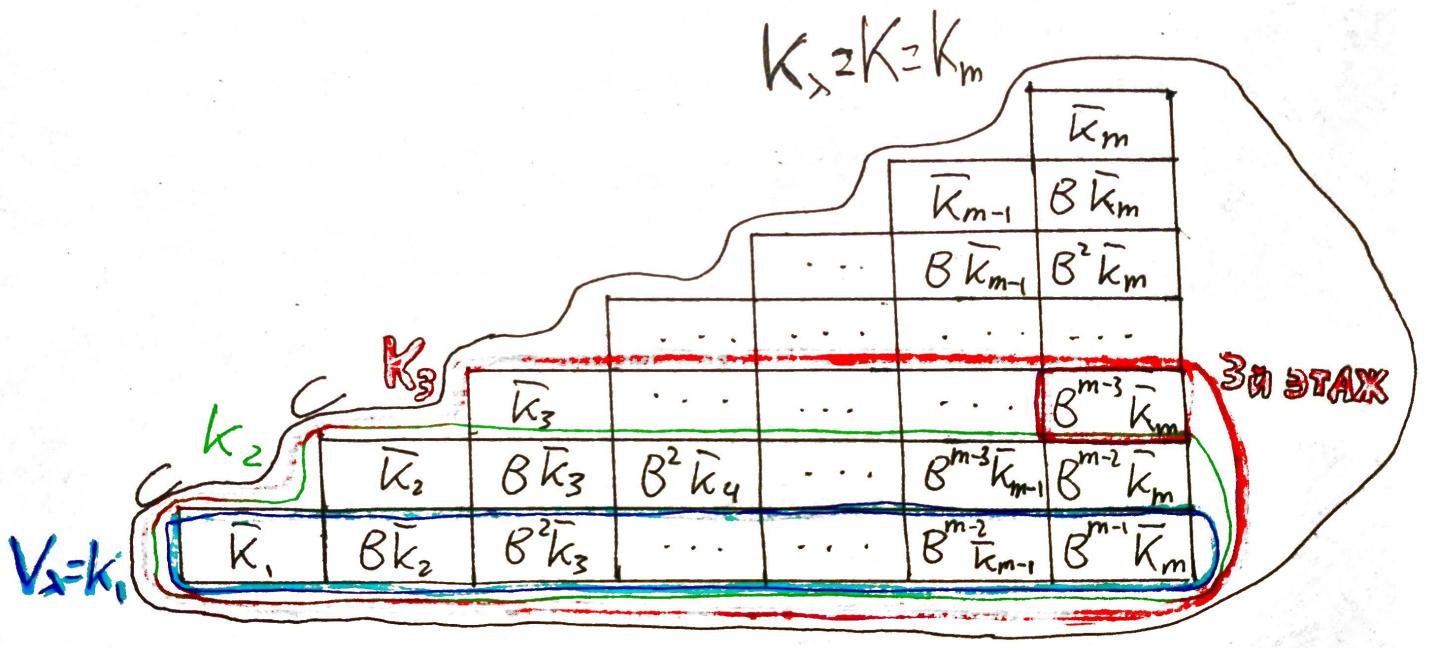
$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset \rightarrow \tau_r = \overline{K}_r \oplus B\overline{K}_r \oplus B^2\overline{K}_r \oplus \dots \oplus B^{r-1}\overline{K}_r$$

Башня высоты r . "Башня растет вниз"

"Основание" башни \equiv опорное подпространство \overline{K}_r

"Крыша" башни $\equiv B^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$

$$x \in B^{r-1}\overline{K}_r \quad \begin{array}{l} x = B^{r-1}y \\ y \in \overline{K}_r \subseteq K_r \end{array} \quad \frac{Bx = B^r y = 0}{x \in \text{Ker } B = V_\lambda}$$



Если $\overline{K}_r = \{\emptyset\}$, то башня высоты r отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$$1 \leq l \leq m$$

$$\overline{K}_l, B\overline{K}_{l+1}, B^2\overline{K}_{l+2}, \dots, B^{m-1}\overline{K}_m \subset K_l = \text{Ker } B^l$$

— l -ые этажи соотв. башен

Покажем: $B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\overline{K}_{l+j}) = (B^{l+j})_{\subset K_{l+j} = \text{Ker } B^{l+j}} = \emptyset \Rightarrow B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^m \tau_r$$

Теорема 2 (О размерности башни).

$\forall \tau_r$ любой этаж башни имеет одну и ту же размерность $d_r = \dim \overline{K}_r$ = ширина башни.

r высота \downarrow	\overline{K}_r
	$B\overline{K}_r$
	$B^2\overline{K}_r$
	\dots
	$B^{r-1}\overline{K}_r$
	τ_r

$d_r = \dim \overline{K}_r$ = ширина башни

Доказательство.

$$B^j|_{\overline{K}_r} : \overline{K}_r \rightarrow B^j\overline{K}_r$$

$B^j_{\overline{K}_r}$ изоморфизм "?"

$\text{Ker } B^j|_{\overline{K}_r} = \{\emptyset\}$ тривиально "?"

$$\Rightarrow \text{Изоморфизм} \Rightarrow \dim(\overline{K_r}) = \dim(B^j \overline{K_r}) = d_r$$

1

Следствие 1. $\sum_{r=1}^m d_r = \dim V_\lambda = \gamma(\lambda)$

$$\sum_{r=1}^m \underbrace{r \cdot d_r}_{\dim \tau_r} = \dim K_\lambda = \dim K = \alpha(\lambda)$$

Следствие 2 (Теорема Фробениуса).

$$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$$

$$(d_m = rgB^{r-1})$$

Доказательство.

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

$$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

$$d_2 + \dots + d_m = \rho_1 - \rho_2$$

—

$$d_3 + \dots + d_m = \rho_2 - \rho_3$$

—

$$d_{m-2} + d_{m-1} + d_m \equiv \rho_{m-3} - \rho_{m-2}$$

—

$$d_{m-1} + d_m \equiv \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

—

$$d_m \equiv \rho_{m-1}$$

1

$$\theta_m \equiv 0$$

$$d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$$

1

g_1	g_2	\dots	g_d
Bg_1	Bg_2	\dots	Bg_d
$B^2 g_1$	$B^2 g_2$	\dots	$B^2 g_d$
.	.	-	-
$B^{t-1} g_1$	$B^{t-1} g_2$	\dots	$B^{t-1} g_d$

$$F_m = \text{span}(g_2, \dots, g_d)$$

34

B^{\dagger} | E_n $\psi_{n,0}$
 \rightarrow B^{\dagger} \rightarrow $\psi_{n,0}$

$$B^{z-1} \bar{k}_c$$

$$\text{span}(g_1, \dots, g_d, Bg_1, Bg_d, B^2g_1, B^2g_d, \dots, B^{r-1}g_1, B^{r-1}g_d, \dots, B^{r-1}g_1, B^{r-1}g_d)$$

$\equiv \gamma_n$

$$= 1, \dots, d \quad f_i = Bg_i, Bg_{i+1}, Bg_i$$

Нано-сд и физическим
Барьером | порогом нанесения
вектором \vec{g}_i

$S_i = \text{span}(g_i, Bg_i, \dots, B^{r-1}g_i)$ циклическое подпр-во

$$T_r = \bigoplus_{i=1}^d S_i$$

$$A \Big|_{S_i} \leftrightarrow \begin{matrix} \text{н-на б} \\ \text{связи} \end{matrix} g_i, Bg_i, \dots, B^{r-1}g_i ?$$

$$A \Big|_{S_i} = (B + \lambda C) \Big|_{S_i}$$

чирнегорин
связи:
 $B^{r-1}g_i, B^{r-2}g_i, \dots, Bg_i, g_i$

$$Ag_i = Bg_i + \lambda g_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ABg_i = B^2g_i + \lambda Bg_i$$

$$AB^{r-2}g_i = B^{r-1}g_i + \lambda B^{r-2}g_i$$

$$AB^{r-1}g_i = B^rg_i + \lambda B^{r-1}g_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\| \quad g_i \in K_r \subset \text{Ker } B^r$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

диаг. единица γ_{xy} (блок)
номер строки

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n} = \lambda E_n + I_n$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_n = \bigoplus_{i=1}^d \zeta_i$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} J_n(\lambda) \\ J_{n-1}(\lambda) \\ \vdots \\ J_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

d krok
(следует
последовательно)

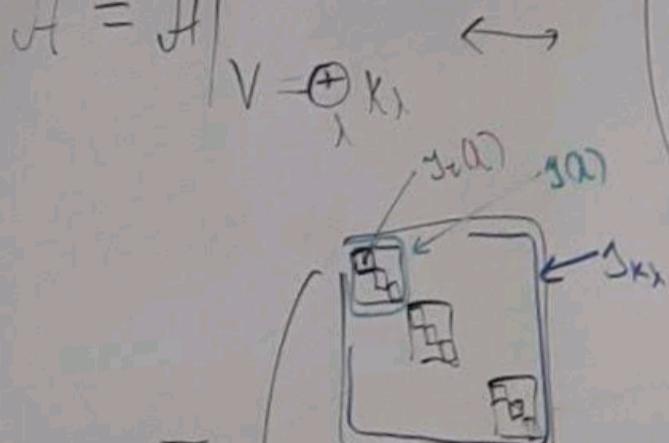
$$k_2 = k = \bigoplus_{i=1}^m \tau_i$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} J_n(\lambda) & 0 \\ J_{n-1}(\lambda) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_1(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

δια
діагональ
у рядах
(ком-м
диагональ
векторів)

δια
діагональ
у рядах
(ком-м
кошиковий
направл.)

$$A = A / V = \oplus_{\lambda} K_{\lambda}$$



$$\begin{matrix} J_{k_1} \\ J_{k_2} \end{matrix}$$

$$J_{k_3}$$

$$= y$$

нормирована
оромма
матрица

выделение всех чистых базисов для всех
базисов для всех корневых подпр-й = нормированный
базис

$$j = (j_1, \dots, j_k, \dots, j_n) \quad T = T_{e+j}$$

$$Y = T^{-1} A T$$

если базис V

$$A \hookrightarrow A$$

в базисе e .

$$T Y = A T$$

\Rightarrow можно найти T , решив матрич. систему
уравнений

3-й алгоритм построения
диаг. и бл. для матрицы.

$$\lambda! \quad K_\lambda = K = \underbrace{K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m}_{E} \oplus BK$$

1. найдем $K = K_\lambda$

$$2. \text{ найдем } BK = \text{Im } B / \ker B \quad B = A - \lambda E$$

3. дополним BK до K

$$\text{т.е. найдем базисные векторы } \tilde{K} = \overline{K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m} = \text{Span}(v_1, \dots, v_t)$$

4. Ъзгем орнандың күкнөрү. Гаузас!

$$v_i, B v_i, \dots, B^0 v_i, B^{n+1} v_i$$

иң жаңы

жаңы

неке же пайдалану \rightarrow

Жүйе:

күнкә \rightarrow де. оп

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (t-5)(t-4)^3$$

$$\lambda_1 = 5 \quad d(\lambda_1) = 1 \Rightarrow p(\lambda_1) = 1$$

$$\lambda_2 = 4 \quad d(\lambda_2) = 3$$

$$p(\lambda_2) = ?$$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_2 E) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3$$

$$p(\lambda_2) = 1 \rightarrow 1 \text{ күнкә}$$

(1 ишкән, 8 жаңы)

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$K = K_3 = \ker(A - \lambda_2 E)^3 =$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} v = k_1$$

$$BK = \text{span}(Bv_1, Bv_2, Bv_3) =$$

$$= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$K = BK \oplus \overline{k}_1 \oplus \overline{k}_2 \oplus \overline{k}_3$$

$$= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3-20 \\ 4-21 \\ 3-10 \\ 1-11 \end{pmatrix} \right) = 3$$

$$K = \text{span}(\mathcal{V}_3) \rightarrow 1 \text{ ungen. Space}$$

*argue
now*

$$\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^2\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$j = (\mathcal{V}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 1, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме

7.11 опр. я от м-цил, привод. к ж.ф.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad |x| < R$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$$

$$A = T J T^{-1}$$

$$f(J_r(\lambda)) = ?$$

$$J_r(\lambda) = \lambda E_r + I_r$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda_r) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{r \times r}$$

$$I_r = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{r \times r}$$

$$f(\mathcal{J}_\varepsilon(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathcal{J}_\varepsilon^m(\lambda)$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2!}\lambda^{m-2} & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3} & \dots \\ 0 & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \ddots \\ & & & & \lambda^m & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \boxed{I^4 = 0} \quad \boxed{I^5 = 0}$$

$m = \frac{m(m-1)}{2!}$

7.11 CP-я ом м-уза, нульог. к м.з.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad |x| < R$$

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m x^{m-1}$$

$$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^{m-2}$$

$$f(t\ln(x)) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m (\ln x)^m \right) t^m = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m (\ln x)^{m-1} t^m = \frac{t}{1!} \sum_{m=1}^{\infty} c_m m(m-1) (\ln x)^{m-2} t^{m-1} = \frac{t^2}{2!} \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2) (\ln x)^{m-3} t^{m-2} = \frac{t^3}{3!} \sum_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2)(m-3) (\ln x)^{m-4} t^{m-3}$$

$$f(Ax) = T f(\lambda x) T^{-1}$$

$$f(t\ln(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m(\lambda) t^m$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

$$f(\lambda x) + \frac{f'(\lambda x)}{1!} + \frac{f''(\lambda x)}{2!} + \frac{f'''(\lambda x)}{3!}$$

$$f^{(k)}(xt) = \left(f^{(k)}(x) \right) \Big|_{x=xt}$$

$$f(x)$$

Humped:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$A = T \tilde{e}^{-T - 1}$$

$$f(A) = T f(T) T^{-1}$$

8 Тензоры

8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования.

Часть VIII Тензоры

8.1. Линейные формы (линейные функционалы).
Сопряженное пр-во. Ковариантное и
контравариантное преобразования.

V над полем $K (R, C)$

def: $f: V \rightarrow K$

отображение, наз. ся линейной формой (линей. ф-м), если

$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in V$ $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$

однородность = НН-НО

Примеры:

$$1. V = \{ g \mid g \in C(\mathbb{R}) \}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{\delta(g) = g(0)}$$

дельта-ср-я Дурака

мин. фрмца.

$$2. V_3 \quad \bar{a} - \text{сопоставл.}$$

$$\forall v \in V_3 \quad f: V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(v) = (\hat{a}, \bar{v})$$

скел. np. e. мин. фрмца

3. P_n ~~нек-хм~~ симметрическим \leq_n

$m \in \mathbb{N}$

$t_0 \in \mathbb{R}$

такое

$f_m: P_n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall p \in P_n \quad f_m(p) = \frac{p^{(m)}(t_0)}{m!}$$

нек-форма.

4. $A_{n \times n} \quad M_{n \times n}$ np-бо $n \times n$

$f: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A \quad \text{нек. форма.}$$

$$f(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \text{tr } A + \text{tr } B = f(A) + f(B)$$

V координаты.

$e = (e_1, \dots, e_n)$ базис V

$$\forall x \in V : x = x^i e_i \left(= \sum_{i=1}^n x^i e_i \right)$$

np-коэффициенты

$$\longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{коэффициенты} \\ \text{относительно } e \end{array}$$

$f: V \rightarrow \mathbb{R}$

нек. форма

$$\text{def: } \bigcirc: V \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall v \in V \quad \bigcirc(v) = 0$$

$f_1 + f_2$
 $x f_1$

$$-f: V \rightarrow \mathbb{R}$$

f противоположная нек. форма

$$\forall v \in V \quad -f(v) = -(f(v))$$

$$V^* = \left\{ f : V \rightarrow K \mid \text{линейные} \right\}$$

беск-кои $1^\circ - 8^\circ$ аксиомы. \equiv лин.пр-бо

$$\underline{V^* \text{ компактное (дualное)}}$$

пр-бо KV

$$f \in V^* \quad \forall x \in V$$

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K} = x^i a_i$$

$$\longleftrightarrow (a_1 \dots a_n) = a \in K, \text{ пр-бо } n\text{-мерных строк}$$

\leftrightarrow
 отображение в вом
 нум-ру

a_i кор-ть f отн-но базиса e

$$\begin{aligned} f &\leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \\ g &\leftrightarrow b = (b_1 \dots b_n) \\ f+g &\rightarrow a+b \\ \cdot & \end{aligned}$$

$$V^* \cong K^n \quad (\text{изоморфизм не единич, т.е.})$$

зависит от

базиса)

$$\Rightarrow \dim V^* = n = \dim V$$

Напоминание: $V^* = \{ f: V \rightarrow K \}$ сопряженное (дualное)пр-бо K V

$V^* \cong K^n$ - пр-бо n -мерных строк. (не естественный)

$$\text{т.е. в базис } V \quad \forall x \in V \quad x = x^i e_i \quad f(x) = x^i f(e_i) = x^i a_i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \in K^n$$

$$\forall f \in V^* \quad \downarrow \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n \text{ пр-бо } n\text{-мерных строк базиса.}$$

$$\dim V^* = n = \dim V$$

Определение: $w^i : V \rightarrow K$ $\forall x \in V \quad w^i(x) = x^i$ эти коор-ты x относительно базиса $e_1 \dots e_n$

однозначно, w^i уни-отобр. $\Rightarrow w^i \in V^*$

$$\text{однозначно, } \forall i=1 \dots n \quad w^i(e_j) = \delta_{ij}^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

символ Кронекера

Теорема 1: w^1, \dots, w^n базис V^*

Док-бо! т.к. $\dim V^* = n$, то достаточно проверить лин. незав. w^1, \dots, w^n .

$$\exists d_i w^i = 0, d_i \in K$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad d_i w^i(x) = 0 \Rightarrow \text{в частности, где } \forall j=1 \dots n \quad \underbrace{d_i w^i(e_j)}_{e_j} = 0 \Leftrightarrow d_j = 0 \quad \forall j=1 \dots n$$

$\Leftrightarrow w^1, \dots, w^n$ лин. незав. \Rightarrow базис V^*

Следствие: $\forall f \in V^*$ коор-ты $a_i = f(e_i)$ одна-ая коор-ны формы f в пр-ве V^* относительно базиса w^1, \dots, w^n

т.о. $V^* \cong K^n$ - коорд. изоморфизм. относительно базиса w^1, \dots, w^n

Док-бо! $\forall f \in V^* \quad \forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i$, где $a_i = f(e_i)$

$$\text{т.к. } x^i = w^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i w^i(x) \quad \forall x \in V \Rightarrow f = a_i w^i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n)$$

коорд-ны f
относительно базиса w^1, \dots, w^n

Def: коорд. ор-ши $w^1 \dots w^n$, порожденные базисом $e_1 \dots e_n$ пр-ва V
т.е. сопряженный (дualный) базис пр-ва V^* к базису $e_1 \dots e_n$ пр-ва V

[?] Важней ли базис V^* будет сопряженным к некоторому базису пр-ва V ?

Теорема 2! $\exists w''_1, w''_2, \dots, w''_n$ базис $V^* \Rightarrow \exists$ базис e'_1, e'_2, \dots, e'_n пр-ва V , м.р.
базис w' будет сопряженным к базису e'

Док-бо: $\exists e_1, \dots, e_n$ базис V , а w^1, \dots, w^n базис V^* , сопряжен. к e .

т.к. w и w' базисы пр-ва V^* , то $(w''_1 \dots w''_n) = (w^1 \dots w^n) T_{w \rightarrow w'}$

т.к. в коорд. представлении в-та V^* соотв-т строки, T и-за перехода.

то наилегчее равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} w''_1 \\ w''_2 \\ \vdots \\ w''_n \end{pmatrix} = T_{w \rightarrow w'}^\top \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

обозначим $S := T_{w \rightarrow w'}^\top$

и-за S , очевидно, невырожденная $\Rightarrow \exists S^{-1} = T$

Определение "новый" базис в пр-ве V следующим равенством:

$$(e'_1 \dots e'_n) = (e_1 \dots e_n) T, \text{ т.о. } T = T_{e \rightarrow e'}$$

т.каким, что w' будет сопряженным к построенному e' .

$$S = \left(S_{ij}^k \right)_{n \times n} \text{ номер стр } \begin{array}{l} \\ \end{array}, \text{ аналогично } T = \left(t_{ij}^k \right)_{n \times n} \Rightarrow w'^i = S_k^i w^k$$

$$\text{номер стобца.}$$

$$\forall x \in V : w'^i(x) = S_k^i w^k(x) = \underbrace{S_k^i x^k}_{(Sx)_i} = x'^i - \text{иная координа в базисе } e' \Rightarrow w'^i - \text{координаты в } e' \text{ ср-е отн-е базиса } e',$$

$$\text{т.к. } T = T_{e \rightarrow e'}, \text{ т.о. } x' = T^{-1}x = Sx \quad \text{т.е. } w' \text{ сопр-е базис к } e'$$

Следствие: e, e' базисы V , $T = T_{e \rightarrow e'}$, $S = T^{-1}$

 w, w' сопр-е к e и e' , соответсвно, базисы V^*
 $\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \forall x \in V \quad x' = Sx = T^{-1}x \\ \forall f \in V^* \quad a' = af \end{array}}, \text{ причем } T_{w \rightarrow w'} = S^T = (T^{-1})^T$

док-во: $T_{w \rightarrow w'} = S$, очевидно, из док-ва T -ни.

такое, очевидно, что $x' = T^{-1}x$.

остается показать, что $\forall f \in V^* \quad a' = af$

$$\text{т.к. } (w^1 \dots w^n) = (w^1 \dots w^n) T_{w \rightarrow w'}, \text{ то } (a')^T = T_{w \rightarrow w'} a^T \Rightarrow a' = a \underbrace{(T_{w \rightarrow w'})^T}_{S} = a^T$$

Замечание: очевидно, значение лин-формы f на элементе x не зависит от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (t_{ik}^i x^k) \cdot (a_m S_i^m) = \underbrace{(S_i^m t_{ik}^i)}_{(ST)_k^m} x^k a_m = x^k a'_k \quad \begin{array}{l} \text{- инвариантность} \\ \text{формы зависят лин-формах} \\ \text{отн-е выбора базиса} \end{array}$$

$$x = T x' \quad a = a' S'$$

def: Векторы, координа которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с формулой замены e на e' , т.е. с матрицей $T = T_{e \rightarrow e'}$, наз-е ковариантными векторами или ковекторами \equiv элементы пр-ва V^*

Векторы, координа которых, при замене базиса e на e' , меняются по закону, противоположному ср-е замены e на e' , т.е. с матрицей $T^{-1} = S$, наз-е ко-ковариантными векторами или просто векторами \equiv элементы пр-ва V

Помимо, лин-формы, такие называются просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во $(V^*)^* = V^{**}$ - доказательство сопр-е к V

очевидно, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ (все тире пр-ва изоморфные)

Построение изоморфизма между V и V^{**} следующим образом:

$$\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**} : \quad \forall f \in V^* \quad \boxed{"x"(f) = f(x)}$$

проверка лин-ти "x": $\forall \lambda \in K \quad \forall f_1, f_2 \in V^*$

$$"x"(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = "x"(f_1) + \lambda "x"(f_2)$$

\Rightarrow лин-то $\Rightarrow "x" \in (V^*)^*$

Теорема 3: соответствие $x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$

авт-е вз-одн. и лин-и, т.е. изоморфизм. ($V \cong V^{**}$)

док-во: итак, $\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$

показать, что это отображение обладает св-вом лин-и: $\forall \lambda \in K, \forall x_1, x_2 \in V$.

$$(\lambda x_1 + x_2) \rightarrow " \lambda x_1 + x_2" \in V^{**} \quad \forall f \in V^* \quad " \lambda x_1 + x_2" (f) = f(\lambda x_1 + x_2) =$$

$$= \lambda f(x_1) + f(x_2) = "\lambda x_1" (f) + "x_2" (f) \Rightarrow "\lambda x_1 + x_2" =$$

$$= \lambda "x_1" + "x_2",$$

+ е. лин-ко.

т.о. мы получаем вложение пр-ва V в пр-во V^{**} ,

единственное св-во лин-и.

В частности, $\exists e_1, \dots, e_n$ базис $V \rightarrow "e_1", \dots, "e_n" \in V^{**}$

$\Rightarrow \forall j=1 \dots n \quad \forall f \in V^* \quad "e_j" (f) = f(e_j) = a_j$ - координа f в пр-ве V^* относительно базиса w^j пр-ва V^*

$\Rightarrow "e_j"$ координа. ф-я и сопр-е. базис к базису $w^j \Rightarrow$ по т-му $"e_1", \dots, "e_n"$ базис V^{**}

\Rightarrow т.о. такое вложение пр-ва на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис.

Занесена!

- Замечания! 1. изоморфизм, построенный в т.ч. с помощью сопряженных изоморфизмов пр-в V и V^{**} , т.к. его построение не зависит от выбора базиса.

2. Используя отождествление элементов x пр-ва V и " x " пр-ва V^{**} , назовем пишут $x(f) := f(x)$ без кавыек.

$\forall x \in V \quad \forall f \in V^* : \quad f(x) = x^i f(e_i) = w^i(x) a_i \quad f(e_i) = e_i(f) = a_i$

$x(f) = a_i x(w^i) = e_i(f) x^i \quad x(w^i) = w^i(x) = x^i$

т.е. т-маз показывает, что на самом деле пр-ва V и V^* "равноправные" V^* сопряж. к V , а V сопряж. к V^* . Базис w сопряжен к e , также как и базис e сопряжен к базису w .

3. $\forall x \in V \quad \forall f \in V^* \quad f(x) = x^i a_i = a_i x \xrightarrow{\text{"столбцы"}}$ т.к. $w^i(e_j) = \delta^i_j$

$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad a = (a_1 \dots a_n) \quad x(f) \quad \xrightarrow{\text{"столбцы"}}$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E}$

Пример:

всегда! 1) \mathbb{R}^3 : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, линейно независимые векторы.

$$w^i \leftrightarrow (a_1^i a_2^i a_3^i) = a^i \quad \left(\begin{matrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{matrix} \right) (e_1 e_2 e_3) = E \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right) = E$$

2)

$$V = \bigoplus V_\lambda$$

$$P_x : V \rightarrow V_\lambda \quad \sum_x P_x = \mathbb{I}$$

$$B_1 B_2 = \emptyset$$

$$P_1 P_M = 0$$

$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n) \rightarrow \text{нормирую } w^1. \quad w^1 \text{ единицей в } \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \forall x \in V : x = \sum x_\lambda = x^i v_i = w^i(x) v_i$$

$$\Rightarrow P_\lambda x = x\lambda = \sum_{v_k \in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k \in V_\lambda} \omega^k(x) v_k$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 1 = g(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -3 \quad \alpha(\lambda_2) = 2 = n(\lambda_2)$$

насторожение *Conspicue*
(ст. прием 1)

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$P_{\lambda_1}(x) = \omega^+(x) \cdot v_1 = \left(-\frac{x^4+x^2}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{2} & -\frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^1}{2} & +\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda_2}(x) = w^1(x) \cdot v_2 + w^2(x) \cdot v_3 = \begin{pmatrix} x^1 + x^2 \\ \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + x^2 \\ \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица линейное пр-во тензоров

V лин.пр-во над полем $K (R, C)$

V^* сопряженное пр-во; $\dim V = \dim V^* = n$

def: (1^{oe} def тензора) тензором α типа (p, q) (p -раз ковариантными, q -раз контравариантными) наз-ся линейная функция f : $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$

$$V^p = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз.}}$$

$$(V^*)^q = \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз.}}$$

тензор $\equiv f$ линейн. ф-ция.

линейная \equiv линейная по каждому аргументу.

p и q - балансности тензора

$r = (p+q)$ - ранг или полная балансность тензора.

def: Тензор 2 типа $(p, 0)$, т.е. $f: V^p \rightarrow K$ наз-т ковариантные тензоры балансности p полином.

Тензор 2 типа $(0, q)$, т.е. $f: (V^*)^q \rightarrow K$ наз-т контравариантные тензоры балансности q полином.

Если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то говорят о тензоре смешанного типа.

Если $r = 0$, то тензор типа $(0, 0) \equiv$ скаляр $\in K$

Далее, определены операции "+" и " $\cdot \lambda$ " для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на аргументах и臺灣 надежде аргументов.

Определение \mathbb{D} : $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$, т.е. $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad \mathbb{D}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = 0$

и $-\mathbb{D}$, т.е. $-\mathbb{D}: V^p \times V^q \rightarrow K$, т.е. $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad -\mathbb{D}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = -1 \cdot \mathbb{D}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$

$$\Rightarrow -\mathbb{D} + \mathbb{D} = \mathbb{D} = \mathbb{D} + (-\mathbb{D})$$

Т.о. Выс-вие $1^{\circ} - 8^{\circ}$ аксиомы или. пр-ва (урп.)

def: $T_{(p,q)}$ — или. пр-во тензоров типа (p,q)

если в базисе V

w^1, \dots, w^q базис V^* , сопротивляющей e

$\xi_k \in V, k=1, \dots, p$
вектор (координатный)

$\xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}$ — коорд. вектор ξ_k относ. базиса e

$\eta^m \in V^*, m=1, \dots, q$
ковектор (ковариантный)

$\eta^m = \eta_{i_m}^m w^{i_m} \Leftrightarrow (\eta_1^m \dots \eta_q^m)$ — коорд. вектор η^m относ. базиса w

$d \equiv f$ помимо ф-ции \Rightarrow

$$\text{тензор } T_{(p,q)} \quad \boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})} \quad (1)$$

$$d \in T_{(p,q)} \quad \boxed{d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})} \quad (2) \quad \text{координаты (коэффициенты) тензора } d \text{ относ. базисов } e \text{ и } w$$

Т.о. очевидно, значение помимо ф-ии f (а значит и тензора d), полностью определяется значениями на базисных p -наборах базисных векторов e_j и q -наборах базисных ковекторов w^i .

$$\boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q}} \quad (1')$$

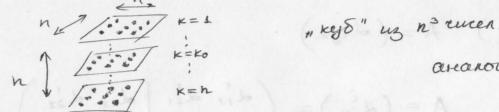
def: $S = (p+q)$ — шерох матрицы порядка n наз-са ши-бо элементов, записываемых двумя типа индексов: верхних i_1, \dots, i_q и нижних j_1, \dots, j_p , при этом все индексы пробегают значения от 1 до n .

$$\boxed{A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q})} \quad S = (p+q) \text{-мерная ш-ча порядка } n \text{ содержит } \boxed{n^{p+q} = n^S \text{ элементов.}}$$

Пример: 1) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $A = (a_j^i)_{n \times n}$ $A = (a^{ij})_{n \times n}$
двумерные ш-чи порядка n (n^2 элементов)

2) $A = (a_{j_k}^i)_{n \times n}$ 3-мерная ш-ча порядка n

фиксируем $k = k_0 \rightsquigarrow$ получаем $(a_{j_{k_0}}^i)$ — общая двумерная ш-ча.



аналогично, 4-мерная ш-ча — упорядоч. набор из n 3-мерных ш-чи.

Т.о. $\forall d \in T_{(p,q)} \rightarrow A \text{ (p+q)-мерная ш-ча компонент } d$

Верно и обратное $\forall A \text{ (p+q)-мерной ш-чи } A \rightarrow$ помимо ф-ии f по формуле (1)(2), где e_1, \dots, e_p некоторы фиксир. базис V , а w^1, \dots, w^q базис V^* , сопротивл. e .

Т.о. получаем $\boxed{d \in T_{(p,q)} \Leftrightarrow A \text{ (p+q)-мерн. ш-ча.}}_{\text{вздох. порядка } n}$

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующих компонент их матриц, т.е. наше вы-сле. соответствие обладает св-вом лин-ти, т.е. действует изоморфизм

$$\boxed{T_{(p,q)} \cong A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}) \cong K^{n^{p+q}}} \Rightarrow \boxed{\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}}$$

Сопротивление о порядке записи эл-тов многомерной матрицы (т.е. матрицы тензора)

общее правило:

первый индекс всегда верхний первий индекс, далее по верхней строке, а затем по низней.

3) $n=2$

$$x=2 \quad \text{всхожестные базисные матрицы: } A = (d_{ij}^i) \quad A = (d_{ij}^j) \quad A = (d_{ij}) \quad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

1^{st} индекс - веңгә строка
 2^{nd} индекс - веңгә столбец.

$$A = (d_{jk}^i) = \begin{pmatrix} d_{11}^i & d_{12}^i \\ d_{21}^i & d_{22}^i \end{pmatrix} \quad A = (d_{jk}^j) = \begin{pmatrix} d_{11}^j & d_{12}^j \\ d_{21}^j & d_{22}^j \end{pmatrix}$$

$$x=3 \quad A = (d_{ijk}^i) \quad A = (d_{jk}^i) \quad A = (d_{ijk}) \quad A = (d_{ijk})$$

1^{st} индекс - веңгә строка
 2^{nd} индекс - веңгә столбец.
 3^{rd} индекс - веңгә "слой"

$$A = (d_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} d_{11}^1 & d_{12}^1 & d_{11}^2 & d_{12}^2 \\ d_{21}^1 & d_{22}^1 & d_{12}^2 & d_{22}^2 \\ \hline 1 \text{ слой} & 2 \text{ слой} \end{array} \right)$$

$$A = (d_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} d_{111} & d_{121} & d_{112} & d_{122} \\ \hline d_{211} & d_{221} & d_{212} & d_{222} \end{array} \right)$$

$x=4$
 1^{st} индекс - веңгә строка
 2^{nd} индекс - веңгә столбец.
 3^{rd} индекс - веңгә слой
 4^{th} индекс - веңгә "слойе"

$$A = (d_{kml}) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} d_{111}^1 & d_{112}^1 & d_{121}^1 & d_{122}^1 & d_{211}^1 & d_{212}^1 \\ d_{111}^2 & d_{112}^2 & d_{121}^2 & d_{122}^2 & d_{211}^2 & d_{212}^2 \\ \hline d_{111}^3 & d_{112}^3 & d_{121}^3 & d_{122}^3 & d_{211}^3 & d_{212}^3 \\ d_{111}^4 & d_{112}^4 & d_{121}^4 & d_{122}^4 & d_{211}^4 & d_{212}^4 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} 1 \text{ слой} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \\ 2 \text{ слой} \\ A_{22} \quad 1 \text{ сечение} \quad 2 \text{ сечение} \end{matrix}$$

Пример:

$$1) f \in V^* \quad f - (1,0) \text{ тензор. (1 ряд ковариантный)}$$

$f: V \rightarrow K$
или

$$\forall \xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i \quad f(\xi) = \xi^i \frac{f(e_i)}{e_i} \leftrightarrow A = (a_{i...n}) \quad 1 \text{ мережа и-ца.}$$

$e_1 \dots e_n \in V$

$$2) V_3 - 3^{rd}$$
 мережа геом. вектора. $f: V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3 \quad f(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi \quad \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$

Очевидно, f - линейная по-а - тензор типа $(2,0)$, $f \in T_{(2,0)}$

$$\text{I } e_1 = \bar{i}, e_2 = \bar{j}, e_3 = \bar{k}$$

$$\begin{aligned} f(\bar{a}, \bar{b}) &= a_{ij} \bar{a}^i \bar{b}^j & \bar{a} = a^i e_i, \bar{b} = b^j e_j, \quad a_{ij} = f(e_i, e_j) = \delta_{ij} \\ \Rightarrow f &\Leftrightarrow A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \\ \Rightarrow f(\bar{a}, \bar{b}) &= a^T A b \quad \Rightarrow \text{ в нашем случае } f(\bar{a}, \bar{b}) = a^T b = \sum_{i=1}^3 a^i b^i \quad (\text{тк. оба индекса каверху пишем знако} \Sigma) \end{aligned}$$

? Как изменится вид тензора, если выбирать другой - "новый" - базис в пр-ве V ?

$$e_1 \dots e_n \text{ базисы пр-ва } V \quad T = T_{e \rightarrow e'}, S = T^{-1} = T_{e' \rightarrow e} \quad \forall x \in V \quad x = \overline{Tx} \quad \text{если } x^i = t_j^i x'^j$$

$$w^1 \dots w^n \text{ базисы пр-ва } V^*, \text{ сопоставл. к } e \text{ и } e', \text{ коорд-ко } \quad \forall \alpha \in V^* \quad \alpha = \alpha^i S \quad \alpha = \alpha_j w^j = \alpha'_j w'^j$$

$$\Rightarrow \forall \xi_k \in V \quad \xi_k^{j_k} = t_{i_k}^{j_k} \xi_i^{i_k} \quad \begin{matrix} j_k = 1, \dots, n \\ i_k = 1, \dots, p \end{matrix}$$

$$\forall \eta^m \in V^* \quad \eta^m = S_{im}^{i_m} \eta^{i_m} \quad \begin{matrix} i_m = 1, \dots, n \\ m = 1, \dots, q \end{matrix}$$

$$\text{ноготавим } b(1') \quad f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \left[\begin{matrix} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} & t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_p}^{j_p} S_{i_1}^{i_1} \dots S_{i_p}^{i_p} \\ j_1 \dots j_p & \end{matrix} \right] \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^{i_1} \dots \eta^{i_p} =$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенным
төверху и внизу, происходит суммирование ($i_1 \dots i_p$: $j_1 \dots j_p$)
 \Rightarrow в результате, просуммировав, получим
новую компоненту со штурховаными индексами.

$$= \boxed{d^{i_1 \dots i_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta^{i_1} \dots \eta^{i_p}}, \text{ т.о. получим снова тензор типа } (p, q)$$

Т.о., при замене базиса тензор типа (p, q) остается тензором того же типа, а его координаты меняются по следующему закону:

$$d'^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

коор-тные индексы
в "новых" базисах

коор-тные индексы
в "старых" базисах
 e, w

(3)

верхние индексы $i_1 \dots i_q$
преобразуются с и-ицей S , т.е.
по контравариантному закону,
постоину наз-ва контравариантными
индексами, а тензор
 q -раз контравариантный

След-но, нижние индексы $j_1 \dots j_p$ преобразуются с матрицей T , т.е.
по ковариантному закону, постину наз-ва ковариантными индексами, а
тензор P раз ковариантным.

Пример: 1) тензор типа $(0,0) \equiv \lambda \in K$, очевидно, не меняться при замене базиса,
м.е. инвариант.

2). $A = (a^i_j)_{n \times n}$ и-ца тензора $d \in T_{(1,1)}$

$$a^i_m = a^i_j t^j_m S^k_i \Leftrightarrow A' = SAT = T^{-1}AT \quad \text{получаем форму записи и-ца
или опр. при замене базиса.}$$

3) $\forall f \in V^*$ тензор типа $(1,0) \Leftrightarrow A = (a_i)_{n \times 1} = a \in K_n$

$$\forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i = x^i a'_j = a_i \left[\begin{smallmatrix} t^i_j & x^j \end{smallmatrix} \right] = a_i x^i$$

$V \cong V^{**}$ $x(f) \quad x: V^* \rightarrow K \quad$ тензор типа $(0,1)$

$$a_i x^i = a'_j x^j = x^i \left[\begin{smallmatrix} S^j_i & a'_j \end{smallmatrix} \right] = x^i a_i$$

4) $d \in T_{(1,2)} \Rightarrow A = (d^i_j)$

$$\text{Найти } d'^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{К примеру: } d^i_j S^j_i S^k_j \Leftrightarrow S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow (S^2 A_k (S^1)^T) t^k_2 = (2 - 17 - 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -19 \\ d'^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \in A_k \end{array}}$$

Вернемся к def тензора. Тензор был определен нами, как матрическая ф-ция и
наше def не зависело от выбора базиса. В пр-ве V . Но, при этом, тензор оказался
связанным с базисом, т.е. после замены базиса тензор остается тензором,
причем того же типа. Для такого рода объектов иск-ва термин геометрический
объект. Поэтому сущ-т другой подход к def. тензора.

def: (2nd def тензора) Тензором d типа (p,q) наз-ва геометрический объект на пр-ве V ,
который описывается A ($p+q$)-мерной матрицей элементов поля K размерности $n=dimV$.
При этом, каковы бы не были базисы e и e' в пр-ве V и соответствующие
им сопряженные базисы V^* и w^* , соответствующие компоненты матриц A и A'
должны быть связаны формулой (3).

Операции $"+"$ и $".\lambda"$ между двумя тензорами одного типа, очевидно, опр-ся в этом
случае как операции $"+"$ и $".\lambda"$ соответствующих матриц тензоров.

При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут
уд-ть пр-ле (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр скобка будет получать
тензор того же типа, что и исходные.

Действительно, $\forall \lambda \in K, d, \beta \in T_{(p,q)}$

$$(\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} := \lambda \cdot d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

$$(\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}) t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p}$$

$$d, \beta \in T_{(p,q)} \quad d^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p}$$

Т.о. мат. операциям на пр-ве посвящ. ф-и соответствуют и-и опр. на матрических
и-цах с сохранением сл-ва (3). Намечены def 1 \Leftrightarrow def 2.

В зависимости от поставленной задачи, она будет иск-м как 1st, так и 2nd def.

8.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Операция свертки.

8.3. Произведение менюров. Базис пр-ва менюров. Операция свертки.

def: $\alpha \in T_{(p_1, q_1)}, \beta \in T_{(p_2, q_2)}$

Найдите значение максимума и минимума функции $y = \cos x$ в промежутке $[p_1 + p_2, q_1 + q_2]$, если максимум этого промежутка равен $\sqrt{2}$.

корректность def: надо проверить

выполнение об.за (3) где новой
многочленной и-це р.:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} K_1 \dots K_{q_2} = \int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \cdot P^{K_1 \dots K_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}}$$

Замечание: $\forall \lambda \in K$ — мензур түнде $(0,0)$ $\Rightarrow \lambda \alpha = \lambda \otimes \alpha = \alpha \otimes \lambda$

Тензорное произведение, очевидно, ассоциативно, но не коммутативно!

$$\text{Пример: } \alpha, \beta \in T_{(1,0)} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} f_{12} = \alpha(x)\beta = (\alpha_i\beta_j) & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_1 \\ f_{12} \in T_{(2,0)} & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} f_{12} = \beta(x)\alpha = (\beta_i\alpha_j) & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2 \\ f_{12} \in T_{(2,0)} & & \end{array}$$

$$y_1 \neq y_2 \quad A_2 = A_2^{-T}$$

$$\text{Umpf: } \Rightarrow \alpha \in T(p,0), \beta \in T(0,q) \quad \Rightarrow \quad \alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$$

2) дистрибутивно

Введем 1^ю def тензора произведения тензоров для коммутативного произведения функций, определяемых тензорами.

$$\begin{aligned} \alpha &\leftrightarrow f : V^{P_1} \times (V^*)^{Q_1} \rightarrow K \\ \beta &\leftrightarrow g : V^{P_2} \times (V^*)^{Q_2} \rightarrow K \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = \alpha(\beta) \Leftrightarrow f \cdot g : V^{P_1+P_2} \times (V^*)^{Q_1+Q_2} \rightarrow K \\ \forall \xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \xi_2, \dots, \xi_{P_2} \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^{Q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{Q_2} \in V^* \end{array}}$$

$$f \cdot g (\xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \xi_2, \dots, \xi_{P_2}, \eta^1, \dots, \eta^{Q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{Q_2}) = \underbrace{g^{i_1 \dots i_{Q_1} k_1 \dots k_{Q_2}}}_{\substack{i_1, \dots, i_{Q_1} \\ j_1, \dots, j_{P_2} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_{P_1}^{j_{P_1}} \xi_2^{m_1} \dots \xi_{P_2}^{m_{P_2}} \theta_1^{k_1} \dots \theta_{Q_2}^{k_{Q_2}}}_{\substack{j_1, \dots, j_{P_2} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} =$$

наглядное выражение ковариантной формулы f через композицию α и β

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{Q_1}}}_{\substack{i_1, \dots, i_{Q_1} \\ j_1, \dots, j_{P_2} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_{P_1}^{j_{P_1}} \xi_2^{m_1} \dots \xi_{P_2}^{m_{P_2}}}_{\substack{j_1, \dots, j_{P_2} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \cdot \underbrace{P^{k_1 \dots k_{Q_2}}}_{\substack{k_1, \dots, k_{Q_2} \\ l_1, \dots, l_{Q_1} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \underbrace{\xi_1^{l_1} \dots \xi_{P_2}^{l_{P_2}} \theta_1^{k_1} \dots \theta_{Q_2}^{k_{Q_2}}}_{\substack{l_1, \dots, l_{Q_1} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \\ f(\xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \eta^1, \dots, \eta^{Q_1}) \quad g(\xi_2, \dots, \xi_{P_2}, \theta^1, \dots, \theta^{Q_2})$$

Важно помнить, $\forall f^j \in T_{(1,0)}, j=1, \dots, P$ $f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^P \in T_{(P,0)}$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_P \in V \quad \boxed{f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^P (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_P) = f^1(\xi_1) \cdot f^2(\xi_2) \dots f^P(\xi_P)}$$

$$\forall g_j \in T_{(0,1)}, j=1, \dots, Q \quad g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_Q \in T_{(Q,1)}$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^Q \in V^* \quad \boxed{g_1(\eta^1) \cdot g_2(\eta^2) \dots g_Q(\eta^Q) = g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_Q (\eta^1, \dots, \eta^Q)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^1 \otimes \dots \otimes f^P \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_Q (\xi_1, \dots, \xi_P, \eta^1, \dots, \eta^Q) = f^1(\xi_1) \dots f^P(\xi_P) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_Q(\eta^Q)} \quad (4)$$

Теорема: (о базисе np-ва $T_{(P,Q)}$)

если e_1, \dots, e_n базис V , w^1, \dots, w^n базис V^* , сопряжен. к

сопряженность тензоров буде

$\boxed{w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q}}$ по всем возможным наборам индексов $(j_1, \dots, j_P, i_1, \dots, i_Q)$, где

абстрактный базис np-ва $T_{(P,Q)}$

Dok-60: очевидно, $w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q} \in T_{(P,Q)}$, т.к. $w^{j_i} : V \rightarrow K$, а $e_i : V^* \rightarrow K$

помимо этого! $\forall \alpha \in T_{(P,Q)} \Leftrightarrow \alpha$ помимо np-ва.

$w^{j_i} \in T_{(1,0)}$
 $e_i \in T_{(0,1)}$

$$\begin{aligned} & \forall \xi_1, \dots, \xi_P \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^Q \in V^* \quad \alpha(\xi_1, \dots, \xi_P, \eta^1, \dots, \eta^Q) = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_P^{j_P} \eta_1^{i_1} \dots \eta_Q^{i_Q}}_{\substack{j_1, \dots, j_P \\ m_1, \dots, m_Q}} = \text{об-60(4)} = \\ & = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q}}_{\substack{j_1, \dots, j_P \\ m_1, \dots, m_Q}} (\xi_1, \dots, \xi_P, \eta^1, \dots, \eta^Q) \\ & \Rightarrow \boxed{\alpha = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q}}_{\substack{j_1, \dots, j_P \\ m_1, \dots, m_Q}}} \Rightarrow \text{правильн.} \end{aligned}$$

мат. независимость:

$$\boxed{\alpha = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q}}_{\substack{j_1, \dots, j_P \\ m_1, \dots, m_Q}}}$$

члены нулевой тензор к набору векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_Q}, w^{j_1}, \dots, w^{j_P}$

$$\alpha = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} w^{j_1}(e_{i_1}) \dots w^{j_P}(e_{i_P}) \cdot e_{i_1}(w^{j_1}) \dots e_{i_Q}(w^{j_Q}) = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{\delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_P}^{j_P} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_Q}^{k_Q}}_{\substack{j_1, \dots, j_P \\ m_1, \dots, m_Q}} = \underbrace{\alpha^{k_1 \dots k_Q}}_{\substack{k_1, \dots, k_Q \\ m_1, \dots, m_Q}}$$

верно для любого набора индексов $m_1, \dots, m_P, k_1, \dots, k_Q \Rightarrow$ нулевая комбинация триединства \Rightarrow мат. незав.

Пример: $\alpha = (w^1 - 2w^2 + w^3) \otimes (3w^1 + w^2) \otimes e_2 + (w^2 + 2w^3) \otimes w^1 \otimes e_3$

- матрица значения α на векторах $\xi_1 = 2e_1 - e_2, \xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3, \eta = w^2 - w^3$
- запишем матрицу тензора.

$$1) \alpha(\xi_1, \xi_2, \eta) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2) \cdot \eta_2 + (\xi_1^2 + 2\xi_1^3) \cdot \xi_2^1 \cdot \eta_3 = (2+2+0)(3 \cdot 1 + 2) \cdot 1 + (-1+2 \cdot 0) \cdot 1 \cdot (-1) = 21$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \alpha \in T_{(2,1)} \Rightarrow \alpha = (\alpha^i_{jk})$$

$$\begin{array}{ll} \alpha^2_{11} = 3 & \alpha^2_{21} = -6 \\ \alpha^2_{12} = 1 & \alpha^2_{22} = -2 \\ \alpha^2_{21} = 1 & \alpha^2_{32} = 1 \\ \alpha^2_{22} = 1 & \alpha^2_{31} = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

def: $\exists p, q \geq 1$ $\alpha \in T(p, q)$. Приведение один верхний индекс одному нижнему. Тогда, по правилу Эйнштейна, мы должны будем просуммировать соответствующие компоненты. В результате, получим систему элементов, у которых число верхних и низких будет на единицу меньше.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{согласно} \\ \beta^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_q} = \alpha^{i_1 \dots j_1 \dots j_p} \\ \text{согласно} \\ j_1 \dots \hat{j}_m \dots j_p \end{array}}$$

- эта операция называется сверткой тензора
 $\alpha \in T(p, q) \rightsquigarrow \beta \in T(p-1, q-1)$

корректическое определение! надо проверить выполнение обея (3)

$$\begin{aligned} \beta^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_q} &= \alpha^{i_1 \dots j_1 \dots \hat{j}_m \dots j_p} = \alpha^{i_1 \dots i_k \dots i_q} + t^{j_1 \dots j_m \dots j_p}_{\alpha^1} \cdot S^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_m \dots j_p} \\ &= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots j_1 \dots j_p}}_{\beta^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_q}} + \underbrace{t^{j_1 \dots j_m \dots j_p}_{\alpha^1} \cdot S^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_m \dots j_p}}_{\text{согласно } (3)} \Rightarrow \text{Быстро } (3) \\ &\Rightarrow \beta \text{ - tensor типа } (p-1, q-1) \end{aligned}$$

$$(TS)^{j_m}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k} = \begin{cases} 0, & j_m \neq i_k \\ 1, & j_m = i_k = \alpha \end{cases}$$

Замечание!

- 1) Свртка может проводиться по нескольким индексам.
- 2) Если в результате свртки получается тензор типа $(0, 0)$ (маска), то такая свртка называется помойкой.

Пример!

- 1) $\alpha \in T(1, 1) \Leftrightarrow A = (\alpha^i_j)_{n \times n} \quad \beta = (\alpha^i_j) = t \circ A \in K \Rightarrow$ помоя свртка; $\beta \in T(0, 0)$ и свртка отрицательно заменила базиса.
- 2) $f \in T(1, 0)$ - ковектор $\Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n)$
 $x \in T(0, 1)$ - вектор $\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \alpha = f \otimes x = (a_j x^i) = (\alpha^i_j) \Rightarrow \beta = (\alpha^i_j) = a_i x^i = f(x) = x(f)$
уточнение
 или формула f на векторе x .

$$3) \quad \alpha \in T(1, 1) \Leftrightarrow A = (\alpha^i_j) \\ x \in T(0, 1) \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$y^i = \alpha \otimes x = (\alpha^i_j x^k) = (y^i_j) \in T(1, 2)$$

$$\begin{array}{c} \beta = (y^i_j) = (\alpha^i_j x^j) = (\beta^i). \\ \text{согласно} \\ \downarrow \\ \beta = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ (A x)^{i-\text{коф.}} \\ \text{согласно} \\ \beta \in T(0, 1) \end{array}$$

$$\tilde{\beta} = (y^i_j) = (\alpha^i_j x^k) = (\tilde{\beta}^k) \Leftrightarrow \tilde{\beta} = (t \circ A) \circ x$$

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^n \end{pmatrix}$$

$$4) \quad \alpha \in T(1, 1) \quad \alpha^i_j = \alpha^i_j t^j_{j'} S^{i'}_i = \text{свртка по 2-му индексам тензора } \alpha \otimes T \otimes S = f = (\alpha^i_j t^k_m S^l_n) = (f^{i' k' l' n'}_{j' m' l'}) \\ \Rightarrow \alpha^i_j = f^{i' j' l'}_{j' l'} \text{ свртка.}$$

8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.

8.4. Транспонирование тензоров. Симметричные и кососимметричные тензоры.

def: $\exists p \geq 2$, $d \in T(p,q)$ $\exists \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ nepermutabilna premenjiva na go p .

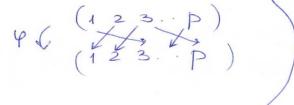
напоминание!

$\psi: \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ - номенклатура

бз. огноз. отвід.

$$\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_D) \equiv (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(D)) = \sigma \circ \pi$$

$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p) = (\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(p))$ - непримитивка



$\beta = \sigma(d)$ - наз-ся тензором, полученным трансформированием тензора α перестановкой σ
 $P \geq 2$ по некоторым индексам, если

Аналогично оп-ся транспортирование по верхним индексам.

Замечание: для тандоров операции транспонирования опр-ся только по одному типу индексов; либо по нижние, либо по верхние, в отличие от произвольной многомерной матрицы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

Корректность def!: как и раньше надо проверить выполнение об-ва (3), т.е. что $\beta \in T(p,q)$

Как известно, общая перестановка может быть получена комбинацией циклических транспозиций. Поэтому, достаточно показать, что свойство (3) выполняется при транспонировании матрицы по паре индексов.

$$= \frac{\beta_{j_1, j_m, j_k, j_p}^{i_1, i_q}}{\beta_{j_1, j_m, j_k, j_p}^{i_1, i_q}} \left(t_{j_1}^{r_1} \cdots t_{j_m}^{r_m} \cdots t_{j_k}^{r_k} \cdots t_{j_p}^{r_p} S_{i_1}^{i_1} \cdots S_{i_q}^{i_q} \right) = \beta_{r_1, r_m, r_k, r_p}^{i_1, i_q} t_{j_1}^{r_1} \cdots t_{j_m}^{r_m} \cdots t_{j_k}^{r_k} \cdots t_{j_p}^{r_p} S_{i_1}^{i_1} \cdots S_{i_q}^{i_q} \Rightarrow (3)$$

Как будем возводить транспонирование тензора, если обратно за определение тензора def?

$$\begin{aligned} \omega \in T(p, q) &\iff \text{d. norm. omosp.} \\ \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \quad \forall z^1, \dots, z^q \in V^* & \quad \boxed{\beta(\sigma(\omega))} \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \\ = \omega_{\substack{i_1 \dots i_q \\ j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}} \xi_{\sigma_1}^{i_1} \cdots \xi_{\sigma_p}^{i_p} z_{i_1}^{j_1} \cdots z_{i_q}^{j_q} &= \boxed{\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, z^1, \dots, z^q)} \end{aligned}$$

Замечание: при транспортировании по низшим индексам, очевидно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспортирования по верхним индексам будет обладать теми же свойствами, что и операция транспортирования по низшим. Поэтому все результаты, которые мы получим для низших индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

$$\text{Пример: } \omega = (\omega^1 - 2\omega^2) \otimes \omega^3 \otimes (\omega^4 - \omega^3) + \omega^2 \otimes \omega^4 \otimes \omega^3 \quad (\Rightarrow \omega \in T_{(3,0)} = (\alpha_{ijk}))$$

- 1) найти $\beta = \sigma(\alpha)$ $\sigma = (3, 1, 2)$, вычислить матрицу .

$$1) \quad \alpha = (\alpha_{ijk}) \Rightarrow \beta = (\beta_{kij})$$

$\cong (3, 1, 2)$ $\begin{matrix} \parallel \\ (\beta_{ijk}) \end{matrix}$

$$\begin{aligned} T \cdot e. \quad i &\leftrightarrow j_1 \\ j &\leftrightarrow j_2 \\ k &\leftrightarrow j_3 \end{aligned}$$

~~$d_{ijk} = p_{kij}$~~ неверно!
здесь $\sigma = (1\ 2\ 3\ 1)$

$$\beta_{ijk} = \beta_{j_2 j_3 j_1} = \alpha_{j_3 j_1 j_2} = \alpha_{k i j}$$

1 cm

$$\begin{array}{lllll} \boxed{1 \text{ Cr.}} & \text{ berechnen } m-\text{sy } \lambda: & \lambda_{131} = 1 & \lambda_{133} = -1 & \lambda_{213} = 1 \\ & & \lambda_{232} = -2 & \lambda_{233} = 0 & \text{ somit keine symp.} \end{array}$$

$$\Rightarrow \beta_{311} = 1 \quad \beta_{331} = -1 \quad \beta_{132} = 1$$

$$\beta_{312} = -2 \quad \beta_{332} = 2 \quad \text{ocmanbu}$$

$$\Rightarrow P = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2 сн штобаж перевідмінка \equiv конкретне число трансподицій (т.е. транспонування числа по парі штуков)

Транспортирование многочленной м-исы по паре индексов (i,j) \equiv транспортирование двумерных слоёв м-исы, получающихся фиксированием различных состояний всех индексов, кроме индексов (i,j) .

$$\beta_{ijk} = \alpha_{kij}$$

$$z_{kj} \sim \tilde{z}_{ikj} \sim \tilde{z}_{ijk} = \beta_{ijk}$$

Задача 2 транспонувши цей-т, створиши є матрице на позиції (k, i, j) , де кожен переноситься на позицію (i, j, k)

$$\alpha_{Kij} \sim \tilde{\alpha}_{Kij}$$

же меняется, поэтому будем присваивать различные значения $j = 1, 2, 3$, т.е. извлекать из этого тензора векторное и-е, которое после однократной операции транспонирования будет поменяться обратно в тензор.

фиксируем $j \wedge l \rightarrow$ фиксируем слой \sim качущий слой
наго транспортирует

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\tilde{L}_{ikj} \rightarrow \tilde{L}_{ijk}$ } не меняется $i \Rightarrow$ фиксирован $i = 1, 2, 3 \Rightarrow$ извлекаем двумерную м-ку \Rightarrow транспонируем
 \Rightarrow поменяем обратно.

$$i = 1 \text{ (last step)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \leftarrow \text{поменяли обратно на исходные позиции}$$

$$l = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i=3$$

(3-a csp)

$$\Rightarrow \tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) 1 cn. $\beta = \sigma(\alpha)$ $\sigma = (3, 1, 2)$

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = (\omega^1(\xi_3) - 2\omega^2(\xi_3)) \cdot \omega^3(\xi_1) \cdot (\omega^4(\xi_2) - \omega^3(\xi_2)) + \omega^2(\xi_3)\omega^4(\xi_1)\omega^3(\xi_2) = \\ = -2$$

2 cn $\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \beta_{ijk} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k = \frac{\beta_{311}}{1} \cdot \frac{\beta_{212}}{2} \cdot \frac{\beta_{331}}{0} + \frac{\beta_{332}}{1} \cdot \frac{\beta_{322}}{2} \cdot \frac{\beta_{232}}{-1} = -2$

из def. транспонирования \Rightarrow мин. операція: $\forall \lambda \in K \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in T(p, q) \quad \sigma(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda \sigma(\alpha_2)$

Кроме того, любая перестановка — это вектор-одн. отобр. \Rightarrow операции транспон. вектор.

\Rightarrow Транспонирование — это изоморфизм на $T(p, q)$

Транспонирование ассоциат., но не коммутативно (!) (очевидно, следует из свойств перестановок)

$$\sigma, \tau, \theta \text{ перестановки } \alpha \in T(p, q) \Rightarrow \begin{cases} (\sigma(\tau(\theta))\alpha) = ((\sigma\tau)\theta)(\alpha) \\ \sigma\tau(\alpha) \neq \tau\sigma(\alpha) \end{cases}$$

Упр.: док-ть: $\alpha \otimes \beta = \sigma(\beta \otimes \alpha)$

def: tensor $\alpha \in T(p, q)$ наз-ся симметрическим (по низшим индексам), если \forall перестановки (нижних индексов) $\sigma: \sigma(\alpha) = \alpha$

и наз-ся кососимметрическим (антисимметрическим, антиперемножаемым) (по низшим индексам), если \forall перестановки (нижних индексов) $\sigma: \sigma(\alpha) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha$, где $\epsilon(\sigma)$ — четность перестановки.

из def. автоморфический
перестановка сб-во где компоненты
симм. и кососимм. Тензоров.
 $\forall \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$$\begin{aligned} \alpha \text{ симм.} &\Leftrightarrow \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} = \alpha^{i_2 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p} \\ \alpha \text{ кососимм.} &\Leftrightarrow \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha^{i_2 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p} \end{aligned}$$

T.k. \forall перестановка \equiv каскадное транспонирование (\equiv транспонирование по паре индексов)

$$\begin{aligned} \alpha \text{ симм.} &\Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_m \dots j_k} \\ \alpha \text{ кососимм.} &\Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = -\alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_m \dots j_k} \end{aligned}$$

или если σ ^{def} тензора α вида σ def 1:

$$\begin{aligned} \alpha \text{ симм.} &\Leftrightarrow \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = \alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \\ \alpha \text{ кососимм.} &\Leftrightarrow \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -\alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \end{aligned}$$

Упр.: $\alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0$

$$\begin{aligned} \text{док-то: } (\Rightarrow) \quad \alpha \text{ кососимм.} &\Rightarrow \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -\alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \Rightarrow \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0 \\ (\Leftarrow) \quad \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0 &\Rightarrow \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_k, \dots) + \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) + \alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) + \alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_m, \dots) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -\alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) = 0 \Rightarrow \alpha \text{ кососимм.} \end{aligned}$$

$$\alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = 0$$

def: $\alpha \in T(p, 0)$ наз-ся полиномиальной формой. Если α имеет это, кососимметрическ., то α наз-ся антисимм. полином. формой или p -формой или внешней p -формой

$\alpha \in T_{(0,q)}$ наз. поливектором. Если α к тому же, кососимметрическ., то α наз. q -вектором

Упр.: Вычислить $\det \alpha$ из прямого семестра и сравнивать с $\det P$ -формой.

$$\alpha \in T_{(p,q)} \text{ кососимм. (по низшим индексам)} \Rightarrow \begin{cases} 1) \text{ если } p > n \Rightarrow \alpha = 0 \\ 2) \text{ если } p = n \Rightarrow \alpha = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\epsilon(j)} \alpha_{j_1 \dots j_n} \\ \sigma = (j_1, \dots, j_n) \text{ перестановка} \\ \text{цикла } (12 \dots n) \end{cases}$$

Примеры: 1) V_3 - нр-бо $3 \times$ мерн. геом. векторов.

$$\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}) \text{ скл. нр-е. } \alpha \in T_{(2,0)}, \text{ симм.} \quad \text{Упр.: 1) Вычислить } \alpha_{\beta} \text{ и } \alpha_{\beta}. \\ \beta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \text{ симм. нр-е. } \beta \in T_{(3,0)}, \text{ кососимм.} \quad 2) \text{ убедиться что } \alpha = \beta \text{ и } \alpha_{\beta} = (-1)^{\epsilon(\beta)} \beta.$$

$$2) A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \alpha \in T_{(2,0)} \quad \alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow A \text{ симм. и-ца.} \\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Leftrightarrow A \text{ кососимм. и-ца.}$$

$$3) \alpha \in T_{(3,0)} \quad \alpha = 0 \quad n < 3$$

$$\text{кососимм.} \quad \exists n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\epsilon(j)} \alpha_{123}, \quad \sigma = (j_1, j_2, j_3) \text{ перестановка } (123) \\ (3-\text{форма}) \quad (123) \oplus (213) \oplus (312) \oplus (132) \oplus (231) \oplus (321)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Упр.: как будем выкладывать
и-ца α (кососимм.) $\in T_{(3,0)}$,
если $n=4$?

$$4) \alpha \in T_{(2,0)} \quad \exists n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_3 j_1 j_2} \quad \forall \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ перестановка } (123)$$

$$\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} = x$$

$$\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211} = y$$

$$\alpha_{113} = \alpha_{131} = \alpha_{311} = z$$

$$\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122} = t$$

... и т. д. запись

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_{111} & y & z & y & t & x & z & x & 0 \\ y & t & x & t & \alpha_{222} & 0 & x & \ddots & 0 \\ z & x & 0 & x & 0 & \alpha_{333} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Упр.: 1) если $n=2$?
2) если $n=4$?

8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров.

def: Альтернирующие (антисимметризующие) и симметрирующие тензоры $\alpha \in T_{(p,q)}$ (по ненулевым индексам) наз - ся операциями:

$$\text{Alt} \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma(\alpha)$$

$$\text{Sim} \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$$

S_p - мн-во всех перестановок чисел от 1 до p .

Замечания:

1) очевидно, если α симм. $\Rightarrow \text{Sim} \alpha = \alpha$

$$\text{если } \alpha \text{ несимм. } \Rightarrow \text{Alt} \alpha = \alpha$$

$$(\text{Sim} \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha = \frac{p!}{p!} \alpha, \text{ т.к. } \sigma(\alpha) = \alpha \forall \sigma)$$

$$(\text{Alt} \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha = \frac{p!}{p!} \alpha, + \kappa \sigma(\alpha) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha \forall \sigma)$$

2) очевидно, Alt и Sim - мн. операции на $T_{(p,q)}$, т.к. σ -мн. операции на $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (нижних) индексов.

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым происходит альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказались индексы, по которым симметрирование (альтернирование) не проводится, то эти индексы, выделяют вертикальными чертами.

Например, $\alpha^{(i_1|i_2|i_3|i_4|i_5)}_{[j_1 j_2 j_3]}$

- по верхним индексам проводится симметрирование по индексам $i_1 i_2 i_5$
- по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример! $\alpha \in T_{(2,0)}$ $n=3$ $\alpha = (\alpha_{ijk}) = (\alpha_{j_1 j_2 j_3})$ $\sigma \in \{(123), (213), (312)\}$ $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ $S_3 = \{123, 213, 312\}$

$$1) \quad \boxed{\beta = \text{Sum} \alpha} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha(\sigma)$$

$$\beta = \alpha_{(ijk)} \rightarrow \beta_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)}}$$

$$\boxed{\beta_{123}} = \alpha_{(123)} = \frac{1}{6} (d_{123} + d_{132} + d_{213} + d_{231} + d_{312} + d_{321})$$

$$d_{(132)} = d_{(213)} = d_{(231)} = d_{(312)} = d_{(321)} \Rightarrow \beta_{123} = \beta_{132} = \beta_{213} = \beta_{231} = \beta_{312} = \beta_{321} = x \quad (\text{см. пример 4})$$

$$\boxed{\beta_{112}} = d_{(112)} = \frac{1}{6} (d_{112} + d_{122} + d_{112} + d_{121} + d_{211} + d_{211})$$

$$d_{(121)} = d_{(211)} \Rightarrow \beta_{112} = \beta_{121} = \beta_{211} = y \quad (\text{см. пример 4})$$

$$2) \quad \boxed{f = Aet \alpha} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha(\sigma)$$

$$f = \alpha_{[i_1 i_2 i_3]} \rightarrow f_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)}}$$

$$\boxed{f_{123}} = d_{[123]} = \frac{1}{6} (d_{123} - d_{132} - d_{213} + d_{231} + d_{312} - d_{321})$$

$$\epsilon(\sigma) \in \{+, -, +, -\}$$

$$-d_{[132]} = d_{[312]} = -d_{[321]} = d_{[231]} = -d_{[213]} \Rightarrow f_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} f_{123} \quad \sigma = (j_1, j_2, j_3)$$

$$\boxed{\gamma_{112}} = d_{[112]} = \frac{1}{6} (d_{112} - d_{121} - d_{112} + d_{121} + d_{211} - d_{211}) = 0$$

$$-d_{[121]} = d_{[211]} \Rightarrow \gamma_{112} = \gamma_{121} = \gamma_{211} = 0 \Rightarrow \text{все компоненты } \gamma_i, \text{ у которых соблюдаются}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma \text{ - кососимметрич. тензор.}} \quad (\text{см. пример 3})$$

$$3) \quad \boxed{\tilde{\beta} = \alpha_{(ijjk)}} \rightarrow \tilde{\beta}_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)}} = \frac{1}{2} (\alpha_{j_1 j_2 j_2} + \alpha_{j_2 j_1 j_2}) = \alpha_{j_1 j_2 j_2}$$

$$\sigma \in \{(12), (21)\} = S_2 \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\tilde{\beta}_{112} = d_{(1112)} = \frac{1}{2} (d_{112} + d_{211}) \Rightarrow \tilde{\beta}_{112} = \tilde{\beta}_{211}$$

$$\tilde{\beta}_{121} = d_{(1121)} = \frac{1}{2} (d_{121} + d_{121}) = d_{121} \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta}_{i_1 j_1} = \alpha_{(ijik)} = \alpha_{i_1 j_1}} \quad \forall i_1, j_1$$

$$\tilde{\beta}_{123} = d_{(1213)} = \frac{1}{2} (d_{123} + d_{321}) \Rightarrow \tilde{\beta}_{123} = \tilde{\beta}_{321} \quad u.m.g. \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta}_{ijk} = \tilde{\beta}_{kji}} \quad \forall i, j, k$$

$$4) \quad \boxed{\tilde{f} = \alpha_{[i_1 j_1 k_1]}} \rightarrow \tilde{f}_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)}} = \frac{1}{2} (\alpha_{j_1 j_2 j_2} - \alpha_{j_2 j_1 j_2}) = \alpha_{j_1 j_2 j_2}$$

$$\epsilon(\sigma) \in \{+, -\}$$

$$\tilde{f}_{112} = d_{(1112)} = \frac{1}{2} (d_{112} - d_{211}) \Rightarrow \tilde{f}_{112} = -\tilde{f}_{211}$$

$$\tilde{f}_{121} = d_{(1121)} = \frac{1}{2} (d_{121} - d_{121}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{f}_{i_1 j_1} = \alpha_{[i_1 j_1 k_1]} = 0} \quad \forall i_1, j_1$$

$$\tilde{f}_{123} = d_{(1123)} = \frac{1}{2} (d_{123} - d_{321}) \Rightarrow \tilde{f}_{123} = -\tilde{f}_{321} \quad u.m.g. \Rightarrow \boxed{\tilde{f}_{ijk} = -\tilde{f}_{kji}} \quad \forall i, j, k$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{f} \text{ кососимметрич. по } 1 \text{ и } 3 \text{ индексам.}}$$

Упр. $\alpha \in T_{(2,0)} \Leftrightarrow A = (\alpha_{ij})$ 1) $\text{Sum} A = \frac{A+A^T}{2}$, $Aet A = \frac{A-A^T}{2}$ 2) $\text{Sum} A$ -симметрич. ли-ва?
 $Aet A$ -кососимметрич. ли-ва?

$$\text{Teorema! } \forall \text{ нестранные } \sigma \quad \text{Aet}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{Aet}\alpha) = (-1)^{\sigma(\alpha)} \text{Aet}\alpha$$

$$\text{Sum}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha$$

операции Aet и Sum
нестранное значение с
операцией транспонирования.

Dok-Bd: док-и доказ. Aet (где sum аналогично: ynp)

$$\text{Aet}(\sigma(\alpha)) = \frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} \tau(\sigma(\alpha)) = \frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} (\tau\sigma)(\alpha) \quad \Theta$$

$\tau \in S_P$ - предобразование всех перестановок $S_P \Rightarrow \tau\sigma \in S_P$ также предобразует все эти в S_P

$$\exists P = \tau\sigma \Rightarrow (-1)^{\sigma(P)} = (-1)^{\sigma(\tau)} \cdot (-1)^{\sigma(\sigma)} \Rightarrow (-1)^{\sigma(\tau)} = (-1)^{\sigma(P)} \cdot (-1)^{\sigma(\sigma)}$$

$$\Theta \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} (-1)^{\sigma(\sigma)} P(\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} P(\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha \Rightarrow \boxed{\text{Aet}(\sigma(\alpha)) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha}$$

$$\sigma(\text{Aet}\alpha) = \sigma\left(\frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} \tau(\alpha)\right) = \frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} \sigma(\tau(\alpha)) = \frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} (\sigma\tau)(\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} P(\alpha) =$$

$$= (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha \Rightarrow \boxed{\sigma(\text{Aet}\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha}$$

Следствие: 1) $\forall \alpha$ $\text{Aet}\alpha$ - кососимметрический
 $\text{Sum}\alpha$ - симметрический

2) α кососимметрический $\Leftrightarrow \alpha = \text{Aet}\alpha$
 α симметрический $\Leftrightarrow \alpha = \text{Sum}\alpha$

3) $\text{Aet}(\text{Aet}\alpha) = \text{Aet}\alpha \quad \text{Aet}(\text{Sum}\alpha) = 0$
 $\text{Sum}(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha \quad \text{Sum}(\text{Aet}\alpha) = 0$

Dok-Bd: 1) очевидно, $\sigma(\text{Aet}\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha$
(def. кососимметрического)

очевидно, $\sigma(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha$ (def. симметрического)

2) док-и доказ. (где симм. аналог. ynp)
(\Rightarrow) очевидно, def. кососимметрического
(\Leftarrow) $\exists \alpha = \text{Aet}\alpha \Rightarrow \forall \sigma: \sigma(\alpha) = \sigma(\text{Aet}\alpha) =$
 $= (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha = (-1)^{\sigma(\sigma)} \alpha \stackrel{!}{=} \text{кососимметрический}$.

$$3) \text{Aet}(\text{Aet}\alpha) = \text{Aet}\alpha \quad (\text{из 2}) + \text{k. Aet}\alpha \text{ кососимметрический.}$$

$$\text{Sum}(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha \quad (\text{из 1}) + \text{k. Sum}\alpha \text{ симметрический.}$$

$$\text{Aet}(\text{Sum}\alpha) = \frac{1}{P!} \sum_{\sigma \in S_P} (-1)^{\sigma(\sigma)} \sigma(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha \cdot \frac{1}{P!} \sum_{\sigma \in S_P} (-1)^{\sigma(\sigma)} = 0$$

$$\text{Sum}(\text{Aet}\alpha) = \frac{1}{P!} \sum_{\sigma \in S_P} \sigma(\text{Aet}\alpha) \cdot (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha = \text{Aet}\alpha \cdot \frac{1}{P!} \sum_{\sigma \in S_P} (-1)^{\sigma(\sigma)} = 0.$$

Замечание: 1) $T^{(\text{сумм.})}_{(p,q)}$ - инв. во симметрических перестановках по первому (верхнему) изображаем.

$T^{(\text{кососим.})}_{(p,q)}$ - инв. во кососимметрических перестановках по первому (верхнему) изображаем.

$\Rightarrow T^{(\text{сумм.})}_{(p,q)}, T^{(\text{кососим.})}_{(p,q)}$ не равны. т.к. $T^{(\text{сумм.})}_{(p,q)} < T^{(\text{кососим.})}_{(p,q)}$

очевидно, + k. $\alpha = \text{Aet}\alpha \Rightarrow \forall \lambda \in K \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in T^{(\text{кососим.})}_{(p,q)} : (\alpha_1 + \lambda \alpha_2) = \text{Aet}(\alpha_1 + \lambda \alpha_2)$

доказательство: $\text{Aet}(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) = \underbrace{\text{Aet}\alpha_1}_{\alpha_1} + \lambda \underbrace{\text{Aet}\alpha_2}_{\alpha_2}$

аналогично доказывается для симметрических.

2) если автоморфирование (симметрическое) проходит не по всем изображениям, то, очевидно, m-тия и следовательно будут первые, но только по отношению к изображениям, но которых совершаются автоморф. (симметрия)

3) $\exists (k,m)$ присоединяющиеся изображения. \Rightarrow

$$\forall \alpha : \begin{cases} \alpha = \text{Aet}\alpha + \text{Sum}\alpha \\ (k,m) \end{cases} \quad , + e \quad T^{(\text{сумм.})}_{(p,q)} = T^{(\text{сумм.})}_{(p,q)} \oplus T^{(\text{кососим.})}_{(p,q)}$$

$$\text{доказательство: } \text{Aet}\alpha = p \quad p^{i_1..i_q} = \frac{1}{2} (d^{i_1..i_q} + d^{i_2..i_q})$$

$$\oplus \quad \text{Sum}\alpha = f \quad f^{i_1..i_q} = \frac{1}{2} (d^{i_1..i_q} - d^{i_2..i_q}) = d^{i_1..i_q}$$

ynp: $A = (a_{ij})$ проверено: $A = \text{Aet}A + \text{Sum}A$.

8.6 p -формы. Внешнее произведение p -форм.

8.6. p -формы. Внешнее произведение p -форм.

p -форма это $\alpha \in T_{(p,0)}$ (см. def. n. 8.4) $p \leq n$, иначе $\alpha = 0$

или-бо $T_{(p,0)}$ или подпр. бо $T_{(p,q)}$, т.е. симо обл-ся или пр. вом.

$f \in \Lambda^p V^*$ - или. пр. во p -форм. $= \{ f \in T_{(p,0)} \mid \text{Alt}f = f \}$

$f: V^p \rightarrow K$
помимо, альтерн. форма. \equiv кососимм. tensor (р-ковариантный)

В def кососимм. необходимо, чтобы $p \geq 2$, потому, формально, или форма (т.е. tensor $T_{(1,0)}$) не могут подходить под def p -форм. Тем не менее, практико или форма называют 1-формами и $\Lambda^1 V^* \equiv V^*$ очевидно

def: $f \in \Lambda^{p_1} V^*, g \in \Lambda^{p_2} V^*$ внешнее произведение p_1 -форма f и p_2 -форма g , наз-ая (p_1+p_2) -форма $f \wedge g$, определенная следующим равенством:

$$f \wedge g = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \text{Alt}(f \otimes g) \quad f \wedge g \in \Lambda^{p_1+p_2} V^*, \text{ очевидно, т.к. } f \otimes g \in T_{(p_1+p_2,0)}, \text{ а} \\ \text{Alt}(f \otimes g) \text{ кососимм.}$$

Свойства внешнего произведения:

$$1^\circ \quad f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$$

$$\text{док-во: } f \wedge g = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\alpha)} \sigma(f \otimes g)$$

$$g \wedge f = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\tau \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\tau(\alpha)} \tau(g \otimes f)$$

$$f = (\alpha_{i_1 \dots i_p}) \quad g = (\beta_{j_1 \dots j_p})$$

$$f = f \otimes g = (\alpha_{i_1 \dots i_p} \beta_{j_1 \dots j_p}) = (f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p})$$

$$\Theta = g \otimes f = (\beta_{j_1 \dots j_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}) = (\Theta_{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_p})$$

σ и τ пробегают одно и то же множество перестановок $S_{p_1+p_2} \Rightarrow$ достаточно посмотреть каким знаком отмечается перестановка $(i_1 \dots i_{p_1}, j_1 \dots j_{p_2})$ и $(j_1 \dots j_{p_2}, i_1 \dots i_{p_1})$. Переведем первую перестановку во вторую конеческое число транспозиций соседних элементов.

$$(i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_1 j_2 \dots j_{p_2}) \underset{p_1 \text{ раз}}{\sim} (j_1 i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_2 \dots j_{p_2}) \underset{p_2 \text{ раз}}{\sim} (j_1 j_2 i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_3 \dots j_{p_2}) \sim \dots \sim \sim$$

имея: $p_1 \text{ раз по } p_2 \text{ раз} = p_1 p_2$
транспозиций

$$\Rightarrow f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$$

В частности: $p_1 = p_2 = 1$, т.е. $\forall f, g \in V^* \quad f \wedge g = -g \wedge f \quad \text{и} \quad f \wedge f = 0$

2° $f \wedge (g+h) = f \wedge g + f \wedge h$ дистрибутивность
 $(f+g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$

доказателство: об-ва $2^{\circ}, 3^{\circ}$ следуют из об-в 1°.

3° $\forall \lambda \in K \quad (\lambda f) \wedge g = f \wedge (\lambda g) = \lambda(f \wedge g)$

4° $f \wedge 0_{\Lambda^{p_2} V^*} = 0_{\Lambda^{p_1} V^*} \wedge g = 0_{\Lambda^{p_1+p_2} V^*}$

5° $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$ ассоциативность, т.е. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$

доказателство: $f \in \Lambda^{p_1} V^*$, $g \in \Lambda^{p_2} V^*$, $h \in \Lambda^{p_3} V^*$

$$\begin{aligned} & \frac{p_1! p_2! p_3!}{(p_1+p_2+p_3)!} (f \wedge g) \wedge h = \text{Aet}((\text{Aet}(f \otimes g) \otimes h)) = \text{Aet}\left(\frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\sigma)} \sigma(f \otimes g) \otimes h\right) = \text{Aet} \text{ нен. опр.} \\ & = \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}(\sigma(f \otimes g) \otimes h) = \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}(\sigma(f \otimes g \otimes h)) = \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\sigma)} (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}(f \otimes g \otimes h) \\ & \text{О-перестановка, представляющая } (p_1+p_2) \text{ шагов матрицы } f \otimes g \\ & \tau-\text{перестановка } (p_1+p_2+p_3) \text{ шагов такая, что представляющая первое } (p_1+p_2) \text{ шагов по} \\ & \text{перестановке } \sigma, \text{ а последние } p_3 \text{ шагов оставляют без изменения. Очевидно, } (-1)^{\sigma(\sigma)} = (-1)^{\sigma(\tau)} \end{aligned}$$

аналогично показываемо $\frac{p_1! p_2! p_3!}{(p_1+p_2+p_3)!} f \wedge (g \wedge h) = \text{Aet}(f \otimes g \otimes h) \Rightarrow$

\Rightarrow т.о. $f \wedge g \wedge h = \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{Aet}(f \otimes g \otimes h)$

Далее, и.м.и. можно определить внешнее произведение на модуль конечное число внешних форм. Составим доказательство ассоциативности для них!

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_m = \frac{(p_1+p_2+\dots+p_m)!}{p_1! p_2! \dots p_m!} \text{Aet}(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_m), \text{ где } f_k - p_k-\text{форма.}$$

т.е. в базисе V

$w^{i_1} \dots w^{i_p}$ базис V^* , соответствующий к e , т.е. $w^k - 1$ -форма.

$$\Rightarrow w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p} = p! \text{Aet}(w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p}) - p-\text{форма.}$$

$j_k \in \{1, \dots, n\}$
 $k = 1, \dots, p$

из об-ва 1°: $w^{i_1} \wedge w^{j_1} = -w^{j_1} \wedge w^{i_1} \quad \forall (i, j)$
 $w^{i_1} \wedge w^{i_1} = 0$

$$\Rightarrow w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{j_2} \wedge \dots \wedge w^{j_p} = -w^{j_2} \wedge \dots \wedge w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}$$

$w^{j_2} \wedge \dots \wedge w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{j_3} \wedge \dots \wedge w^{j_p} = 0 \quad \forall (i, j)$

Теорема! (о базисе пр-ва внешних форм)

совокупность всевозможных p -форм вида

$$[w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p}], \text{ где } i_1 < i_2 < \dots < i_p, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

образует базис пр-ва $\Lambda^p V^*$

Dok-bo: $f \in \Lambda^p V^*$ $\Rightarrow f = A \text{et } f = d_{j_1 \dots j_p} A \text{et } (w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p}) = \frac{d_{j_1 \dots j_p}}{p!} w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p}$

Замечание: $d_{j_1 \dots j_p}$ ногородим.

$f \in T(p, 0) \Rightarrow f = d_{j_1 \dots j_p} \underbrace{w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p}}_{\text{базис np-ва } T(p, 0)}$

если хотя бы 2 индекса одинаковы, то произведение = 0
 \Rightarrow все j_i различны \rightarrow упорядочение.

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} \Rightarrow \text{перенумерация схемы}$$

док-во мат. индукц.: $\exists \quad \textcircled{1} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} = p! \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} A \text{et } (w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p})$

применение обеих частей рав-ва к базису векторного np-ва V : $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p} \quad j_1 < j_2 < \dots < j_p$

$$\textcircled{1} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} w^{i_{\sigma_1}}(e_{j_1}) \dots w^{i_{\sigma_p}}(e_{j_p}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \delta_{j_1 \dots j_p}^{i_{\sigma_1} \dots i_{\sigma_p}} = \beta_{d_{j_1 \dots j_p}} \quad \forall j_1 < j_2 < \dots < j_p$$

$$\beta_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} d_{i_{\sigma_1} \dots i_{\sigma_p}} = d_{[i_1 \dots i_p]}$$

Следствие:

- 1) $\dim \Lambda^p V^* = C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- 2) $\forall f \in \Lambda^p V^* \quad f \Leftrightarrow (d_{j_1 \dots j_p})$ кооп-мое f np-ва $T(p, 0)$

$\Rightarrow \beta_{i_1 \dots i_p} = d_{i_1 \dots i_p}$ кооп-мое f np-ва $\Lambda^p V^*$

= мат. индукц. ■

Теорема: $\forall f^1, f^2, \dots, f^p \in V^*$ (*т.е. f^k - 1-форма*)
 $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad f^1 \wedge \dots \wedge f^p (\xi_1, \dots, \xi_p) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{pmatrix}$

Dok-bo: $f^1 \wedge \dots \wedge f^p = p! A \text{et } (f^1 \otimes \dots \otimes f^p)$
 $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad f^1 \wedge \dots \wedge f^p (\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma(f^1 \otimes \dots \otimes f^p)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_p} (\xi_1, \dots, \xi_p) =$

$$= \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} f^{i_1}(\xi_1) \dots f^{i_p}(\xi_p) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{pmatrix}$$

Следствие:

- 1) $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \quad \xi_k = \xi_k^{i_k} e_{i_k} \quad \forall w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} (\xi_1, \dots, \xi_p) = \det \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_p^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{i_p} & \dots & \xi_p^{i_p} \end{pmatrix}$
- 2) если $p=n$, $\forall f^1, \dots, f^n \in V^*$: $f^k = a_{j_k}^k w^{i_k}, \quad A = (a_{j_k}^k)_{n \times n}$
 $\Rightarrow f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det A \cdot w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_n}$

док-во: 1) доказыво, из m-ура $w^{i_k}(\xi_j) = \xi_j^{i_k}$ ■

$$2) \forall k \quad f^k(\xi_j) = (a_{j_1}^k \dots a_{j_n}^k) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} \\ \vdots \\ \xi_n^{i_1} \end{pmatrix} \Rightarrow f^1 \wedge \dots \wedge f^n (\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^n(\xi_1) & \dots & f^n(\xi_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^n & \dots & a_{j_n}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{i_1} & \dots & \xi_n^{i_n} \end{pmatrix} \right) = \det A \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_n^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{i_n} & \dots & \xi_n^{i_n} \end{pmatrix}}_{w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_n} (\xi_1, \dots, \xi_n)} \Rightarrow f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det A \cdot w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_n}$$

Примечание:

1) $n=4 \quad f \in \Lambda^2 V^*, \quad f$ -2 форма $f = w^1 \wedge w^2 + w^1 \wedge w^3 + w^1 \wedge w^4 + w^2 \wedge w^3 + w^2 \wedge w^4$

Внимание к-то тено форма f в базисе np-ва V , сопряженного базису w . (*т.е. в базисе e*).

Разберемая с формулой задача: f -2 форма, т.е. $f \in T(2,0) \Leftrightarrow (d_{ij})$ к-то тено форма f в np-ва $T(2,0)$.

$i < j \quad w^i \wedge w^j = 2! A \text{et } (w^i \otimes w^j) = w^i \otimes w^j - w^j \otimes w^i$

$$\Rightarrow A = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ d_{ij} = 1 \quad d_{ji} = -1 \\ i < j \end{matrix}$$

$d_{ij} = f(e_i, e_j)$ no def.

\rightsquigarrow no означает "в базисе np-ва V "

2) $f, g, h \in V^*$
 \downarrow -произв.
 $n=3$

$$f = w^1 + w^2 + 2w^3$$

$$g = w^1 + 3w^2 + w^3$$

$$h = w^1 + w^2$$

Найти $f \wedge g \wedge h$

T.K. $p=n=3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f \wedge g \wedge h = \det \begin{pmatrix} w^1 \wedge w^2 \wedge w^3 \end{pmatrix} = -3w^1 \wedge w^2 \wedge w^3$
 cm.
 остаток.

 $\det A = -3$

Упр.: а) $f = w^1 + w^2 + 2w^3 - w^4$
 $g = w^2 - w^3 + w^4$
 $h = w^1 + w^3$

Найти $f \wedge g \wedge h$ (указание: использовать обозначение упр. а)
 $w^i \wedge w^j = -w^j \wedge w^i, w^i \wedge w^i = 0$

б) найти значение $f \wedge g \wedge h$ на векторах
 $\xi_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$
 $\xi_2 = e_2 + e_3 - e_4$
 $\xi_3 = e_2 + e_4$

8.6. Дополнение к задаче по мере появления обозначения нр. виа внешних форм:

$$\beta_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} d_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} = d_{i_1 \dots i_p} = d_{i_1 \dots i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

т.к. f кососимм. тензор $\Rightarrow d_{i_1 \dots i_p} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} d_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}$

ночес теорема о внешнем произведении f форм записывает следствие 2 из „новое“ следствие 2. (при этом старое следствие 2 будем частично считаем)

„новое“ следствие 2! $\forall f^1, \dots, f^p \in V^*, f^k \Leftrightarrow (a_{i_1}^k \dots a_{i_p}^k)$ вектор
 \downarrow -произв.

$$\Rightarrow f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \sum_{i_1 \dots i_p} \det \begin{pmatrix} a_{i_1}^1 \dots a_{i_p}^1 \\ a_{i_1}^p \dots a_{i_p}^p \end{pmatrix} \cdot w^{i_1 \wedge \dots \wedge i_p}$$

задача! $\exists f = f^1 \wedge \dots \wedge f^p$ кососимм. тензор. $\Rightarrow f = \sum_{i_1 \dots i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} w^{i_1 \wedge \dots \wedge i_p}$

$$\beta_{i_1 \dots i_p} = d_{i_1 \dots i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = f^1 \wedge \dots \wedge f^p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \det \begin{pmatrix} f^1(e_{i_1}) \dots f^1(e_{i_p}) \\ f^p(e_{i_1}) \dots f^p(e_{i_p}) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{i_1}^1 \dots a_{i_p}^1 \\ a_{i_1}^p \dots a_{i_p}^p \end{pmatrix}, \text{ т.к. по def } a_{i_j}^k = f^k(e_{i_j})$$

Замечание! f - p -форма, $f = \sum_{i_1 \dots i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} w^{i_1 \wedge \dots \wedge i_p}$

$\beta_{i_1 \dots i_p}$ координаты формы f в базисе нр. виа $N^p V^*$ наз-м координатами.

и записываются в строку,
 в определенном порядке.

Пример! $\underset{p=3}{\underset{n=4}{\beta_{123}, \beta_{124}, \beta_{134}, \beta_{234}}}) = f$

9 Евклидовы и унитарные пространства

9.1 Скалярное, псевдоскалярное произведение в Евкл. и унитарном пространствах. Норма в Евклидовом и унитарном пространствах.

Определение 1. V – линейное пространство над \mathbb{R} (вещ. пр-во)

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Скалярное произведение, если удовлетворяет 4м аксиомам:

$$\forall x, y \in V :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

1. $(x, y) = (y, x)$ (симметр.)
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (Аддитивность по первому аргументу)
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ (Однородность по первому аргументу)
4. $\forall x \neq 0 (x, x) > 0$ (Положительная определенность)

Из этих свойств можно понять, что скал. произведение – билинейная функция.

Из 3 $\Rightarrow \forall x \in V (x, \emptyset) = (\emptyset, x) = 0$

Из 4 $\Rightarrow \forall x \in V (x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = \emptyset$

Определение 2. V конечномерное, линейное пространство над \mathbb{R}

$(V, (\cdot, \cdot))$ – Евклидово пространство

Замечание. V бесконечномерное $(X, (\cdot, \cdot))$ предгильбертово

Если полное метрическое пространство, то оно называется гильбертовым

(Полное – любая фундаментальная последовательность сходится, из матанализа)

Определение 3. V – линейное пространство над полем \mathbb{C} (комплексн. линейное пространство)

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

Псевдоскалярное произведение:

$$\forall x, y, z \in V :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}$$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (Аддитивность)
3. $(\lambda x, z) = \lambda(x, z)$ (Однородность по 1му аргументу) Из 2 и 3 \Rightarrow линейность по 1 аргументу
4. $\forall x \neq 0 (x, x) > 0$ (Положительная определенность)

1, 2, 3 $(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$

$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)}$ Псевдооднородность по 2 арг.

$$(x, x) = \overline{(x, x)} \leftrightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$$

$\forall x \in V (x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение 4. Конечномерное V над полем \mathbb{C}

$(X, (\cdot, \cdot))$ называется **унитарными** (псевдоевклидовыми, эрмитовыми)

Определение 5. $(V, (\cdot, \cdot))$ Евклидово (унит.) пространство

$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\forall x \in V \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}$ Евклидова норма

Аксиомы нормы:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (невырожденность)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Ввели такую норму, удостоверимся, что все аксиомы выполнены:

1. Очевидно из 4
2. $\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\frac{\lambda \bar{\lambda}(x, x)}{|\lambda|^2}} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$
3. ?

Давайте докажем неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$$\forall x, y \in (V, (\cdot, \cdot)) \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

2) Причем $\Leftrightarrow x$ и y линейно зависимы

Доказательство. (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in V$

$$0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \bar{\alpha}(x, x) + \alpha \bar{\beta}(x, y) + \beta \bar{\alpha}(y, x) + \beta \bar{\beta}(y, y)$$

$$\begin{aligned} & \alpha := (y, y) \\ \square \quad & \beta = -(x, y) \Rightarrow \bar{\beta} = -(y, x) \end{aligned}$$

Подставим это в равенство, получим $= \underbrace{(y, y)(\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \bar{\beta}\beta - \bar{\beta}\beta + \beta\bar{\beta})}_{\geq 0} \Rightarrow \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |(x, y)|^2 \geq 0$

(b) $\Leftrightarrow x$ и y линейно завис.

Если $x = 0$ или $y = 0 \Rightarrow$ очевидно выполняется

$$\Rightarrow \exists x \neq 0 \text{ и } y \neq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \exists |(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$$

Из доказательства 1 $\begin{cases} \exists \alpha(y, y) > 0 \text{ (т.к. } y \neq 0) \\ \exists \beta = -(x, y) \end{cases} \quad 0 = \|x\|^2 \|y\|^2 = |(x, y)| = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y)$

$\Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0 \quad \alpha, \beta \text{ не все нули} \Rightarrow$ линейно завис. x, y

$(\Leftarrow) \quad x, y$ линейно зав. $\Rightarrow \exists \alpha, \beta$ ^{не все нули} $\alpha x + \beta y = 0$

$\square \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$ противор. $\Rightarrow \alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$

$\begin{cases} (\alpha x + \beta y, x) = 0 \\ (\alpha x + \beta y, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x, x) + \beta(y, x) = 0 \Rightarrow \alpha\|x\|^2 = -\beta(y, x) \\ \alpha(x, y) + \beta(y, y) = 0 \Rightarrow \beta\|y\|^2 = -\alpha(x, y) \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta\|x\|^2\|y\|^2 = \alpha\beta(x, y)(y, x)$

$$\Rightarrow \|x\|^2\|y\|^2 = |(x, y)|^2$$

■

Вернемся к 3 аксиоме $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + \underbrace{(x, y) + (y, x)}_{2Re(x,y) \leq 2|(x,y)| \leq 2\|x\|\|y\|} + (y, y) \stackrel{=||y||^2}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 =$$

$$(\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Diagram illustrating the triangle inequality. Two vectors a and b are shown originating from the same point. Their sum $z = a + b$ is shown as a vector from the origin. The magnitude of z is given by $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Определение 6. $\forall x \in V$

$$\text{Длина вектора } \|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Нормировать вектор $\frac{x}{\|x\|} = x_0$ орт вектора, $\|x_0\| = 1$

$\forall x, y \neq 0 \quad x, y \in V$

$$\phi - \text{угол между } x \text{ и } y : \cos \phi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \quad (\text{КБШ: } \frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|} \leq 1)$$

Примеры.

1. V_3 геом. вект. $(x, y) = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos \phi$

скал

2. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ выполнены 1-4
 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$
 $(\text{Евкл. } \sum x_i y_i)$

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_i^n |x_i|^2 \geq 0$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2} \text{ евкл. норма}$$

$$\text{КБШ: } |\sum_i^n \bar{x}_i y_i| \leq (\sum_i^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_i^n |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Нер-во треугольника:

$$(\sum_i^n |x_i + y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_i^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_i^n |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad u, v \in R[a, b]$ $\int_a^b u(x) dx \quad \int_a^b v(x) dx$
 интегр.

$$f = u + iv$$

$$\int_a^b f dx = \int_a^b u dx + i \int_a^b v dx$$

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall f, g \quad (f, g) = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx$$

Все аксиомы очевидно выполнены, есть проблемы с 4ой аксиомой.

$$(f, f) = \int_a^b |f|^2 dx \geq 0$$

$= 0? \Leftrightarrow f \equiv 0$ почти везде на $[a, b]$

Возникает евклидова норма.

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx} \quad L^2([a, b]) - \text{пространство}$$

$$\text{КБШ: } |\int_a^b f \bar{g} dx| \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Неравенство Буняковского})$$

$$\text{Неравенство треугольника: } (\int_a^b |f + g|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

(Неравенство Минковского)

9.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис (о.н.б.) Ортогональные системы векторов.

$(V, (\cdot, \cdot))$ евклидово (унит.) пространство

Определение 1. $\forall x, y \in V$ ортогональные, если $(x, y) = 0$

(Очевидно, $\cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \rightsquigarrow$ перпендикулярны)

\emptyset ортогонален $\forall x \in V, \emptyset$ ортогонален V

$y \in V : \forall x \in V \quad (y, x) = 0$ т.к. $(y, y) = 0 \Rightarrow y = \emptyset$

Определение 2. $v_1 \dots v_m$ парно-ортогональны, если $\forall i \neq j : (v_i, v_j) = 0$

Система $v_1 \dots v_m$ ортонормированна, если $\forall (i, j) \boxed{(v_i, v_j) = \delta_{ij}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

δ_{ij} – символ Кронекера

Утверждение. $v_1 \dots v_m$ парно-ортог. \Rightarrow линейно незав.

Доказательство. $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \emptyset \quad \alpha_i \in K \quad 0 = (\emptyset, v_i) = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, v_j \right) = \sum_i^m \alpha_i \boxed{\delta_{ij}} = \alpha_j (v_j, v_j) \neq 0$

$\Rightarrow \forall j \alpha_j = 0 \Rightarrow$ Линейно независ. ■

Существует ли такая система?

\exists о.н.с. в V ?

Теорема 1 (Процесс ортогон. Грама-Шмидта).

\forall система векторов $a_1 \dots a_m$ может быть заменена парно-ортог. системой векторов $b_1 \dots b_k$, с сохранением лин. оболочки

$span(a_1 \dots a_m) = span(b_1 \dots b_k) \quad k \leq m$

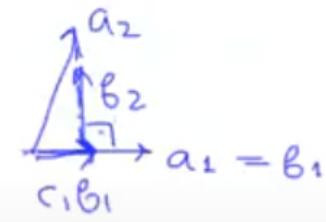
Доказательство.

1. $a_1 \dots a_m$ лин. незав.

М.М.И.

- (a) База индукции $m = 1 \quad a_1 = b_1$
- (b) \square верно для $k - 1$ вектора — инд. предположение
- (c) Инд. переход. Докажем для k векторов.

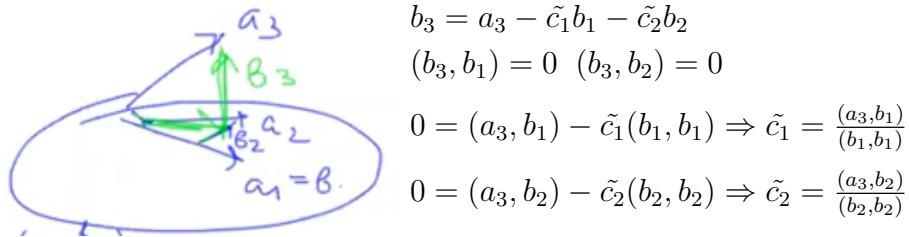
$a_1 \ a_2 \ a_3$



$$b_2 = a_2 - c_1 b_1$$

$$b_2 \perp b_1$$

$$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) - c_1 (b_1, b_1) \Rightarrow c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$$



Теперь для k -мерного случая.

$a_1 \dots a_{k-1} \rightsquigarrow b_1 \dots b_{k-1}$ попарно ортог.

$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i \quad c_i = ? \quad (b_k, b_i) = 0 \quad i = 1 \dots k-1$$

$$(b_k, b_j) = (a_k, b_j) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i (b_i, b_j) = (a_k, b_j) - c_j (b_j, b_j)$$

$$\Rightarrow c_j = \frac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)} \quad j = 1 \dots k-1$$

$$\Rightarrow \text{span}(a_1 \dots a_k) = \text{span}(\underset{\text{попарно-ортог.}}{b_1 \dots b_k})$$

2. $a_1 \dots a_m$ линейно зав. $\rightsquigarrow \Gamma\text{-III}$ на каком-то этапе $b_j = 0$

\rightsquigarrow проредить $a_1 \dots a_m \rightsquigarrow a_{i_1} \dots a_{i_k} \rightsquigarrow \Gamma\text{-III}$.
лини. независ.

Следствие 1. В \forall евкл. (унит.) пространстве \exists О.Н.Б. (ортого-нормир. базис)

Доказательство. Упр.

Следствие 2. \forall лин. независ. систему векторов евкл. (унит.) про-ва можно дополнить до о.н.б.

Доказательство. Упр.

Примеры.

1. $f : [a, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$f - 2\pi$ период.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) \bar{g}(x) dx$$

(a) \mathbb{R}

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \quad ([0, 2\pi])$$

попарно-ортог. веш.

$$(\cos kx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(m+k)x + \sin(m-k)x) dx = 0$$

$$(\sin kx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m+k)x - \cos(m-k)x) dx = 0$$

И т.д.

$$\left\| \cos kx \right\|_{k \neq 0} = \sqrt{(\cos kx, \cos kx)} = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$\|1\| = \sqrt{(1, 1)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi}$$

(b) $\mathbb{C} \setminus \{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ попарно-ортог.

$$(e^{ikx}, e^{imx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx =$$

$$\begin{aligned} &=_{k \neq m} \frac{1}{i(k-m)} e^{i(k-m)x} \Big|_0^{2\pi} = 0 \\ &=_{k=m} \|e^{ikx}\|^2 = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi \\ \|e^{ikx}\| &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

2. P_n многочлены $\deg \leq n \subset L^2([-1, 1])$

$$\forall p, q \in P_n \quad (p, q) = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx \quad P_n = \text{span} 1, x, x^2, \dots, x^n \text{ канон. базис}$$

$$(x^k, x^m) = \int_{-1}^1 x^{k+m} dx \begin{cases} \neq 0 & k+m - \text{четн} \\ = 0 & k+m - \text{нечетн.} \end{cases}$$

$1, x, x^2, \dots, x^n$ Ортогонализуем Г-III

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 & (b_1, b_1) &= \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx = 2 \\ b_2 &= a_2 - c_1 b_1 & c_1 &= \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \quad (a_2, b_1) = \int_{-1}^1 x \cdot 1 dx = 0 \\ && \tilde{c}_1 &= \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} \quad (b_1, b_2) = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\ b_3 &= a_3 - \tilde{c}_1 b_1 - \tilde{c}_2 b_2 & (a_3, b_1) &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx = \frac{2}{3} \\ && \tilde{c}_2 &= \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} \quad (a_3, b_2) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^2 dx = 0 \end{aligned}$$

$$b_3 = x^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$b_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$P_n = \text{span}(1, x, \dots, x^n) \underset{\text{Г-III}}{\leadsto} l_0(x) = 1 \quad l_1(x) = x \quad l_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \quad l_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \dots$$

Полиномы Лежандра

н.у.о. $\rightarrow l_k(x) = \lambda_k((x^2 - 1)^k)^{(k)}$ Общая ормула полиномов Лежандра с точностью до const

Доказательство. $q_k(x) = ((x^2 - 1)^k)^{(k)}$ $\deg q_k = k$

$$\forall m = 0, \dots, k-1 \quad (q_k, x^m) = \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k)} x^m dx = \int_{-1}^1 x^m d((x^2 - 1)^k)^{(k-1)}$$

$$\boxed{f' dx = df}$$

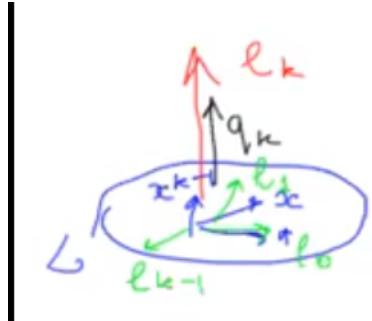
$$\begin{aligned} &= x^m \left(\frac{(x^2 - 1)^k}{(x-1)^k (x+1)^k} \right)^{(k-1)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k-1)} \underbrace{dx^m}_{mx^{m-1} dx} = -m \int_{-1}^1 x^{m-1} d((x^2 - 1)^k)^{(k-2)} = \dots \\ &\quad \text{2 корня: } \pm 1 \text{ кр-ти } k \end{aligned}$$

$$= \pm m! \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k-m)} dx = \pm m! ((x^2 - 1)^k)^{(k-m-1)} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$L = \text{span}(1, \dots, x^{k-1})$$

$$q_k \perp L$$

$$\deg q_k = k \quad \text{span}(q_0, q_1, \dots, q_k) = \text{span}(1, x, \dots, x^k)$$



$$\Rightarrow \lambda_k q_k = l_k(x)$$

$$q_k(1) = \left. \left(\frac{(x^2 - 1)^k}{(x-1)^k (x+1)^k} \right)^{(k)} \right|_{x=1} = \sum_{m=0}^k C_k^m ((x+1)^k)^{(m)} ((x-1)^k)^{(k-m)} \Big|_{x=1} =$$

Применили формулу Лейбница для взятия производной

$$= (x+1)^k ((x-1)^k)^{(k)} \Big|_{x=1} = 2^k k!$$

$$\boxed{l_k(x) = \frac{1}{2^k k!} ((x^2 - 1)^k)^{(k)} \\ l_k(1) = 1}$$

Формула Родрига для полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} \|l_k\|^2 &= \int_{-1}^1 \underbrace{\left(\frac{1}{2^k k!}\right)^2 ((x^2 - 1)^k)^{(k)}}_A \underbrace{((x^2 - 1)^k)^{(k)}}_{d((x^2 - 1)^k)^{(k-1)}} dx = \\ &= A((x^2 - 1)^k)^{(k)} ((x^2 - 1)^k)^{(k-1)} \Big|_{-1}^1 - A \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k-1)} \underbrace{d((x^2 - 1)^k)^{(k)}}_{((x^2 - 1)^k)^{(k+1)} dx} = \\ &= (-1)^k A \int_{-1}^1 \underbrace{((x^2 - 1)^k)^{(2k)}}_{(2k)!} (x^2 - 1)^k dx = (-1)^k A(2k)! \cdot 2 \int_0^1 \frac{(x^2 - 1)^k}{(-1)^k (1-x^2)^k} dx = \\ &= x = \sin t \quad \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (k!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt = \\ &dx = \cos t dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2^k k!}{(2k+1)!!}$$

$$= \frac{(2k)!2^k \cdot k!}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+1)!!} = \frac{(2k)!2}{\underbrace{2^k k!(2k+1)!!}_{(2k+1)!}} = \frac{2}{2k+1}$$

$$\|l_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{k!2^k} ((x^2 - 1)^k)^{(k)} \text{ Нормиров. система полиномов Лежандра}}$$

3. $L^2([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ Скалярное произведение с весом

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f \cdot g \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Многочлены Чебышёва $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)$ $k = 0, 1, 2 \dots$
ортогон. система

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x \quad T_2 = 2x^2 - 1$$

$$(T_k, T_m) = 0 \quad k \neq 0$$

$$\deg T_k = k$$

4. $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$

Многочлены Эрмита $H_k(x) = e^{x^2} (e^{-x^2})^{(k)}$ $k = 0, 1, 2 \dots$
ортог. система

$$\deg H_k = k$$

$$(H_k, H_m) = 0 \quad k \neq m$$

$$H_0 = 1 \quad H_1 = -2x \quad H_2 = 4x^2 - 2 \dots$$

9.3 Матрица Грама. Объем к-мерного паралл-да. Ортогональная и унитарная матрица

$(V, (\cdot, \cdot))$ евклид. (унит.)

$$\forall x \in V \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x = \sum_i^n x_i e_i$$

$e_1 \dots e_n$ базис

$$\forall y \in V \leftrightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad y = \sum_i^n y_i e_i$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j (e_i, e_j)$$

Определение 1. $\Gamma = (g_{ij})_{n \times n}$ $g_{ij} = (e_i, e_j)$

Матрица Грама $\boxed{(x, y) = x^T \Gamma \bar{y}}$

Замечание.

1. евкл. $y = \bar{y}$

2. $e_1 \dots e_n$ попарно-ортог. $\Gamma = diag(\|e_1\|^2 \dots \|e_n\|^2)$
 $(e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j \quad (e_i, e_i) = \|e_i\|^2$

3. $e_1 \dots e_n$ о.н.б. $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \Gamma = E \rightsquigarrow (x, y) = x^T \bar{y} (x^T y)$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

Определение 2. $a_1 \dots a_k$; $G(a_1 \dots a_k)$ = $((a_i, a_j))_{k \times k}$ ($\Gamma = G(e_1 \dots e_n)$)
матрица Грама системы векторов $a_1 \dots a_n$

$$g(a_1 \dots a_k) = \det G(a_1 \dots a_k)$$

Определение 3. $A_{k \times k}$ A^* называется сопряженной к A : $A^* = \overline{A^T}$

A называется самосопряж., если $A^* = A$

$\mathbb{R}: A^T = A$ (A симметр.)

$\mathbb{C}: \overline{A^T} = A$ (A эрмитова)

$$G^* = G \quad ((a_i, a_j) = \overline{(a_j, a_i)})$$

Матрица Грама самосопряжена.

Теорема 1 (об $\det G$).

$$a_1 \dots a_k \underset{\Gamma\text{-III}}{\sim} b_1 \dots b_k$$

$$\Rightarrow g(a_1 \dots a_k) = g(b_1 \dots b_k) = \|b_1\|^2 \|b_2\|^2 \dots \|b_k\|^2$$

Доказательство.

$$g(a_1 \dots a_k) = \det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, a_3) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, a_3) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & & & & \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{из 2 стр. вычтем 1 стр., умноженн. на} \\ \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \\ a_1 = b_1 \end{array}$$

$$b_1 = a_1$$

$$b_m = a_m - \sum_{i=1}^{m-1} c_i b_i \quad c_i = \frac{(a_m, b_i)}{(b_i, b_i)}$$

$$(b_m, a_j) = (a_m, a_j) - \sum_{i=1}^{m-1} c_i (b_i, a_j)$$

$$(a_j, b_m) = (a_j, b_m) - \sum_{i=1}^{m-1} c_i (a_j, b_i)$$

$$(b_m, b_m) = (a_m, b_m) = (b_m, a_m)$$

$$= \det \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, a_2) & (b_1, a_3) & \dots & (b_1, a_k) \\ (b_2, b_1) & (b_2, a_2) & (b_2, a_2) & \dots & (b_2, a_k) \\ (a_3, b_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) & \dots & \\ \dots & & & & \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{To же для столбцов} \\ \text{вычтем из 2 столбц. 1 стол., умнож. на} \\ \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \dots & (b_1, a_k) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) & \dots & (b_2, a_k) \\ \vdots & \vdots & & \\ (a_k, b_1) & (a_k, b_2) & \dots & \dots \end{pmatrix} = \dots = \det \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (b_k, b_k) \end{pmatrix}$$

Следствие 1. $a_1 \dots a_k$ линейно независима $\Leftrightarrow f(a_1 \dots a_k) > 0$

Доказательство. $a_1 \dots a_k$ лин. завис. \Leftrightarrow среди b_i есть нулевой $\Rightarrow \|b_{i_0}\| = 0 \Rightarrow g(a_1 \dots a_k) = 0$

$$\left(\begin{array}{c} g(a_1 \dots a_k) \geq 0 \\ \forall a_1 \dots a_k \end{array} \right)$$

Следствие 2. $a_1 \dots a_{k-1}$ лин. незав. $a_1 \dots a_k \underset{\Gamma-III}{\sim} b_1 \dots b_k$

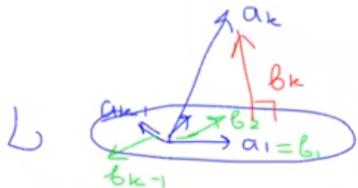
$$\|b_k\|^2 = \frac{g(a_1 \dots a_k)}{g(a_1 \dots a_{k-1})}$$

Доказательство. $a_1 \dots a_{k-1} \underset{\Gamma-III}{\sim} b_1 \dots b_{k-1}$

$$g(a_1 \dots a_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} \|b_i\|^2 > 0$$

$$g(a_1 \dots a_k) = \prod_{i=1}^k \|b_i\|^2$$

Замечание. $L = \text{span}(a_1 \dots a_{k-1}) = \text{span}(b_1 \dots b_{k-1})$
лини. незав.



$$a_k = y + b_k \leftarrow \text{ортогон. составляющая } a_k$$

$$b_k = a_k - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i}_{y \in L} \quad \text{относительно } L$$

$$b_k \perp n_i \Rightarrow [b_k \perp L]$$

$$G(A_1 \dots a_k) = ((a_i, a_j))_{k \times k}$$

$$g(a_1 \dots a_k) = \det G = \|b_1\|^2 \dots \|b_k\|^2$$

$$a_1 \dots a_k \underset{\Gamma-III}{\sim} b_1 - b_k \quad \text{попарно-ортог}$$



$$L = \text{span}(a_1 \dots a_{k-1}) = \text{span}(b_1 \dots b_{k-1})$$

$$a_k = y + b_k$$

b_k — ортогон. сост. a_k относит. L

Определение 4. $(V, (\cdot, \cdot))$ $a_1 \dots a_k \in V \quad 1 \leq k \leq n$

$$\prod(a_1 \dots a_k) = \{x \in V | x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \quad \alpha_i \in [0, 1] \}_{\forall i=1,k}$$

k -мерный параллелепипед, построенный на векторах $a_1 \dots a_k$

$$V = V_3 \cong \mathbb{R}^3$$

$k = 1 \quad x = \alpha_1 a_1 \quad \alpha_1 \in [0, 1] \quad 0 \longrightarrow a_1$ отрезок

$$k = 2 \quad \begin{array}{c} \text{Diagram of a parallelogram formed by vectors } a_1 \text{ and } a_2. \\ \text{Point } x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \text{ lies in the parallelogram.} \\ \alpha_{1,2} \in [0, 1] \end{array}$$

$$k = 3 \quad \begin{array}{c} \text{Diagram of a parallelepiped formed by vectors } a_1, a_2, a_3. \\ \text{Point } x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \text{ lies in the parallelepiped.} \\ \alpha_i \in [0, 1] \end{array}$$

Определение 5. $V(\prod(a_1 \dots a_k)) = (g(a_1 \dots a_k))^{1/2}$ объем k -мерного пар-да

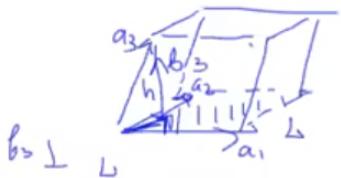
$$\boxed{V(\prod(a_1 \dots a_k)) = V(\prod(a_1 \dots a_{k-1})) \cdot \|b_k\|} \quad \text{см. следствие к т-му о } \det G$$

$$a_1 \dots a_k \underset{\Gamma-\text{III}}{\sim} b_1 \dots b_k$$

$$1. \ k = 1 \quad V(\longrightarrow a_1) = \sqrt{g(a_1)} = \sqrt{(a_1, a_1)} = \|a_1\| - \text{длина отрезка}$$

$$2. \ k = 2 \quad V(\begin{array}{c} \text{Diagram of a parallelogram with base } a_1 \text{ and height } b_2. \\ \text{Area } S = \|a_1\| \cdot \|b_2\|. \end{array}) = \sqrt{g(a_1, a_2)} = \sqrt{g(a_1)} \cdot \|b_2\| = \|a_1\| \cdot \|b_2\| = \frac{\|b_1\| \cdot \|b_k\|}{\text{основание высота}} = S \text{ площадь пар.}$$

$$3. \ k = 3 \quad V(\begin{array}{c} \text{Diagram of a parallelepiped with base } a_1, a_2, a_3. \\ \text{Volume } V_{\text{пар-да}} = \|b_1\| \|b_2\| \|b_3\|. \end{array}) = \sqrt{g(a_1, a_2, a_3)} = \sqrt{g(a_1, a_2)} \cdot \frac{\|b_3\|}{\|S\| \text{ основания} \cdot \|h\| \text{ высота}} = V_{\text{пар-да}}$$



$a_1 \dots a_k$ линейно зав. $\Leftrightarrow g(a_1 \dots a_k) = 0$

$k = 2 \quad a_1, a_2$ коллин. $\Leftrightarrow S_{\text{пар.}} = 0$

$k = 3 \quad a_1 a_2 a_3$ компл. $\Leftrightarrow V = 0$

$$\exists e_1 \dots e_n \text{ базис } V \quad \Gamma = ((e_i, e_j)) = G(e_1 \dots e_n)$$

Свойства Γ

1. $\Gamma^* = \Gamma$ (самосопряженность)
2. $\forall x \neq 0 \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \lambda_{=(x,x)}^T \Gamma \bar{x} > 0$

Эти 2 свойства $\boxed{\Gamma > 0}$ Положительно определенная матрица

3. $\Delta_k = g(e_1 \dots e_k)$ угловые миноры матрицы Γ

$$\Gamma = \left(\begin{array}{c|c|c|c} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) & \dots \\ \hline (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) & \dots \\ \hline (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) & \dots \\ \hline & \dots & & \end{array} \right) \quad \boxed{\forall k = 1 \dots n \quad \Delta_k > 0}$$

Доказательство. Из следствия 1 $a_1 \dots a_k$ лин. независ. $\Leftrightarrow g(a_1 \dots a_k) > 0$

$e_1 \dots e_k$ лин. независ. $\forall k = 1 \dots n$ ■

В частности $\Delta_n = \det \Gamma > 0 \Rightarrow \Gamma$ невырождена

4. $e_1 \dots e_n$ базисы V $\boxed{T = T_{e \rightarrow e'}} \quad \Gamma = ((e_i, e_j)) \quad \Gamma' = ((e'_i, e'_j))$

Доказательство.

$x \leftrightarrow x'$ в базисе e

$\leftrightarrow x'$ в базисе e' $x = Tx'$

$$(x, y) = x^T \Gamma \bar{y} = (x')^T T^T \Gamma \bar{T} \bar{y}'$$

||

$$(x')^T \Gamma' \bar{y}'$$

$$\forall x, y \quad x = e'_i \quad y = e'_j$$

$$\boxed{\Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}}$$

В частности, e и e' о.н.б. $V \quad \Gamma = \Gamma' = E$

$$E = T^T \bar{T} \Rightarrow \underbrace{\bar{T}^T}_{T^*} T = E \quad \boxed{T^* T = E}$$

$$\boxed{e, e' \text{ о.н.б.} \Rightarrow T = T_{e \rightarrow e'} \text{ унитарн.(ортог.)}}$$

Определение 6. Невырожд. комплекснозн. (веществ) матрица $Q_{n \times n}$ называется унитарной (ортогональной), если $Q^* = Q^{-1} (\Leftrightarrow Q^* Q = Q Q^* = E)$

Свойства унитарной (ортог.) матрицы

1. Q унитарн. (ортог.) \Leftrightarrow стр. (столб) попарно-ортагон. (в смысле станд. скал. проя)
в пр-ве $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Доказательство. $Q = (Q_1 \dots Q_n)$ столбцы

$$Q \text{ унит. (ортог.)} \Leftrightarrow Q^* = Q^{-1} \Leftrightarrow Q^* = \overline{Q^T} = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix}$$

$$Q^*Q = E$$

$$E = Q^*Q = \begin{pmatrix} \overline{Q}_1^T Q_1 & \overline{Q}_1^T Q_2 & \overline{Q}_1^T Q_n \\ \dots & & \\ \overline{Q}_n^T Q_1 & \overline{Q}_n^T Q_2 & \overline{Q}_n^T Q_n \end{pmatrix} = ((\overline{Q}_i, \overline{Q}_j)) \leftrightarrow (Q_i, Q_j) = \delta_{ij} \text{ аналогично для строк}$$

■

$$2. |det Q| = 1$$

$$det(Q^*)$$

$$\text{Доказательство. } 1 = det E = det(Q^*Q) = \frac{det(Q^*)}{det(Q)} \cdot det Q = \overline{det Q} \cdot det Q = |det Q|^2$$

■

$$\boxed{\text{евкл.: } Q_{\text{ортогон.}} \rightarrow det Q = \pm 1}$$

$$3. Q^{-1} - \text{унитарн.(ортогон.)}$$

$$\text{Доказательство. } (Q^{-1})^* = \overline{(Q^{-1})^T} = (\overline{Q^T})^{-1} = (Q^*)^{-1} = Q = (Q^{-1})^{-1}$$

■

$$4. Q, R \text{ унитарн.(ортог.)} \Rightarrow QR \text{ унит. (ортогон.)}$$

$$\text{Доказательство. } (QR)^* = (\overline{QR})^T = \overline{R^T Q^T} = R^* Q^* = R^{-1} Q^{-1} = (QR)^{-1}$$

■

$$5. \begin{matrix} e, e' \text{ о.н.б.} \\ T = T_{e \rightarrow e'} \end{matrix} \Rightarrow T - \text{унитарн.(ортог.) матрица.}$$

Примеры. Матрицы поворота на плоскости или в пространстве

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ ортогональна.}$$

9.4 Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Теорема Пифагора. Теорема о наилучшем приближении. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя.

Определение 1. $L \subset V$ $\underset{\text{лин. подпр.}}{L^\perp} = \{y \in V \mid \forall x \in L : (x, y) = 0\}$
– ортогональное дополнение подпр-ва L

Свойства L^\perp

$$1. L^\perp \text{ линейное подпр-во}$$

Доказательство. $\forall \lambda \in K, \forall u, v \in L^\perp : \forall x \in L : (x, u) = 0, (x, v) = 0$

$$(x, u + \lambda v) = (x, u) + \lambda (x, v) = 0 \Rightarrow u + \lambda v \in L^\perp$$

■

$$2. \boxed{V = L \bigoplus L^\perp}$$

Доказательство. $L = \text{span} \underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{лин. незав. н.у.о. попарно ортогон. (Г-III)}} \quad (a_1 \dots a_k)$

$$a_1 \dots a_k \underbrace{a_{k+1} \dots a_n}_{\text{лин. незав. н.у.о. попарно ортогон. (Г-III)}}$$

дополним до базиса V н.у.о. попарно ортогон. (Г-Ш)

$$L^{\perp?} = \text{span}(a_{k+1} \dots a_n) \quad V = L \bigoplus L^\perp$$

$$\forall x \in L : \quad x = \sum_{i=1}^k c_i a_i$$

$$\forall y \in L^\perp : \quad y \sum_{j=k+1}^n c_j a_j$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n c_i \bar{c}_j (a_i, a_j) = 0 \Rightarrow L^\perp - \text{ортогон. дополн. } L$$

1

$$3. \quad (L^\perp)^\perp = L$$

Доказательство. $\forall x \in L \ \forall y \in L^\perp : (x, y) = 0$

$$\Rightarrow L \subset (L^\perp)^\perp$$

$$(L^\perp)^\perp \oplus L^\perp = V = L \oplus L^\perp$$

$$\Rightarrow \dim(L^\perp)^\perp = \dim L \Rightarrow L = (L^\perp)^\perp$$

1

$$4. \quad (L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$$

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$$

Похоже на правило Де Моргана, но не то же самое

Доказательство. $(I_+ + I_-)^\perp = I_+^\perp \cap I_-^\perp$

$$\forall x \in L_1 + L_2 \quad (x, y) = 0$$

$$\begin{array}{c} \| \\ l_1 + l_2 \\ \in L_1 \end{array} \quad \forall y \in (L_1 + L_2)^\perp \quad \|$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ (l_1, y) + (l_2, y) \\ \in L_2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \exists l_2 = 0 \quad (l_1, y) = 0 \Rightarrow y \in L_1^\perp \\ \forall l_1 \in L_1 \\ \exists l_1 = 0 \quad (l_2, y) = 0 \Rightarrow L_2^\perp \\ \forall l_2 \in L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$$

$$\Rightarrow \boxed{(L_1 + L_2)^\perp \subset L_1^\perp \cap L_2^\perp}$$

Обратно: $\exists y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp \Rightarrow \begin{cases} \forall l_1 \in L_1 \quad (l_1, y) = 0 \\ \forall l_2 \in L_2 \quad (l_2, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x = l_1 + l_2 \in L_1 + L_2 \\ (x, y) = (l_1, y) + (l_2, y) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow y \in (L_1 + L_2)^\perp \Rightarrow \boxed{L_1^\perp \cap L_2^\perp \subset (L_1 + L_2)^\perp} \Rightarrow (L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$$

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$$

$$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = (L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp = L_1 \cap L_2$$

$$\text{CB-BO 3} \quad L_1^\perp + L_2^\perp = (L_1 \cap L_2)^\perp$$

1

5. $V^\perp = \emptyset$

$$\emptyset^\perp \equiv V$$

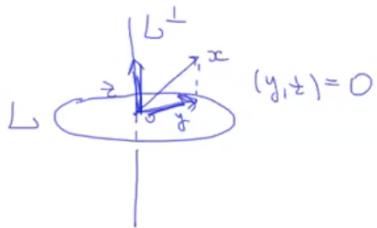
Определение 2. $\forall x \in V \exists! y \in L, \exists! z \in L^\perp : [x = y + z]$

из сб-ва 2

y – ортогон. проекция x на лин. подпр-во L

z – ортогон. составл. x относительно L – перпендикуляр, опущенный из x на L

$$(x, y) = 0$$



Задача о перпендикуляре $z = ?$

$$L = \text{span}(\underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{лин. независ.}}) \quad x \in V \quad x = y + z \quad y \in L \quad z \in L^\perp \quad z = ?$$

$$y \in L \quad y = \sum_{i=1}^k c_i a_i$$

$$x = \sum_{i=1}^k c_i a_i + z \quad | \cdot a_j$$

$$\forall j = 1 \dots k \quad (x, a_j) = \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j) + (z, a_j) \underset{=0}{\in} L \underset{z \in L^\perp}{=} \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j) \quad c_i = ?$$

СЛНУ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_2, a_1) \dots \\ (a_1, a_2) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}}_{G^T(a_1 \dots a_k)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix}$$

$$\det G > 0 \rightarrow \exists! \text{ реш-е } c_1 \dots c_k$$

$$\rightsquigarrow y = \sum_{i=1}^k c_i a_i \rightsquigarrow z = x - y.$$

Примеры. $L = \text{span}(a_1 a_2 a_3)$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad z = ?$$

$$a_3 = 2a_1 - a_2 \quad L = \text{span}(a_1, a_2)$$

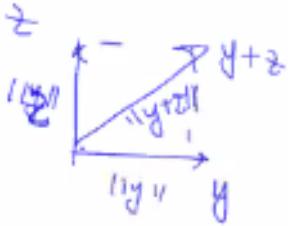
$$\underset{\text{всп.}}{G^T} = G = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad (x, a_1) = 4 \quad (x, a_2) = -8 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & | & 4 \\ 4 & 10 & | & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 6 & | & -12 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 3 \quad c_2 = -2$$

$$y = 3a_1 - 2a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad z = x - y = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (y, z) = 0$$

Теорема 1 (Пифагора).

$$\forall y, z \in V \quad (y, z) = 0 \Rightarrow \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$



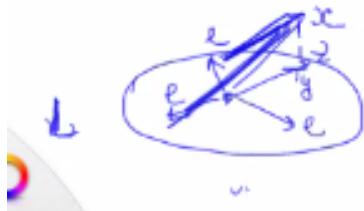
$$\text{Доказательство. } \|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + (y, z) + (z, y) + (z, z) \\ = \|y\|^2 + 0 + 0 + \|z\|^2$$

$$\text{Следствие 1. } x_1 \dots x_k \text{ попарно-ортог. } \Rightarrow \|x_1 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2$$

Доказательство. М.М.И. (упр.)

Теорема 2 (О наилучш. приближении).

$$V = L \oplus L^\perp \quad : x = \underbrace{y}_{\in L} + \underbrace{z}_{\in L^\perp} \Rightarrow \forall l \in L \quad \frac{\|x - y\|}{\|z\|} < \|x - e\|$$



длина любой наклонной больше, чем длина перпендикуляра

$$\text{Доказательство. } \exists l \in L \quad l \neq y \quad \|x - l\|^2 = \underbrace{\|x - y\|^2}_{=z \in L^\perp} + \underbrace{\|y - l\|^2}_{\in L} \stackrel{\text{по т. Пифагора}}{=} \|x - y\|^2 + \|y - l\|^2$$

$$\Rightarrow \|x - l\|^2 > \|x - y\|^2 \Rightarrow \text{все.}$$

Определение 3. $dist(x, L) = \min_{l \in L} \|x - l\| = \underbrace{\|x - y\|}_{\text{расстояние от } x \text{ до } L} = \|z\|$

Теорема 3 (о расстоянии до линейного подпространства). $L = \text{span}(a_1 \dots a_k)$, $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^\perp$

$$L^\perp \Rightarrow dist^2(x, L) = \|z\|^2 = \frac{g(a_1 \dots a_k, x)}{g(a_1 \dots a_k)} \neq 0$$

Доказательство. $\underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{лин. нез.}} x \xrightarrow{\Gamma-\text{III}} b_1 \dots b_k b_{k+1}$ $span(a_1 \dots a_k) = span(b_1 \dots b_k)$

$$b_{k+1} = x - \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i b_i}_{\substack{|| \\ y \in L}} \Rightarrow b_{k+1} = x - y = z \xrightarrow[\text{T-ма о det матрицы } G(\text{следствие})]{} \|b_{k+1}\|^2 = \|z\| = \frac{g(a_1 \dots a_k, x)}{g(a_1 \dots a_k)}$$

■

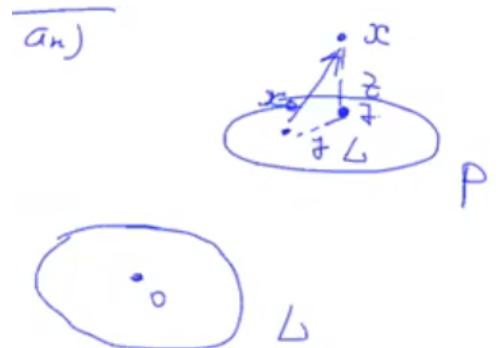
Упражнения:

1. $P = x_0 + L$ линейное многообразие

$$dist(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| \xrightarrow{\text{доказать}} \|z\| = \sqrt{\frac{g(a_1 \dots a_k, x - x_0)}{g(a_1 \dots a_k)}}$$

$$L = \text{span}(a_1 \dots a_k)$$

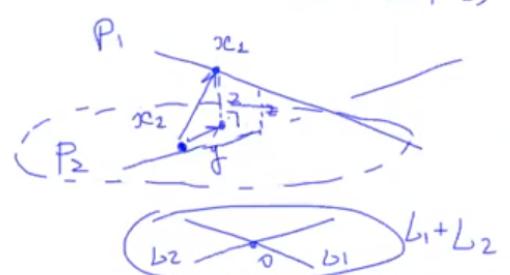
$$x - x_0 = \underset{\in L}{y} + z$$



2. $P_1, P_2 \quad P_i = x_i + L_i \quad i = 1, 2$

$$dist(P_1, P_2) = \min_{\substack{u_1 \in P_1 \\ u_2 \in P_2}} \|u_1 - u_2\| \xrightarrow{\text{доказать}} \|z\|$$

$$x_2 - x_1 = \underset{\in L_1 + L_2}{y} + \underset{\in (L_1 + L_2)^\perp}{z}$$



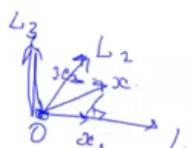
Определение 4. $L_1 \dots L_k \subset V$ называются парно-ортого.
если $\forall x_i \in L_i \quad \forall x_j \in L_j \quad (x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j$

Очевидно, $L_1 \dots L_k$ дизъюнктны.

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=1}^k x_i, x_j) = 0 \\ & x_1 + \dots + x_k = \emptyset \quad | \cdot x_j \quad j = 1 \dots k \quad || \\ & \sum_{i=1}^k (x_i, x_j) = (x_j, x_j) = 0 \Leftrightarrow x_j = \emptyset \end{aligned}$$

Определение 5. $L_1 \dots L_k$ парно ортого. $V = \bigoplus_{i=1}^k L_i$ $\mathcal{P}_i : V \rightarrow L_i$ операторы ортогонального проектирования

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i x \quad (\text{однозн. предст.})$$

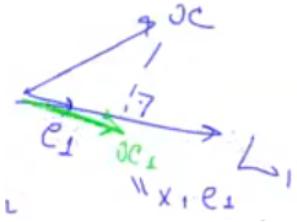


$x_i = \mathcal{P}_i x$ — ортогр. проекция x на подпространство L_i

$$(x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j \Rightarrow \text{по т-ме Пифагора} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2$$

$e_1 \dots e_n$ ортогональный базис. $L_i = \text{span}(e_i)$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n L_i \quad \forall x \in V : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ & \text{ортог. проекция на } e_i - \text{вектор} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & x_i - \text{координата относительно } e_i, \\ & \text{проекция элемента } x \text{ на } e_i \end{aligned}$$



$$\forall j = 1 \dots n \quad (x, e_j) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, e_j) = x_j (e_j, e_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_j = \frac{(x, e_j)}{(e_j, e_j)}} \quad \text{коэффициенты Фурье вектора } x \text{ относительно базиса } e \text{ (ортогон.)}$$

$x \overset{?}{\leftrightarrow} \sum x_j e_j$ – в бесконечномерных пространствах не все так просто, но мы этим и не занимаемся.
 $x = \sum x_j e_j$

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \|e_i\|^2} \quad \text{Tождество Парсеваля}$$

$$\boxed{1 \leq k \leq n \quad \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2} \quad \text{Неравенство Бесселя}$$

"Квадрат длины вектора не меньше суммы квадратов длины его проекций"

$$e_1 \dots e_n \text{ о.н.б. } V \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

– коэффициенты x относительно e

$$\boxed{x_i = (x, e_i)} \quad \begin{aligned} & \text{коэффициенты Фурье} \\ & \text{– проекция на } e_i \end{aligned}$$

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{– тождество Парсеваля} \quad \sum_i^k |x_i|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{– неравенство.}$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^k L_i \quad L_i \text{ попарно-ортогональны} \quad \mathcal{P}_i : V \rightarrow L_i$$

$$V = \text{span}(\underbrace{e_1}_{L_1}, \dots, \underbrace{e_n}_{L_k}) \text{ о.н.б.}$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad \boxed{x_i = \mathcal{P}_i x = \sum_{e_j \in L_i} (x, e_j) e_j}$$

9.5 Изометрия унитарных (евклидовых) пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидового пространства и сопряженного к нему.

Определение 1. Изометрией называется изоморфизм линейных пространств с сохранением скалярного (псевдоскалярного) произведения.

$$(V, (\cdot, \cdot)_V) \quad (V', (\cdot, \cdot)_{V^*}) \text{ унит. (евкл.)} \quad V \cong V^*$$

$$\begin{array}{ccc} x, y & \in V \\ \forall \downarrow \quad \downarrow & & (x, y)_V = (x', y')_{V'} \\ x', y & \in V' \end{array}$$

Очевидно, при изометрии сохраняется расстояние:

$$\|x - y\|_V^2 = (x - y, x - y)_V = (x' - y', x' - y')_{V'} = \|x - y\|_{V'}^2$$

"Изометрия \equiv сохраняет метрику"

Теорема 1 (об изометрии).

Любые 2 унитарных (евкл.) пространства одной размерности изометричны.

Доказательство. \forall 2 лин. пространства одной размерности изоморфны $V \cong V'$

$$\begin{array}{ccc} e_1 \dots e_n & V \\ \text{базис о.н.б.} & \sum_{i \in V} x_i e_i \leftrightarrow \sum_{i \in V'} x'_i e'_i \\ \text{См. 1 семестр.} & e'_1 \dots e'_n & V' \\ & \text{было доказано, что это изоморфизм} \\ & \text{базис о.н.б.} \end{array}$$

$$(x, y)_V = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = (x', y')_{V'} \Rightarrow \text{изометричны.}$$

$$(V, (\cdot, \cdot)) \quad V^* - \text{сопряженное к } V$$

$$\text{Фиксируем } y \in V \Rightarrow \forall x \in V \quad f(x) := (x, y) \quad \begin{array}{c} f : V \rightarrow K \\ \text{линейное отображение} \end{array} \Rightarrow f \in V^*$$

$$\boxed{\forall y \in V \rightsquigarrow f \in V^* \\ \rightsquigarrow ?}$$

Теорема 2 (Рисса $(V(\cdot, \cdot))$).

$$\forall f \in V^* \exists! y \in V : \forall x \in V f(x) = (x, y) \quad y - \text{присоединенный вектор к } f$$

Теорема 3.

Единственность: $\exists y' : f(x) = (x, y) \forall x \in V$

$$\Rightarrow \{\forall x \in V \quad 0 = f(x) - f(x) = (x, y) - (x, y') = (x, y - y')\} \Leftrightarrow y - y' = 0 \Leftrightarrow y = y'$$

$$\text{Существование: } \exists e_1 \dots e_n \text{ о.н.б. } V \quad f \in V^* \quad \forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \quad y_i = \overline{f(e_i)} \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{скл. (псевдоск.) про. в о.н.б.}}}{=} (x, y)$$

$$V \leftrightarrow V^*$$

те-ма Рисса

будет ли изоморфизм? Будет ли изометрия?

$V \xleftrightarrow[\text{т-ма Рисса}]{} \begin{array}{l} \text{изоморфизм, если } V \text{ евклидово пространство,} \\ \text{не изоморфизм, если } V \text{ унитарное пространство.} \end{array}$

Изоморфизм именно в смысле теоремы Рисса!

$$y_1, y_2 \in V \xleftrightarrow[\text{т-ма Рисса}]{} f_1, f_2 \in V^* \quad f_i(x) = (x, y_i) \quad i = 1, 2$$

$$y_1 + \lambda y_2 \in V \rightsquigarrow (x, y_1 + \lambda y_2) = \underbrace{(x, y_1)}_{f_1(x)} + \overline{\lambda} \underbrace{(x, y_2)}_{f_2(x)}$$

$$y_1 + \lambda y_2 \rightsquigarrow f_1 + \overline{\lambda} f_2$$

V евклидово пространство	$V \cong V^* \Leftrightarrow \begin{array}{c} y \in V \leftrightarrow f \in V^* \\ \forall x \in V : f(x) = (x, y) \end{array}$
Естественный изоморфизм	

V^* дадим определение $(f, g)_{V^*} := (y, z)$ 1-4 скал. произведения вып. \Rightarrow Изометрия

$$V^* \ni f \leftrightarrow y \in V$$

$$V^* \ni g \leftrightarrow z \in V$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} V \cong V^* \\ (\cdot, \cdot) \quad (\cdot, \cdot)_{V^*} \end{array}}$$

$$e_1 \dots e_n \text{ о.н.б. } V \xleftrightarrow[\text{т-ма Рисса}]{} \omega^1 \dots \omega^n \text{ сопряженный базис } V^*$$

$$\text{Действительно, } \omega^i(x) = x^i = (x, e_i) \xleftrightarrow[\text{т-ма Рисса}]{} e_i \leftrightarrow \omega^i$$

9.6 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический тензор. Взаимные базисы. Операции поднятия и опускания индексов.

V линейное вещ. про-во (\cdot, \cdot) скалярное про-е V евклидово пространство

$$e_1 \dots e_n \text{ базис} \quad \Gamma = G(e_1 \dots e_n) = ((e_i, e_j))_{n \times n} = (g_{ij})_{n \times n}$$

матрица Грама

$\Gamma \in T_{(2,0)} -$ метрический ковариантный тензор

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис.} \quad \Gamma' = ((e'_i, e'_j))_{n \times n} = (g'_{ij}) \quad T = T_{e \rightarrow e'} = (t^i_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma' = T^T \Gamma T \Leftrightarrow g'_{ij} = t^k_{ij} = t^k_i g_{kl} t^l_j = g_{kl} t^k_i t^l_j \Rightarrow \Gamma - (2,0) \text{ тензор.}$$

было док-во

Утверждение. Γ^{-1} тензор типа $(0,2)$

$$\text{Доказательство. } \square \quad \Gamma^{-1} = (g^{ij})_{n \times n} \quad S = T^{-1} = (S^k_l)_{n \times n} \quad T_{e \rightarrow e'}$$

$$(\Gamma^{-1})' = (g'^{ij})_{n \times n} \quad (\Gamma^{-1})' = (\Gamma')^{-1} = (T^T \Gamma T)^{-1} = T^{-1} \Gamma^{-1} (T^{-1})^T = S \Gamma^{-1} S^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'^{ij} = S^i_k g^{kl} S^j_l = g^{kl} S^i_k S^j_l \Rightarrow \Gamma^{-1} \text{ 2 контравариантный тензор.}$$

■

Определение 1. Γ^{-1} тензор типа $(0,2)$ называется контравариантным метрическим тензором

Свойства Γ, Γ^{-1} :

- $g_{ij}g^{jk} = \delta_j^k = g_{ji}g^{kj}$ ($\Gamma\Gamma^{-1} = E = \Gamma^{-1}\Gamma$)
- Γ и Γ^{-1} симметрические тензоры ($\Gamma = \Gamma^T \Rightarrow (\Gamma^{-1})^T = (\Gamma^T)^{-1} = \Gamma^{-1}$)
- $\forall x, y \in V$ $(x, y) = g_{ij}x^i y^j$, причем $\begin{cases} g_{ij} x^i y^j > 0, & \text{если } x \neq 0 \\ & || \\ & (x, x) \end{cases}$

$G = (g_{ij})$ ковариантный метр. тензор

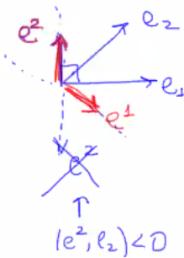
$G^{-1} = (g^{ij})$ контравариантный метр. тензор

Определение 2. $e_1 \dots e_n$ базис V евклидово пространство. $e^1 \dots e^n$ называется взаимным для базиса $e_1 \dots e_n$, если $(e^i, e_j) = \delta_j^i = (e_j, e^i)$

$e_1 \dots e_n$ взаимный для базиса $e^1 \dots e^n$

Взаимные базисы $e_1 \dots e_n$ и $e^1 \dots e^n$

Примеры.



$$(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \neq j \end{cases}$$

Теорема 1. \forall базиса $e_1 \dots e_n$ пространства V $\exists!$ взаимный базис $e^1 \dots e^n$

Доказательство. $e_1 \dots e_n$

$$e^j = t_j^i e_i \quad t_j^i \leftrightarrow T_j \quad (e_i, e^j) = \delta_i^j \quad T_{e_i \rightarrow e^j} = (T_1 \dots T_j \dots T_n)$$

$$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \quad \delta_i^j = (e_i, e^j) = x^T \Gamma y \Leftrightarrow E = E \Gamma T \Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ E_i^T}}{T} \underset{\substack{\uparrow \\ T_j}}{=} E \quad \underset{T=\Gamma^{-1} \Rightarrow \exists! \text{ взаимный базис } e^j}{\Gamma T} \quad \blacksquare$$

Следствие 1. e_i, e^j взаимные базисы V

$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \Rightarrow G(e^1 \dots e^n) = \Gamma^{-1}$, при этом

$$\begin{cases} (e^1 \dots e^n) = (e_1 \dots e_n) \Gamma^{-1} \\ (e_1 \dots e_n) = (e^1 \dots e^n) \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^j = g^{ij} e_i = g^{ji} e_i \\ e_i = g_{ij} e^j = g_{ji} e^j \end{cases}$$

Доказательство. $(e^j, e^i) = (\underset{x=T_i=(\Gamma^{-1})_i}{\overset{\uparrow}{e^i}}, \underset{y=T_j=(\Gamma^{-1})_j}{\overset{\uparrow}{e^j}}) = x^T \Gamma y = g^{ki} g_{km} g^{mj} =$
скал. пр. в V

$$= g^{ki} \delta_k^j = g^{ji} = g^{ij} \Rightarrow G(e^1 \dots e^n) = \Gamma^{-1}$$

$$g^{ki} \underbrace{g_{km} g_{mj}}_{\Gamma} =$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

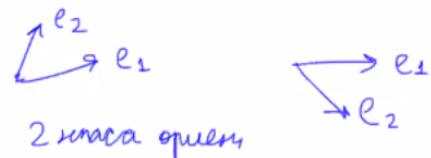
$$\kappa(\rightarrow)(\leftarrow) \quad \Gamma^{-1}$$

$$\underbrace{\Gamma \Gamma^{-1}}_{\text{E}}$$

Отступление:

$e_1 \dots e_n$ базисы V
 $e'_1 \dots e'_n$

Говорят, что базисы принадлежат одному классу ориентации, если $\det T_{e \rightarrow e'} > 0$



В \mathbb{V} пространстве \exists 2 класса ориентации на плоскости:

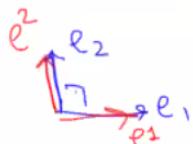
правая тройка
 в пространстве:
 левая тройка

В нашем случае, взаимные базисы всегда \in одному классу ориентации,

т.к. $T_{e_i \rightarrow e^j} = \Gamma^{-1} = G(e^1 \dots e^n) > 0$

Следствие 2. $e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \Rightarrow e^i = e_i \quad \forall i = 1 \dots n$
взаимные совпадают с исходными

Доказательство. e о.н.б. $\Rightarrow G(e_1 \dots e_n) = E = \Gamma \Rightarrow \Gamma^{-1} = E = T_{e_i \rightarrow e^j} \Rightarrow e^i = e_i$



Теорема 2.

$V \cong V^*$ из Теоремы Рисса ($\forall y \in V \leftrightarrow f \in V^* : \forall x \in V \quad f(x) = (x, y)$)

$e_1 \dots e_n$ базис V

$w^1 \dots w^n$ сопряженный базис V^*

$V^* \ni \omega^i \underset{\text{изоморф.}}{\leftrightarrow} e^i \in V \Rightarrow e^i$ взаимные базисы к e_j

Доказательство. $\omega^i \stackrel{\text{T-ма Рисса}}{\leftrightarrow} e^i$

$\forall x \in V : \omega^i(x) = (x, e^i)$

$\forall e_j : \omega^i(e_j) = (e_j, e^i) \Rightarrow e^i$ взаимный к e_j

δ_j^i т.к. сопряж. базисы

Примеры.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{Найти взаимный базис!}$$

Координаты e_i заданы относительно о.н.б. $(x, y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i$

1 сп. $\Gamma = G(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 65 & 18 & 23 \\ 18 & 38 & 53 \\ 23 & 53 & 74 \end{pmatrix}$

$$(e^1 e^2 e^3) = (e_1 e_2 e_3) \Gamma^{-1}$$

$$(e^1 e^2 e^3) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65 & 17 & 23 \\ 18 & 38 & 53 \\ 23 & 53 & 74 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -38 & 27 \\ -1 & 41 & -29 \\ 1 & -34 & 24 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -113 & 80 \\ -113 & 4201 & -3031 \\ 80 & -3031 & 2146 \end{pmatrix}}$

$e^1 e^2 e^3$ координаты базиса
относительно базиса $e_1 e_2 e_3$

$$\Gamma^{-1} = T_{e_i \rightarrow e^j}$$

2 сп.

$\omega^1 \omega^2 \omega^3$ сопряж. к $e_1 e_2 e_3$

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = E \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{array}$$

По теореме 2: $(\mathbb{R}^3)^* \equiv \mathbb{R}_3 \underset{\substack{\cong \\ \text{изоморф. т-ма 2}}}{}$ \mathbb{R}^3

$$\omega^i \leftrightarrow e^i$$

$$\omega^i(x) = (x, e^i)$$

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e^2 = \begin{pmatrix} -38 \\ 41 \\ -34 \end{pmatrix} \quad e^3 = \begin{pmatrix} 27 \\ -29 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Определение 3. e^i и e_j взаимные базисы V

$$\forall x \in V \quad x = x^i e_i = x_j e^j$$

x^i – контрвариант. координаты вектора

x_j – ковариант. координаты вектора

$$e^j \leftrightarrow \omega^j \in V^* \quad \text{сопряж. к } e_i$$

$$\begin{aligned} x^i &= \omega^i(x) = (x, e^i) \\ x_j &= e_j(x) = (x, e_j) \end{aligned}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'} \quad S = T^{-1} \quad \boxed{\begin{aligned} x'^i &= s_j^i x^j \\ x'_j &= t_j^i x_i \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} e_1 \dots e_n &\quad e'_1 \dots e'_n \\ e^1 \dots e^n &\quad e'^1 \dots e'^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x^i e_i = (x, e^i) e_i \\ x &= x_j e^j = (x, e_j) e^j \end{aligned}$$

формулы Гибса

(x^i) контравар. координаты вектора x – тензор типа $(0, 1)$

Определение 4.

(x_j) ковар. координаты вектора x – тензор типа $(1, 0)$

Сверткой этих тензоров с метрическими тензорами Γ и Γ^{-1} , соответственно, называются следующие операции:

$$g_{ji} x^i = g_{ij} x^i \quad \text{и} \quad g^{ij} x_i = g^{ji} x_i \quad (\Leftrightarrow \text{свертка произв. тензоров})$$

$$\begin{aligned} g_{ij} x^i &= g_{ij}(x, e^i) = (x, g_{ij} e^i) = (x, e_j) = x_j \\ g^{ij} x_i &= g^{ij}(x, e_i) = (x, g^{ij} e_i) = (x, e^j) = x^j \end{aligned} \quad \text{операции поднятия и опускания индекса тензора}$$

Примеры. $\forall x, y \in V \quad (x, y) = \underbrace{g_{ij} x^i}_{x_j} \underbrace{y^j}_{g^{ij} y_i} = x_j \underbrace{y^j}_{g^{ij} y_i} = g^{ij} x_j y_i = \xi^T \Gamma^{-1} \eta = (x, y)$

$$\begin{aligned} x^T \Gamma y &\quad \Gamma^{-1} = G(e^1 \dots e^n) \\ \Gamma &= G(e_1 \dots e_n) \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \\ x &= x^i e_i \quad x = \xi_i e^i \\ y &= y^j e_j \quad y = \eta_j e^j \end{aligned}$$

V Евклидово пространство, Γ, Γ^{-1} метр. тензоры.

Определение 5. $\alpha \in T(p, q) \quad q \geq 1$ опусканием верхнего индекса тензора α называется его свертка с ковариантн. метр. тензором (Γ) по тому верхнему индексу, который следует опустить. В результате, получаем тензор $\in T_{(p+1, q-1)}$

Определение 6. $\alpha \in T(p, q) \quad p \geq 1$ поднятием нижнего индекса α называется его свертка с контравиантн. метр. тензором (Γ^{-1}) по тому нижнему индексу, который следует поднять. В результате, получаем тензор $\in T(p-1, q+1)$

При опускании верхнего индекса он всегда записывается нижними левым. Если опускаются несколько индексов, то они записываются в том же порядке, в котором стояли сверху.

При поднятии нижнего индекса он всегда записывается правым верхним. Если поднимаются несколько индексов, то они записываются в том же порядке, в котором стояли внизу.



$$g_{j_0 s} \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_{q-1} s} \in T(p, q) = \alpha_{j_0 j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_{q-1}} \in T(p+1, q-1)$$

$$g^{s_i q+1} \alpha_{s j_2 \dots j_p}^{j_1 \dots j_q} \in T(p, q) = \alpha_{j_2 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q i_{q+1}} \in T(p-1, q+1)$$

Стандартный порядок следования индексов (сначала верхние, потом нижние)

В остальных случаях, дополнительно прежнее место индекса отмечается точкой.

Например, $g_{is} \alpha_k^{sj} = \alpha_{ik}^{sj}$
 $g^{sk} \alpha_{js}^i = \alpha_{js}^{ik}$

i стр	элемент расположен во		
j стол.	2 стр.		
k слой	3 стол.		
l срез	4 слое		
m след. слой	1 срезе		
	2...		

Примеры.

$$1. \alpha \in T(2, 0) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (g_{ij})$$

- (a) найти матрицу тензора с поднятым 1-м индексом
- (b) ... с 2-м индексом
- (c) ... с 2-мя индексами

$$\Gamma^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(a) \alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha_j^i = g^{ki} \alpha_{kj} = g^{ik} \alpha_{kj} \leftrightarrow \Gamma^{-1} A$$

$$\overset{i}{\underset{\Gamma^{-1}}{\leftarrow}} (\overset{j}{\underset{A}{\uparrow}})$$

$$(\alpha_j^i) = \Gamma^{-1} A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 9 & 25 \end{pmatrix}$$

$$(b) \alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha_i^j = g^{jk} \alpha_{ik} = \alpha_{ik} g^{kj} \leftrightarrow A \Gamma^{-1} \quad (\alpha_{i.}^j) = A \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 8 & 9 & 19 \\ 13 & 7 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ A \end{array}\right) \stackrel{i}{\sim} \left(\begin{array}{c} | \\ \Gamma^{-1} \end{array}\right) \quad \alpha_{20}^3 = \underbrace{\left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ A \end{array}\right)^2}_{= \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ A \end{array}\right)} \left(\begin{array}{c} | \\ \Gamma^{-1} \end{array}\right)$$

$$(c) \alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha^{ij} = g^{ik} g^{mj} \alpha_{km} \leftrightarrow \Gamma^{-1} A \Gamma^{-1}$$

$$(\alpha^{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & 17 & 51 \\ 18 & 9 & 71 \\ 49 & 69 & 87 \end{pmatrix}$$

2. $\alpha \in T(2, 1)$ Γ та же

$$\alpha_{jk}^i \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} A_1 & & & A_2 & & & A_3 \end{matrix}$$

(a) Найти матр. с опущенным верхним индексом

(b) С поднятым 2-м нижним

$$i \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \Gamma \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} \\ \hline k=1 & k=2 & k=3 \end{array}\right)$$

$$(a) \alpha_{jk}^i \rightsquigarrow \alpha_{ijk} = g_{im} \alpha_{jk}^m = (\Gamma A_k)^i_j$$

$$(\alpha_{ijk}) = (\Gamma A_1 | \Gamma A_2 | \Gamma A_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -6 & -25 & 31 & \dots & \dots \\ 3 & 12 & -15 & \dots & \dots \\ 1 & 5 & -5 & \dots & \dots \end{array} \right)$$

$$(b) \alpha_{jk}^i \rightsquigarrow \alpha_{j.}^{ik} = g^{mk} \alpha_{jm}^i = \alpha_{j1}^i g^{1k} + \alpha_{j2}^i g^{2k} + \alpha_{j3}^i g^{3k} =$$

$$i \left(\begin{array}{c|c|c} \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} \\ \hline \cdots & \square & \square \\ \hline A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c|c} \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c|c} \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ \hline \Gamma^{-1} & & \end{array} \right)$$

=

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \cdot A_1 + 2A_2 + 0A_3 & 2A_1 + 5A_2 - 2A_3 & 0A_1 - 2A_2 + 5A_3 \\ \hline k=1 & k=2 & k=3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -3 & \dots & \dots \\ -3 & 0 & 3 & \dots & \dots \\ 3 & -3 & 0 & \dots & \dots \end{array} \right)$$

\square о.н.б. $V = E = \Gamma^{-1} \Rightarrow$ все тензоры, которые получены сверткой с такими метр. тензорами

будут отличаться друг от друга только расположением верхних и нижних индексов.

Например, $\alpha_{ik}^j = \underset{=\delta_{is}}{g_{is}} \alpha_k^{si} = \alpha_k^{ij}$ Элементы в обеих матрицах одинаковые.

e, e' о.н.б. V

$$T = \underset{\text{ортог.} \rightarrow}{T_{e \rightarrow e'}} \boxed{T^{-1} = S = T^T}$$

$$\alpha_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_q} = \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \ t_{j'_1}^{j_1} \dots t_{j'_p}^{j_p} \ s_{i_1}^{i'_1} \dots s_{i_q}^{i'_q} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_q=1}^n \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \ t_{j'_1}^{j_1} \dots t_{j'_p}^{j_p} \ t_{i'_1}^{i_1} \dots t_{i'_q}^{i_q}$$

Определение 7. Все тензоры, которые после преобразования к одному о.н.б. евкл. пр-ва, отличающиеся только расположением верхних и нижних индексов, считаем равными и называем евклидовыми тензорами.

r – валентность $\alpha_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_q} \quad T(p, q) \leftrightarrow$ определяет $(p+q)$ евкл. тензор

$$\boxed{\alpha'_{i'_1 \dots i'_r} = \alpha_{i_1 \dots i_r} t_{i'_1}^{i_1} \dots t_{i'_r}^{i_r}}$$

10 Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах

10.1 Сопряженный оператор в унитарном и евклидовом пространствах

U, V линейные пространства над полем K

U^*, V^* соответственно, сопряженные пространства к U и V

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U, V)$ линейное отображение.

Определение 1. $\mathcal{A}^* : V^* \rightarrow U^*$ называется сопряженным к \mathcal{A} , если

$$\forall f \in V^* \quad \boxed{\mathcal{A}^* f(x) = f(\mathcal{A}x)} \quad \forall x \in U$$

g линейн. очев., т.к. \mathcal{A} и f линейны.

$$x \in U \xrightarrow{\mathcal{A}} V \ni \mathcal{A}x \quad f : V \rightarrow K$$

$$g \in U^* \xleftarrow{\mathcal{A}^*} V^* \ni f \quad g : U \rightarrow K$$

$\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(U^*, V^*)$ т.е. линейное отображение:

$$\begin{aligned} \forall f_1, f_2 \in U^* \quad \forall \lambda \in K \quad & A^*(\lambda f_1 + f_2)(x) = (\lambda f_1 + f_2)(\mathcal{A}x) = \underbrace{\lambda f_1(\mathcal{A}x)}_{\lambda(\mathcal{A}^* f_1)(x)} + \underbrace{f_2(\mathcal{A}x)}_{(\mathcal{A}^* f_2)(x)} \\ & \mathcal{A}^*(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \mathcal{A}^* f_1 + \mathcal{A}^* f_2 \end{aligned}$$

$\square U = V \quad (V, (\cdot, \cdot))$ унит (евклидово пространство) $\mathcal{A} \in End(V)$

$\mathcal{A}^* \in End(V^*)$

По теореме Рисса: $\forall f \in V^* \leftrightarrow y \in V : f(x) = (x, y) \forall x \in V$

$$\exists g = \mathcal{A}^* f \in V^* \Leftrightarrow z \in V : g(x) = (x, z) \forall x \in V$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad g(x) = \mathcal{A}^* f(x) = f(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, y) \\ \stackrel{\parallel}{(x,z)}$$

$$\text{T.k. } V \leftrightarrow V^* \quad \mathcal{A}^* : V \rightarrow V \\ g = \mathcal{A}^* f \Leftrightarrow z = \mathcal{A}^* y$$

$$g(x) = (x, z)$$

$$(x, \mathcal{A}^*, y) = (x, z) = (\mathcal{A}x, y)$$

Определение 2. $(V, (\cdot, \cdot))$ унит. (евкл.) пространство,

$$\mathcal{A} \in End(V),$$

$$\mathcal{A}^* \in End(V^*) - \underline{\text{сопряженный к } \mathcal{A}},$$

$$\forall x, y \in V \quad \boxed{(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y)}$$

Замечание.

1. В силу теоремы Рисса \mathcal{A}^* \exists и определен единственным образом
2. \mathcal{A}^* определяется операцией (\cdot, \cdot) , т.е. поменяем $(\cdot, \cdot) \rightsquigarrow$

поменяется \mathcal{A}^* (в этом случае неоднозначно)

Свойства сопряженного оператора

$$1. \ e_1 \dots e_n \text{ базис } V, \quad \mathcal{A}, \mathcal{A}^* \longleftrightarrow \quad A, A^{\circledast} \\ \text{матрицы операторов в базисе } e$$

$$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \text{ матрица Грама}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma}}, \text{ где } \underset{\text{сопряж. матрица}}{A^* = \overline{A^T}}$$

Доказательство. $\forall x, y \in V$

$$x, y \leftrightarrow \quad x, y \quad \text{столбцы координат в базисе } e \quad (x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y) = (Ax)^T \Gamma \bar{y} = x^T A^T \Gamma \bar{y}$$

||

$$x^T \Gamma \overline{(A^{\circledast} y)} = x^T \Gamma \overline{A^{\circledast} \bar{y}} \Leftrightarrow A^T \Gamma = \overline{\Gamma A^{\circledast}}$$

$$\overline{A^{\circledast}} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

$$A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} \overline{A^T} \overline{\Gamma}$$

$$\text{Следствие 1. } e_1 \dots e_n \text{ о.н.б. } V \Rightarrow \boxed{A^{\circledast} = A^*}$$

(Очевидно, т.к. $\Gamma = E$)

2. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ (т.е. \mathcal{A} и \mathcal{A}^* взаимно-сопряженные операторы)

$$\text{Доказательство. } \forall x, y : \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) \Leftrightarrow (y, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* y, x) \Rightarrow (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

$$3. \forall \lambda \in K \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \quad \boxed{(\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \overline{\lambda} \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*} \text{ (упр.)}$$

4. $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$ $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$

Доказательство.

$$\forall x, y \in V \quad (x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^*y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y) \Leftrightarrow (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$$
■

5. $Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp$
 $Ker\mathcal{A}^* = (Im\mathcal{A})^\perp$

Доказательство.

(a) $\forall x \in Ker\mathcal{A} \quad \forall y \in V$

$$(x, \underbrace{\mathcal{A}^*y}_{\in Im\mathcal{A}^*}) = (\mathcal{A}x, y) \underset{\parallel}{=} \emptyset \Rightarrow Im\mathcal{A}^* \subseteq (Ker\mathcal{A})^\perp$$

$$dim Im\mathcal{A}^* = rg A^{(*)} = rg(\overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma})_{\text{невырожд}} = rg A^T = rg(v_1 \dots v_k) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$$

комплексифик. венц. про-ва
см. глава 7

$$= n - \underbrace{def A}_{dim Ker A} \underset{L \oplus L^\perp = V}{=} dim(Ker A)^\perp \Rightarrow Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp$$

(b) \mathcal{A} и \mathcal{A}^* вз. сопр. по а)
 $Im\mathcal{A} = (Ker\mathcal{A}^*)^\perp$
 $(Im\mathcal{A})^\perp = Ker\mathcal{A}^*$

■

6. Если $\exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow \exists (\mathcal{A}^*)^{-1}$, причем $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$

Доказательство.

$$\exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow Ker\mathcal{A} = \{0\} \underset{5}{\Leftrightarrow} Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp = V \Leftrightarrow Ker\mathcal{A}^* = \{0\} \Leftrightarrow \exists (\mathcal{A}^*)^{-1}$$

$$\forall x, y \in V \quad (x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (\underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}}_\epsilon x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (\mathcal{A}^{-1}x, \underbrace{\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^*)^{-1}}_\epsilon y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y)$$

$$\Rightarrow_{\text{no def}} (\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$$
■

7. $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda}) = 0$

Доказательство. $\square e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \Rightarrow \underset{1}{A}^{(*)} = A^*$

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \chi_{A^*}(t) = det(A^* - tE) = det(\overline{A^T} - tE) = \overline{det(A^T - tE)} =$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$$

$$= \overline{det(A - \bar{t}E)} = \overline{\chi_A(\bar{t})} = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\bar{t})}$$

$\frac{||}{\chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda})} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda}) = 0$

■

8. λ с.ч., u с.в. \mathcal{A}
 $\bar{\lambda}$ с.ч., v с.в. \mathcal{A}^*

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{A}u, v) & = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \mu v) = \bar{\mu}(u, v) \\
 \mathcal{A}u = \lambda u & \parallel & \\
 \mathcal{A}^*v = \mu v & (\lambda u, v) = \lambda(u, v) & (\lambda - \bar{\mu})(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0 \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 & 0 &
 \end{array}$$

9. $L \subset V$ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ инвариантно относительно \mathcal{A}^*

Доказательство. $\forall x \in L \Rightarrow \mathcal{A}x \in L$

$$\forall y \in L^\perp : (x, y) = 0 \Rightarrow (x, \mathcal{A}^*y) = (\underset{\in L}{\mathcal{A}x}, \underset{\in L^\perp}{y}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^*y \in L^\perp \Rightarrow L^\perp$$
 инвариантно отн. \mathcal{A}^*

10.2 Нормальные операторы в евклидов. и унит. пространствах

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V)$ $(V, (\cdot, \cdot))$

Оператор \mathcal{A} называется нормальным, если \mathcal{A} и \mathcal{A}^* перестановочны.

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}] \Leftrightarrow \forall x, y \in V \quad [\mathcal{A}x, \mathcal{A}y] = [\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y]$$

Действительно: $\forall x, y \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) \underset{\leftrightarrow}{=} (x, \mathcal{A}\mathcal{A}^*y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$

Свойства нормального оператора:

1. \mathcal{A} нормальный оператор \Leftrightarrow в некотором базисе матрица A (оператор \mathcal{A}) перестановична с матрицей A^{\circledast} (опер. \mathcal{A}^*): $AA^{\circledast} = A^{\circledast}A$

Доказательство. (\Rightarrow) очевидно $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} \Leftrightarrow AA^{\circledast} = A^{\circledast}A$

(\Leftarrow) $\exists e'_1 \dots e'_n$ базис V $T_{e \rightarrow e'} = T$

$$A' \cdot (A^{\circledast})' = T^{-1} A \underbrace{TT^{-1}}_E A^{\circledast} T = T^{-1} A^{\circledast} AT = \underbrace{T^{-1} A^{\circledast} T}_{(A^{\circledast})'} \underbrace{T^{-1} AT}_A$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

2. $Ker\mathcal{A} = Ker\mathcal{A}^*$
 $(Ker\mathcal{A})^\perp = Im\mathcal{A}$ $\Rightarrow V = Ker\mathcal{A} \oplus Im\mathcal{A}$
 $Ker\mathcal{A}^2 = Ker\mathcal{A}$

Доказательство.

$$(a) x \in Ker\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0$$

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \underset{\text{Норм. опер.}}{=} (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = 0 \Leftrightarrow x \in Ker\mathcal{A}^*$$

$$(b) 5 \text{ свойство сопряж.} \quad (Ker\mathcal{A}^*)^\perp = Im\mathcal{A}$$

$$(c) x \in Ker\mathcal{A}^2 \Leftrightarrow \mathcal{A}^2x = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2x, \mathcal{A}^2x) = 0 \underset{\text{норм. оператор}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{A}^* \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in Im\mathcal{A}}, \mathcal{A}^* \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in Im\mathcal{A}}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}^*(\underbrace{\mathcal{A}x}_{\in Im\mathcal{A}}) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in Im\mathcal{A}} \in Ker\mathcal{A}^* = Ker\mathcal{A}, \quad Im\mathcal{A} \cap Ker\mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = 0 \Leftrightarrow x \in Ker\mathcal{A}$$

3. \mathcal{A} норм. опер. $\Leftrightarrow \forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$ норм.

$$\text{Доказательство. } \mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E} \quad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda} \mathcal{E} \quad \mathcal{E}^* = \mathcal{E}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{B}^* &= (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda} \mathcal{E}) = \underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}_{\mathcal{A}^*\mathcal{A}} - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\mathcal{E} \\ &\quad \parallel \Rightarrow \mathcal{B} \text{ нормальный оператор} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}^*\mathcal{B} = (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda} \mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\mathcal{E}$$

4. $\boxed{\lambda \text{ с.ч., } u \text{ с.в. } \mathcal{A} \Rightarrow u \text{ с.в. для } \bar{\lambda} \text{ с.ч. } \mathcal{A}^*}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}u = \lambda u \quad \mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E} \quad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda} \mathcal{E}$$

\Updownarrow

$$\mathcal{B}u = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{B}u, \mathcal{B}u = 0 \\ \text{3 св-во норм. опер.} \\ = (\mathcal{B}^*u, \mathcal{B}^*u) \end{array} \Leftrightarrow \mathcal{B}^*u = 0 \Leftrightarrow u \text{ с.в. для } \bar{\lambda} \text{ опер. } \mathcal{A}^*$$

5. $\boxed{\begin{array}{c} \lambda \text{ с.ч. } u \text{ с.в. } \mathcal{A} \\ \mu \text{ с.ч. } v \text{ с.в. } \mathcal{A} \end{array} \lambda \neq \mu \Rightarrow u \perp v}, \text{ т.е. } \boxed{V_\lambda \perp V_\mu}_{\lambda \neq \mu} \text{ для норм. опер.}$

Доказательство.

$$\begin{array}{ll} \lambda \text{ с.ч., } u \text{ с.в. } \mathcal{A} & \lambda \neq \mu \quad (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \bar{\mu}v) = \mu(u, v) \\ \mu \text{ с.ч., } v \text{ с.в. } \mathcal{A} & \parallel \\ \Downarrow \text{ по св-ву сопряж. опер. 4} & (\lambda u, v) = \lambda(u, v) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bar{\lambda}, \bar{\mu} \text{ с.ч. } \mathcal{A}^* & (\lambda - \mu)(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v \\ u, v \text{ с.в.} & \neq 0 \end{array}$$

Напоминание: \mathcal{A} нормальный оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$$\forall x, y \in V \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$$

Теорема 1 (Канонический вид матрицы нормального оператора в унитарном пространстве).

$\mathcal{A} \in End(V), (V(\cdot, \cdot))$ унитарное пространство

\mathcal{A} нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. V такой, что матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе будет иметь диагональный вид.

$$\Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \text{ при этом}$$

матрица оператора \mathcal{A}^* , очевидно, также будет иметь диагональный вид

$$\bar{\Lambda} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

Замечание.

1. Очевидно, что о.н.б. состоит из с.в. (попарно-ортог. и нормиров.)
 λ соотв. с.ч.
2. \forall нормальный оператор в унитарном пр-ве является о.п.с. Обратное, вообще говоря, неверно.
 Не всякий о.п.с. имеет именно о.н.б., в котором матрица опер. диагонана.

Доказательство.

$$(\Leftarrow) \text{ очевидно, в о.н.б. } A^{\odot} = A^* = \overline{A^T} = \overline{\Lambda^T} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

$$A^{\odot} = AA^{\odot} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ нормальный оператор}$$

$$(\Rightarrow) \quad v_1 \text{ с.в. } \mathcal{A} \text{ соотв. с.ч. } \lambda_1 \Rightarrow v_1 \text{ с.в. } \mathcal{A}^* \text{ с.ч. } \bar{\lambda}_1$$

$$L := \text{span}(v_1) \text{ инвариант. отн-но } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A}^* \Rightarrow L^\perp \text{ инвар. отн-но } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A}^*$$

$\Rightarrow \mathcal{A}|_{L^\perp}$ и $\mathcal{A}^*|_{L^\perp}$ останутся взаимно-сопряж. и нормальн.

Докажем м.м.и.: (по $\dim V = n$)

1. база: $n = 1$ утв. очев.
2. инд. предпол. \square верно для $n = k$
3. инд. переход докажем что тогда верно $n = k + 1$?

$$L = \text{span}(v_1) \quad V = L \oplus L^\perp \quad \dim L^\perp = k \Rightarrow \text{по инд. предпол.}$$

$$(\mathcal{A}|_{L^\perp} \text{ и } \mathcal{A}^*|_{L^\perp} \text{ тоже нормальные}) \quad \exists \text{ о.н.б. } v_2, v_3, \dots, v_{k+1} \text{ т.ч.}$$

матрица \mathcal{A} будет иметь вид $\text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_{k+1})$,

а матрица $\mathcal{A}^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_{k+1})$

$$L \oplus L^\perp = V = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) \quad \text{попарно ортог. и нормир.}$$

\Rightarrow матрица будет иметь блочно-диагональный вид

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \text{L} & & & & & \\ \hline & \lambda_1 & & 0 & & \\ & 0 & \lambda_2 & 0 & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_{k+1} & \end{array} \right) = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1})$$

$$A^{\odot} = \overline{A^T} = \overline{\Lambda}$$

■

Следствие 1.

\mathcal{A} нормальный оператор в унитарном пр-ве $V \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} V_\lambda$ собств. подпр. $V_\lambda \perp V_\mu$ $\lambda \neq \mu$

Доказательство. Очевидно из теоремы.

■

Следствие 2. $A_{n \times n} \quad a_{ij} \in \mathbb{C} \quad A^* = \overline{A^T}$

\forall норм. матрицы A ($AA^* = A^*A$) \exists унитарн. матрица T ($T^* = T^{-1}$),

т.ч. $T^{-1}AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, где λ_i с.ч. матрицы A

Доказательство. A в канонич. базисе \mathbb{C}^n – матрица оператора \mathcal{A}

$$A^{(\star)} = A^* = \overline{A^T}$$

матрица соотв. \mathcal{A}^*

$A^*A = AA^* \Rightarrow \mathcal{A}$ нормальн. \Rightarrow применяем теорему

\exists о.н.б. $v_1 \dots v_n \rightsquigarrow T = T_{e \rightarrow v}$

т.к. о.н.б. $\overline{T^T} = T^* = T^{-1}$, т.е. T унитарн. \Rightarrow по формуле преобр. матрицы в новом базисе

$$A' = T^{-1}AT = \underbrace{\overline{T^T}}_{T^*} AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

$\square V(\cdot, \cdot)$ евклидово про-во

не все корни хар. мн-на вещ. \Rightarrow не все корни это с.ч. оператора

$$\begin{aligned} (\text{см. 7.6}) \quad V_{\mathbb{C}} - \text{комплексификация } V \quad & \forall x, y \in V \leftrightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \\ & e_1 \dots e_n \text{ базис } V \rightarrow e_1 \dots e_n \text{ базис } V_{\mathbb{C}} \\ & v_1 \dots v_k \text{ лин. нез. } \Leftrightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \text{ лин. нез.} \\ & \bar{z} = x - iy \end{aligned}$$

Определение 2. Определим скалярное (псевдоскал.) пр-ве на $V_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V \quad (\leftrightarrow z = x + iy) \quad (z, \omega) = (x + iy, u + iv) \stackrel{\text{def}}{=} (x, u) + (y, v) + i((y, u) - (x, v)) \\ \forall u, v \in V \quad (\leftrightarrow \omega = u + iv) \end{aligned}$$

Упр.: удовлетворить 1-4 свойства псевдоскал. пр-я $(V_{\mathbb{C}}, (\cdot, \cdot))$ унит. пр-во

$$\text{Упр.: } \overline{(z_1, z_2)} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2) \quad \forall z_1, z_2 \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V) \quad \text{продолжение вещ. опер. } \mathcal{A} \text{ на } V_{\mathbb{C}} \\ \forall x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \end{aligned}$$

$$x, y \in V \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V \rightsquigarrow e_1 \dots e_n \text{ базис } V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A_{\text{вещ.}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\text{вещ.}}$$

Утверждение. $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$$(e_k, e_j)_{\mathbb{C}} = (e_k + i \cdot 0, e_j + i \cdot 0) = (e_k, e_j) = \delta_{kj} \Rightarrow \text{o.н.б. в } V_{\mathbb{C}}$$

в V :

в $V_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \leftrightarrow A & \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A \\ \mathcal{A}^* \leftrightarrow A^T = A^* & \quad (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A^* = A^T \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A \text{ в о.н.б. } V_{\mathbb{C}} \Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* \leftrightarrow \overline{A^T}_{\text{вещ.}} = A^T = A^*$$

\Rightarrow матрицы операторов $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^*$ и $(\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$ совпадают в о.н.б. \Rightarrow

\Rightarrow совпадают в любом базисе $\Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$

Следствие: \mathcal{A} норм. опер. в евклид. $V \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ норм. опер. в $V_{\mathbb{C}}$ (очевидно).

Теорема 2 (Канонический вид матрицы нормального оператора в евклидовом пр-ве).

$\mathcal{A} \in End(V), (V, (\cdot, \cdot))$ евкл. пр-во

\mathcal{A} норм. опер. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. V такой, что матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 \\ & \Phi_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \Phi_m \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda_s \in \mathbb{R} \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$$

При этом матрица оператора \mathcal{A}^* , очевидно, также будет иметь блочно-диаг. вид: Λ^T

Замечание. Очевидно, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ собств. ч. \mathcal{A} и первые k векторов базиса – это о. н. с. в.

Доказательство. (\Leftarrow)

$$\begin{aligned} \Lambda \Lambda^T &= \Lambda^T \Lambda \text{ (упр.)} \\ \Updownarrow &\quad \text{о.н.б. } A^{\circledast} = A^* = A^T \text{ т.к. евкл.} \quad \Rightarrow \mathcal{A} \text{ норм. опер.} \\ AA^* &= A^*A \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) \quad \mathcal{A} \text{ норм. опер.} \rightarrow \underset{\text{норм. опер.}}{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \text{ продолж. } \mathcal{A} \text{ на } V_{\mathbb{C}} \underset{\text{сле-вие 1}}{\Leftrightarrow} V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\substack{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}}} V_{\lambda} \quad V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu$$

т.е. все корни

$$\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \quad (\text{см. 7.6})$$

$$1. \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ корень } \chi_{\mathcal{A}} \quad (\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0) \Rightarrow \lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \text{ с.в. } \omega = \begin{matrix} u + iv \\ u, v \text{ с.в. для } \mathcal{A} \end{matrix} \quad \text{причем } u + iv \text{ корень } \chi_{\mathcal{A}} \quad \text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \text{и } u, v \text{ с.в. для } \mathcal{A} \quad (u, v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}))$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \omega = \mathcal{A}u + i\mathcal{A}v = \lambda u + i\lambda v = \lambda(u + iv) = \lambda \omega$$

$$\begin{aligned} V_{\lambda} &= (Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}))_{\mathbb{C}} & V_{\lambda} &= span(v_1 \dots v_k) & v_j &\text{ попарно-орт. и норм.} \\ \text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} & & \uparrow_{\mathbb{C}} & & & \\ Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) &= span(v_1 \dots v_k) & \uparrow_{\mathbb{R}} & & & \end{aligned}$$

$$2. \quad \mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\beta \neq 0) \quad \chi_{\mathcal{A}}(\mu) = 0 \quad \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\bar{\mu}) = 0 \quad \bar{\mu} \text{ тоже корень, причем} \\ \text{корень } \chi_{\mathcal{A}} \quad \text{мн-н с веществ. коэф.} \quad \text{той же кр-ти}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \alpha \pm i\beta \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \alpha + i\beta \text{ с.ч. } z \text{ с.в. } \Rightarrow \alpha - i\beta \text{ } \bar{z} \text{ с.в.} \end{array}} \quad (7.6)$$

$$u, v \in V \quad \begin{array}{l} z = u + iv \\ \bar{z} = u - iv \end{array} \quad \text{св-ва норм. опер.} \Rightarrow (z, \bar{z})_{\mathbb{C}} = 0 \quad \text{т.к. с.в. различных с.ч.}$$

$$(z, \bar{z})_{\mathbb{C}} = (u + iv, u - iv) = (u, u) - (v, v) + i(\overline{(u, v)} + \underbrace{(v, u)}_{\substack{\text{т.к. евклид.} \\ \Rightarrow (u, v)}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u, u) = (v, v) \\ (u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|u\| = \|v\| \\ u \perp v \end{cases} \quad \begin{array}{l} u = \operatorname{Re} z \\ v = \operatorname{Im} z \end{array} \quad \begin{array}{l} u = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ v = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{array}$$

$$L_{\mathbb{C}} = (\underset{\mathbb{R}}{\overset{\uparrow}{span}}(u, v))_{\mathbb{C}} = \underset{\mathbb{C}}{\overset{\uparrow}{span}}(z, \bar{z})$$

Т.к. z и \bar{z} с. в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, то $L_{\mathbb{C}}$ и $L_{\mathbb{C}}^\perp$ инвар. относительно $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$

$$3. \quad V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \text{ вепш.}} V_{\lambda} \quad \bigoplus_{(\mu_j, \bar{\mu}_j)} L_{\mathbb{C}}^j \quad , \quad \begin{matrix} \mu_j = \alpha_j + i\beta_j \rightsquigarrow z_j = u_j + iv_j \\ \text{c.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \qquad \qquad \text{c.в. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \end{matrix} \quad \begin{matrix} u_j = \operatorname{Re} z_j \\ v_j = \operatorname{Im} z_j \end{matrix}$$

корни χ_A пара сопряж.

компл. корней χ_A

$$L_{\mathbb{C}}^j = \underset{\mathbb{C}}{\overset{\uparrow}{span}}(u_j, v_j)$$

$$\Rightarrow V_{\mathbb{C}} = \text{span}_{\mathbb{C}} \left(\begin{array}{c} \text{попарно ортог. } V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu \\ \dots \quad \overset{\swarrow}{v_{\lambda}} \quad \dots, \dots \overset{\searrow}{u_j}, v_j, \dots \\ \text{св-ва вещ. } \mathcal{A} \\ \text{для } \lambda \text{ вещ.} \\ \text{попарно-ортог. } (u_j \perp v_j) \end{array} \right)$$

\Rightarrow матрица A_C в этом базисе имеет блочно-диагон. вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 \\ & \boxed{\Phi_1} & \\ 0 & & \square \\ & & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix} \quad \Phi_j : \mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_{L_{\mathbb{C}}^j} \xrightarrow{\text{H.y.o.}} \overset{\mu_j = \mu}{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(u) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)$$

$$= 1/2\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z + 1/2\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z} = 1/2\mu z + 1/2\bar{\mu} \bar{z} = Re(\mu z) = Re((\alpha + i\beta)(u + iv)) = \alpha u - \beta v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = \frac{\mu z - \overline{\mu z}}{2i} = \operatorname{Im} \mu z = \beta u + \alpha v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Phi$

$$\rightsquigarrow \Phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \left(\text{H.y.o. } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad z \rightsquigarrow \bar{z} \right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_{L_{\mathbb{C}}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Базис у нас получился ортогональный, теперь осталось его отнормировать.

$$\|u\| = \|v\|$$

$$1 = \|z\|^2 = (z, z) = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = \|v\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z \text{ и } \bar{z} \rightsquigarrow \sqrt{2}z \text{ и } \sqrt{2}\bar{z} \rightsquigarrow \begin{array}{l} u \rightsquigarrow \sqrt{2}u \\ v \rightsquigarrow \sqrt{2}v \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \|u\| = 1 \\ \|v\| = 1 \end{array}$$

Матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в этом базисе вез. \Rightarrow то и у \mathcal{A} такая же матрица

■

Следствие 1. $A_{n \times n}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $A^* = A^T$

Всегда норм. матрицы A ($AA^T = A^TA$) \exists ортог. матрица T ($T^T = T^* = T^{-1}$)

$$m.u. \quad T^{-1}AT = T^TAT = \Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 \\ & \boxed{\Phi_1} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \lambda_s \text{ c.u. } \mathcal{A}$$

$\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ компл. сопряжс.

$\bar{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$ корни хар. мн-на A

Доказательство. См. док-во следствия 2 к т-ме о кан. виде в унит. пр-ве

$$T = T_{e \rightarrow v} \quad v \text{ о.н.б. в евкл. пр-ве} \quad T \text{ - ортогон.} \quad T^{-1} = T^T$$

■

10.3 Самосопряженные операторы. Изометрические операторы

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V)$ $(V, (\cdot, \cdot))$ Унит. (евкл.)

\mathcal{A} называется самосопряженным, если $\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}^*}$

$$m.e. \forall x, y \in V \quad \boxed{(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)}$$

Унит. пространство – эрмитов оператор

Евклидово пространство – симметричный оператор

Очевидно, \mathcal{A} – самосопр., то \mathcal{A} – нормальный

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

Свойства:

1. \mathcal{A} самосопр. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., т.ч. $A = \overline{A^T} = A^*$ $\begin{cases} A - \text{эрмитова матрица (компл.)} \\ A - \text{симм. матрица (вещ.)} \end{cases}$

Доказательство. Свойство 1 (?) для сопряж. опер.

$$\forall \text{ о.н.б. } \mathcal{A}^* \leftrightarrow \mathcal{A}^* = \overline{\mathcal{A}^T} \Leftrightarrow A = A^* = \overline{A^T}$$

■

2. $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}$ самосопр. $\Rightarrow (\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B}) \quad \forall \underline{\lambda \in \mathbb{R}}$ (упр.)
самосопр. опер.
3. $\left. \begin{array}{l} \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ самосопр.} \\ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \text{ самосопр. (упр.)}$
перестанов.
4. \mathcal{A} самосопр. \Leftrightarrow все корни характерист. многочлена χ веществ. (!)

Доказательство.

(a) ($V(\cdot, \cdot)$) унитарн. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow$ нормальн. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., т.ч.
матрица оператора $\mathcal{A} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ λ_i с.ч. \mathcal{A}

$$\mathcal{A}^* \leftrightarrow \overline{\Lambda} = \text{diag}(\overline{\lambda}_1 \dots \overline{\lambda}_n)$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \Lambda = \overline{\Lambda} \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda_i} \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ с.ч. } \mathcal{A} \Leftrightarrow \text{все с.ч. } \lambda_i \text{ корни } \chi$$

(b) ($V, (\cdot, \cdot)$) евклид. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ продолж. \mathcal{A} на $V_{\mathbb{C}}$

$$\Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \stackrel{\mathcal{A}=\mathcal{A}^*}{=} \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

самосопр. \Leftrightarrow по п. а) Все корни $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ вещ., $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow$
 \Rightarrow все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещ.

■

5. $L_{\text{лин. подпр.}} \subset V$ инвар. отн. $\mathcal{A} \Rightarrow L^{\perp}$ инвар. отн. \mathcal{A}

Доказательство. см. свойства сопряж. опер.

Теорема 1 (Канонич. вид матрицы самосопряж. оператора).

$\mathcal{A} \in \text{End}(V), \quad V(\cdot, \cdot)$ унит. (евкл.)

\mathcal{A} самосопр. опер. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. V такой, что матрицы операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* будут иметь в нем диагональный вид $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Очевидно, что базис состоит из о.н. с. в. A (\mathcal{A}^*), $\lambda_i \in \mathbb{R}$ соотв. с.ч. \mathcal{A} (\mathcal{A}^*)

Доказательство. Т.к. \mathcal{A} самосопр. $\Rightarrow \mathcal{A}$ норм. \Rightarrow по теореме о кан. виде матрицы норм. опер.

Унит: $\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i$ с.ч. ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ св-во 4)

Евкл: $\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i$ с.ч. ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ св-во 4), блоков Φ_j не будет

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ матрицы опер. совпад.

Следствие 1. \mathcal{A} самосопр. опер. $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} V_{\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu \quad V_{\lambda}$ собств. подпр.

Следствие 2. \forall симм. (эрмит.) матрицы A ($A = A^*$)

\exists ортог. (унит.) матрица T ($T^* = T^{-1}$), т.ч.

A симм. ($A = A^T$): $T^{-1}AT = T^TAT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

A эрмитова ($A = \overline{A^T}$): $T^{-1}AT = \overline{T^TAT} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$ с.ч. A

Доказательство. $T = T_{e \rightarrow v}$ e – канон. базис $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ $\Rightarrow T$ ортог. (унит.)
 v – о.н.б. из с.в. ■

Определение 2. Невырожденный линейный оператор $Q \in End(V)$, $(V, (\cdot, \cdot))$ унит. (евкл.).

называется изометрическим, если $Q^* = Q^{-1}$, т.е.

$$\forall x, y \in V \quad (Qx, Qy) = (x, y)$$

$$((Qx, Qy)) = (x, \underbrace{Q^*Q y}_{\varepsilon}) = (x, y)$$

"Сохраняет расстояние и углы"

унитар. – Q унитарный оператор

евкл. – Q ортогон. оператор.

Очевидно, что Q изометрич. $\Rightarrow Q$ нормальный: $QQ^* = QQ^{-1} = E = Q^{-1}Q = Q^*Q$

Свойства изометр. оператора:

1. Q изометр. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. $Q^{-1} = \overline{Q^T} = Q^*$, где Q матрица оператора Q в этом базисе
 (т.е. Q унит. (компл.) ортог. (вещ.) матрица)

Доказательство. Свойство матрицы сопряж. опер.

$$\forall \text{о.н.б. } Q^* = \overline{Q^T} = Q^{-1}$$

2. Q изометр. $\Leftrightarrow Q$ переводит о.н.б. в о.н.б.

Доказательство. (\Rightarrow) e о.н.б. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

$$\square v_i = Qe_i \quad i = 1 \dots n$$

$$(v_i, v_j) = (Qe_i, Qe_j) \underset{\text{изометр.}}{=} (e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow v$$
 о.н.б

$$(\Leftarrow) e \text{ и } e' \text{ о.н.б. } V, \text{ т.ч. } e'_i = Qe_i \quad \forall x, y \in V \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

$$(Qx, Qy) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j (Qe_i, Qe_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j (e'_i, e'_j) \stackrel{=\delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = (x, y) \Rightarrow Q \text{ изометр.}$$

3. Q, R – изометр. $\Rightarrow Q \circ R$ изометр. (упр.)

4. Q изометр. $\Rightarrow Q^{-1}$ изометр. (упр.)

5. Q изометр. \Leftrightarrow все корни χ по модулю равны 1

Доказательство.

- (a) $(V, (\cdot, \cdot))$ унит. $Q^* = Q^{-1} \Rightarrow Q$ норм. опер. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., т.ч. матрица Q имеет диагон. вид
 $\Lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i$ с.ч. (все корни χ)

причем матрица $Q^* = \overline{\Lambda} = (\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$

$$Q^* = Q^{-1} \Leftrightarrow \overline{\Lambda} = \Lambda^{-1} \Leftrightarrow \overline{\Lambda} \Lambda = E$$

$$\underbrace{\lambda_i \bar{\lambda}_i}_{|\lambda_i|^2} = 1 \Leftrightarrow |\lambda_i| = 1$$

(b) $(V, (\cdot, \cdot))$ евклидово про-во

$\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ продолж. \mathbb{Q} на $V_{\mathbb{C}}$ ($\chi_{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathbb{Q}}$)

$$\Rightarrow (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^* = (\mathbb{Q}^*)_{\mathbb{C}} = (\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}$$

$(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}} = (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1}$? Можно ли переставить?

\mathbb{Q} невырожд. $\Leftrightarrow \det_{\neq 0} \mathbb{Q} = \chi_{\mathbb{Q}}(0) = \chi_{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}}(0) = \det \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ невырожд.

Проверим, что $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \cdot (\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}$?

$$\forall x, y \in V \quad \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}(\underbrace{\mathbb{Q}^{-1}x}_{\text{вещ.}} + i\underbrace{\mathbb{Q}^{-1}y}_{\text{вещ.}}) =$$

$$= \underbrace{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}x}_{\mathcal{E}} + i\underbrace{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}y}_{\mathcal{E}} = x + iy \Rightarrow (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1} = (\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}$$

Аналогично: $(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}$

$$(\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^* = (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1} \Rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \text{ изометр. на } V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \text{по а) все корни } \chi \text{ по модулю} = 1$$

■

Замечание. V евкл. \mathbb{Q} – ортог. оператор \Rightarrow все с.ч. $\mathbb{Q} = \pm 1$

6. $L_{\text{лин. подпр.}} \subset V$ инвар. отн. $\mathbb{Q} \Rightarrow L^{\perp}$ инвар. отн. \mathbb{Q}

Доказательство. $\forall x \neq 0 \in L$, т.к. \mathbb{Q} невырожд. $\Rightarrow \exists z \neq 0 \in L : x = \mathbb{Q}z$

$$\forall y \in L^{\perp} \quad (x, \mathbb{Q}y) = (\mathbb{Q}z, \mathbb{Q}y) \underset{\text{изометр.}}{=} (z, y) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}y \in L^{\perp} \Rightarrow L^{\perp} \text{ инвариант отн. } \mathbb{Q}$$

■

Теорема 2 (канонич. вид матрицы унитарного оператора).

$(V, (\cdot, \cdot))$ унит. $\mathbb{Q} \in End(V)$, невырожд.

\mathbb{Q} унитарный оператор (изометр.) $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., т.ч. матрица оператора \mathbb{Q} в этом базисе будет иметь диагональный вид: $\Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, где $\lambda_j \in \mathbb{C}$ и $|\lambda_j| = 1 \quad \forall j = 1 \dots n$

при этом матрица \mathbb{Q}^* будет иметь также диагон. вид: $\Lambda^{-1} = diag(1/\lambda_1 \dots 1/\lambda_n) = \overline{\Lambda^T} = \Lambda^*$

Доказательство. См. теорему о канон. виде матрицы норм. опер.

\mathbb{Q} унит. (норм. + все корни хар. мн. χ по модулю = 1) $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. матрица $\mathbb{Q} = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

λ_i с.ч. \mathbb{Q} (корни хар. мн-на)

$$\forall i \lambda_i \neq 0 \quad (\text{т.к. } \mathbb{Q} \text{ невырожд. } \det \overset{\neq 0}{\mathbb{Q}} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot (-1)^n) \quad \Lambda^* = \Lambda^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_n}\right) \quad \text{т.к. } \mathbb{Q} \text{ унит.}$$

■

Следствие 1. \mathbb{Q} унит. опер. $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}, \text{с.ч.}} V_{\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| = 1 \quad V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu$

Следствие 2. \forall унит. матрицы Q ($Q^* = Q^{-1}$) \exists унит. матрица T ($T^* = T^{-1}$)

$$\text{т.ч. } T^{-1}QT = \overline{T^T}QT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

где $\lambda_i \in \mathbb{C}$ с.ч. Q , причем $|\lambda_i| = 1$

Все док-ва см. раньше (для самосопр., для норм.)

Теорема 3 (Канонич. вид матрицы ортог. оператора).

$(V, (\cdot, \cdot))$ евклидово $\mathbb{Q} \in End(V)$, не вырожд.

\mathbb{Q} ортог. оператор (изометр.) $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. V такой, что матрица оператора \mathbb{Q} в этом базисе будет иметь блочно-диагон. вид.

где $\lambda_i = \pm 1$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \\ & \mathbb{D} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$$

Причем, матрица оператора \mathbb{Q}^* будет также иметь блочно диагон. вид

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix} & & \\ & \boxed{\Phi_1^T} & \\ & & \ddots \\ & & \boxed{\Phi_m^T} \end{pmatrix} = \Lambda^T \quad \Phi_j \Phi_j^T = E \quad (\Phi_j^{-1} = \Phi_j^T)$$

Доказательство. см. теорему о канон. виде матрицы норм. опер. в евкл. про-ве

\mathbb{Q} ортог. $\Leftrightarrow \mathbb{Q}$ (нормал. + все корни хар. мн-на χ по модулю = 1) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{с.ч. } \lambda_s = \pm 1 \\ \text{компл. корни } |\alpha_j + i\beta_j| = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} = 1 \end{array} \Rightarrow \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

Замечание. $\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1 \quad \alpha_j = \cos \phi \quad \beta_j = \sin \phi$

$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ поворот соотв. коорд пл-ти на угол " $-\phi$ "

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} \right) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{поворот на угол } \pi$$

$-1 \Leftrightarrow$ "отражение" относительно соотв. коорд. пл-ти

? Φ_j неодн. $=$...

\mathbb{Q} ортог. преобразование \equiv последовательные повороты и отражения относительно коорд. осей

Следствие 1. \forall ортог. матрицы Q ($Q^T = Q^{-1}$)

\exists ортог. матрица T ($T^T = T^{-1}$), т.ч.

$$T^{-1}QT = T^TQT = \begin{pmatrix} & & \\ \text{diag}(Q) & & \\ & & \end{pmatrix}$$

где ± 1 с.ч. Q

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j \pm i\beta_j \text{ компл. корни } \chi_Q \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$$

10.4 Разложения матриц: LU, Холецкого, QR и полярное

Определение 1.

$$L_{low} = (l_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{называется нижняя (левая) треугольная матрица}$$

Если $l_{ii} = 1 \forall i = 1 \dots n$, то добавляют унитреугольную

$$U_{up} = (u_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} & \\ 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{называется верхняя (правая) треуг. матрица.}$$

Если $u_{ii} = 1 \forall i = 1 \dots n$, то добавляют унитреугольную.

$$\text{Определение 2. } A_{n \times n} = (A_{ij}) \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & \ddots & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{угловая матрица}$$

$$\Delta_k = \det A_k - \text{угловой минор } A \quad \Delta_1 = a_{11} \quad \Delta_n = \det A$$

Теорема 1 (LDU – разложение $A_{n \times n}$).

$$\forall k = 1 \dots n-1 \quad \Delta_k \neq 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists! L \text{ унитреугольная} \\ &\exists! U \text{ унитреуг.} \\ &\exists! D = \text{diag}(d_1 \dots d_n), d_i \neq 0 \quad i = 1 \dots n-1 \end{aligned}$$

$$A = LDU$$

$$A = \underbrace{LDU}_{\text{унитреуг.}} = \left. \begin{array}{l} \boxed{LDU} = \tilde{L}U \\ \tilde{L} \text{ нижнетреуг.} \\ L \boxed{DU} = L\tilde{U} \\ \tilde{U} \text{ верхнетреуг.} \end{array} \right\} - LU \text{ разложение (не единств. образом определяется)}$$

Теорема 2 (LDU – разложение).

$$\forall k = 1 \dots n-1 \quad \Delta_k \neq 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} & \exists! L \text{ унитарная нижняя матрица} \\ & \exists! U \text{ унитарная верхняя матрица} \\ & \exists! D = \text{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_k) \\ & A = LDU \quad \alpha_i \neq 0 \quad i = 1 \dots n-1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{matrix} L & U \\ \uparrow_{\text{нижнепр.}} & \uparrow_{\text{верхнепр.}} \end{matrix} \quad \text{неоднозначн. (не обязательно унитреугольные)}$$

Доказательство. (\Leftarrow)

$$A = LDU$$

$$\det A = \det_{=1} L \det_{=1} D \det_{=1} U = d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n$$

$$\underline{\text{Докажем: }} \frac{A_k = L_k D_k U_k}{\Delta_k = \det A_k} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

$$A = LDU \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \begin{matrix} l_{is} & d_{st} & u_{tj} \\ || & || & \\ 0 & 0 & \\ s > i & t > j & \end{matrix} = \sum_{s=1}^i \sum_{t=1}^j l_{is} d_{st} u_{tj} \quad \begin{matrix} 1 \leq i, j \leq k \\ \uparrow \uparrow \\ (L_k D_k U_k)_{ij} \end{matrix}$$

$$\Delta_k = \det_{=1} A_k = \det_{=1} L_k \det_{=1} D_k \det_{=1} U_k = \det_{=1} D_k = d_1 \dots d_k$$

$$\Delta_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \quad d_k \neq 0$$

$$d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \quad k = 1 \dots n \quad \Delta_0 = 1$$

$$(\Rightarrow) \frac{\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}}{\neq 0 \neq 0}$$

М.М.И.

1. база $n = 1 \quad \Delta_1 \neq 0 \quad a_{11} = \frac{1}{=L} \cdot \frac{a_{11}}{=d_1} \cdot \frac{1}{=U}$
2. Инд. предпол: \square верно для $n = k \quad \Delta_1 \neq 0 \dots \Delta_k \neq 0$

$A_k = L_k D_k U_k$ единств. образом $D_k = \text{diag}(d_1 \dots d_k)$

$$d_i \neq 0 \quad i = 1 \dots k$$

3. Инд. переход: $n = k + 1$?

$$A_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_k & b_{k+1} \\ \hline C_{k+1} & d_{k+1 \ k+1} \end{array} \right) \quad L_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} L_k & 0 \\ \hline x & 1 \end{array} \right) \quad U_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} U_k & y \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$D_{k+1} = \text{diag}(d_1 \dots d_k d_{k+1})$$

$A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} U_{k+1}$ x, y, d_{k+1} ? и единств?

$$A_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_k & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & d_{k+1} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} L_k D_k & 0 \\ x D_k & d_{k+1} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} U_k & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L_k D_k U_k] & L_k D_k y \\ x D_k U_k & x D_k y + d_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_k] & b_{k+1} \\ c_{k+1} & a_{k+1 k+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{невырожд} \\ \widetilde{L_k D_k} y = b_{k+1} \\ x \underbrace{D_k U_k}_{\text{невырожд}} = c_{k+1} \\ x D_k y + d_{k+1} = a_{k+1 k+1} \end{cases}$$

$$\det D_k = d_1 \dots d_k$$

$$d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \exists! y = (L_k D_k)^{-1} b \\ \exists! x = c_{k+1} (D_k U_k)^{-1} \end{array} \rightsquigarrow \exists! d_{k+1} = a_{k+1 k+1} - x D_k y$$

$$\frac{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_{n-1} \Delta_n}{\neq 0} \stackrel{?}{\rightsquigarrow} \text{проще } d_{k+1} = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}$$

■

Следствие 1. $A_{n \times n} = A^*$ самосопряженная матрица (симметр., эрмит)

$$\forall k = 1 \dots n-1 \quad \Delta_k \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \exists! L \text{ унитреуг. нижняя матрица: } A = LDL^* \\ \exists! U \text{ унитреугольная верхняя матрица: } A = U^*DU \end{array} \quad B^* = \overline{B}^T$$

$$\begin{array}{c} d_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \\ \text{зде } D = \text{diag}(d_1 \dots d_n) \\ d_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \end{array}$$

$$A = LDU$$

$$\text{Доказательство.} \quad \begin{array}{rcl} A^* & = & U^* D^* L^* \\ & = & \overline{U}^T \quad \overline{D} \quad \overline{L}^T \\ & & \text{нижняя унитреуг.} \quad \text{верхняя унитр.} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} L = \overline{U}^T = U^* \\ \text{Т.к. разложение единственно} \\ U = \overline{L}^T = L^* \end{array} \quad D = \overline{D} \Rightarrow d_k \in \mathbb{R}$$

■

Алгоритм построения LU – разложения

$$\begin{array}{ll} \Delta_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 & (A|E) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{метод} \\ \text{гаусса} \end{array} \end{array} \quad \text{покажем: } L, D, U$$

из теоремы

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} d_1 & \dots & * & 1 & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & d_n & * & 1 \end{array} \right)$$

”прямой ход”

$$L_{ij}(\lambda) \text{ элемент нижней унитреуг; } L_{ij}^{-1}(\lambda) = L_{ij}(-\lambda)$$

(небывалое)

$$\begin{array}{c} \text{II} \\ i \\ j \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc|cc} a_{11} & \dots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cc} - & - & - & - & \dots & a_{1n} & \\ - & - & - & - & \dots & a_{2n} & \\ - & - & - & - & \dots & a_{jn} & \\ - & - & - & - & \dots & a_{jn} + \lambda a_{nn} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & - & - & - & \dots & a_{mn} & \end{array} \right)$$

A L^{-1}

$$(L_m \dots L_1 A = DU \quad | \quad \overbrace{L_m \dots L_1 E}^{L^{-1}}) \quad L_m \dots L_1 = L^{-1}$$

"прямой ход"

$$(L_m \dots L_1)^{-1} = L$$

$$\boxed{L_1^{-1} \dots L_m^{-1} = L}$$

L_i – элемент нижнетреугольн.

$$L_m \dots L_1 A = DU$$

$$L = L_1^{-1} \dots L_m^{-1} \quad \boxed{LDU = L_1^{-1} \dots \underbrace{L_m^{-1} L_m}_{E} \dots L_1 A = A}$$

$$(A|E) \rightsquigarrow (\underbrace{L_m \dots L_1}_{DU} A | \underbrace{EL_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_m^{-1}}_L)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{1j} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{ni} & b_{nj} & \dots & \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & & 1 & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b_{11} - \lambda b_{1j} & \dots & b_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{ni} - \lambda b_{nj} & b_{nj} & \dots & b_{nj} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$$

B $\underbrace{L_{ij}(-\lambda)}$

к эл-там (сумме) + $(-\lambda) \cdot$ т-р в j -м столб.

Алгоритм: (к j -й стр. $A + (\lambda) \cdot i$ стр. $A | i$ столб. $+ (-\lambda) \cdot j$ столб.)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad LDU?(LU)$

$$\Delta_1 = 3 \quad \Delta_2 = 5 \quad \Delta_3 = -4 - 4 - 12 - 3 = -23 \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & -7/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -23/5 & 2/3 & -7/5 & 1 \end{array} \right)$$

\underbrace{DU}_{L}

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = diag(\frac{3}{\Delta_1}, \frac{5}{\Delta_1}, \frac{-23}{\Delta_2})$$

$$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -7/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & -23/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LDL^* = U^*DU$$

$= U$

$$A = A^*$$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$ V унит. (евкл.) (\cdot, \cdot)

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ самосопр.

- положит. (отрицат.) определен, если $\forall u \neq 0 \quad (\mathcal{A}u, u) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} > 0$
- положит. (отрицат.) полуопредел., если $\forall u \neq 0 \quad (\mathcal{A}u, u) \geq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \geq 0$
- неопредел., если $\exists u, v : \begin{cases} (\mathcal{A}u, u) > 0 \\ (\mathcal{A}v, v) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{A} <> 0$

Замечание.

$$1. \mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}u, u) \geq 0, \text{ причем } = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

если $u = 0$, то очевидно, $(\mathcal{A}u, u) = 0$

$$2. \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \quad (\mathcal{A}u, u) = (u, \mathcal{A}u)$$

3.

Утверждение.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} > 0 &\Leftrightarrow \text{все с.ч. } \lambda > 0 \\ (\mathcal{A})_{<0} &\Leftrightarrow \text{все с.ч. } \lambda < 0 \\ \mathcal{A} \geq 0 &\Leftrightarrow \text{все с.ч. } \lambda \geq 0 \\ (\mathcal{A})_{\leq 0} &\Leftrightarrow \text{все с.ч. } \lambda \leq 0 \end{aligned} \quad \mathcal{A} <> 0 \Leftrightarrow \exists \text{ с.ч. } \lambda, \mu : \begin{cases} \lambda > 0 \\ \mu < 0 \end{cases}$$

Доказательство. \mathcal{A} самосопр. $\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \text{ всп.}} \mathcal{A}_{\lambda} \text{ о.п.с.} \quad V = \bigoplus_{\substack{\lambda \text{ собств.} \\ \text{всп. с.ч.}}} V_{\lambda} \quad V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu$

$$\forall u \in V : u = \sum_{\lambda} \epsilon_{V_{\lambda}}$$

$$(\mathcal{A}u, u) = (\sum_{\lambda} \mathcal{A}v_{\lambda}, \sum_{\mu} v_{\mu}) = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} (\lambda v_{\lambda}, v_{\mu}) = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \lambda(v_{\lambda}, v_{\mu}) = \sum_{\lambda} \lambda \left(\sum_{\substack{v_{\lambda} \\ > 0 \text{ если } v_{\lambda} \text{ с.в.}}} v_{\lambda}, v_{\lambda} \right)$$

$$(\Leftarrow) \quad \square \text{ все } \lambda > 0 \Rightarrow (\mathcal{A}u, u) = \sum \lambda(v_{\lambda}^{\geq 0}, v_{\lambda}) > 0 \quad \text{т.к. } \exists \lambda_0 : \begin{cases} \lambda_0(v_{\lambda_0}, v_{\lambda_0}) > 0 \\ v_{\lambda_0} \text{ с.в.} \end{cases} \neq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \mathcal{A} > 0 \end{matrix} \text{ с.в. } (\mathcal{A}v_{\lambda}, v_{\lambda}) = \lambda(v_{\lambda}, v_{\lambda}) > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \quad \blacksquare$$

4. Все def из замечаний 1, 2, 3 переносятся на самосопряженные матрицы (симм., эрмитовы)
 $A = A^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\begin{array}{rcl} (Ax, x) & = & x^T A^T \bar{x} \\ & \parallel & x^T A^T \bar{x} > 0 \\ (x, Ax) & = & x^T \bar{A} \bar{x} \\ & & \parallel \\ & & x^T \bar{A} \bar{x} \text{ и т.д.} \end{array}$$

Теорема 3 (разложение Холецкого или метод квадратного корня).

$$\forall A > 0, \text{ m.u. } \Delta_k \neq 0 \quad \forall k = 1 \dots n \quad \begin{array}{l} \exists! L \text{ нижнетреуг. (причем } l_{ii} > 0) \\ \exists! U \text{ верхнетреуг. (причем } u_{ii} > 0) \end{array}$$

$$A = L^* = U^*U$$

$$\text{Доказательство. } A = A^* \xrightarrow{\text{по следствию}} \exists! A = \underbrace{L_0}_{\substack{\text{унитр. нижн.} \\ \uparrow \text{треуг.}}} \quad DL_0^* = U_0^*D \quad \underbrace{U_0}_{\substack{\text{унитр. верх.} \\ \uparrow}}$$

$$\forall x \neq 0 \quad 0 < (Ax, x) = (L_0 D L_0^*, x) = (D \underbrace{L_0^*}_{y}, \underbrace{L_0^* x}_y) = \underbrace{(Dy, y)}_{D=diag(d_1 \dots d_n)} = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$$

L_0 невырожд.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} L_0^* \text{ невыр.} \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} L_0^* x \neq 0 \\ =y \end{array} \right\}$$

Будем брать $y = e_j$ канон. базиса $\Rightarrow d_j < 0 \quad j = 1 \dots n \Rightarrow$

$$\Rightarrow D = \sqrt{D} \sqrt{D} \quad \sqrt{D} := diag(\sqrt{d_1} \dots \sqrt{d_n})$$

$$A = \underbrace{L_0 \sqrt{D}}_L \underbrace{\sqrt{D} L_0^*}_{L^*} = \underbrace{U_0^* \sqrt{D}}_{U^*} \underbrace{\sqrt{D} U_0}_U \quad L^* = (L_0 \sqrt{D})^* = (\sqrt{D})^* L_0 = \sqrt{D} L_0^*$$

$$l_{ii} = \sqrt{d_i} > 0 \quad u_{ii} = \sqrt{d_i} > 0 \quad \text{Аналогично } U^*$$

$$(\sqrt{D} U_0)^* = U_0^* \sqrt{D}$$

Теорема 4 (QR разложение).

$$\forall \underbrace{\text{невырожд. } A_{n \times n}}_{a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})} \exists \text{ унитарн (ортог) } Q \text{ и верхн треугольн. матрица } R : \quad A = QR$$

$$\text{Доказательство. } A \text{ невырожд.} \Leftrightarrow rg(\underbrace{A_1 \dots A_n}_{\substack{\text{лин. нез.} \\ \nwarrow \swarrow \text{столбцы}}}) = n \quad A_k \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$$

$$A_1 \dots A_n \xrightarrow[\substack{\text{Г-III} \\ \text{нормируем}}]{\substack{\text{попарно-ортог.} \\ \text{и нормир.}}} \underbrace{q_1 \dots q_n}_{q_k \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)}$$

$$\left[\begin{array}{l} q_1 = u_{11} A_1 \\ q_2 = u_{12} A_1 + u_{22} A_2 \\ q_3 = u_{13} A_1 + u_{23} A_2 + u_{33} A_3 \\ \dots \\ q_n = u_{1n} A_1 + u_{2n} A_2 + \dots + u_{nn} A_n \end{array} \right] \quad Q = \overbrace{(q_1 \dots q_n)}^{\substack{\text{о.н.с.} \\ \text{очевидно, унит. (ортог)}}} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & \dots & u_{2n} \\ \ddots & & & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(q_1 \dots q_n) = \underbrace{Q}_{\substack{\text{невыр}}} = \underbrace{A}_{\substack{\text{невыр}}} U = (A_1 \dots A_n) \left(\left(\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{matrix} \right) \right) \Rightarrow U \text{ невыр.} \Rightarrow \exists U^{-1} = \underbrace{R}_{\substack{\text{верхн. треуг.}}}$$

$$A = QR$$

Следствие 1. \forall невырожд. $A \quad \exists Q$ унит. (ортог.), L нижн. треугол. : $A = LQ$

Доказательство. A^T невыр. \Rightarrow $\exists R$ верх. треуг.
 $\exists Q_1$ унит. (ортог.)

$$(A^T)^T = (Q_1 R)^T = \underbrace{R^T}_{\substack{\parallel \\ \text{нижн. треуг.}}} \cdot \underbrace{Q_1^T}_{\substack{\uparrow \\ \text{унит. (ортог.)}}} = L Q$$

■

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A = QR ?$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = A_2 - c_1 A_1 \quad c_1 = \frac{(A_2, A_1)}{(A_1, A_1)} = 0$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = b_3 = A_3 - c_1 b_1 - c_2 b_2 \quad c_1 = \frac{(A_3, A_1)}{(A_1, A_1)} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9/5 \\ 0 \\ 12/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} \quad c_2 = \frac{(A_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = 2$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} A_1 \quad q_2 = A_2 \quad q_3 = -3/5 A_1 - 2 A_2 + A_3$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = U^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (q_1 \ q_2 \ q_3) = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 5 (полярное разложение).

$$A = (A_{ij})_{n \times n} \quad a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

$\forall A$ $\exists U$ унит. (Q ортогональная) матрица
 $\exists ! H$ эрмитова (S - симметр.) матрица

$$\boxed{A = HU}$$

$$\boxed{A = SQ}$$

Если, кроме того, A невырожденная, то и матрица $U(Q)$ определяется единственным образом

Мы будем доказывать теорему для операторов, матрицы из теоремы будут матрицами этих операторов в о.н.б.

Теорема 6 (полярное разложение линейного оператора).

$\mathcal{A} \in End(V)$ $(V, (\cdot, \cdot))$ унит. (евкл)

$\forall \mathcal{A} \exists U \in End(V)$ изометрич, $\exists ! H \in End(V)$ самосопряж., т.ч.

$$\boxed{\mathcal{A} = HU}$$

Если, кроме того, \mathcal{A} невырожд, то U определяется однозначно.

Утверждение. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$ о.н.с., т.ч. все с.ч. $\lambda \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists ! \mathcal{B} \in End(V) : \boxed{\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}}$, т.ч. все с.ч. \mathcal{B} неотриц.

$$\boxed{\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{A}}}$$

Доказательство. (утверждения) \mathcal{A} о.п.с. $\Rightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч. собств. подпр.}} V_\lambda \quad \lambda \geq 0$

\downarrow базис

$V = span(v_1 \dots v_n) : \mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$
с.в. \mathcal{A}

Определим: $\mathcal{B}v_i = \sqrt{\lambda_i}v_i \Rightarrow$ очевидно, $\sqrt{\lambda_i}$ с.ч. \mathcal{B} и v_i с.ч. $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$ для всех с.ч. \mathcal{B}

\forall базисн. $v_i \quad \mathcal{B}^2 v_i = \lambda_i v_i = \mathcal{A}v_i \Leftrightarrow \mathcal{B}^2 v = \mathcal{A}v \quad \forall v \in V \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}}$

Единственность: $\square \underset{\text{o.п.с.}}{C} \in End(V)$ т.ч. $C^2 = \mathcal{A}$ и все с.ч. $C \geq 0$

$C\mathcal{A} = C \cdot C^2 = C^2 \cdot C = \mathcal{A}C \quad \mathcal{A}$ и C перестановочны $\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ и C перестановичны

$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \quad V_{\lambda} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ инвариантно относительно $C : \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(CV_{\lambda}) = C \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})V_{\lambda}}_{= 0} = 0$

Сужение: $C|_{V_{\lambda}} \stackrel{?}{=} \mathcal{B}|_{V_{\lambda}}$

$\chi_C(t) : \chi_{C|_{V_{\lambda}}}(t) \Rightarrow$ все с.ч. $C|_{V_{\lambda}}$ неотриц.

т.к. C о.п.с. $\Rightarrow V_{\lambda} = span(\omega_1 \dots \omega_k)$
 \downarrow
 \exists базис из с.в.

$V = \bigoplus_{\mu \text{ с.ч. } C \text{ собств. подпр. } C} W_{\mu} = span(\omega_1 \dots \omega_n)$
 \uparrow
 $\text{с.в. } C$

ω_j с.ч. C отвч. $\mu_j \Rightarrow C\omega_j = \mu_j\omega_j \quad \mu_j \geq 0$

ω_j с.в. \mathcal{A} отвч. λ

$$\lambda\omega_j = \mathcal{A}\omega_j = C^2\omega_j = \mu_j^2\omega_j \Rightarrow \lambda = \mu_j^2 \Rightarrow \mu_j = \sqrt{\lambda}$$

$$C\omega_j = \sqrt{\lambda}\omega_j = \mathcal{B}\omega_j \underset{\in V_\lambda}{\Rightarrow} C|_{V_\lambda} = B|_{V_\lambda} \Rightarrow C = B \text{ на } V$$

■

Доказательство. (Теоремы)

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен.

$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = (\mathcal{A}^*)^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^* \quad \text{аналогично } \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0 \quad \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$$

$$\forall u \neq 0 \quad (\mathcal{A}\mathcal{A}^*u, u) = (\mathcal{A}^*u, \mathcal{A}^*u) \geq 0 \Leftrightarrow \text{все с.ч. } \mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0$$

Аналогично все с.ч. $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}^*\mathcal{A} \text{ самосопр.} \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0 \end{array} \Rightarrow \text{о.п.с., все с.ч. } \lambda \geq 0$$

$$V_\lambda \perp V_\mu \quad V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}^*\mathcal{A}} V_\lambda = \text{span}(\underset{\text{o.н.б. из с.в. } \mathcal{A}\mathcal{A}^*}{v_1 \dots v_n})$$

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A}v_i, v_j) = (\mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j)$$

||

$$(\lambda_i v_i, v_j) = \lambda_i(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}$$

$$\lambda_i > 0 \rightarrow \mathcal{A}v_i \perp \mathcal{A}v_j \quad i \neq j$$

$$\lambda_i = 0 \rightarrow (\mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j) = 0$$

$$(\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_n) \text{ дополним до о.н.б. } V$$

Какие-то векторы $\emptyset(\lambda_i = 0)$, остальные попарно-ортогоны.

$$z_1 \dots z_n \text{ о.н.б. } V \quad \mathcal{A}v_i = \sqrt{\lambda_i}z_i \quad (z_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathcal{A}v_i)$$

Определим:

$$Hz_i := \sqrt{\lambda_i}z_i \quad i = 1 \dots n$$

$$\begin{array}{c} Uv_i = z_i \\ \text{o.н.б. } v \rightsquigarrow \text{o.н.б. } z \end{array} \Rightarrow \mathcal{A}v_i = \sqrt{\lambda_i}z_i = Hz_i = HUv_i$$

$$V = \text{span}(v_1 \dots v_n) \underset{\text{базис}}{\Rightarrow} \mathcal{A} = HU$$

$$U : \text{o.н.б.} \rightsquigarrow \text{o.н.б.} \Rightarrow \underset{\text{(св-ва изометр.)}}{U \text{ изометр.}}, \text{ т.е. } U^* = U^{-1}$$

$$H : \text{o.п.с.} \quad H = H^* \underset{\text{самосопр.}}{\text{из def}} \quad \sqrt{\lambda_i} \text{ с.ч. } H \geq 0, z_i \text{ о.н.с.в. } H$$

$$\boxed{\mathcal{A} = HU}$$

$$\mathcal{A}^* = U^*H^* = U^{-1}H \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = HUU^{-1}H = H^2 \Rightarrow \boxed{H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}}, \text{ все с.ч. } \geq 0, \text{ определяется единственным образом из утверждения.}$$

$$\square \mathcal{A} \text{ невырожд.} \Rightarrow \mathcal{A}^* \text{ невырожд.} \Rightarrow H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*} \text{ невырожд. } H^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^* \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{A} = HU \Rightarrow U = H^{-1}\mathcal{A} \Rightarrow U$ ед. образом. ■

Следствие 1. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$ $\exists U \in End(V)$ изометр. $\exists! H \in End(V)$ самосопр.

Кроме того, если \mathcal{A} невырожд, то U определяется единственным образом.

Доказательство. $\mathcal{A}^* = \begin{matrix} H_1 & \cdot & U_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{самосопр.} & & \text{изометр.} \end{matrix}$ $H_1 = \sqrt{\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^*)^*} = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^* = (H_1 U_1)^* = U_1^* H_1^* = \underbrace{U_1^{-1}}_{\text{изометр.}} H_1 = UH$, где $\frac{U = U_1^{-1}}{H = H_1 = \sqrt{\mathcal{A}^*}\mathcal{A}}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ невыр. $\Rightarrow U = \mathcal{A}H^{-1}$ единств. обр. ■

Определение 4.

$\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ левый модуль оператора \mathcal{A}

$\sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$ правый модуль оператора \mathcal{A}

Замечание. $A_{n \times n}$ $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ диагонализируемая матрица, самосопряж.

$v_1 \dots v_n$ о.н.с.в. $T = (v_1 \dots v_n) \leftarrow$ унит. (ортог.)

$T^{-1}(AA^*)T = \overline{T^T(AA^*)T} = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i \geq 0$

$AA^* = T\Lambda T^{-1} \quad \sqrt{\Lambda} = diag(\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n})$

$\sqrt{AA^*} = T\sqrt{\Lambda}T^{-1} = T\sqrt{\Lambda}T^T$

11 Квадратичные формы

11.1 Основные понятия

Определение 1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, м.ч.

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ — Квадратичная форма

$f(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$

Матричная форма записи: $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $a_{ij} = a_{ji}$ $A^* = A^T = A$

$f(x) = x^T Ax$ $= (x, Ax) = (A^*x, x) = (Ax)^T x = x^T A^T x$

$\Gamma = E$ канонический базис.

Замечание.

1. Другой подход к def кв. ф.

$\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ билинейная форма

$$x \in V \leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n$$

$e_1 \dots e_n$ базис V

$$y \in V \leftrightarrow y \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha(x, y) = \alpha(y, x) \text{ симметр. } \forall x, y \in V$$

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad a_{ij} = \alpha(e_i, e_j) = \alpha(e_j, e_i) = a_{ji} \quad \alpha \text{ симметрична}$$

Определение 2. Квадратичная форма $f(x) = \alpha(x, x) \quad \forall x \in V$

2. В комплексном линейном пр-ве вводится объект подобный кв. ф. в \mathbb{R}^n

Определение 3. Эрмитова форма:

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \bar{x}_j, \text{ где } a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Очевидно $\overline{f(x)} = f(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n \quad f(x) \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$A = (a_{ij}) \quad A^* = \overline{A^T} = A \quad A$ эрмитова матрица.

Или $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
 $e_1 \dots e_n$

α половинолинейная эрмитова форма

α линейна по 1 аргументу

α аддитивна по 2 аргументу

α псевдооднородна по 2 аргументу

$$\forall x, y \in V \quad \alpha(x, y) = \overline{\alpha(x, y)} \quad \alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j$$

$$a_{ij} = \alpha(e_i, e_j) = \overline{\alpha(e_j, e_i)} = \overline{a_{ji}}$$

$$\forall x, y \in V \quad \alpha(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$$

Определение 4. Эрмитова форма:

$$\forall x \in V \quad f(x) = \alpha(x, x)$$

$$\forall x, y \in V \quad \alpha(x, y) = x^T A \bar{y} = (x, \bar{A} y) = (A^T x, y)$$

\forall скал. пр-е в Евклидовом пространстве \rightsquigarrow билинейная форма

\forall псевдоскалярное пр-е в унитарном пространстве \rightsquigarrow полуторалинейная форма.

$$\mathbb{R} \quad f(x) = x^T A x \quad A^T = A - \text{Мы занимаемся такими.}$$

Определение 5. $rg f = rg A$ ранг квадратичной формы

Определение 6. Будем говорить, что к кв. ф. применено линейное преобр. Q ,

если $x_i \sim y_i$ по следующему правилу

$$x = Qy \quad Q_{n \times n}$$

Будем рассматривать только невырожд. Q

$$f(x) = x^T Ax = (Qy)^T A Q y = y^T [Q^T A Q] y = y^T B y = g(y)$$

кв. ф.

$$B^T = Q^T A^T Q = Q^T A Q = B \quad B \text{ симм.}$$

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{Q} & g \\ \text{кв. ф.} & & \text{кв. ф.} \end{array} \quad \boxed{B = Q^T A Q} \quad Q \text{ невыр.}$$

$$rgB = rgA \quad \underline{\text{ргф инвариант относительно невыр. лин. преобр. } Q}$$

Определение 7. Кв. ф. f называется приведенной к каноническому виду, если все $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$$A = diag(a_{11} \dots a_{nn})$$

Число $a_{ii} > 0$ называется положительным индексом инерции кв. ф.

$$\sigma^+(f) = \sigma^+$$

Число $a_{ii} < 0$ называется отрицательным индексом инерции кв. ф.

$$\sigma^-(f) = \sigma^-$$

Число $a_{ii} = 0$ обозначим за $\sigma^0(f) = \sigma^0$

$\sigma(f) = (\sigma^+, \sigma^-, \sigma^0)$ сигнатура кв. ф. ($\sigma^+ - \sigma^-$ тоже сигнатуре)

$rgf = (\sigma^+ + \sigma^-)$ инвариант $\rightsquigarrow \sigma^0 = n - rg f$ инвариант относительно Q .

Определение 8. Канонический вид кв. ф. f называется нормальным, если все ненулевые $a_{ii} = \pm 1$

Очевидно, всегда $\exists Q \quad \underset{x}{\text{канонич}} \xrightarrow{Q} \underset{y}{\text{нормальн.}}$

$$Q = diag(q_1 \dots q_n) \quad \begin{array}{ll} q_i = \frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}} & a_{ii} \neq 0 \\ q_i = 1 & a_{ii} = 0 \end{array}$$

$$x = Qy$$

$$\text{Канонич. вид } \dots + \underbrace{a_{ii}}_{>0} x_i^2 + \dots + \underbrace{a_{jj}}_{<0} x_j^2 + \dots \xrightarrow{x_i = \frac{y_i}{\sqrt{|a_{ii}|}}} \dots + 1 \cdot y_i^2 \dots - y_j^2 - \dots$$

Основная задача теории кв. форм: Найти линейное невырожд. преобр. $Q : x = Qy$, т.ч. кв. ф. f будет приведена к канонич. (норм.) виду ($g(y)$)

Т.е. $\exists Q?$ $Q^T A Q = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ $\textcircled{?}$

11.2 Методы приведения кв. ф. к канонич. виду

I. Ортогональное преобразование: (канонич. вид симм. м-цы)

$$x \in \mathbb{R}^n \quad x = Qy \quad y \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = x^T A x \quad A = A^T$$

A – матрица оператора в о.н.б. (канонич. базис \mathbb{R}^n)

x и y координаты в разных базисах. $Q = T_{e \rightarrow e'}$ ($Q^T = Q^{-1}$)
 в исходном в новом
 канон. базис e о.н.б. \mathbb{R}^n e' оптогон.
 т.к. e, e' о.н.б.

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = B \quad f \xrightarrow[\text{кв. ф. } A]{} g \xrightarrow[\text{кв. ф. } B]{} g$$

$\exists? e'$, т.ч. $B = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$

—Да

$A = A^T$ симметр. матр. (матр. самосопр. опер.) \Rightarrow канонич. вид симм. матрицы (см. соотв. следствие)

все с.ч. λ_i веществ. и \exists базис из о.н.с.в. $A : v_1 \dots v_n \quad Q = (v_1 \dots v_n) \sim \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$
собств. ч.

II. Метод Лагранжа (метод выделения полного квадрата)

1. $\forall i a_{ii} = 0 \Rightarrow \exists a_{ij} \neq 0 \quad i \neq j$

$$x = Qy \quad \begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \quad k \neq i \\ x_k = y_k \quad k \neq j \end{cases} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Очевидно, невырожд.}$$

$$f(x) = x^T Ax = y^T By = g(y) = \dots + \underset{\neq 0}{a_{ii}} y_i^2 + \dots - \underset{\neq 0}{a_{ij}} y_j^2 + \dots$$

$$a_{ij} x_i x_j = a_{ij} (y_i^2 - y_j^2)$$

2. $\exists a_{ii} \neq 0$

Выпишем все слагаемые из f , которые содержат x_i

$$\frac{a_{ii}}{a_{ii}} (a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_i x_j) = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 - \boxed{\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j^2 a_{ii}^2 - \frac{2}{a_{ii}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq j \leq n \\ k \neq i}} a_{ik} a_{ij} x_k x_j \quad \text{нет переменной } x_i}$$

Поместим обратно в форму f

$$f(x) = f(x_1 \dots x_i \dots x_n) = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 + \tilde{f}(x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_n) \quad \begin{matrix} \text{кв. ф. не содержит} \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$Q^{-1}; \quad \begin{cases} y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \\ y_k = x_k \quad k \neq i \end{cases} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ a_{i1} & a_{ii} & \dots & a_{1n} \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0$$

Очевидно, невыр. $\Rightarrow Q$ невыр. $x = Qy$

Далее повторяем алгоритм для \hat{f} , пока не исчерпаем все переменные.

III метод Якоби (унитреугольное преобразование)

LU разложение матрицы.

$$A = A^T \quad \Delta_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \Rightarrow \begin{array}{l} \exists! U \text{ унитреугл. верхн. матр: } A = U^T D U \\ \text{невырожд.} \\ \exists! L \text{ унитреугл. нижн. матр: } A = L D L^T \end{array}$$

$$Q = U^{-1} \quad (U^T)^{-1} A U^{-1} = D \\ = Q^T = Q$$

Замечание. Метод Якоби не является универсальным, т.е. применим не для всех кв. ф., а только для форм, у которых $\Delta_k \neq 0 \forall k = 1 \dots n-1$ (т.е. $rg f \geq n-1$)

Теорема 1 (Якоби). $A = A^T, \Delta_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1$

$$A = \begin{pmatrix} & b_2 & b_3 & & b_n \\ a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \exists! \text{ унитреугл. верхняя матрица } Q, \text{ т.ч.} \\ Q^T A Q = D = diag(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}) \end{array}$$

При этом:

$$Q = \begin{pmatrix} & q_2 & q_3 & & q_n \\ 1 & \boxed{q_{12}} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \boxed{q_{23}} & \cdots & q_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & q_{n-1 \ n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \boxed{A_{k-1} q_k = -b_k} \quad \begin{array}{l} (\Delta_k = |A_k| \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1) \\ (k = 2 \dots n) \end{array} \quad (\Rightarrow \text{все системы имеют един. реш.})$$

Доказательство. \exists и еди. следует из LU разложения для $A = A^T$

Остается только доказать формулу (в рамке сверху).

$$\begin{array}{l} \Delta_1 = a_{11} \neq 0 \\ 1. \text{ База индукции, } n = 2. \quad A = \begin{pmatrix} & \frac{b_1}{a_{12}} \\ a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{q_{12}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{11} q_{12} = -a_{12} \\ q_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \end{array}$$

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} + a_{12} & -\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}a_{11}-a_{12}^2}{a_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \end{pmatrix} = diag(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1})$$

2. Индукционное предположение. \square верно для k , $\square \Delta_1 \neq 0 \dots \Delta_k \neq 0$

Q_k определяется по формуле $A_{j-1} q_j = -b_j$

$$Q_k^T A Q_k = diag(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}) \quad j = 2 \dots k$$

$$\operatorname{diag}(\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \dots, \Delta_k/\Delta_{k-1}) = \operatorname{diag}(d_1 \dots d_k) = D$$

3. Индукционный переход. Докажем, что верно для Q_{k+1}

$$Q_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} Q_k & q_{k+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad q_{k+1} \text{ определяется: } \begin{array}{l} A_k q_{k+1} = -b_{k+1} \\ (q_{k+1}^T A_k^T = -b_{k+1}^T) \end{array}$$

$$Q_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} Q_k^T & 0 \\ \hline q_{k+1}^T & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_k & b_{k+1} \\ \hline b_{k+1}^T & a_{k+1 \ k+1} \end{array} \right)}_{\substack{=0 \ (\text{по формуле подставили})}} \cdot \left(\begin{array}{c|c} Q_K & q_{k+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} Q_k^T A_k Q_k & \overbrace{Q_k^T (A_k q_{k+1} + b_{k+1})}^{=0} \\ \hline 0 & \overbrace{q_{k+1}^T b_{k+1} + a_{k+1 \ k+1}}^{d_{k+1}} \end{array} \right) = \operatorname{diag}(d_1 \dots d_k, d_{k+1}) = D$$

$$d_{k+1} = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} \text{ (по теореме об } LU\text{-разложении).}$$

■

Замечание (о методе Гаусса (модификация метода Лагранжа)).

Алгоритм приведения матрицы к LU .

$$\Delta_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1$$

$$(A|E) \underset{\substack{\sim \\ \text{метод Гаусса}}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} d_1 & * & 1 & 0 \\ \ddots & & \ddots & \\ 0 & d_n & * & 1 \\ \hline DU & & L^{-1} & \end{array} \right)$$

$$A = LDU \quad A = A^T$$

$$A = LDL^T \quad L^{-1} A (L^T)^{-1} = D \quad \boxed{Q = (L^{-1})^T}$$

$\Delta_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1$ – условия для метода Якоби.

$$(A|E) \underset{\substack{\sim \\ \text{м. Гаусса}}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} d_1 & * & 1 & 0 \\ \ddots & & \ddots & \\ 0 & d_n & * & 1 \\ \hline Q^T & & Q^T & \end{array} \right)$$

$$D = (d_1 \dots d_n)$$

$$f \rightsquigarrow d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2 \quad x = Qy$$

Подвох в том, что для многих матриц, у которых $\Delta_k = 0$ для $1 \leq k \leq k-1$ приходится производить переобозначения переменных.

В методе Лагранжа, мы говорили, что $\exists a_{ii} \neq 0 \rightsquigarrow$ н.у.о. скажем, что $a_{11} \neq 0$. Таким образом формула в методе Лагранжа \sim 1 шагу алгоритма Гаусса.

В итоге:

2 универсальных метода (т.е. \forall кв. ф.) – ортогональное преобразование и метод Лагранжа.

2 метода, которые позволяют найти канонический вид кв. ф., не находя самого преобр. Q .

– ортог. преобр. $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, где λ_i с.ч. A

– м. Якоби $\Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2$, где $\Delta_k = \det A_k$

11.3 Закон инерции кв. формы. Критерий Сильвестра

Теорема 1 (Закон инерции кв. формы).

Каким бы лин. невыр. преобразованием Q ни была приведена к каноническому виду кв. ф. f , её сигнатура будет одинаковой.

$$f = x^T Ax \quad x = Qy \quad i = 1, 2 \quad f(x) \rightsquigarrow g_i(y)$$

$$\sigma(f) = \sigma(g_1) = \sigma(g_2)$$

Доказательство. $x = Q_1 y \quad x = Q_2 z \quad Q_{1,2}$ невырожд, приводят f к канонич. виду.

$$f(x) = x^T Ax = \underbrace{y^T B y}_{g(y)} = \underbrace{z^T C z}_{t(z)}$$

$$g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_p y_p^2 - \lambda_{p+1} \cdot y_{p+1}^2 - \dots - \lambda_{p+k} \cdot y_{p+k}^2$$

$$t(z) = \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_s z_s^2 - \mu_{s+1} z_{s+1}^2 - \dots - \mu_{s+l} z_{s+l}^2$$

$$p+k = s+l = rgf = n - \sigma \leq n \quad \lambda_i, \mu_i > 0$$

$$\text{С.Л.У: } \underbrace{Q_1^{-1}}_{\text{невыр.}} x = y \quad (1) \quad \underbrace{Q_2^{-1}}_{\text{невыр.}} x = z \quad (2)$$

\square y такой столбик, что: $y_1 = y_2 = \dots = y_p = 0$ $\xrightarrow[\text{новая с.л.о.у.}]{} 0$

\square z такой столбик, что: $z_{s+1} = \dots = z_{s+l} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{первые } p \text{ строк (1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{последние } l \text{ строк (2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3)$$

$\square p < s$ уравнений в системе: $p + l < s + l = rgf \leq n \Rightarrow$ число уравнений меньше, чем число неизвестных $\Rightarrow \exists$ нетривиальное СЛОУ решение x_0 ■