0.1 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$\phi(t) = \prod_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$

$\sum_{\lambda} m(\lambda) = m$

$deg\ \phi = m$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$dim P_{m-1} = m$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

$\phi(t) = \underbrace{(t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t)}_{\text{вз. просты}}$

$$\phi_\lambda(\lambda) \neq 0$$
$$\phi_\lambda(\mu) = 0$$
$$\mu \neq \lambda$$

Определение 1. $I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p \vdots \phi_\lambda\}$

***Главный идеал**, порожденный многочленом* $\phi_\lambda =$

$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda \phi_\lambda\}$

I_λ *– линейное подпространство* P_{m-1}

$p_{1,2} \vdots \phi_\lambda \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \vdots \phi_\lambda$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$\mathbb{0} = \sum_\lambda \underbrace{f_\lambda \phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda \cdot \phi_\lambda + \underbrace{\sum_{\mu\neq\lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

$$\Rightarrow f_\lambda \cdot \phi_\lambda \underset{\text{вз. просты}}{\vdots} (t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \underset{deg\ f_\lambda = m(\lambda)-1}{f_\lambda} \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda \equiv 0$$

$\Rightarrow \forall\lambda \quad f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow f_\lambda\phi_\lambda \equiv \mathbb{0} \Rightarrow$ Дизъюнктны

2. $$\begin{array}{ccc} dim P_{m-1} & = & m \\ \| & & \\ \sum_\lambda dim I_\lambda & = & \sum_\lambda m(\lambda) = m \end{array}$$

$I_\lambda \subset P_{m-1}$

$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_\lambda I_\lambda$

□

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1}\ \exists!\ p = \sum_\lambda p_\lambda$

$p_\lambda \in I_\lambda$

$$\boxed{1 = \sum_\lambda p_\lambda \text{ – \textit{полиномиальное разложение единицы}}}$$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{ccccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu & \vdots & \phi \\ || & & || & & \\ f_\lambda\phi_\lambda & & f_\mu\phi_\lambda & = & \eta\cdot\phi \\ & & \uparrow & & \\ & & (t-\lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

2. $\forall\lambda\ m(\lambda) = 1$

   Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

   $f_\lambda = const \quad (def\ f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$

Теорема 2 (Лагранжа)**.**
$\forall\lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$
$\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum\limits_\lambda \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$

Доказательство.

корень $\phi \to \mu \neq \lambda$ $\begin{array}{l} \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \end{array}$

$p(t)\ \sum\limits_\lambda p_\lambda(t) = \sum\limits_\mu \underset{\substack{\uparrow \\ const,\ \text{т.к.} \\ \text{корни взаимно} \\ \text{просты}}}{\boxed{f_\mu}} \cdot \phi_\mu(t)$

$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall\lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$
$\phi(t) = \prod\limits_\mu (t-\mu)$

$$\phi'(t) = \sum_\mu \underbrace{\prod_{\lambda\neq\mu}(t-\lambda)}_{\phi_\mu(t)} = \sum_\mu \phi_\mu(t)$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_\mu \underset{\substack{|| \\ 0\ \mu\neq\lambda}}{\phi_\mu(\lambda)} = \phi_\lambda(\lambda) \ \Rightarrow f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_\lambda \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$$ □

Следствие 1. $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$
$1 = \sum\limits_\lambda p_\lambda \Rightarrow \boxed{t = \sum\limits_\lambda \lambda p_\lambda}$

Доказательство. По теореме: $1 = \sum\limits_\lambda \boldsymbol{p_\lambda} = \sum\limits_\lambda f_\lambda \cdot \phi_\lambda = \sum\limits_\lambda \dfrac{1}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}} \cdot \boldsymbol{\phi_\lambda(t)}$

По теореме: $t = \sum\limits_\lambda \dfrac{\lambda}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}}\boldsymbol{\phi_\lambda(t)} = \sum\limits_\lambda \lambda p_\lambda$ □

$\mathcal{A} \in End(V)$

ϕ минималный многочлен, все корни $\in K(\Rightarrow$ все корни $\chi \in K$

$\Rightarrow$ т.е. все с.ч. $\in K$ – I, II случаи)

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t)$

$\mathcal{P}_\lambda := p_\lambda(\mathcal{A})$ $\qquad \boxed{\mathcal{E} = \sum\limits_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$ операторное разложение единицы

$\mathcal{P}_\lambda \in End(V)$

$\mathcal{P}_\lambda$ – проекторы ? $\qquad \uparrow$ это уже есть

Достаточно проверить $\underset{\lambda\neq\mu}{\mathcal{P}_\lambda \cdot \mathcal{P}_\mu} = \mathbb{0}$

$\mathcal{P}_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = f_\lambda(\mathcal{A}) \underset{\nwarrow\nearrow}{\cdot} \phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\lambda \neq \mu$

$\mathcal{P}_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = f_\mu(\mathcal{A}) \underset{\nwarrow\nearrow}{\cdot} \phi_\mu(\mathcal{A})$

перестановочны, т.к. многочлены от $\mathcal{A}$

$$\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot f_\mu(\mathcal{A}) \underset{\uparrow}{\phi_\lambda(\mathcal{A})} \cdot \boldsymbol{\phi_\mu(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$$

$\updownarrow$ $\qquad$ содержит

$(p_\lambda \cdot p_\mu \vdots\, \phi$ см. замеч. 1) $\quad \eta(\mathcal{A})\boldsymbol{(t-\mu)^{m(\mu)}} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_\lambda$ проекторы – **спектральные проекторы** $\mathcal{A}$

$Im\mathcal{P}_\lambda$ **спектральное подпространство**

$\underset{7.5}{\Rightarrow} \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} Im\mathcal{P}_\lambda}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow$ не о.п.с.

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \gamma(\lambda_2) = 1$

$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$

$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1}\phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$

$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$

Прав. дробь $\dfrac{1}{\phi} = \sum\limits_{\lambda} \underset{\text{Правильн.}}{\dfrac{f_\lambda \cdot \phi_\lambda}{\phi}} = \sum\limits_{\lambda} \underset{\text{Правильн. дробь}}{\dfrac{f_\lambda}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}$

$deg\ f_\lambda < m(\lambda)$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \underset{\text{простейшие}}{\frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3}} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16})\overbrace{(t-3)}^{\phi_\lambda}}_{p_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}\overbrace{(t+1)^2}^{\phi_{\lambda_2}}}_{p_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \; p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

$\boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda} \nearrow \quad 1 = \sum p_\lambda$ спектральное разложение о.п.с.

$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1 \qquad \text{Доказательство позже}}$

Определение 2. $K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
называется ***корневым подпространством*** $\mathcal{A}$

Теорема 3.

1. K_λ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$
2. $Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$
3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ *минимальный многочлен* $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda}$

Доказательство.

1. $x \in K_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_\lambda$

   $\underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{A}}x = \mathcal{A}\,\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

   $\Rightarrow \mathcal{A}x \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

2. $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{P}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A}) =$

   $= f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$

   $\forall x \in V$

   $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda} = \mathbb{0} \Rightarrow Im\mathcal{P}_\lambda \subseteq Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_\lambda$

   Обратно: $K_\lambda \overset{?}{\subseteq} Im\mathcal{P}_\lambda$

   $x \in K_\lambda$

   $\mu \neq K_\lambda \; \mathcal{P}_\mu x = \underbrace{\underset{\text{содержит } (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}}{f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A})x}}_{\eta(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}} = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

   $x = \mathcal{E}x = \sum\limits_{\mu} \underset{\mathbb{0} \;\; \mu \neq \lambda}{\mathcal{P}_\mu x} = \mathcal{P}_\lambda x \in Im\mathcal{P}_\lambda \Rightarrow K_\lambda \subseteq Im\mathcal{P}_\lambda$

   $\Rightarrow \boxed{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$?
   $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$
   Минимальный?

   $\sqsupset$ не $\overset{\psi}{\text{минимальный}}$
   $\psi_1 = (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}$ $\sqsupset$ это минимальный многочлен
   $\phi_1 := (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$ аннулятор $\mathcal{A}$?
   $\underset{\mu\neq\lambda}{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$
   $= \ldots\phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A})\cdot\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$
   $\forall x\ \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$
   $= \phi_\lambda(\mathcal{A})\underbrace{\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})}\ \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}}_{\substack{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x \\ \text{мин. многочлен по предположению}}} = \mathbb{0}$
   $\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0}$
   $\phi_1(\mathcal{A})\cdot\mathcal{E} = \underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\sum_\mu \mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu\neq\lambda}\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = \mathbb{0}$
   $\Rightarrow \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A}$, но степени $< \phi$
   $deg\ \phi_1 = m-1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$\square$

Следствие 1. *A о.п.с.* $\Leftrightarrow \forall\lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A}$ о.п.с.
$\phi(t)\ \prod_\lambda(t-\lambda)$ покажем что это минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ – собственные подпространства $\mathcal{A}$
$\forall v\in V\ \exists!\ v = \sum_\lambda v_\lambda, v_\lambda\in V_\lambda$
$\phi(\mathcal{A})v = \prod_\lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})\sum_\mu v_\mu =$
$= \sum_\mu \underbrace{\prod_\lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})}_{\phi_\mu(\mathcal{A})\cdot(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})} v_\mu = \sum_\mu \phi_\mu(\mathcal{A})\underbrace{(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})v_\mu}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{0}}} = \mathbb{0}$
$v_\mu \in V_\mu = Ker(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}) \nearrow$
$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень $\Rightarrow$ минимальный многочлен.
$(\Leftarrow)\forall\lambda : m(\lambda) = 1$
$\underset{\substack{\shortparallel \\ Im\mathcal{P}_\lambda}}{K_\lambda} = Ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^1 = V_\lambda$
$V = \bigoplus_\lambda K_\lambda = \bigoplus_\lambda V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$ о.п.с. $\square$

Примеры.
$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A-\lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$
$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A-\lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2}$ — упр.

0.2 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. *$\mathcal{B} \in End(V)$ называется* ***нильпотентным****, если $\phi(t) = t^\nu$*
Минимальный многочлен $\mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$
<u>ν – индекс нильпотентности</u> (мин. степерь $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$)

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda \\ \textit{Идемпотентность} \end{array}}$$

Степень минимального многочлена $\to \nu \le dimV \underset{\substack{\uparrow \\ \text{степень } \chi}}{=} n$

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \le dimV_\lambda$

Доказательство. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$
$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{k_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = \mathbb{0}$
$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_\lambda \in End(K_\lambda)$
$m(\lambda) \le dimK_\lambda$ □

Замечание. $\underbrace{\sum_\lambda m(\lambda)}_{deg\ \phi} \le \sum_{\substack{\| \\ deg\ \chi}} dimK_\lambda = n$

$$\bigoplus_\lambda K_\lambda = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана)**.**
$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ можно представить в виде:
$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{D}$ о.п.с.
$\mathcal{B}$ нильпотентный, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ перестановочны

Доказательство. ϕ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$\mathcal{E} = \sum_\lambda \mathcal{P}_\lambda$ операторн. разложение единицы
$\mathcal{D} := \sum_\lambda \lambda \mathcal{P}_\lambda \quad D$ о.п.с.?
$V = \bigoplus_\lambda Im\mathcal{P}_\lambda$
$\exists\, v_\lambda \ne 0 \ \in Im\mathcal{P}_\lambda$

$$\underline{\underline{Dv_\lambda}} = (\sum_\mu \mu \mathcal{P}_\mu) v_\lambda = \sum_\mu \mu \underset{\substack{\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0} \\ \lambda \ne \mu}}{\overset{\substack{0\ \mu \ne \lambda \\ \|}}{(\mathcal{P}_\mu v_\lambda)}} = \lambda \mathcal{P}_\lambda v_\lambda = \underline{\underline{\lambda \cdot v_\lambda}}$$

$\Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{D}, v_\lambda$ соотв. с.в. $\mathcal{D}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} Im\mathcal{P}_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathcal{D}} \text{ собств. подпр-во } \mathcal{D}\text{, отвечающ. с.ч. } \lambda \\ V = \bigoplus_\lambda Im\mathcal{P}_\lambda \text{ дизъюнктны} \end{array}} \Rightarrow Im\mathcal{P}_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$$

Объединение базисов $Im\mathcal{P}_\lambda =$ базис V
Каждый вектор из $Im\mathcal{P}_\lambda$ – это с.в. $\mathcal{D}$
$\Rightarrow$ у V есть базис из с.в. $\Leftrightarrow D$ о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_\lambda \lambda \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{A}\sum_\lambda \mathcal{P}_\lambda - \sum_\lambda \lambda\mathcal{P}_\lambda = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda$$

$$\nu = \max_\lambda m(\lambda) \quad \underset{\text{мин. мн-н } \mathcal{A}}{\phi(t)} = \prod_\lambda (t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^\nu = (\sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda)^\nu = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^\nu \mathcal{P}_\lambda =$$

$$\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

$$= \sum_\lambda \underset{\text{все операторы перестановочны}}{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^\nu \underbrace{f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_\lambda}} =$$

$$\sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{\nu - m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}} = 0$$

$\mathcal{B}$ нильпотент

$$\mathcal{B} = \sum_\lambda \underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}}$$

$$D = \sum_\mu \mu \mathcal{P}_\mu$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$

□

Замечание.

1. $\mathcal{B} = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda = \sum_\lambda \mathcal{B}_\lambda$

   $\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ все три оператора взаимно-перестановочны

   $\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$

   $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$$B^2 \stackrel{?}{=} \mathbb{0} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \underset{\text{Разложение Жордана}}{=} \underset{\text{Диагонализ.}}{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}} + \underset{\text{Нильпотент.}}{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Теорема 2 (Единственность разложения Жордана)**.**

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)

Рис. 1

Доказательство. $\sqsupset \mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{Нильпотент}}{\mathcal{C}} \qquad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

Т.к. $\mathcal{D}'$ о.п.с., то $\mathcal{D}' = \sum\limits_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

M – множество с.ч. $\mathcal{D}'$

Q_μ спектральные проекторы

$Q_\mu : V \to V_\mu^\nu$

$\sum\limits_\mu Q_\mu = \mathcal{E}$

<u>Достаточно доказать:</u> $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

1. Множество M совпадает с множеством корней ϕ – минимальн. мн-н $\mathcal{A}$

$$\{\mu\} = \{\lambda\}$$

2. $ImQ_\mu = K_\mu \leftarrow$ корневое подпространство $\mathcal{A}$, отвеч. с.ч. μ ($Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$)

1. $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})Q_\mu = (\sum\limits_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum\limits_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$

$$\begin{matrix} Q_\nu Q_\mu = 0 \\ \nu \neq \mu \end{matrix} \qquad Q_\mu^2 = Q$$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu \;=\; \mathcal{C}^k Q_\mu$$

$\uparrow$

Верно, если $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ докажем: $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$\sqsupset \lambda \neq \mu \;\; (\lambda - \mu)Q_\lambda\mathcal{C}Q_\mu = \underset{Q_\lambda\mathcal{D}'}{(\lambda Q_\lambda)}\mathcal{C}Q_\mu - Q_\lambda\mathcal{C}\underbrace{(\mu Q_\mu)}_{\mathcal{D}'Q_\mu} =$

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \sum_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu\mathcal{D}'$$

$$Q_\lambda(\underset{\underset{\mathbb{0}}{\shortparallel}}{\mathcal{D}'\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{D}'})Q_\mu = \mathbb{0}$$

$\lambda \neq \mu \qquad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \mathbb{0} = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$

$$\underbrace{\sum_\lambda Q_\lambda}_{\mathcal{E}} \mathcal{C} Q_\mu = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \underline{\underline{\boxed{\sum_\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}_{\boxed{\mathcal{E}}}$$

$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$

$k(\mu) = min K$, такой что $\mathcal{C}^k Q_\mu = \mathbb{0}$

Такое $K(\mu)$ обязательно найдется, т.к. $\mathcal{C}$ – нильпотент.
$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$

$(t - \mu)^{k(\mu)}$ – минимальный аннулятор элементов imQ_μ

$ImQ_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)}$

ϕ минимальный многочлен $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулирует любые элементы V,
в частности элементы ImQ_μ
Т.е. $\phi(t)$ аннулятор элементов $ImQ_\mu \Rightarrow \phi(t) \vdots (t - \mu)^{k(\mu)} \leftarrow$ минимальный аннулятор для ImQ_μ

$\Rightarrow$ верно $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t - \mu)^{k(\mu)}$$

$\Rightarrow \phi \vdots \psi$

Покажем, что ψ аннулятор $\mathcal{A}$

$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{перестановочны}}}{(\mathcal{A} - \nu\mathcal{E})^{k(\nu)} Q_\mu} =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu\mathcal{E})^{k(\nu)} \underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}_{\substack{\| \\ \mathbb{0}}} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \psi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \vdots \phi$ минимальный аннулятор
$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda$ – корни $\phi\}$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$
$$\mu = \lambda$$

2. $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$

$\qquad ||$

$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$

μ корень ϕ

$$ImQ_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = Im\mathcal{P}_\mu$$

$$\left.\begin{aligned} \bigoplus_\mu K_\mu &= V \\ \bigoplus_\mu ImQ_\mu &= V \end{aligned}\right\} \Rightarrow ImQ_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

$\square$

Теорема 3. *$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана*
$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$

Доказательство. $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

μ – не корень $\underset{\text{не зависит от } t}{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu} = det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\substack{\| \\ \mathbb{0}}}) =$

$= det(\mathcal{A} - \underset{t=1}{\mu}\mathcal{E} - t\mathcal{B}) \cdot det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + \underset{t=0}{(}\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \ldots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1})$

μ – не корень

$\underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu} = det(\underset{\boxed{\mathcal{D}}}{\underline{\underline{\boxed{\mathcal{A}} - \mu\mathcal{E}\boxed{-\mathcal{B}}}}}) \cdot det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} =$

$= \underbrace{det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{(det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}))^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}}$

$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$ $\square$

Следствие 1. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана*

То $det\mathcal{A} = det\mathcal{D}$

Доказательство. Очевидно, $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$ $\square$

Следствие 2. $\boxed{dimK_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{о.п.с.}}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = dim\mathcal{P}_\lambda = dimK_\lambda$

$\forall\lambda$ корня χ с.ч. (I, II) $\square$

0.3 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda$ корневые $\quad dimK_\lambda = \alpha(\lambda)$

$\chi(t) = \prod\limits_{\lambda\text{с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \qquad \lambda \in K$ все корни с.ч.

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$

$V_\lambda \;\; = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \qquad \gamma(\lambda) = dimV_\lambda$

$\bigcap|$

$K_\lambda \;\; = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

$\forall\lambda\ K_\lambda \rightsquigarrow$ строим базис $\rightsquigarrow$ матрица оператора будет иметь
$\bigcup\limits_\lambda$ Жорданов базис блочно-диагональную структуру
– Жорданова форма матрицы

$\sqsupset K_\lambda = K \;\; \gamma(\lambda) = \gamma$
$\alpha(\lambda) = \alpha \;\; m(\lambda) = m$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{K_\lambda} \qquad dim = \gamma$

$$\begin{array}{rcl} K_1 & = & V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \\ \bigcap\vert & & \\ K_2 & = & Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \\ \vdots & & \\ \bigcap\vert & & \\ K_m & = & Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad dim = \alpha \end{array}$$

Пример.

$\alpha = dimK_\lambda = dimK_5 = 24$

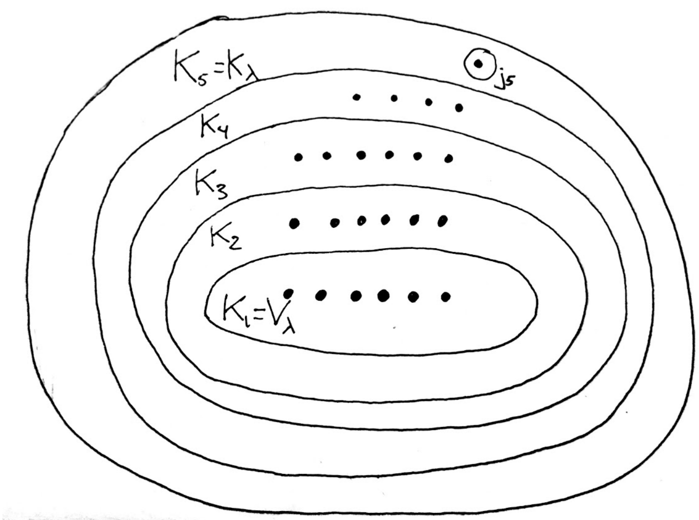
$m = 5$

$\gamma = 7$

Циклический базис

$$\begin{array}{|c|cl} j_5 & \in & K_5 \backslash K_4 \\ j_4 & = & \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_5 \in K_4 \\ j_3 & = & \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_4 \in K_3 \\ j_2 & = & \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_3 \in K_2 \\ j_1 & = & \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda \end{array}$$

j_1, j_2, j_3, j_4 – **присоединенные вектора.**



$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$

$j_{r+1} \in K_{r+1} = Ker\mathcal{B}^{r+1} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r+1}$

$\mathcal{B}^r j_r = \mathcal{B}^r \mathcal{B} j_{r+1} = \mathcal{B}^{r+1} j_{r+1} = \mathbb{0}$

$\Rightarrow j_r \; inK_r = Ker\mathcal{B}^r$

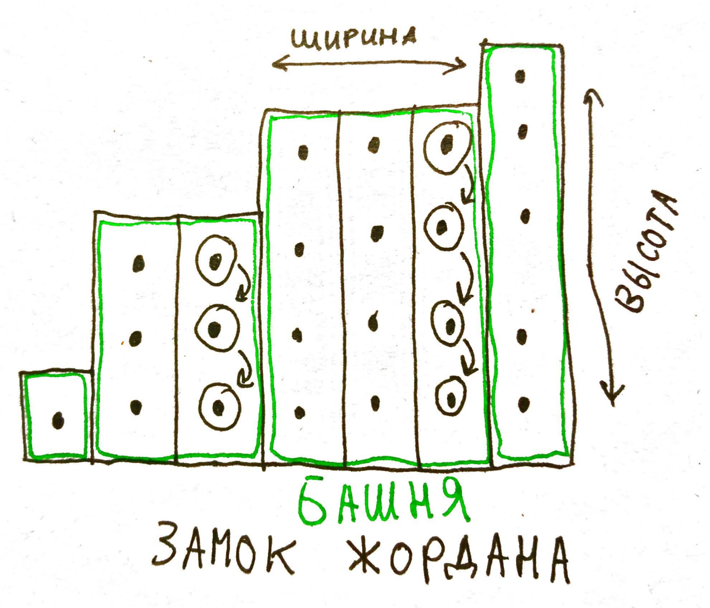
$L = span(j_1 \; j_2 \; j_3 \; j_4 \; j_5)$

$\mathcal{A}|_L$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 & \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 & \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 & \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 & \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5 \end{array}$$

Матрица $\mathcal{A}|_L$ в базисе $j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **Клетка Жордана 5 × 5** (блок нижнего уровня)

$$(j_5\ j_4\ j_3\ j_2\ j_1) \to \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



Башня – объединение циклических базисов одной длины.

Высота башни – количество векторов в базисе.

Ширина башни – число циклических базисов одной размерности

Основания каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов $= \gamma$

$||$

Число Жордановых клеток

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{\lambda} & & & \\
& \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} & \leftarrow \begin{matrix}\text{Блок}\\ \text{нижнего}\\ \text{уровня}\end{matrix} \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} \end{matrix}} & & \\
\begin{matrix}\text{Блок среднего}\\ \text{уровня} \rightarrow\\ \text{(отвечает башне)}\end{matrix} & & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} \end{matrix}} & \\
& & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{matrix}}
\end{pmatrix}
$$

$\uparrow$

Блок верхнего уровня, отвечает K_λ

$\gamma =$ Число блоков нижнего уровня

$\alpha =$ Число λ на диагонали

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\forall \alpha = \gamma$

V_λ $\boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}$

"Деревня Жордана"