Определение 1. *Кв. ф. f называется приведенной к <u>каноническому виду</u>, если все $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$*

$A = diag(a_{11} \dots a_{nn})$

Число $a_{ii} > 0$ называется <u>положительным индексом</u> инерции кв. ф.

$$\sigma^+(f) = \sigma^+$$

Число $a_{ii} < 0$ называется <u>отрицательным индексом</u> инерции кв. ф.

$$\sigma^-(f) = \sigma^-$$

Число $a_{ii} = 0$ обозначим за $\sigma^0(f) = \sigma^0$

$\sigma(f) = (\sigma^+, \sigma^-, \sigma^0)$ *<u>сигнатура кв. ф.</u> ($\sigma^+ - \sigma^-$ тоже сигнатура)*

$rgf = (\sigma^+ + \sigma^-)$ *инвариант* $\rightsquigarrow \sigma^0 = n - rg\ f$ *инвариант относительно Q.*

Определение 2. *Канонический вид кв. ф. f называется <u>нормальным</u>, если все ненулевые $a_{ii} = \pm 1$*

Очевидно, всегда $\exists Q$ $\qquad \underset{x}{\text{канонич}} \overset{Q}{\rightsquigarrow} \underset{y}{\text{нормальн.}}$

$$Q = \underset{\text{невырожд}}{diag(q_1 \dots q_n)} \qquad \begin{matrix} q_i = \sqrt{|a_{ii}|} & a_{ii} \neq 0 \\ q_i = 1 & a_{ii} = 0 \end{matrix}$$

$x = Qy$

Канонич. вид $\dots + \underbrace{a_{ii}}_{>0} x_i^2 + \dots + \underbrace{a_{jj}}_{<0} x_j^2 + \dots \underset{x_i = \sqrt{|a_{ii}|} y_i}{\rightsquigarrow} \dots + 1 \cdot y_i^2 \dots - y_j^2 - \dots$

Основная задача теории кв. форм: Найти линейное невырожд. преобр. $Q : x = Qy$, т.ч. кв. ф. f будет приведена к канонич. (норм.) виду $(g(y))$

Т.е. $\underset{\text{невырожд.}}{\exists\, Q?} \quad Q^T A Q = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$?

0.1 Методы приведения кв. ф. к канонич. виду

I. Ортогональное преобразование: (канонич. вид симм. м-цы)

$x \in \mathbb{R}^n \qquad x = Qy \qquad y \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = x^T A x \qquad A = A^T$

A – матрица оператора в о.н.б. (канонич. базис $\mathbb{R}^n$)

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{в исходном} \\ \text{канон. базис } e}}{x}$ и $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{в новом} \\ \text{о.н.б. } \mathbb{R}^n\ e'}}{y}$ координаты в разных базисах. $\qquad Q = \underset{\substack{\text{ортогон.} \\ \text{т.к. } e, e' \text{ о.н.б.}}}{T_{e \to e'}} \qquad (Q^T = Q^{-1})$

$Q^{-1} A Q = Q^T A Q = B \qquad \underset{\text{кв. ф.}A}{f} \overset{x=Qy}{\rightsquigarrow} \underset{\text{кв. ф. } B}{g}$

$\exists ?\ \ e'$, т.ч. $B = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$

—Да

$A = A^T$ симметр. матр. (матр. самосопр. опер.) $\Rightarrow$ канонич. вид симм. матрицы (см. соотв. следствие)

все с.ч. λ_i вещ. и $\exists$ базис из о.н.с.в. $A : \ \ v_1 \dots v_n \qquad Q = (v_1 \dots v_n) \rightsquigarrow \Lambda = diag(\underset{\text{собств. ч.}}{\lambda_1 \dots \lambda_n})$

II. Метод Лагранжа (метод выделения полного квадрата)

1. $\forall i\ a_{ii} = 0 \Rightarrow \exists a_{ij} \neq 0 \ \ i \neq j$

$$x = Qy \qquad \left[\begin{array}{l} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \ \ \begin{array}{l} k \neq i \\ k \neq j \end{array} \end{array}\right. \qquad Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ & 1 \ddots & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & -1 & \\ 0 & & 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ Очевидно, невырожд.}$$

$$f(x) = x^T A x = y^T B y = g(y) = \ldots + \underset{\neq 0}{\overset{b_{ii}}{a_{ij}}} y_i^2 + \ldots - \underset{\neq 0}{\overset{b_{jj}}{a_{ij}}}\, y_j^2 + \ldots$$

$$a_{ij} x_i x_j = a_{ij}(y_i^2 - y_j^2)$$

2. $\exists a_{ii} \neq 0$

Выпишем все слагаемые из f, которые соодержат x_i

$$\frac{a_{ii}}{a_{ii}}(\underset{\neq 0}{a_{ii}} x_i^2 + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_i x_j) = \frac{1}{a_{ii}}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)^2 - \overset{\text{нет переменной } x_i}{\boxed{\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^2 a_{ii}^2 - \frac{2}{a_{ii}} \sum_{\substack{1\le k\le j\le n \\ k\neq i \\ j\neq i}} a_{ik} a_{ij} x_k x_j}}$$

Поместим обратно в форму f

$$f(x) = f(x_1 \ldots x_i \ldots x_n) = \frac{1}{a_{ii}}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)^2 + \tilde{f}(\,x_1 \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{кв. ф. не содержит}}}{\hat{x}_i} \ldots x_n\,)$$

$$Q^{-1}; \qquad \left[\begin{array}{l} y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ y_k = x_k \ \ k \neq i \end{array}\right. \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ a_{i1} & & a_{ii} \ \ldots & & a_{1n} \\ & & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0$$

Очевидно, невыр. $\Rightarrow Q$ невыр. $x = Qy$

Далее повторяем алгоритм для $\hat{f}$, пока не исчерпаем все переменные.

III метод Якоби (унитреугольное преобразование)

LU разложение матрицы.

$$A = A^T \qquad \triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \ldots n-1 \ \Rightarrow \begin{array}{l} \exists!\ U \ \overset{\text{невырожд.}}{\text{унитреуг.}} \text{ верхн. матр: } A = U^T D U \\ \exists!\ L \text{ унитреуг. нижн. матр: } A = LDL^T \end{array}$$

$$Q = U^{-1} \quad \underbrace{(U^T)^{-1}}_{=Q^T} A \underbrace{U^{-1}}_{=Q} = D$$

Замечание. Метод Якоби не является универсальным, т.е. применим не для всех кв. ф., а только для форм, у которых $\triangle_k \neq 0\ \forall k = 1 \ldots n-1$ (т.е. $rgf \geq n-1$)

Теорема 1 (Якоби)**.** $A = A^T,\ \triangle_k \neq 0 \ \ k = 1 \ldots n-1$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & b_2 & b_3 & & b_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} & \dots & \boxed{a_{1n}} \\ a_{12} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \dots & \boxed{a_{2n}} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & \boxed{a_{3n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\exists!$ унитреуг. верхняя матрица Q, т.ч.

$$Q^T A Q = D = diag(\triangle_1, \tfrac{\triangle_2}{\triangle_1}, \dots, \tfrac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}})$$

При этом:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} & q_2 & q_3 & & q_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{q_{12}} & \boxed{q_{13}} & \dots & \boxed{q_{1n}} \\ 0 & 1 & \boxed{q_{23}} & \dots & \boxed{q_{2n}} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \boxed{\dots} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \boxed{q_{n-1\ n}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \text{ где } \boxed{\begin{matrix} A_{k-1} q_k = -b_k \\ k = 2 \dots n \end{matrix}} \quad \left(\begin{matrix} \triangle_k = |A_k| \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \\ \Rightarrow \text{ все системы имеют един. реш.} \end{matrix} \right)$$

Доказательство. $\exists$ и еди. следует из LU разложения для $A = A^T$

Остается только доказать формулу (в рамке сверху).

1. База индукции, $n = 2$. $\triangle_1 = a_{11} \neq 0$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & b_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} \quad Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} & q_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{q_{12}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{matrix} a_{11} q_{12} = -a_{12} \\ q_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \end{matrix}$$

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \underbrace{-a_{12} + a_{12}}_{=0} & -\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22} a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle_1 & 0 \\ 0 & \frac{\triangle_2}{\triangle_1} \end{pmatrix} = diag(\triangle_1, \tfrac{\triangle_2}{\triangle_1})$$

2. Индукционное предположение. $\sqsupset$ верно для k, $\sqsupset \triangle_1 \neq 0 \dots \triangle_k \neq 0$

   Q_k определяется по формуле $A_{j-1} q_j = -b_j$

   $Q_k^T A Q_k = diag(\triangle_1, \frac{\triangle_2}{\triangle_1}, \dots, \frac{\triangle_k}{\triangle_{k-1}}) \;\; j = 2 \dots k$

   $diag(\triangle_1, \triangle_2 / \triangle_1, \dots, \triangle_k / \triangle_{k-1}) = diag(d_1 \dots d_k) = D$

3. Индукционный переход. Докажем, что верно для Q_{k+1}

$$Q_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} Q_k & q_{k+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \qquad q_{k+1} \text{ определяется: } \begin{matrix} A_k q_{k+1} = -b_{k+1} \\ (q_{k+1}^T A_k^T = -b_{k+1}^T) \end{matrix}$$

$$Q_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} Q_k^T & 0 \\ \hline q_{k+1}^T & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_k & b_{k+1} \\ \hline b_{k+1}^T & a_{k+1\ k+1} \end{array}\right)}_{\left(\begin{array}{c|c} Q_k^T A_k & Q_k^T b_{k+1} \\ \hline \underbrace{q_{k+1}^T A_k + b_{k+1}^T}_{=0 \text{ (по формуле подставили)}} & q_{k+1}^T b_{k+1} + a_{k+1\ k+1} \end{array}\right)} \cdot \left(\begin{array}{c|c} Q_K & q_{k+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} Q_k^T A_k Q_k & \overbrace{Q_k^T A_k q_{k+1} + Q_k^T b_{k+1}}^{\overset{=0}{Q_k^T(A_k q_{k+1}+b_{k+1})}} \\ \hline 0 & \underbrace{q_{k+1}^T b_{k+1} + a_{k+1\ k+1}}_{d_{k+1}} \end{array}\right) = diag(d_1 \dots d_k, d_{k+1}) = D$$

$d_{k+1} = \frac{\triangle_{k+1}}{\triangle_k}$ (по теореме об LU-разложении).

■

Замечание (о методе Гаусса (модификация метода Лагранжа)).
Алгоритм приведения матрицы к LU.

$\triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1$

$$(A|E) \underset{\text{метод Гаусса}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{matrix}}_{DU} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}} \end{array}\right)$$

$A = LDU \qquad A = A^T$
$A = LDL^T \qquad \underset{Q^T}{\overset{\shortparallel}{L^{-1}}} A \underset{Q}{\overset{\shortparallel}{(L^T)^{-1}}} = D \qquad \boxed{Q = (L^{-1})^T}$

$\triangle_k \neq 0 \;\; k = 1 \dots n-1$ – условия для метода Якоби.

$$(A|E) \underset{\text{м. Гаусса}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{matrix}}_{Q^T} \end{array}\right)$$

$D = (d_1 \dots d_n)$

$f \rightsquigarrow d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2 \qquad x = Qy$

Подвох в том, что для многих матриц, у которых $\triangle_k = 0$ для $1 \leq k \leq k-1$ приходится производить переобозначения переменных.

В методе Лагранжа, мы говорили, что $\exists\ a_{ii} \neq 0 \rightsquigarrow$ н.у.о. скажем, что $a_{11} \neq 0$. Таким образом формула в методе Лагранжа $\sim$ <u>1 шагу алгоритма Гаусса.</u>

В итоге:

<u>2 универсальных</u> метода (т.е. $\forall$ кв. ф.) – ортогональное преобразование и метод Лагранжа.

<u>2 метода</u>, которые позволяют найти <u>канонический вид</u> кв. ф., <u>не находя самого преобр. Q</u>.

– <u>ортог. преобр.</u> $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, где λ_i с.ч. A

– <u>м. Якоби</u> $\triangle_1 y_1^2 + \frac{\triangle_2}{\triangle_1} y_2^2 + \dots + \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} y_n^2$, где $\triangle_k = detA_k$

0.2 Закон инерции кв. формы. Критерий Сильвестра

Теорема 1 (Закон инерции кв. формы).
Каким бы лин. невыр. преобразованием Q ни была приведена к каноническому виду кв. ф. f, её

сигнатура будет одинаковой.

$$f = x^T A x \qquad x = Qy \quad i = 1,2 \quad f(x) \rightsquigarrow g_i(y)$$

$$\sigma(f) = \sigma(g_1) = \sigma(g_2)$$

Доказательство. $x = Q_1 y \qquad x = Q_2 z \qquad Q_{1,2}$ невырожд, приводят f к канонич. виду.

$f(x) = x^T A x = \underbrace{y^T B y}_{g(y)} = \underbrace{z^T C z}_{t(z)}$

$g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_p y_p^2 - \lambda_{p+1} \cdot y_{p+1}^2 - \ldots \lambda_{p+k} \cdot y_{p+k}^2$

$t(z) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_s z_s^2 - \mu_{s+1} z_{s+1}^2 - \ldots \mu_{s+l} z_{s+l}^2$

$p + k = s + l = rgf = n - \sigma \leq n \qquad \lambda_i, \mu_i > 0$

С.Л.У: $\underbrace{Q_1^{-1}}_{\text{невыр.}} x = y$ (1) $\qquad \underbrace{Q_2^{-1}}_{\text{невыр.}} x = z$ (2)

$$\begin{array}{l} \sqsupset y \text{ такой столбик, что: } y_1 = y_2 = \ldots = y_p = 0 \\ \sqsupset z \text{ такой столбик, что: } z_{s+1} = \ldots = z_{s+l} = 0 \end{array} \overset{\text{новая с.л.о.у.}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} \text{первые } p \text{ строк } (1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{последние } l \text{ строк } (2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (3)$$

$\sqsupset p < s \qquad$ уравнений в системе: $p + l < s + l = rgf \leq n \Rightarrow$ число уравнений меньше, чем число неизвестных $\Rightarrow \exists$ нетривиальное СЛОУ решение x_0 ■