1 Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах

1.1 Сопряженный оператор в унитарном и евклидовом пространствах

U, V линейные пространства над полем K

U^*, V^* соответственно, сопряженные пространства к U и V

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U, V)$ линейное отображение.

Определение 1. $\mathcal{A}^* : V^* \longrightarrow U^*$ *называется сопряженным к* $\mathcal{A}$*, если*
$\forall f \in V^* \quad \boxed{\underbrace{\mathcal{A}^* f}_{g \in U^*}(x) = f(\mathcal{A}x)} \quad \forall x \in U$

g линейн. очев., т.к. $\mathcal{A}$ и f линейны.

$x \in U \xrightarrow{\mathcal{A}} V \ni \mathcal{A}x \qquad \underset{\text{лин.}}{f} : V \to K$

$\underset{=\mathcal{A}^* f}{g} \in U^* \xleftarrow{\mathcal{A}^*} V^* \ni f \qquad \underset{\text{лин.}}{g} : U \to K$

$\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(U^*, V^*)$ т.е. лиинейное отображение:

$$\begin{matrix} \forall f_1, f_2 \in U^* \\ \forall \lambda \in K \end{matrix} \qquad A^*(\lambda \underset{\forall x \in U}{f_1} + f_2)(x) = (\lambda f_1 + f_2)(\mathcal{A}x) = \underbrace{\lambda f_1(\mathcal{A}x)}_{\lambda(\mathcal{A}^* f_1)(x)} + \underbrace{f_2(\mathcal{A}x)}_{(\mathcal{A}^* f_2)(x)}$$

$$\mathcal{A}^*(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \mathcal{A}^* f_1 + \mathcal{A}^* f_2$$

$\sqsupset U = V \qquad (V, (\cdot, \cdot))$ унит (евклидово пространство) $\qquad \mathcal{A} \in End(V)$

$\mathcal{A}^* \in End(V^*)$

По теореме Рисса: $\forall f \in V^* \leftrightarrow y \in V : \qquad f(x) = (x, y) \; \forall x \in V$

$\sqsupset \quad g = \mathcal{A}^* f \in V^* \leftrightarrow z \in V : \qquad g(x) = (x, z) \; \forall x \in V$

$\Rightarrow \forall x \in V \qquad \underset{(x,z)}{\underset{||}{g(x)}} = \mathcal{A}^* f(x) = f(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, y)$

Т.к. $V \leftrightarrow V^* \qquad \begin{matrix} \mathcal{A}^* : V \to V \\ g = \mathcal{A}^* f \leftrightarrow z = \mathcal{A}^* y \end{matrix}$

$g(x) = (x, z)$

$(x, \mathcal{A}^*, y) = (x, z) = (\mathcal{A}x, y)$

Определение 2. $(V, (\cdot, \cdot))$ *унит. (евкл.) пространство,*

$\mathcal{A} \in End(V)$,
$\mathcal{A}^* \in End(V^*)$ – *сопряженный к* $\mathcal{A}$,

$\forall x, y \in V \; \boxed{(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y)}$

Замечание.

1. В силу теоремы Рисса $\mathcal{A}^*$ $\exists$ и определен единственным образом
2. $\mathcal{A}^*$ определяется операцией $(\cdot,\cdot)$, т.е. поменяем $(\cdot,\cdot) \rightsquigarrow$

поменяется $\mathcal{A}^*$ (в этом случае неоднозначно)

Свойства сопряженного оператора

1. $e_1 \dots e_n$ базис V, $\quad \mathcal{A}, \mathcal{A}^* \underset{\text{матрицы операторов в базисе } e}{\longleftrightarrow} A, A^{ircled*}$

$\Gamma = G(e_1 \dots e_n)$ матрица Грама

$\Rightarrow \boxed{A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma}}$, где $\underset{\text{сопряж. матрица}}{A^* = \overline{A^T}}$

Доказательство. $\forall x, y \in V$

$x, y \leftrightarrow \underset{\text{столбцы координат в базисе } e}{x, y}$

$$(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y) = (Ax)^T \Gamma \overline{y} = x^T A^T \Gamma \overline{y}$$

$$||$$

$$x^T \Gamma \overline{(A^{\circledast} y)} = x^T \Gamma \overline{A^{\circledast}}\, \overline{y} \Leftrightarrow A^T \Gamma = \Gamma \overline{A^{\circledast}}$$

$$\overline{A^{\circledast}} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

$$A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}}\, \underset{A^*}{\overline{A^T}}\, \overline{\Gamma}$$

$\square$

Следствие 1. *$e_1 \dots e_n$ о.н.б. V* $\Rightarrow \boxed{A^{\circledast} = A^*}$

(Очевидно, т.к. $\Gamma = E$)

2. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ (т.е. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ <u>взаимно-сопряженные</u> операторы)

Доказательство. $\forall x, y :$ $\quad \underset{\underset{(y,\mathcal{A}x)}{||}}{(\mathcal{A}x, y)} = \underset{\underset{(\mathcal{A}^*y,x)}{||}}{(x, \mathcal{A}^* y)} \Leftrightarrow (y, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* y, x) \Rightarrow (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ $\square$

3. $\forall \lambda \in K \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \quad \boxed{(\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \overline{\lambda}\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*}$ (упр.)
4. $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \quad \boxed{(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*}$

Доказательство.
$\forall x, y \in V \quad (x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^* y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* y) \Leftrightarrow (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}*$ $\square$

5. $\boxed{\begin{array}{l} Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp \\ Ker\mathcal{A}^* = (Im\mathcal{A})^\perp \end{array}}$

Доказательство.

(a) $\forall x \in Ker\mathcal{A} \;\; \forall y \in V$

$(x, \underbrace{\mathcal{A}^* y}_{\in Im\mathcal{A}^*}) = (\underset{\underset{\mathbb{0}}{||}}{\mathcal{A}x}, y) = \mathbb{0} \Rightarrow Im\mathcal{A}^* \subseteq (Ker\mathcal{A})^\perp$

$dimIm\mathcal{A}^* = rgA^{\circledast} = rg(\underbrace{\overline{\Gamma^{-1}}}_{\text{невырожд}} \overline{A^T}\, \underbrace{\overline{\Gamma}}) = rg\overline{A^T} \underset{\text{комплексифик. вещ. про-ва}}{=} rgA = dimImA =$

$rg(v_1 \dots v_k) = rg(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_k)$

см. глава 7

$$= n - \underbrace{defA}_{dimKerA} \underset{L\oplus L^\perp = V}{=} dim(KerA)^\perp \Rightarrow Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp$$

(b) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ вз. сопр. по a) $\begin{matrix} Im\mathcal{A} = (Ker\mathcal{A}^*)^\perp \\ (Im\mathcal{A})^\perp = Ker\mathcal{A}^* \end{matrix}$

$\square$

6. Если $\exists\mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow \exists(\mathcal{A}^*)^{-1}$, причем $\boxed{(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*}$

Доказательство.

$\exists\mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \underset{5}{\Leftrightarrow} Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp = V \Leftrightarrow Ker\mathcal{A}^* = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow \exists(\mathcal{A}^*)^{-1}$

$\forall x, y \in V \qquad (x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (\underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}}_{\mathcal{E}}x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (\mathcal{A}^{-1}x, \underbrace{\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^*)^{-1}}_{\mathcal{E}}y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y)$

$\underset{\text{по def}}{\Rightarrow} (\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$ $\square$

7. $\boxed{\chi_\mathcal{A}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda}) = 0}$

Доказательство. $\sqsupset e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \underset{1}{\Rightarrow} A^{*} = A^*$

$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \chi_{A^*}(t) = det(A^* - tE) = det(\overline{A^T} - tE) = \overline{det(A^T - \overline{t}E)} =$

$= \overline{det(A - \overline{t}E)} = \overline{\chi_A(\overline{t})} = \overline{\chi_\mathcal{A}(\overline{t})}$ $\qquad \begin{matrix} \chi_\mathcal{A}(\lambda) = 0 \\ || \\ \overline{\chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda})} \end{matrix} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda}) = 0$ $\square$

8. $\boxed{\begin{matrix} \lambda \text{ с.ч., } u \text{ с.в.}\mathcal{A} \\ \overline{\lambda} \text{ с.ч., } v \text{ с.в.}\mathcal{A}^* \end{matrix} \qquad \lambda \neq \overline{\mu} \Rightarrow u \perp v}$

Доказательство.

$$\begin{matrix} \mathcal{A}u = \lambda u \\ \mathcal{A}^*v = \mu v \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (\mathcal{A}u, v) & & = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \mu v) = \overline{\mu}(u, v) \\ || & & \\ (\lambda u, v) & = \lambda(u, v) & (\underset{\not{\shortparallel}\, 0}{\lambda - \overline{\mu}})(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0 \end{matrix}$$

$\square$

9. $\boxed{\underset{\text{лин. подпр-во}}{L \subset V} \text{ инвариантно относительно } \mathcal{A} \Rightarrow L^\perp \text{ инвариантно относительно } \mathcal{A}^*}$

Доказательство. $\forall x \in L \Rightarrow \mathcal{A}x \in L$

$\forall y \in L^\perp : (x, y) = 0 \Rightarrow (x, \mathcal{A}^*, y) = (\underset{\in L}{\mathcal{A}x}, \underset{\in L^\perp}{y}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^*y \in L^\perp \Rightarrow L^\perp$ инвариантно отн. $\mathcal{A}^*$ $\square$

1.2 Нормальные опператоры в евклидов. и унит. пространствах

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V) \qquad (V, (\cdot, \cdot))$

Оператор $\mathcal{A}$ называется нормальным, если $\mathcal{A}$ и A^* перестановочны.

$\boxed{\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}} \Leftrightarrow \forall x, y \in V \qquad \boxed{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)}$

Действительно: $\qquad \forall x, y \ (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \underset{\leftrightarrow}{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}y) = (x, \mathcal{A}\mathcal{A}^*y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$

Свойства нормального оператора:

1. $\mathcal{A}$ нормальный оператор $\Leftrightarrow$ в некотором базисе матрица A(оператор $\mathcal{A}$) перестановчна с матрицой A^{*} (опер. $\mathcal{A}^*$): $AA^{*} = A^{*}A$

   Доказательство. ($\Rightarrow$) очевидно $\quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A} * \mathcal{A} \leftrightarrow AA^{*} = A^{*}A$

   ($\Leftarrow$) $\quad \sqsupset e'_1 \dots e'_n$ базис $V \quad T_{e\to e'} = T$

   $$A' \cdot (A^{*})' = T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}_{E}A^{*}T = T^{-1}A^{*}AT = \underbrace{T^{-1}A^{*}T}_{(A^{*})'}\underbrace{T^{-1}AT}_{A'}$$

   $\Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ $\square$

2. $\boxed{\begin{array}{c} Ker\mathcal{A} = Ker\mathcal{A}^* \\ (Ker\mathcal{A})^{\perp} = Im\mathcal{A} \\ Ker\mathcal{A}^2 = Ker\mathcal{A} \end{array}} \Rightarrow \boxed{V = Ker\mathcal{A} \oplus Im\mathcal{A}}$

   Доказательство.

   (a) $x \in Ker\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \mathbb{0} \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0$

   $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \underset{\text{Норм. опер.}}{=} (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = \mathbb{0} \Leftrightarrow x \in Ker\mathcal{A}^*$

   (b) 5 свойство сопряж. $\quad \underset{\substack{||\text{св-во 1} \\ Ker\mathcal{A}}}{(Ker\mathcal{A}^*)^{\perp}} = Im\mathcal{A}$

   (c) $x \in Ker\mathcal{A}^2 \Leftrightarrow \mathcal{A}^2x = \mathbb{0} \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2x, \mathcal{A}^2x) = 0 \overset{\text{норм. оператор}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{A}^*\underbrace{\mathcal{A}x}, \mathcal{A}^*\underbrace{\mathcal{A}x}) = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \mathcal{A}^*(\underset{\in Im\mathcal{A}}{\mathcal{A}x}) = \mathbb{0} \Leftrightarrow \underset{\in Im\mathcal{A}}{\mathcal{A}x} \in Ker\mathcal{A}^* = Ker\mathcal{A}, \quad Im\mathcal{A} \cap Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \mathbb{0} \Leftrightarrow x \in Ker\mathcal{A}$

   $\square$

3. $\mathcal{A}$ норм. опер. $\Leftrightarrow \forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ норм.

   Доказательство. $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} \quad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E} \quad \mathcal{E}^* = \mathcal{E}$

   $\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E}) = \underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}_{\mathcal{A}^*\mathcal{A}} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\mathcal{E}$

   $||$ $\quad \Rightarrow \mathcal{B}$ нормальный оператор $\square$

   $\mathcal{B}^*\mathcal{B} = (\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\mathcal{E}$

4. $\boxed{\lambda \text{ с.ч., } u \text{ с.в. } \mathcal{A} \Rightarrow u \text{ с.в. для } \overline{\lambda} \text{ с.ч. } \mathcal{A}^*}$

   Доказательство.

   $\mathcal{A}u = \lambda u \qquad \mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} \qquad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E}$

   $\Updownarrow$

   $\mathcal{B}u = \mathbb{0} \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{3 св-во норм. опер.} \\ =(\mathcal{B}^*u, \mathcal{B}^*u)}}{\mathcal{B}u, \mathcal{B}u} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{B}^*u = \mathbb{0} \Leftrightarrow u$ с.в. для $\overline{\lambda}$ опер. $\mathcal{A}^*$ $\square$

5. $\boxed{\begin{array}{ll} \lambda \text{ с.ч. } u \text{ с.в. } \mathcal{A} & \\ & \lambda \neq \mu \;\Rightarrow\; u \perp v \\ \mu \text{ с.ч. } v \text{ с.в. } \mathcal{A} & \end{array}}$, т.е. $\boxed{\underset{\lambda \neq \mu}{V_\lambda \perp V_\mu}}$ для норм. опер.

Доказательство.

λ с.ч., u с.в. $\mathcal{A}$ $\qquad \lambda \neq \mu$

μ с.ч, v с.в. $\mathcal{A}$

$\Downarrow$ по св-ву сопряж. опер. 4

$\overline{\lambda}, \overline{\mu}$ с.ч. $\mathcal{A}^*$

u, v с.в.

$$(\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \overline{\mu}v) = \mu(u, v)$$

$$||$$

$$(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$$

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v$$

$\square$