Теорема 1 (QR разложение).

$\forall$ *$\underline{\text{невырожд}}$* $\underset{a_{ij}\in\mathbb{C}(\mathbb{R})}{A_{n\times n}}$ $\exists$ *унитарн (ортог)* Q *и верхн треугольн. матрица* $\underset{\text{(правая "Right")}}{R}$: $\boxed{A = QR}$

Доказательство. A невырожд. $\Leftrightarrow rg(\underset{\text{лин. нез. столбцы}}{A_1 \dots A_n}) = n \qquad A_k \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

$$A_1 \dots A_n \underset{\text{Г-Ш нормируем}}{\rightsquigarrow} \underbrace{q_1 \dots q_n}_{\text{попарно-ортог. и нормир.}} \qquad q_k \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} q_1 & = & u_{11}A_1 \\ q_2 & = & u_{12}A_1 + u_{22}A_2 \\ q_3 & = & u_{13}A_1 + u_{23}A_2 + u_{33}A_3 \\ \dots & & \\ q_n & = & u_{1n}A_1 + u_{2n}A_2 + \dots + u_{nn}A_n \end{array}\right. \qquad Q = \underset{\text{очевидно, унит. (ортог)}}{(\overbrace{q_1 \dots q_n}^{\swarrow \text{ о.н.с.}})} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{21} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(q_1 \dots q_n) = \underbrace{Q}_{\text{невыр}} = \underbrace{A}_{\text{невыр}} U = (A_1 \dots A_n) \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix} \right) \Rightarrow U \text{ невыр.} \Rightarrow \exists U^{-1} = \underset{\text{верхн. треуг.}}{R}$$

$\boxed{A = QR}$ ■

Следствие 1. $\forall$ *невырожд.* A $\quad \exists Q$ *унит. (ортог.),* L *нижн. треугол.* : $\boxed{A = LQ}$ *(левая)*

Доказательство. A^T невыр. $\Rightarrow \begin{array}{l} \exists R \text{ верх. треуг.} \\ \exists Q_1 \text{ унит. (ортог.)} \end{array}$

$$\underset{\overset{||}{A}}{(A^T)^T} = (Q_1R)^T = \underbrace{R^T}_{\text{нижн. треуг.}} \cdot \underset{\text{унит. (ортог.)}}{Q_1^T} = LQ$$ ■

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = QR$?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = b_1 = \underset{\overset{||}{b_1}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}} \tfrac{1}{5} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = A_2 - c_1A_1 \qquad c_1 = \frac{(A_2, A_1)}{(A_1, A_1)} = 0$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$q_3 = b_3 = A_3 - c_1 b_1 - c_2 b_2$ $\qquad c_1 = \dfrac{(A_3, A_1)}{(A_1, A_1)} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9/5 \\ 0 \\ 12/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} \qquad c_2 = \frac{(A_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = 2$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} A_1 \qquad q_2 = A_2 \qquad q_3 = -3/5 A_1 - 2A_2 + A_3$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = U^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (q_1 \ q_2 \ q_3) = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{Q}{\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}} \overset{R}{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Теорема 2 (полярное разложение).
$A = (A_{ij})_{n \times n} \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$\forall A$ $\exists U$ *унит. (Q ортогональная) матрица*; $\exists! H$ *эрмитова (S - симметр.) матрица* $\qquad \boxed{\boxed{A = HU} \quad \boxed{A = SQ}}$

Если, кроме того, A невырожденная, то и матрица $U(Q)$ определяется единственным образом

Мы будем доказывать теорему для операторов, матрицы из теоремы будут матрицами этих операторов в о.н.б.

Теорема 3 (полярное разложение линейного оператора).
$\mathcal{A} \in End(V) \qquad (V, (\cdot, \cdot))$ *унит. (евкл)*

$\forall \mathcal{A}$ $\exists U \in End(V)$ *изометрич*, $\exists! H \in End(V)$ *самосопряж, т.ч.*

$$\boxed{\mathcal{A} = HU}$$

Если, кроме того, $\mathcal{A}$ невырожд, то U определяется однозначно.

Утверждение. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$ *о.п.с, т.ч. все с.ч.* $\lambda \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists! \mathcal{B} \in End(V) : \boxed{\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}}$, *т.ч. все с.ч. $\mathcal{B}$ неотриц.*

$\boxed{\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{A}}}$

Доказательство. (утверждения) $\mathcal{A}$ о.п.с. $\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} \underset{\text{собств. подпр.}}{V_\lambda} \qquad \lambda \geq 0$

$$V = span(\underset{\text{с.в. } \mathcal{A}}{\overset{\downarrow\ \text{базис}}{v_1 \dots v_n}}): \quad \mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$$

Определим: $\mathcal{B}v_i = \sqrt{\lambda_i} v_i \Rightarrow$ очевидно, $\sqrt{\lambda_i}$ с.ч. $\mathcal{B}$ и v_i с.ч. $\qquad \underset{\text{все с.ч. } \mathcal{B}}{\sqrt{\lambda_i} \geq 0}$

$\forall$ базисн. $v_i \quad \mathcal{B}^2 v_i = \lambda_i v_i = \mathcal{A}v_i \Leftrightarrow \mathcal{B}^2 v = \mathcal{A}v \quad \forall v \in V \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}}$

Единственность: $\sqsupset \underset{\text{о.п.с.}}{C} \in End(V)$ т.ч. $C^2 = \mathcal{A}$ и все с.ч. $C \geq 0$

$C\mathcal{A} = C \cdot C^2 = C^2 \cdot C = \mathcal{A}C \qquad \mathcal{A}$ и C перестановочны $\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ и C перестановнчны

$V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda \qquad V_\lambda = \underset{\text{собств. подпр. } \mathcal{A}}{Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})}$ <u>инвариантно отн-но</u> $C: \qquad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(CV_\lambda) = C\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})V_\lambda}_{\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

<u>Сужение:</u> $C|_{V_\lambda} \overset{?}{=} \mathcal{B}|_{V_\lambda}$

$\chi_C(t) \vdots \chi_{C|_{V_\lambda}}(t) \Rightarrow$ все с.ч. $C|_{V_\lambda}$ неотриц.

т.к. $\quad C \underset{\exists \text{ базис из с.в.}}{\overset{}{\underset{\Downarrow}{\text{о.п.с.}}}} \quad \Rightarrow V_\lambda = span(\omega_1 \dots \omega_k)$

$$V = \bigoplus_{\mu \text{ с.ч. } C} \underset{\text{собств. подпр. } C}{W_\mu} = span(\underset{\text{с.в. } C}{\underset{\uparrow}{\omega_1 \dots \omega_n}})$$

ω_j с.ч. C отвеч. $\mu_j \Rightarrow C\omega_j = \mu_j \omega_j \quad \mu_j \geq 0$

ω_j с.в. $\mathcal{A}$ отвеч. λ

$\lambda\omega_j = \mathcal{A}\omega_j = C^2\omega_j = \mu_j^2 \omega_j \Rightarrow \lambda = \mu_j^2 \Rightarrow \mu_j = \sqrt{\lambda}$

$C\omega_j = \sqrt{\lambda}\omega_j = \mathcal{B}\underset{\in V_\lambda}{\omega_j} \Rightarrow C|_{V_\lambda} = B|_{V_\lambda} \Rightarrow C = B$ на V ∎

Доказательство. (Теоремы)

$\mathcal{A}\mathcal{A}^* \qquad \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен.

$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = (\mathcal{A}^*)^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^* \qquad$ аналогично $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0 \qquad \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$

$\forall u \neq \mathbb{0} \quad (\mathcal{A}\mathcal{A}^* u, u) = (\mathcal{A}^* u, \mathcal{A}^* u) \geq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0$

Аналогично все с.ч. $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{A}^*\mathcal{A} \text{ самосопр.} \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{о.п.с., все с.ч. } \lambda \geq 0$$

$$\underset{\lambda \neq \mu}{V_\lambda \perp V_\mu} \qquad V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}^*\mathcal{A}} V_\lambda = span(\underset{\text{о.н.б. из с.в. } \mathcal{A}\mathcal{A}^*}{v_1 \dots v_n})$$

$$\begin{array}{ccl} (\mathcal{A}^* A v_i, v_j) & = & (\mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j) \\ || & & \\ (\lambda_i v_i, v_j) & = & \lambda_i \underset{\delta_{ij}}{\underset{||}{(v_i, v_j)}} = \lambda_i \delta_{ij} \end{array}$$

$\lambda_i > 0 \rightarrow \mathcal{A}v_i \perp \mathcal{A}v_j \quad i \neq j$

$\lambda_i = 0 \to (\mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j) = 0$

$(\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_n)$ дополним до о.н.б. V

Какие-то векторы – $\mathbb{0}(\lambda_i = 0)$, остальные попарно-ортогон.

$z_1 \ldots z_n$ о.н.б. $V \qquad \mathcal{A}v_i = \sqrt{\lambda_i} z_i \qquad (z_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathcal{A}v_i)$

<u>Определим:</u>

$Hz_i := \sqrt{\lambda_i} z_i \quad i = 1 \ldots n$

$\begin{array}{c} Uv_i = z_i \\ \text{о.н.б. } v \rightsquigarrow \text{ о.н.б. } z \end{array} \Rightarrow \mathcal{A}v_i = \sqrt{\lambda_i} z_i = Hz_i = HUv_i$

$V = span(\underbrace{v_1 \ldots v_n}_{\text{базис}}) \Rightarrow \mathcal{A} = HU$

U : о.н.б. $\rightsquigarrow$ о.н.б. $\underset{\text{(св-ва изометр.)}}{\Rightarrow}$ U <u>изометр.</u>, т.е. $U^* = U^{-1}$

H : о.п.с. $\qquad \underset{\text{самосопр.}}{\underline{H = H^*}}$ из $def \qquad \sqrt{\lambda_i}$ с.ч. $H \geq 0, z_i$ о.н.с.в. H

$\boxed{\mathcal{A} = HU}$

$\mathcal{A}^* = U^* H^* = U^{-1} H \qquad \mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = HUU^{-1}H = H^2 \Rightarrow \boxed{H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}}$, все с.ч. ≥ 0, определяется единственным образом из утверждения.

$\sqsupset$ $\mathcal{A}$ невырожд. $\Rightarrow \mathcal{A}^*$ невырожд. $\Rightarrow H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ невырожд. $H^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A} = HU \Rightarrow U = H^{-1}\mathcal{A} \Rightarrow U$ ед. образом. ■

Следствие 1. $\forall \mathcal{A} \in End(V) \quad \begin{array}{l} \exists U \in End(V) \ \underline{\text{изометр.}} \\ \exists! H \in End(V) \ \underline{\text{самосопр.}} \end{array}$, *т.ч.* $\boxed{\mathcal{A} = UH}$

Кроме того, если $\mathcal{A}$ невырожд, то U определяется единственным образом.

Доказательство. $\mathcal{A}^* = \underset{\text{самосопр.}}{\overset{\uparrow}{H_1}} \cdot \underset{\text{изометр.}}{\overset{\uparrow}{U_1}} \qquad \underset{\text{самосопр.}}{H_1} = \sqrt{\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^*)^*} = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^* = (H_1U_1)^* = U_1^* H_1^* = \underbrace{U_1^{-1}}_{\text{изометр.}} H_1 = UH$, где $\begin{array}{c} U = U_1^{-1} \\ \boxed{H = H_1 = \sqrt{\mathcal{A}^*}\mathcal{A}} \end{array}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ невыр. $\Rightarrow U = \mathcal{A}H^{-1}$ единств. обр. ■

Определение 1.

$\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ <u>*левый модуль*</u> *оператора* $\mathcal{A}$

$\sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$ <u>*правый модуль*</u> *оператора* $\mathcal{A}$

Замечание. $A_{n\times n} \qquad AA^*$ диагонализируемая матрица, самосопряж.

$v_1 \ldots v_n$ о.н.с.в. $\qquad T = (v_1 \ldots v_n) \leftarrow$ унит. (ортог.)

$T^{-1}(AA^*)T = \overline{T^T}(AA^*)T = \Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \qquad \lambda_i \geq 0$

$AA^* = T\Lambda T^{-1} \qquad \sqrt{\Lambda} = diag(\sqrt{\lambda_1} \ldots \sqrt{\lambda_n})$

$\sqrt{AA^*} = T\sqrt{\Lambda}T^{-1} = T\sqrt{\Lambda T^T}$

1 Квадратичные формы

1.1 Основные понятия

Определение 1. *$f : \mathbb{R}^n \to R$, т.ч.*

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}$, *где $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ — Квадратичная форма*

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j}$$

Матричная форма записи: $A = \underset{\text{симметр.}}{(a_{ij})_{n \times n}} \qquad a_{ij} = a_{ji} \qquad A^* = A^T = A$

$\boxed{f(x) = x^T A x} = (x, Ax) = (A^* x, x) = (Ax)^T x = x^T A^T x$

$\Gamma = E$ *канонический базис.*

Замечание.

1. Другой подход к def кв. ф.

   $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$ билинейная форма

   $e_1 \dots e_n$ базис V $\quad \begin{array}{l} x \in V \leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n \\ y \in V \leftrightarrow y \in \mathbb{R}^n \end{array}$

   $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$ симметр. $\forall x, y \in V$

   $\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad a_{ij} = \alpha(e_i, e_j) = \alpha(e_j, e_i) = a_{ji} \qquad \alpha$ симметрична

   Определение 2. Квадратичная форма $\qquad f(x) = \alpha(x, x) \quad \forall x \in V$

2. В комплексном линейном пр-ве вводится объект подобный кв. ф. в $\mathbb{R}^n$

   Определение 3. Эрмитова форма:

   $\forall x \in \mathbb{C}^n$ $\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x_j}, \text{ где } a_{ij} = \overline{a_{ji}}}$

   Очевидно $\overline{f(x)} = f(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n \quad f(x) \in \mathbb{R} \quad \boxed{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}}$

   $A = (a_{ij}) \qquad A^* = \overline{A^T} = A \qquad A$ *эрмитова матрица.*

   Или $\begin{array}{l} \alpha : V \times V \to \mathbb{C} \\ \quad e_1 \dots e_n \end{array}$

   α полуторалинейная эрмитова форма

   α линейна по 1 аргументу
   α аддитивна по 2 аргументу
   α псевдооднородна по 2 аргументу

$\forall x, y \in V \qquad \alpha(x,y) = \overline{\alpha(x,y)} \qquad \alpha(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{y}_j$

$a_{ij} = \alpha(e_i, e_j) = \overline{\alpha(e_j, e_i)} = \overline{a_{ji}}$

$\forall x, y \in V \quad \alpha(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x,y)$

Определение 4. *Эрмитова форма:*

$\forall x \in V \quad f(x) = \alpha(x,x)$

$\forall x, y \in V \quad \alpha(x,y) = x^T A \overline{y} = (x, \overline{A}y) = (A^T x, y)$

$\forall$ скал. пр-е в Евклидовом пространстве $\leftrightsquigarrow$ билинейная форма

$\forall$ псевдоскалярное пр-е в унитарном пространстве $\leftrightsquigarrow$ полуторалинейная форма.

$\underline{\underline{\mathbb{R}}} \qquad \underline{f(x) = x^T Ax \qquad A^T = A}$ — Мы занимаемся такими.

Определение 5. $rgf = rgA$ *ранг квадратичной формы*

Определение 6. *Будем говорить, что к кв. ф. применено линейное преоб.* Q*,*

если $x_i \rightsquigarrow y_i$ *по следующему правилу*

$$x = Qy \qquad Q_{n\times n}$$

$\boxed{\text{Будем рассматривать только невырожд } Q}$

$f(x) = x^T Ax = (Qy)^T AQy = y^T \boxed{Q^T AQ} y = y^T By = \underset{\text{кв. ф.}}{g(y)}$

$B^T = Q^T A^T Q = Q^T AQ = B \qquad B$ *симметр.*

$\underset{\text{кв. ф.}}{f} \overset{Q}{\rightsquigarrow} \underset{\text{кв. ф.}}{g} \qquad \boxed{B = Q^T AQ} \quad Q$ *невыр.*

$rgB = rgA \qquad \underline{rgf \text{ инвариант}}$ *относительно невыр. лин. преобр.* Q