

Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

2 апреля 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения	2
7.1 Основные определения	2
7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.	5
7.3 Инварианты линейного отображения	10
7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.	16
7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)	
Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.	
Функция от матрицы.	20
7.6 Комплексификация линейноговещ.пространства. Продолжениевещ.линейного оператора.	29
7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона	32
7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.	37
7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана	42
7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис	46
7.11 Линейные формы(линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования.	56
7.12 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров. . .	59
7.13 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров. . .	63
7.14 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.	66
7.15 Операции альтернирования и симметрирования тензоров	69

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением \mathcal{A} называется $\mathcal{A} : U \rightarrow V$, обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}0_U = 0_V$

Примеры.

1. 0 – нулевое отображение $U \rightarrow V$

$$\forall u \in U : 0u = 0_v$$

2. \mathcal{E} – тождественное отображение: $V \rightarrow V$

$$\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$$

3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

$$\mathcal{A}p = p'(t) \text{ – дифференциальный оператор}$$

$$\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p'_1 + \lambda p'_2 = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$$

$$\text{Линейное отображение } \mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

4. $U = \mathbb{R}^n V = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$$

$$x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$$

5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K$ $\mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

Определение 3. Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$ называется $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad [\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}]$$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ – отображение противоположное \mathcal{A}

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

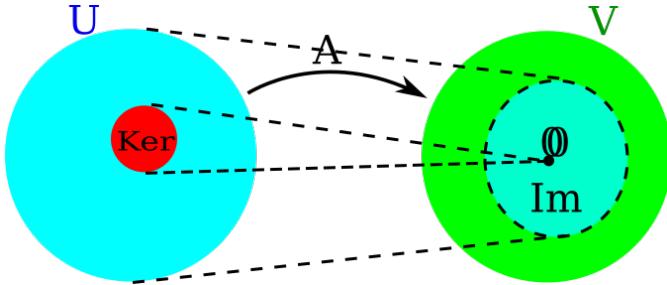
Значит $[L(U, V) \text{ – линейное пространство}]$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_v\}$ – ядро линейного отображения.

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \mid \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$ – образ линейного отображения.



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ – это подпространства соответственно пространств U и V . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U , то

$\dim Ker\mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$ – дефект линейного отображения.

Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V , то

$\dim Im\mathcal{A} = rg\mathcal{A}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. \mathcal{A} изоморфно между U и $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $Im\mathcal{A} = V$
3. $Ker\mathcal{A} = \{0\}$ trivialно

Доказательство. \mathcal{A} изоморфно \Leftrightarrow взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$0_u \leftrightarrow 0_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{0\}$

Пусть $Ker\mathcal{A} = \{0\}$

Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$v_1 = \mathcal{A}u_1$ $v_2 = \mathcal{A}u_2$

$0 = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = 0$ т. к. ядро trivialно.

Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. \square

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

–инъективно, если $Ker\mathcal{A} = \{0\}$

–сюръективно, если $Im\mathcal{A} = V$

–биективно \equiv изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

–эндоморфизм \equiv линейный оператор, если $U \equiv V$

$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$

–автоморфизм \equiv эндоморфизм + изоморфизм.

$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. Произведением линейных отображений \mathcal{A}, \mathcal{B}

$\mathcal{A} \in L(W, V)$ $\mathcal{B} \in L(U, W)$ $U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$

называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, которое является композицией функций, определяющих отображения \mathcal{A} и \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно, \mathcal{C} – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

1. \mathcal{A}, \mathcal{B} изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм

2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность

3. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ – ассоциативность

4. $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

\mathcal{E} – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ изоморфно.

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$$

$$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$$

Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения \mathcal{A} на линейное подпространство U_0 называется

$$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$$

Утверждение. \mathcal{A} изоморфизм $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ – изоморфизм

Примеры.

1. $\emptyset : U \rightarrow U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.

2. $\mathcal{E} : U \rightarrow U$ – автоморфизм

3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : P_n \rightarrow P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.

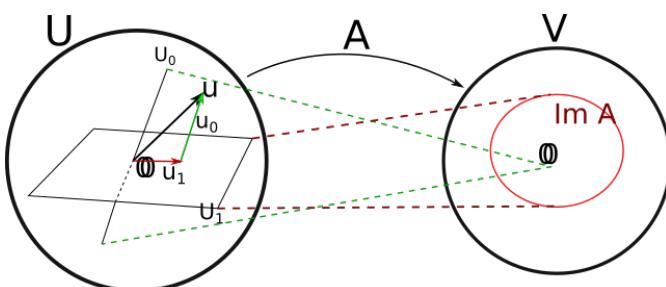
4. $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.

Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.

То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$$



Доказательство. $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U :

$$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{0\}$$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad \text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

\mathcal{A}_1 – изоморфизм? $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{A}$ – сюръекция

$$\left. \begin{array}{l} \forall w \in \text{Ker } \mathcal{A}_1 \in U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong \text{Im } \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim U_1 = \dim(\text{Im } \mathcal{A})$ – инъекция.

$$\text{T. к. } U = U_0 \oplus U_1, \text{ то } \dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \dim_{\text{def } \mathcal{A}} \text{Ker } \mathcal{A} + \dim_{\text{rg } \mathcal{A}} \text{Im } \mathcal{A}$$

□

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{A} изоморфно
 2. $\dim U = \dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
 3. $\dim U = \dim V$
- $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$
2. $\dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$ матрица линейного отображения \mathcal{A} относительно базисов (ξ, η)

Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$
 $A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора
 $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$

Примеры.

$$1. \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

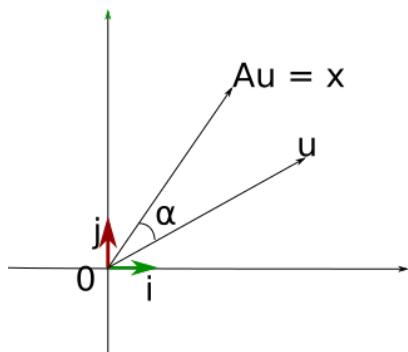
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji}e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

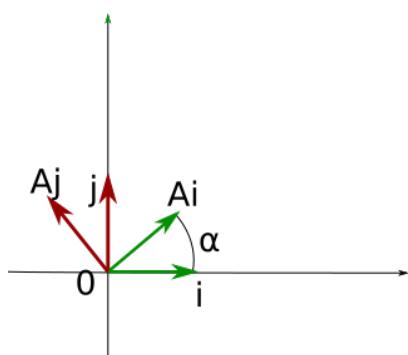


$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол α .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \mathcal{A} : p_2^{1,t,t^2} \rightarrow p_2^{1,t,t^2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}1 = 1' = 0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}t = t' = 1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : p_2_{1,t,t^2} \rightarrow p_1_{1,t}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с веш. (компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм \equiv биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$$U \xi_1 \dots \xi_n \text{ базис}$$

$$\mathcal{A} : U \rightarrow V$$

$$V \eta_1 \dots \eta_m \text{ базис}$$

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$Au = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xrightarrow{?} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} n_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность \Rightarrow изоморфизм. □

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$A, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V\eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \underset{\xi, \eta}{\leftrightarrow} A$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n u_i a_{ji}) \eta_j$$

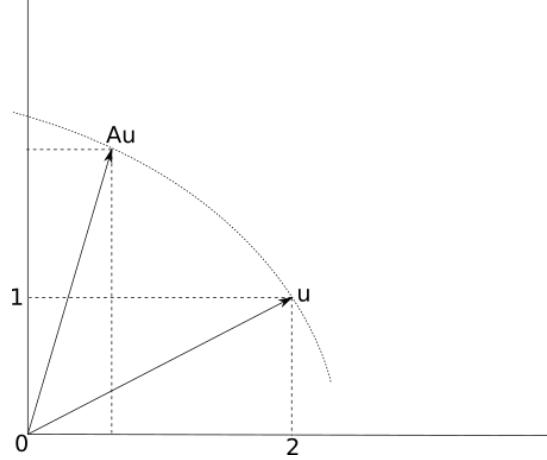
Так как координаты определяются единственным образом:

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \quad \leftrightarrow \quad [v = \mathcal{A}u] \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

Примеры.

1. \mathcal{A} поворот на угол α

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



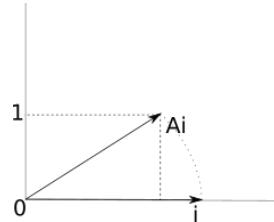
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$2. \quad \mathcal{A} = \frac{d}{dt} : p_2 \underset{1, t, t^2}{\rightarrow} \underset{1, t, t^2}{p_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(3t^3 + 6t + 4)}_{u(t)}' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$$

$T_{\eta \rightarrow \eta'}$ – матрица перехода

$$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi', \eta')} A'$$

$$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \cdot A \cdot T_{\xi \rightarrow \xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi_1 \dots \xi_n & \sqsupseteq & \eta_1 \dots \eta_m \\ \mathcal{E}_u \uparrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \mathcal{E}_v \\ U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi'_1 \dots \xi'_n & \sqsupseteq & \eta'_1 \dots \eta'_m \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

$$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \text{ Смотри пример 2}$$

□

Следствие 1.

$$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$e_1 \dots e_n$ базис $V \leftrightarrow A$

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис} \leftrightarrow A'$$

$$\mathcal{A} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{A' = T^{-1} A T}$$

Замечание. В условиях теоремы $v = \mathcal{A}u \xrightleftharpoons{(\xi, \eta)} v = Au$

$$\xrightleftharpoons{(\xi', \eta')} v' = A'u$$

$$V = T_{\eta \rightarrow \eta'} V'$$

$$U = T_{\xi \rightarrow \xi'} U'$$

$$T_{\eta \rightarrow \eta'} v' = A T_{\xi \rightarrow \xi'} u'$$

$$v' = \boxed{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}} u'$$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au$$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.
 $v' = A'u'$

Определение 1. $A_{m \times n}$

$$ImA = span(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} =$$

$$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \mid x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$rgA = dim ImA - \text{ранг матрицы}$$

$$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\} - \text{ядро матрицы}$$

$$dimKerA = n - rgA = defA - \text{дефект матрицы}$$

$$\boxed{rgA + defA = n} - \text{аналогично теореме о ранге и дефекте}$$

Теорема 1. $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{\begin{aligned} rg\mathcal{A} &= rgA \\ def\mathcal{A} &= defA \end{aligned}},$$

где матрица A – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств U и V .

$rg\mathcal{A}$, $def\mathcal{A}$ инвариантны относительно выбора базиса.

Доказательство. $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi, \eta)}{A} \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V

$$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \overset{\leftrightarrow}{\cong} A_i$$

Координатный изоморфизм.

Пусть $rgA = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, что из $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$ k линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dim Im\mathcal{A} = k$

$$dimU = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ n & & rgA \\ & \| & \\ & & k \end{array}$$

$$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim \text{ пространства решений } Ax = 0 = defA$$

□

Следствие 1. A изоморфизм $\Leftrightarrow A$ невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \frac{\text{def } A = 0}{\dim U = \dim V} \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow A$ невырожденная. \square

Теорема 2. $\det \mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $\det \mathcal{A} = \det A$, где A – матрица оператора \mathcal{A} в некотором базисе.

Доказательство. $V e_1 \dots e_n$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_k &= \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\text{det } n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \dots \sum_{i_n=n}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow \det = 0) \\ &= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \underbrace{\det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}_{\substack{\text{все разные} \\ (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \det(e_1 \dots e_n) = 1}} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\det \mathcal{A} = \det A' \stackrel{?}{=} \det A$$

$$A' = T^{-1}AT$$

$$\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$

\square

Определение 2. A, B называются подобными, если

$$\exists \text{ невырожденная } C : B = C^{-1}AC$$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$$A' = T^{-1}AT$$

$$A, B \text{ подобны} \Rightarrow \det A = \det B$$

Следствие 1. f – n -форма на V

$$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow [f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1 \dots \xi_n)]$$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$$g(\xi_1 \dots \xi_n) = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$$

$$\det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\substack{\text{смотри док-во теоремы}}} = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{\det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{\det A}_{\det \mathcal{A}}$$

\square

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n \times n}$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1 \ \dots \ AB_n) =$$

$$= \det A \cdot \det(B_1 \ \dots \ B_n) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$$

Доказательство. $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$

□

Следствие 3. $\mathcal{A} \in Aut(V)$

$$\Leftrightarrow \det\mathcal{A} \neq 0$$

$$Причем \det\det\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{A}}$$

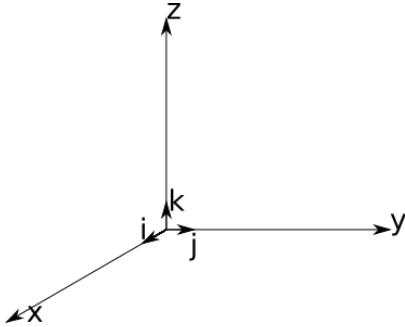
Доказательство. Из следствия 2

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{A}^{-1} = \det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$$

□

Примеры. V_3



$$V_{abc\text{-правая тройка}} = \underset{\text{смешанное пре}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f(\underset{3\text{-форма}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\mathcal{A} \in End(V_3) \ u \in V_3 \rightarrow v = \mathcal{A}u \in V_3$$

Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$$\mathcal{A}(V_{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}) = f(\mathcal{A}\bar{a}, \mathcal{A}\bar{b}, \mathcal{A}\bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot V(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| \quad \text{Объем увеличится в } \lambda \text{ раз.}$$

$$1. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

Оператор подобия

$$\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\bar{i} = \mu\bar{i} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{j} = \mu\bar{j} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{k} = \mu\bar{k} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| = |\det A| = |\mu^3|$$

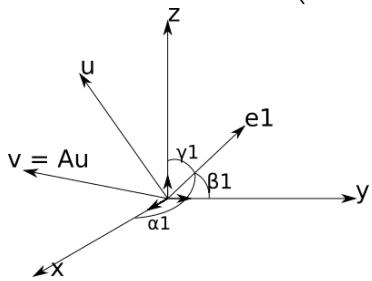
2. $\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

Оператор поворота

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \bar{i} \rightarrow e_1 \nearrow \\ \bar{j} \rightarrow e_2 \rightarrow \\ \bar{k} \rightarrow e_3 \searrow \end{array} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} |e_i| &= 1 \\ (e_i, e_j) &= 0 \\ i &\neq j \end{aligned}$$

$${}^n\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}) = \det \mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |\dots| \underset{\text{Смешанное произведение}}{e_1 e_2 e_3} = 1$$

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \det E = 1$$

$$|\det A| = 1$$

Утверждение. A, B подобные матрицы $\Rightarrow \text{tr}A = \text{tr}B$

$\text{trace} = \text{след}$

Доказательство. A, B подобные \Rightarrow

$\exists C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$\text{tr}B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C''^{-1}''(AC)ji = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C''^{-1}'' a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{ki} C''^{-1}''}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \text{tr}A$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}} \quad CC^{-1} = E$$

□

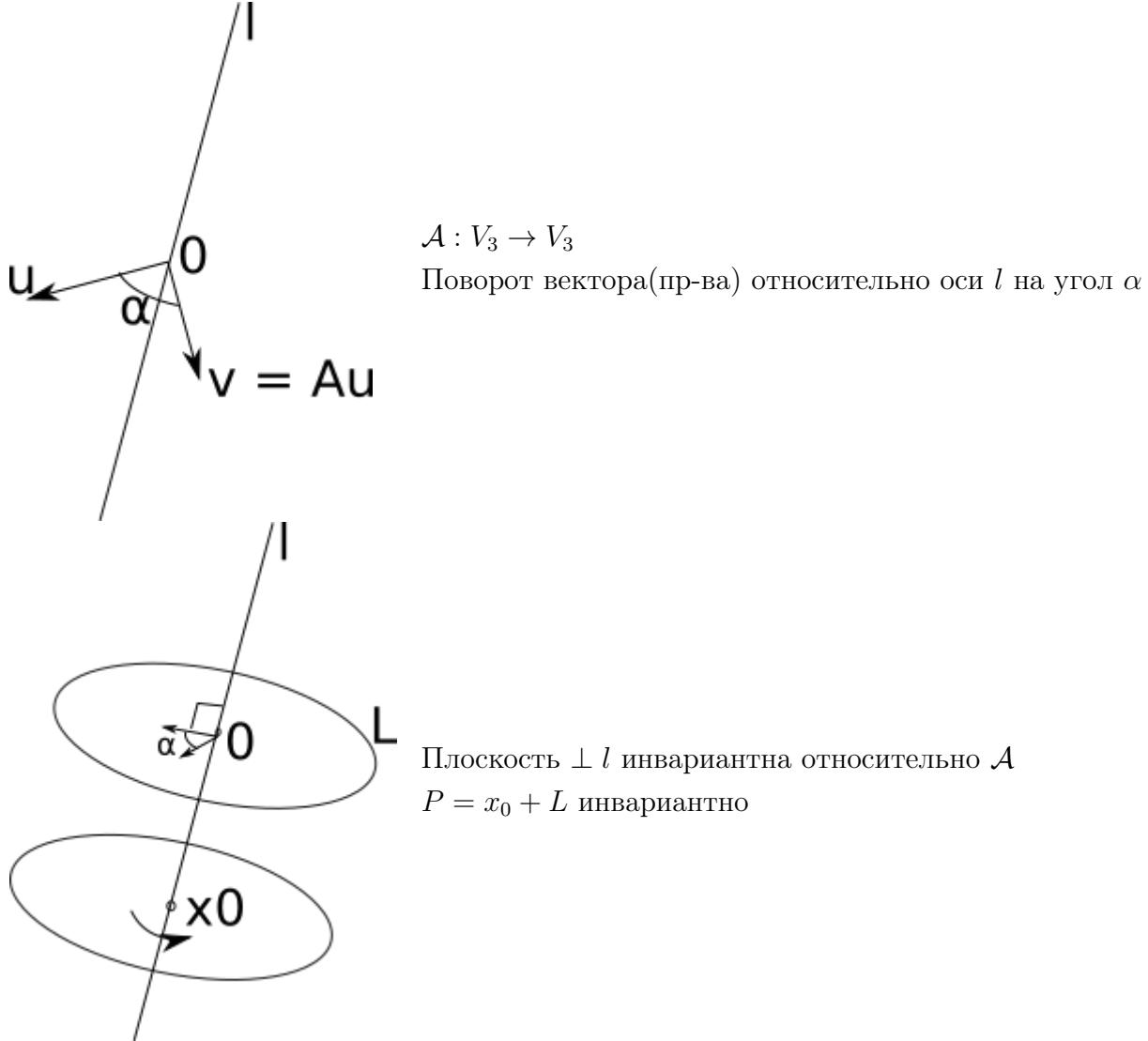
Определение 3. $\text{tr}A = \text{tr}A$, где A – матрица оператора в некотором базисе.

$\text{tr}A = \text{tr}A'$ – не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

Определение 4. $L \subset V$ L инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$ если $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

Примеры.

1. \emptyset, V инвариантны относительно \mathcal{A}
2. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ инвариантны относительно \mathcal{A}



Теорема 3. $L \subset B$ $\mathcal{A} \in End(V)$. Линейное пространство инвариантно относительно \mathcal{A}

$\Rightarrow \exists$ базис пространства V , т.ч. матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе

будет иметь вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \emptyset & A_3 \end{array} \right)$

$A_1 k \times k$ где $k = \dim L$

Доказательство. $L = \underset{\text{базис}}{span}(e_1 \dots e_k)$

Дополним до базиса V : $e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i \in L = \sum_{m=1}^k a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 \cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1i}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ki} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Следствие 1. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно \mathcal{A}

$\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V , в котором матрица оператора \mathcal{A} будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A^2} & \\ & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} A^i \\ \text{размерность матрицы} \end{array} \right) = \dim L_i$$

Доказательство. $L_1 = \text{span}(e_1^1 \dots e_i^{i_k})$

т.к. \bigoplus , то базис V – объединение базисов L_i

$$V = \text{span}(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \frac{L_1}{1 \dots i_1} & & & \frac{L_2}{i_1+1 \dots i_2} & & & \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

отвечает позиции базисных элементов пр-ва L_i в базисе V

□

Следствие 2. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Доказательство. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall u \in V \exists! u = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i$

$$Im\mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

Верно и " \supset "

Пусть $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^m u_i \in V\right) \in Im\mathcal{A}$$

$$Im\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

\oplus прямая?

$$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \emptyset \leftarrow$$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнктны $\nwarrow \Rightarrow \forall i : v_i = \emptyset$

$$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i} \text{ дизъюнктны} \Rightarrow \oplus$$

□

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$ V линейное пространство над K

Определение 1. $\lambda \in K$ – *собственное число* (с.ч.) линейного оператора \mathcal{A} , если

$\exists [v \in V \neq \emptyset]$, который называется *собственным вектором* (с.в.), такой что $[\mathcal{A}v = \lambda v]$

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$

Определение 2. $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \{c.v. v \neq \emptyset\}$ называется *собственным подпространством*.

$[\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda]$ – геометрическая кратность с.ч.

$$\gamma \geq 1$$

V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$$v \in V_\lambda \quad \mathcal{A}v = \lambda v \stackrel{?}{\in} V_\lambda$$

$$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$$

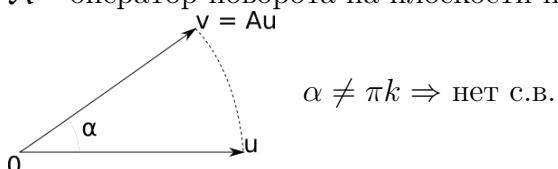
Примеры.

1. \mathcal{A} – оператор подобия:

$$\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$$

$$\mu \text{ с.ч.} \quad V_\lambda = V$$

2. \mathcal{A} – оператор поворота на плоскости на угол α



$$\alpha \neq \pi k \Rightarrow \text{нет с.в.}$$

3. Пусть λ с.ч. $= 0$ $\mathcal{A}v = 0$ с.в. $\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A}$ нетривиально $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ не автоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ необратимо $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$

4. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$v_1 \dots v_n \text{ базис, т.ч. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$$

Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ – с.ч. v с.в. $\neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$ нетривиально $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$ базис $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(A - tE)$ т.к. \det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} = \\ = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \underset{\text{tr } A = \text{tr } \mathcal{A}}{\det A}$$

По теореме Виета: $\det \mathcal{A} = \prod_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)} \lambda_1 \dots \lambda_n$

$\lambda \in K$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ ($\lambda \in K$)

λ корень характеристического многочлена.

$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни $\chi_{\mathcal{A}}$ будут с.ч.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$$

$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется *спектром линейного оператора*. $(\lambda, \alpha(\lambda))$

Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.

$$\alpha(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$$

Немножко про алгебраическую кратность

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod_{a-\text{корень}} (t - a)^{m_a}$$

a -корень $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \mid (t - a)$

a – корень f **кратности** $m \Leftrightarrow \begin{cases} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(t) = (t - a)^m g(t)$$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a$ a –корень с учетом кратности

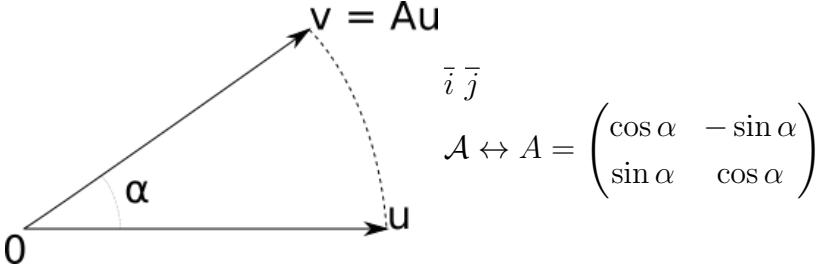
$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$(-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_n)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ с.ч.}$$

Примеры. \mathcal{A} – поворот на угол α



$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - t & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - t \end{pmatrix} =$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha t + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1$$

$$D = 4 \cos^2 \alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$$

нетвещ. корней \Rightarrow нет с.ч.

$$K = \mathbb{R}$$

Теорема 1. λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow [1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)]$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = \dim V_{\lambda} = \text{span}(v_1 \dots v_k)$ базис

V_{λ} инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda & \\ \hline 0 & & A^3 \end{array} \right) \quad A_{k \times k}^1$$

$$\text{Базис} = v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$$

$$\mathcal{A}_{i=1 \dots k} v_i \in V_{\lambda} = \lambda v_i \Leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda - t & \\ \hline 0 & & A^3 - tE_{n-k} \end{array} \right) \underset{\text{св-ва}}{=} \det \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{A^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$ \square

Теорема 2. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ – различные с.ч. \mathcal{A}

$v_1 \dots v_m$ соответствующие им с.в. \Rightarrow

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1$ $\lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq 0$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m - 1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. \mathcal{A} ,

а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

$$\text{Пусть } v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

$$\mathcal{A}_{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

||

$$\lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = 0 \quad v_i \text{ линейно независим по инд. предположению}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m - 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_m = 0$ — Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть 0

□

Следствие 1. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ дизъюнктны. $\left(\bigoplus_{c.\lambda.} V_\lambda \right)$

Доказательство. $v_1 + \dots + v_m = 0 \quad v_i \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq 0 \Rightarrow$ это слагаемое с.в. \Rightarrow противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall i : v_i = 0 \Rightarrow$ дизъюнктны. □

Теорема 3. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \rightarrow L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \quad A_{k_i \times k_i}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства det}}{=} |A^1 - tE_{k_1}| |A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\chi_{A^1}(t) \quad \chi_{A^2}(t) \quad \dots \quad \chi_{A^m}(t)$$

$$\begin{array}{ccc} || & || & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}^m \end{array}$$

□

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n \times n}$ λ с.ч. $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

$$y = \begin{array}{c} Ax \\ \uparrow \\ \text{линейный оператор} \end{array}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$$\chi_A(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$$

$$t_1 = 0 \quad \alpha(0) = 2$$

$$t_2 = 1 \quad \alpha(1) = 1$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) \quad \alpha \in]R$$

$$V_{\lambda_1} = 0 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$$

$$\lambda_2 \quad 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = 1$$

7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)

Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.

Функция от матрицы.

Определение 1. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

\mathcal{A} называется о.п.с., если \exists базис пространства V , т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$ базис V из с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} V_\lambda$

$$V = \text{span}(v_1 \dots v_n)$$

Теорема 1. Пусть $\sum_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

\Leftrightarrow все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. \mathcal{A}

\mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \forall c. \forall \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$
--

$$\begin{aligned}
& \text{Доказательство. } \mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow n = \dim V = \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) \\
& 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \quad \nearrow \\
& \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \rightarrow \quad \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}
\end{aligned}$$

□

Следствие 1. $\sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

\mathcal{A} о.п.с. \Leftrightarrow спектр — простой.

(n попарно различных с.ч. $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$)

Определение 2. $A_{n \times m}$ называется **диагонализируемой**, если \exists невырожденная $T_{n \times n}$, т.ч.

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

(" A подобна диагональной матрице")

Следствие 2. Если матрица $A_{n \times n}$ — матрица некоторого о.п.с. \mathcal{A} , то она **диагонализируема**. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \exists \text{ базис} \quad v_1 \dots v_n \\
& \uparrow \quad (e_1 \dots e_n)V \quad \lambda_1 \dots \lambda_n \\
& A \quad \uparrow \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$T = T_{e \rightarrow v}$ невырожденная.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

$$\boxed{A \text{ диагонализируема} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \\
\forall \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$$

Определение 3.

$$\begin{aligned}
& V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \quad p_i : V \rightarrow L_i \subset V \\
& \nwarrow \Leftarrow \quad \Rightarrow \searrow \\
& L_i \subset V \quad \forall v \in V \ \exists! : v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i \\
& \text{линейное подпр.} \\
& \boxed{\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i v \stackrel{\text{def}}{=} v_i} \quad i = 1 \dots m
\end{aligned}$$

Оператор проектирования (проектор)

$$\mathcal{P}_i \stackrel{?}{\in} \text{End}(V)$$

$$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \Rightarrow \mathcal{P}_i \text{ линейный оператор.}$$

$$u + \lambda V = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i + \lambda \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \sum_{i=1}^m (\underbrace{u_i + \lambda v_i}_{\in L_i})$$

$$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$$

Свойства проекторов:

- $\forall i \neq j \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = \emptyset$
 - $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \emptyset_i^k = \mathcal{P}_i)$
 - $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
 - $Ker \mathcal{P}_i = \sum_{j \neq i} L_j \quad \forall i = 1 \dots m$
 - $Im \mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

- $$1. \forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij}(v) = \mathcal{P}_i v_j \in L_j = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij} = \emptyset$$

Т.к. L_i дизъюнктны

$$v = v_1 + v_i + \underset{\text{Ед. образом}}{v_j} + \dots + v_n$$

- $$2. \forall v \in V \quad \underline{\mathcal{P}_i} \mathcal{P}_i(v) = v_i = \mathcal{P}_i v$$

$v_i \in L_i$

Т.к. верно $\forall v \in V$, то верно и для базиса \Rightarrow операторы совпадают. $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$

- $$3. \forall v \in V(\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i)v = \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i v = \sum_{i=1}^m v_i = v = \mathcal{E}v \Rightarrow \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^m = \mathcal{E}$$

- $$4. \quad \mathcal{P}_i(v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_m) + \underbrace{\sum_{j \neq i} \mathcal{P}_i v_j}_{0}$$

$$\sum_{j \neq i} L_j \subset \text{Ker } \mathcal{P}_i$$

T.K. $v = \bigoplus_{j \neq i} L_j \oplus L_i$

$$\Rightarrow \text{Ker } \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$$

Im $\mathcal{P}_i = L_i$ no def " \subset "

Верно " \supset " $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P}v_i = v_i$

1

Утверждение. $\mathcal{P}_i \in End(V) : V \rightarrow V$ и выполнены свойства 1, 3 \Rightarrow

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im} \mathcal{P}_i \quad (\text{м.e. } \mathcal{P}_i \text{ проекторы на } L_i = \text{Im} \mathcal{P}_i)$$

Логика доказательства.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i &\stackrel{?}{=} \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \mathcal{E} &= p_i \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_i^2 \\ &\quad \parallel \\ &\quad \emptyset \\ &\quad i \neq j \end{aligned}$$

- $$2. \ v_1 + v_2 + \dots + v_m = \emptyset$$

$v_i \in Im\mathcal{P}_i$ дизъюнктно?

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \quad w_i \in V$$

$$\begin{aligned}
v_i = \mathcal{P}_i w_i &= \mathcal{P}_i \left(\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j} \right) = 0 \\
\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j w_j)}_{=0 \ i \neq j} &= \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i \\
\forall v \in V \quad \mathcal{E}v = v &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j v}_{v_j \in Im \mathcal{P}_j} \quad \Rightarrow v = \sum_{j=1}^m Im \mathcal{P}_j
\end{aligned}$$

□

Теорема 2 (О спектральном разложении о.п.с.). $v = \bigoplus_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \quad \mathcal{P}_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$
 \mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$ ←спектральные проекторы

Доказательство.

$$\begin{aligned}
1. \quad &\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = 0 \\
2. \quad &\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda \\
3. \quad &\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E} \\
\forall v \in V \quad &\mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum_{\lambda} v_\lambda \in V_\lambda) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{=\lambda v_\lambda} = \\
&\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda v
\end{aligned}$$

Доказательство верно \forall векторного про-ва V . В частности для базиса \Rightarrow

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda}$$

□

Следствие 1. $A_{n \times n}$ диагонализируема $\Leftrightarrow \exists \mathcal{P}_\lambda \underset{\text{проекторы}}{n \times n} \quad 1^\circ \ 2^\circ \ 3^\circ$
 $A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{span } V_3$$

$$\Rightarrow \text{o.п.с. } V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = \text{span}(V_1, V_2, V_3)$$

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad [AT = T\Lambda]$$

$$\mathcal{P}_1 : V \rightarrow V_{\lambda_1} \subset V$$

$$\mathcal{P}_2 : V \rightarrow V_{\lambda_2} \subset V$$

$$\mathcal{P}'_1 \text{ матрица } \mathcal{P}_1 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ – матрицы проекторов в базисе e (канонич.)

$$\mathcal{P}_1 v_i = \begin{cases} v_i, i = 1, 2 \\ \emptyset, i = 3 \end{cases}$$

$1^\circ 2^\circ 3^\circ$

$$\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 = E$$

$$\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2 = \emptyset \dots$$

$$\mathcal{P}'_2 \text{ матрица } \mathcal{P}_2 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}'_i = T^{-1} \mathcal{P}_i T \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}'_i T^{-1} \quad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \emptyset$$

$$\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$$

Определение 4. $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$ – последовательность матриц,

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall i, j \ \exists a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{m=1}^N A_m}_{\substack{S_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad R = \infty \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad \text{либо } x = 1$$

Определение 5. Функция от матрицы.

$A_{n \times n}$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m, \text{ где } \boxed{\begin{array}{lcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{array}}$$

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

$$\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A^{2m}$$

Теорема 3. f аналитическая в $|x| < R$

$A_{n \times n}$ все с.ч. $|\lambda| < R$

A диагонализируемая То есть:

$$\exists \underset{\text{невырожд.}}{T} : \Lambda = T^{-1}AT$$

$$\exists \mathcal{P}_\lambda : A = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

↓

$$1. \underset{f(A)}{\exists} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$2. \underset{f(A)}{\exists} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Доказательство.

$$1. \quad \begin{aligned} f(A) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \\ A^m &= (T \Lambda T^{-1})^m = \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x| < R \end{array}}$$

$$= T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} =$$

$$= T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m \right) T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$|\lambda_i| < R$$

$$2. A^m = \left(\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda \right)^m \underset{\mathcal{P}_\lambda \neq \mu \in \emptyset}{=} \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda \right) = \sum_{\lambda} \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m = f(\lambda) \right) \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\lambda} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

□

Замечание. A диагон. $\Leftrightarrow A = T \Lambda T^{-1}$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$$

$$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$t^m A^m = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Примеры. e^{At}

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_1} : \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\forall \lambda : \left. \begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \gamma(\lambda) \\ \sum_{\lambda} \alpha(\lambda) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ диагонализируемая}$$

$$T_{e \rightarrow v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \xrightarrow[i=1,2]{} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{n \times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x} - \text{производная}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \quad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности

$$(e^{At})' = Ae^{At}$$

$$e^{A \cdot 0} = E$$

$$e^{At} = \left(\sum_{\lambda \text{ c.ч.}} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda \right)' = \sum_{\lambda \text{ c.ч.}} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_{\lambda} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\mu=\lambda} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

Замечание. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \neq 0$
 (все корни хар. многочлена)

$\square A$ диагонализируема. Все с.ч. $\lambda \neq 0$

$$A^{-1} = T \Lambda^{-1} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\Lambda \Lambda^{-1} = E$$

$$AA^{-1} = T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda^{-1} T^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$$

($AA^{-1} = E$ упр.)

$$\sqrt[m]{A} = T \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

\square все $\lambda_i \geq 0$

(m нечет $\Rightarrow \lambda$ любого знака)

$$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$$

$$(\sqrt[m]{A})^m = T \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} \dots T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.: $(\sqrt[m]{A})^m = A$)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

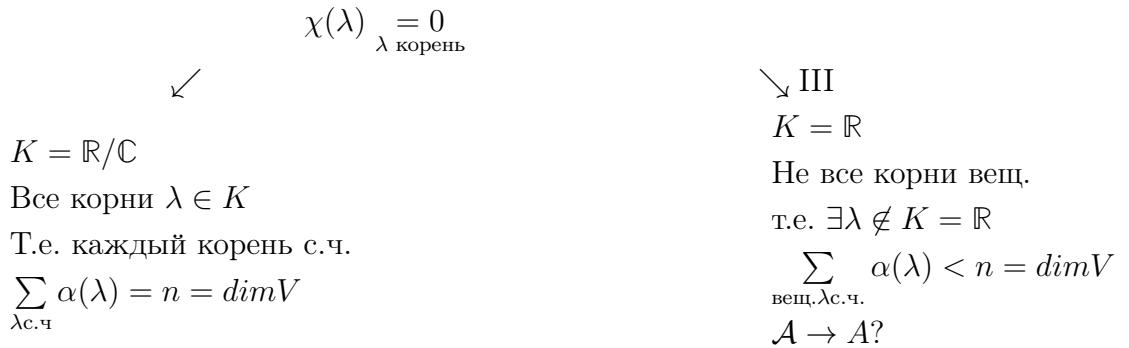
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & A^{-1} &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \mathcal{P}_1 + \frac{1}{(-1)} \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$$

$$A^2 = E$$

7.6 Комплексификация линейного веш. пространства. Продолжение веш. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$ V над полем K



$$\begin{array}{ccc}
 \text{I} \swarrow & & \searrow \text{II} \\
 \forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) & & \exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \\
 \mathcal{A} - \text{o.p.c.} \rightarrow A \text{ диагонализир.} & & \mathcal{A} \text{ не о.p.c.} \\
 & & \rightarrow A \text{ приводится к Жордановой форме}
 \end{array}$$

Определение 1. V – линейное пространство над \mathbb{R}

$$\forall x, y \in V \quad v := x + iy \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \quad \begin{aligned} x &= Re v \\ y &= Im v \end{aligned}$$

Определим

1. $v = v' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \in V \\ y = y' \end{cases}$
 2. $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{cases}$
 3. $\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\alpha x - \beta y}_{\in V_{\mathbb{C}}} + i \underbrace{\beta x + \alpha y}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

$$4. \forall x \in V \Leftrightarrow x + i0 \in V_{\mathbb{C}}$$

$$V \subset V_{\mathbb{C}}$$

$$0 \leftrightarrow 0 + i0$$

Упр.: $V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство над \mathbb{C}

$V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация линейного вещественного пространства V

Утверждение. $e_1 \dots e_n$ базис $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

T.e. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$ структуры над разными полями.

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$?

- порождающая?
- линейно независимая?

1. $\forall v \in V_{\mathbb{C}} \quad v = x \in V + iy \in V = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j =$
 $\sum_{j=1}^n \underbrace{[x_j + iy_j]}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n$ порождающая.
2. $\sum_{j=1}^n \gamma_j e_j = \emptyset \quad \gamma_j \in \mathbb{C}$
 $\left\| \sum_{j=1}^n \underbrace{\alpha_j e_j}_{x} + i \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_j e_j}_{y} = \emptyset \right.$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \emptyset = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \\ y = \emptyset = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 \dots e_n \text{ линейно независимы} \\ \forall j \alpha_j = 0 \quad \Leftrightarrow \forall j \gamma_j = 0 \\ \forall j \beta_j = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow \underbrace{e_1 \dots e_n}_{\text{лин. незав.}} \text{ в } V_{\mathbb{C}}$

□

Определение 2. $z = x + iy \quad x, y \in V$

вектор сопряженный к z :

$$\bar{z} = x - iy$$

$$(\bar{z} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \bar{\lambda} \bar{z})$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

Утверждение. $v_1 \dots v_m$ линейно незав. в $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ линейно независимы в $V_{\mathbb{C}}$

Очевидно, $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы $\Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{v}_j = \bar{0} = 0 \\ \left\| \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^m \gamma'_j v_j \text{ линейно незав.} \right. \end{array} \right| \Leftrightarrow \forall j \gamma'_j = 0 = \bar{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

\Rightarrow линейно независим.

□

$$rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$

$$V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i \underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$$

Линейность?

1. Аддитивность. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1 + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

Очевидно, из аддитивности \mathcal{A}

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Однородность

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v) &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(x + iy)) = \\ &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)) = \\ &= \mathcal{A}(\alpha x - \beta y) + i\mathcal{A}(\alpha y + \beta x) = \\ &= \alpha \mathcal{A}x - \beta \mathcal{A}y + i\alpha \mathcal{A}y + i\beta \mathcal{A}x = \\ &= (\alpha + i\beta)\mathcal{A}x + i(\alpha + i\beta)\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{A}x + i\lambda \mathcal{A}y = \\ &= \lambda(\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y) = \lambda \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ – продолжение линейного вещ. оператора \mathcal{A}

с пространства V на его комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V(V_{\mathbb{C}}) \\ \text{веществ.} \\ \mathcal{A} \leftrightarrow A \\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Т.е. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр. \mathcal{A}

$$2. \forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z}$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \overline{\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y = \\ &= \mathcal{A}x + i\mathcal{A}(-y) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x - iy) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z} \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} \chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \\ \parallel & & \parallel \end{array} \quad \exists e_1 \dots e_n \text{ базис } V$$

$$\det(A - tE) \quad \det(A_{\mathbb{C}} - tE) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ являются собственными числами $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

$$4. \quad \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda) = 0$$

Т.к. многочлен с вещ. коэф. $\Rightarrow \bar{\lambda}$ тоже корень.

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \quad \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\bar{\lambda}) = 0$$

v соотв. с.в.

$$\Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:	$\dim V_{\lambda} = \dim V_{\bar{\lambda}}$ (из утв. 2)
	$\gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{v} \underset{\text{св-во 2}}{=} \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{с.в. для } \lambda}}{v}} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda}$$

"III": $\mathcal{A} \in End(V)$

V над \mathbb{R}

$$\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = \dim V$$

Т.е. не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещ.

\rightarrow строим $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$ $A_{\mathbb{C}} = A$

Все корни с.ч. \Rightarrow матрица для $A_{\mathbb{C}}$ будет сведена либо к I, либо к II

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$$

$$D = -36 < 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ с.ч. } \alpha(\lambda_1) = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3 \quad \alpha(2, 3) = 1$$

$$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 \quad V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 + 3i \quad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$$

Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещественных чисел.

Только теперь арифметические операции с комплексными.

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 + 3i \\ 5 + 3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$$

$\forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$ диагонализирован.

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 - 3i & 3 + 3i \\ 2 & 5 - 3i & 5 + 3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix} T^{-1} = \dots$$

7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение 1. Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен $\psi(t)$ называется аннулятором элемента $v \in V$, если $\psi(\mathcal{A})v = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$$

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$$

$$\psi(t) = \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$$

Т.е. перестановочны.

Определение 2. $\psi(t)$ аннулятор элемента $v \in V$ наименьший возможной степени называется **минимальным аннулятором элемента** v

Теорема 1 (О минимальном аннуляторе элемента).

$\mathcal{A} \in End(V)$

1. $\forall v \in V \exists! \text{ минимальный аннулятор } v$
2. $\forall \text{ аннулятор элемента делится на его минимальный.}$

Доказательство.

1. (a) $\square v = 0 \quad \psi(t) = 1 \quad \text{Очевидно, минимальный аннулятор.}$

$$\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = 0$$

- (b) $\square v \neq 0$

$$(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \dots, \mathcal{A}^{m-1}v, \mathcal{A}^m v$$

линейно независимая система

линейно зависимая система

$$\dim V = n$$

$$m \leq n + 1$$

$$\mathcal{A}^m v = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$$

$$0 = \mathcal{A}^m v - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow \text{Алгоритм}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$$

Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента v

2. ψ_1 – аннулятор v

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$$

$$\deg r(t) < \deg \psi(t)$$

$$0 = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})v + r(\mathcal{A})v \Rightarrow$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(t) \text{ аннулятор } v \\ \deg r < \deg \psi \end{cases} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdash \psi$$

□

Определение 3. Нормализованный многочлен $\phi(t)$ называется аннулятором \mathcal{A} ,

если $\phi(\mathcal{A}) = 0$

$$(\Leftrightarrow \forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = 0)$$

Аннулятор \mathcal{A} минимальной степени называется **минимальным многочленом**

Теорема 2 (о минимальном многочлене). $\mathcal{A} \in End(V)$

1. $\forall \mathcal{A} \exists! \text{ минимальный многочлен}$
2. $\forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} \text{ делится на минимальный многочлен}$

Доказательство.

$e_1 \dots e_n$ базис V

\Rightarrow по Теореме 1 для $\forall e_j \exists! \psi_j$ минимальный аннулятор e_j

$$\begin{aligned}\psi_j(\mathcal{A})e_j &= \emptyset \\ \psi(t) &= \text{H.O.K. } (\psi_1 \dots \psi_n) \\ \forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v &= \phi(\mathcal{A}) \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n v_i \phi(\mathcal{A})e_i = \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=0} = \emptyset \\ \phi : \psi_j &\Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = \emptyset \Rightarrow \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A}$$

Давайте покажем, что у ϕ степень минимальная.

От противного.

$$\exists \phi_1 \text{ аннулятор } \mathcal{A} \quad \square \deg \phi_1 < \deg \phi$$

$$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = \emptyset \Rightarrow \phi_1 \text{ аннулятор элемента } e_j \xrightarrow{\text{по Теореме 1}}$$

$$\Rightarrow \phi_1 \vdots \psi_j \Rightarrow \phi_1 : \phi \Rightarrow \deg \phi_1 \geq \deg \phi. \text{ Противоречие} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \deg \phi \text{ минимальный} \Rightarrow \text{п.2 доказан, т.к. } \forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} : \phi$$

Единственность?

$$\square \quad \phi_1, \phi \quad \text{минимальные аннуляторы одной степени.}$$

нормализов. \Rightarrow ст. коэф. 1

$$\deg(\phi_1 - \phi) < \deg(\phi) = \deg(\phi_1)$$

$$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \phi_1(\mathcal{A})v - \phi(\mathcal{A})v = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_1 - \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A} \text{ меньшей степени} \Rightarrow \text{противоречие} \underline{\text{минимальн.}}$$

□

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \phi = ? \text{ минимальный многочлен}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_1 ?$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^2 e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

линейно завис.

$$\mathcal{A}^2 e_1 = -4e_1 + 4\mathcal{A}e_1$$

$$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^2 e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

линейно завис.

$$\mathcal{A}^2 e_2 = 4\mathcal{A}e_2 - 4e_2$$

$$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

линейн. нез.

линейно завис.

$$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$$

$$\psi_3(t) = t - 2$$

$$\phi(t) = \text{H.O.K. } ((t - 2)^2, (t - 2)) = (t - 2)^2$$

Теорема 3 (Кэли-Гамильтона). $\mathcal{A} \in End(V)$

$$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) \text{ — аннулятор } \mathcal{A}$$

характерист. многочлен

Доказательство. $\chi(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A} - \mathcal{A}) = 0$

□

Я так и не понял это норм доказательство или нет. В любом случае далее идет длинное док-во.

Доказательство. μ — не корень $\chi(t)$

$$\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$$

$e_1 \dots e_n$ базис в. $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B \leftarrow \text{соузная матрица (прис-ная)}$$

$$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow \text{определитель } (n-1)\text{-го порядка } A - \mu E$$

Т.е. мн-н степени $n-1$ относительно μ

$$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \dots + B_1\mu + B_0$$

$$\det(A - \mu E) \cdot E = (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + B_1\mu + B_0)$$

||

$$\chi(\mu) \cdot E$$

||

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k \cdot E$$

$$\begin{array}{ll} \mu^0 : \alpha_0 E = AB_0 & | A^0 \\ \mu^1 : \alpha_1 E = AB_1 - B_0 & | A^1 \\ \mu^2 : \alpha_2 E = AB_2 - B_1 & | A^2 \\ \dots & \\ \mu^{n-1} : \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2} & | A^{n-1} \\ \mu^n : \alpha_n E = -B_{n-1} & | A^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{A}) = \chi(A) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1} \\ &- A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

χ — аннулятор \mathcal{A}

□

Теорема 4. $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корней характеристического многочлена \mathcal{A} совпадает с множеством корней минимального многочлена \mathcal{A} (без учета кратности)

Доказательство. $\chi(t)$ – характерист., $\phi(t)$ – минимальный многочлен.

” \Leftarrow ” $\exists \phi(\lambda) = 0 \Rightarrow$ т.к. χ аннулятор \mathcal{A} , то по Т-ме 2 $\chi \mid \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

” \Rightarrow ” $\exists \chi(\lambda) = 0$

1. $\exists \lambda \in K \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \quad \exists v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0 \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$ минимальный аннулятор v

Т.к. $\phi \mid \psi \Rightarrow \lambda$ корень ϕ

$\phi(\lambda) = 0$

2. $\lambda \notin K$ т.е. III случай: $K = \mathbb{R}$

\exists комплексные корни характерист. многочлена.

$V \rightarrow V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$ базис $V \rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j + i\mathcal{A}0 = \mathcal{A}e_j$

$e_j = e_j + i0$

$\Rightarrow \forall k \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$

\Rightarrow Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).

Получим, что минимальные многочлены $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и \mathcal{A} совпадают.

Т.е. ϕ мин. мн-н для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}}$ \Rightarrow Применим случай а) для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
 $\Rightarrow \lambda$ с.ч. λ корень ϕ

□

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни $\chi : 2$

Корни $\phi : 2$

\leadsto еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

Следствие 1.

1. $\psi \vdots \phi$
 характерист. (аннулятор) минимальный (аннулятор мин.)

2. $\deg \phi = n = \dim V \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$\chi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$
$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad \sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$$\dim P_{m-1} = m$$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(t) \quad \begin{array}{l} \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \\ \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \mu \neq \lambda \end{array}$$

вз. прости

Определение 1. $I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p \dot{\colon} \phi_\lambda\}$

Главный идеал, порожденный многочленом ϕ_λ =

$$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda \phi_\lambda\}$$

I_λ – линейное подпространство P_{m-1}

$$p_{1,2} \dot{\colon} \phi_\lambda \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \dot{\colon} \phi_\lambda$$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$0 = \sum_{\lambda} \underbrace{f_\lambda \phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda \cdot \phi_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\substack{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}$$

$$\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\Rightarrow f_\lambda \cdot \phi_\lambda \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \underbrace{f_\lambda}_{\substack{\text{вз. прости} \\ \deg f_\lambda = m(\lambda)-1}} \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow f_\lambda \phi_\lambda \equiv 0 \Rightarrow \text{Дизъюнктны}$$

2. $\dim P_{m-1} = m$

$$\begin{aligned} &|| \\ &\sum_{\lambda} \dim I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \end{aligned}$$

$$I_\lambda \subset P_{m-1}$$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

□

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1} \exists! p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$

$$p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$ – полиномиальное разложение единицы

Замечание.

$$1. \lambda \neq \mu$$

$$\begin{array}{ccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu \\ || & & || \\ f_\lambda \phi_\lambda & f_\mu \phi_\lambda & = \eta \cdot \phi \\ \uparrow & & \\ (t - \lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

$$2. \forall \lambda m(\lambda) = 1$$

Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

$$f_\lambda = \text{const} \quad (\text{def } f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$$

Теорема 2 (Лагранжа).

$$\forall \lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

Доказательство.

$$\begin{array}{l} \text{корень } \phi \rightarrow \mu \neq \lambda \quad \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \quad \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \\ p(t) \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\mu} \boxed{f_{\mu}} \cdot \phi_{\mu}(t) \\ \quad \uparrow \\ \quad \text{const, т.к.} \end{array}$$

корни взаимно

просты

$$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu)$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (t - \lambda) = \underbrace{\sum_{\mu} \phi_{\mu}(t)}_{\phi_{\mu}(t)}$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_\lambda(t)$$

\square

Следствие 1. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow \boxed{t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}}$$

Доказательство. По теореме: $1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_{\lambda}(t)$

$$\text{По теореме: } t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

\square

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

ϕ минимальный многочлен, все корни $\in K$ (\Rightarrow все корни $\chi \in K$

\Rightarrow т.е. все с.ч. $\in K - I, II$ случаи)

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} := p_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \in End(V)$$

\mathcal{P}_{λ} – проекторы ? ↑ это уже есть

Достаточно проверить $\mathcal{P}_{\lambda} \cdot \mathcal{P}_{\mu} = \mathbb{0}$

$$\mathcal{P}_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = f_{\mu}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

перестановочны, т.к. многочлены от \mathcal{A}

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

↑
содержит

$$(p_{\lambda} \cdot p_{\mu} : \phi \text{ см. замеч. 1}) \quad \eta(\mathcal{A})(t - \mu)^{m(\mu)} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{\lambda}$ проекторы – **спектральные проекторы** \mathcal{A}

$Im \mathcal{P}_{\lambda}$ **спектральное подпространство**

$$7.5 \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_{\lambda}}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{array}$$

$$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow \text{не о.п.с.}$$

$$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$$

$$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$$

$$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$$

$$\text{Прав. дробь } \frac{1}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda}}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda}}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}} \quad \begin{array}{l} \text{Правильн.} \\ \text{Правильн. дробь} \end{array}$$

$$\deg f_{\lambda} < m(\lambda)$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{\left(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}\right)}_{p_{\lambda_1}} \underbrace{(t-3)}_{\phi_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}}_{p_{\lambda_2}} \underbrace{(t+1)^2}_{\phi_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}} \nearrow \quad 1 = \sum p_{\lambda} \quad \text{спектральное разложение о.п.с.}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1} \quad \text{Доказательство позже}$$

Определение 2. $K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$

называется **корневым подпространством** \mathcal{A}

Теорема 3.

1. K_{λ} инвариантно относительно \mathcal{A}
 2. $\text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}$
 3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен $\mathcal{A}|_{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$
- $\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}}$

Доказательство.

$$1. x \in K_{\lambda} \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_{\lambda}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{A}x = \mathcal{A} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{перестановочны} \\ \Rightarrow = 0}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$2. (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{P}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) =$$

$$= f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = 0$$

$$\forall x \in V$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_{\lambda} x}_{\in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}} = 0 \Rightarrow \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$$

$$\text{Обратно: } K_{\lambda} \stackrel{?}{\subseteq} \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$x \in K_{\lambda}$$

$$\mu \neq \lambda \quad \mathcal{P}_{\mu} x = f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A}) x = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{содержит} \\ (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$x = \mathcal{E}x = \sum_{\substack{\mu \\ 0 \\ \mu \neq \lambda}} \mathcal{P}_{\mu} x = \mathcal{P}_{\lambda} x \in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \Rightarrow K_{\lambda} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$$

3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$?

$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

Минимальный?

\square не минимальный

$\psi_1 = (t - \lambda)^{m(\lambda)-1} \quad \square$ это минимальный многочлен

$\phi_1 := (t - \lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$ аннулятор \mathcal{A} ?

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$$

$$= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A}) \cdot \phi(\mathcal{A}) = \emptyset$$

$$\forall x \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$$

$$= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda} = \emptyset$$

$$\underbrace{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x}_{\text{мин. многочлен по предположению}}$$

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \emptyset$$

$$\phi_1(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \phi_1(\mathcal{A}) \sum_{\mu} \mathcal{P}_\mu = \emptyset$$

$$\underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}$$

$\Rightarrow \phi_1$ аннулятор \mathcal{A} , но степени $< \phi$

$\deg \phi_1 = m - 1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

□

Следствие 1. A о.п.с. $\Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. (\Rightarrow) \mathcal{A} о.п.с.

$\phi(t) \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ покажем что это минимальный многочлен \mathcal{A}

$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$ – собственные подпространства \mathcal{A}

$\forall v \in V \exists! v = \sum_{\lambda} v_{\lambda}, v_{\lambda} \in V_{\lambda}$

$$\phi(\mathcal{A})v = \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \sum_{\mu} v_{\mu} =$$

$$= \sum_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) v_{\mu} = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})v_{\mu}}_{\emptyset} = \emptyset$$

$$v_{\mu} \in V_{\mu} = Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \nearrow$$

$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень \Rightarrow минимальный многочлен.

(\Leftarrow) $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$K_{\lambda} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^1 = V_{\lambda}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с.}$$

□

Примеры.

$$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A - \lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$$

$$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A - \lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2} \quad \text{— упр.}$$

7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. $\mathcal{B} \in End(V)$ называется **нильпотентным**, если $\phi(t) = t^\nu$

Минимальный многочлен \mathcal{B} , т.е. $\mathcal{B}^\nu = \emptyset$

ν – индекс нильпотентности (мин. степень $\mathcal{B}^\nu = \emptyset$)

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

Идемпотентность

Степень минимального многочлена $\rightarrow \nu \leq \dim V = \underset{\text{степень } \chi}{\uparrow} n$

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \leq \dim V_\lambda$

Доказательство. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = \emptyset$$

$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_\lambda \in End(K_\lambda)$

$$m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$$

□

Замечание. $\sum_{\lambda} m(\lambda) \leq \sum_{\substack{\parallel \\ \deg \chi}} \dim K_\lambda = n$

$$\bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана).

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ можно представить в виде:

$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где \mathcal{D} о.п.с.

\mathcal{B} нильпотентный, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ перестановочны

Доказательство. ϕ – минимальный многочлен \mathcal{A}

$\mathcal{E} = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$ операторн. разложение единицы

$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$ \mathcal{D} о.п.с.?

$V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$

$\exists v_\lambda \neq 0 \in Im \mathcal{P}_\lambda$

$$0 \neq \lambda$$

||

$$\underline{\underline{Dv_\lambda}} = (\sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}) v_\lambda = \sum_{\mu} \mu (\mathcal{P}_{\mu} v_\lambda) = \lambda \mathcal{P}_\lambda v_\lambda = \underline{\underline{\lambda \cdot v_\lambda}}$$

$$\mathcal{P}_{\mu} \mathcal{P}_\lambda = \emptyset$$

$$\lambda \neq \mu$$

$\Rightarrow \lambda$ с.ч. \mathcal{D}, v_λ соотв. с.в. \mathcal{D}

\Rightarrow $Im \mathcal{P}_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathcal{D}}$ собств. подпр-во \mathcal{D} , отвечающ. с.ч. λ
 $V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$ дизъюнктны $\Rightarrow Im \mathcal{P}_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$

Объединение базисов $Im \mathcal{P}_\lambda$ – базис V

Каждый вектор из $Im \mathcal{P}_\lambda$ – это с.в. \mathcal{D}

\Rightarrow у V есть базис из с.в. $\Leftrightarrow \mathcal{D}$ о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \mathcal{A} \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\nu = \max_{\lambda} m(\lambda) \frac{\phi(t)}{\min_{\text{мин. мн-н}} \mathcal{A}} = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda})^{\nu} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \mathcal{P}_{\lambda} =$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = 0$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\lambda}^2 = \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \underbrace{f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_{\lambda}} =$$

все операторы перестановочны

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu - m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A}) = 0} = 0$$

\mathcal{B} нильпотент

$$\mathcal{B} = \sum_{\lambda} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}}_{\text{перестановочны}}$$

$$D = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$

□

Замечание.

$$1. \mathcal{B} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}$$

$$\mathcal{B}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{Im \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}}$$

2. $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ все три оператора взаимно-перестановочны

$$\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$$B^2 \stackrel{?}{=} \mathbb{0} \quad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Разложение Жордана}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Диагонализ.

Нильпотент.

Теорема 2 (Единственность разложения Жордана).

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)



Рис. 1

Доказательство. $\square \mathcal{A} = \frac{\mathcal{D}'}{\text{о.п.с.}} + \frac{\mathcal{C}}{\text{Нильпотент}} \quad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

T.K. \mathcal{D}' o.p.c., to $\mathcal{D}' = \sum_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

M – множество с.ч. \mathcal{D}'

Q_μ спектральные проекторы

$$Q_\mu : V \rightarrow V_\mu^\nu$$

$$\sum_{\mu} Q_{\mu} = \mathcal{E}$$

Достаточно доказать: $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

1. Множество M совпадает с множеством корней ϕ – минимальн. мн-н A

$$\{\mu\} = \{\lambda\}$$

2. $ImQ_\mu = K_\mu \leftarrow$ корневое подпространство \mathcal{A} , отвч. с.ч. μ ($Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$)

$$1. \quad (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})Q_\mu = (\sum_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

$$Q_\nu Q_\mu = 0 \quad \text{if } \nu \neq \mu \quad Q_\mu^2 = Q$$

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

↑

Верно, если $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

\Rightarrow докажем: $CQ_\mu = Q_\mu C$

$$\exists \lambda \neq \mu \ (\lambda - \mu) Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = (\lambda Q_\lambda) \mathcal{C} Q_\mu - Q_\lambda \mathcal{C} \underbrace{(\mu Q_\mu)}_{\mathcal{D}' Q_\mu} =$$

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \sum_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu \mathcal{D}'$$

$$Q_\lambda(\mathcal{D}'\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{D}')Q_\mu = 0$$

$$\lambda \neq \mu \quad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \emptyset = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$$

$$\underbrace{\sum_{\lambda} Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu}_{\mathcal{E}} = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \frac{\boxed{\sum_{\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}{\boxed{\mathcal{E}}}$$

$$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

$$k(\mu) = \min K, \text{ такой что } \mathcal{C}^k Q_\mu = \emptyset$$

Такое $K(\mu)$ обязательно найдется, т.к. \mathcal{C} – нильпотент.

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

$(t - \mu)^{k(\mu)}$ – минимальный аннулятор элементов $\text{im} Q_\mu$

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)}$$

ϕ минимальный многочлен $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулирует любые элементы V ,

в частности элементы $\text{Im} Q_\mu$

Т.е. $\phi(t)$ аннулятор элементов $\text{Im} Q_\mu \Rightarrow \phi(t) \cdot (t - \mu)^{k(\mu)} \leftarrow$ минимальный аннулятор для $\text{Im} Q_\mu$

\Rightarrow верно $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t - \mu)^{k(\mu)}$$

$$\Rightarrow \phi \cdot \psi$$

Покажем, что ψ аннулятор \mathcal{A}

$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)}} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)} \underbrace{(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}_{\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow \psi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \cdot \phi$ минимальный аннулятор

$$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda - \text{корни } \phi\}$$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$

$$\mu = \lambda$$

$$2. \quad (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

||

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

μ корень ϕ

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = \text{Im} \mathcal{P}_\mu$$

$$\left. \begin{array}{l} \bigoplus_{\mu} K_\mu = V \\ \bigoplus_{\mu} \text{Im} Q_\mu = V \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im} Q_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

□

Теорема 3. $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$$

Доказательство. $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$$\mathcal{B}^\nu = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \mu - \text{не корень} & \quad (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\parallel \emptyset}) = \\ & = \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E} - t\mathcal{B}) \cdot \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1}) \end{aligned}$$

μ – не корень

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu &= \det \underbrace{[\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}]}_0 \underbrace{[-\mathcal{B}]}_{\mathcal{D}} \cdot \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} = \\ &= \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}} \end{aligned}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

□

Следствие 1. Если $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана

$$\text{To } \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$$

Доказательство. Очевидно, $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$

□

Следствие 2. $\boxed{\dim K_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \stackrel{\text{o.p.c.}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = \dim \mathcal{P}_\lambda = \dim K_\lambda$
 $\forall \lambda$ корня χ с.ч. (I, II)

□

7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda \text{ корневые} \quad \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$\chi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \quad \lambda \in K \text{ все корни с.ч.}$$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \quad \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$$

\bigcap

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$\forall \lambda K_\lambda \rightsquigarrow$ строим базис \rightsquigarrow матрица оператора будет иметь
 \bigcup_λ Жорданов базис блочно-диагональную структуру
– Жорданова форма матрицы

$$\square K_\lambda = K \quad \gamma(\lambda) = \gamma$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha \quad m(\lambda) = m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \quad \dim = \gamma$$

$$K_1 = V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$$

\cap

$$K_2 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^2$$

\vdots

\cap

$$K_m = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad \dim = \alpha$$

Пример.

$$\alpha = \dim K_\lambda = \dim K_5 = 24$$

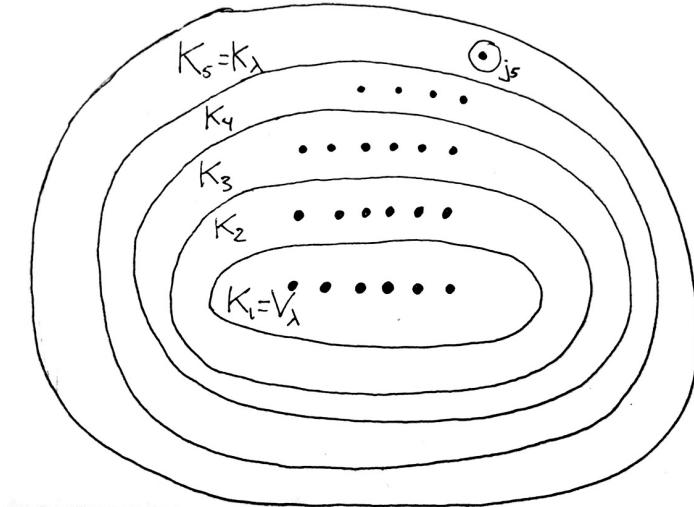
$$m = 5$$

$$\gamma = 7$$

j ₅	$\in K_5 \setminus K_4$
j ₄	$= \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_5 \in K_4$
j ₃	$= \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_4 \in K_3$
j ₂	$= \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_3 \in K_2$
j ₁	$= \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda$

Циклический базис

$$j_1, j_2, j_3, j_4 - \text{присоединенные вектора.}$$



$$\mathcal{A}|_L$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

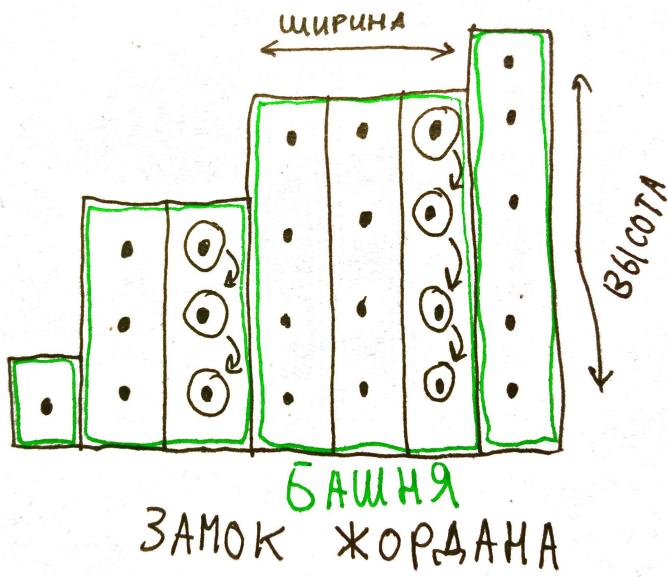
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 \quad \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 \quad \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 \quad \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 \quad \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5$$

Матрица $\mathcal{A}|_L$ в базисе $j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Клетка Жордана 5×5
(блок нижнего уровня)

$$(j_5 \ j_4 \ j_3 \ j_2 \ j_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



Башня – циклическое объединение базисов одной длины.

Высота башни – количество векторов в базисе.

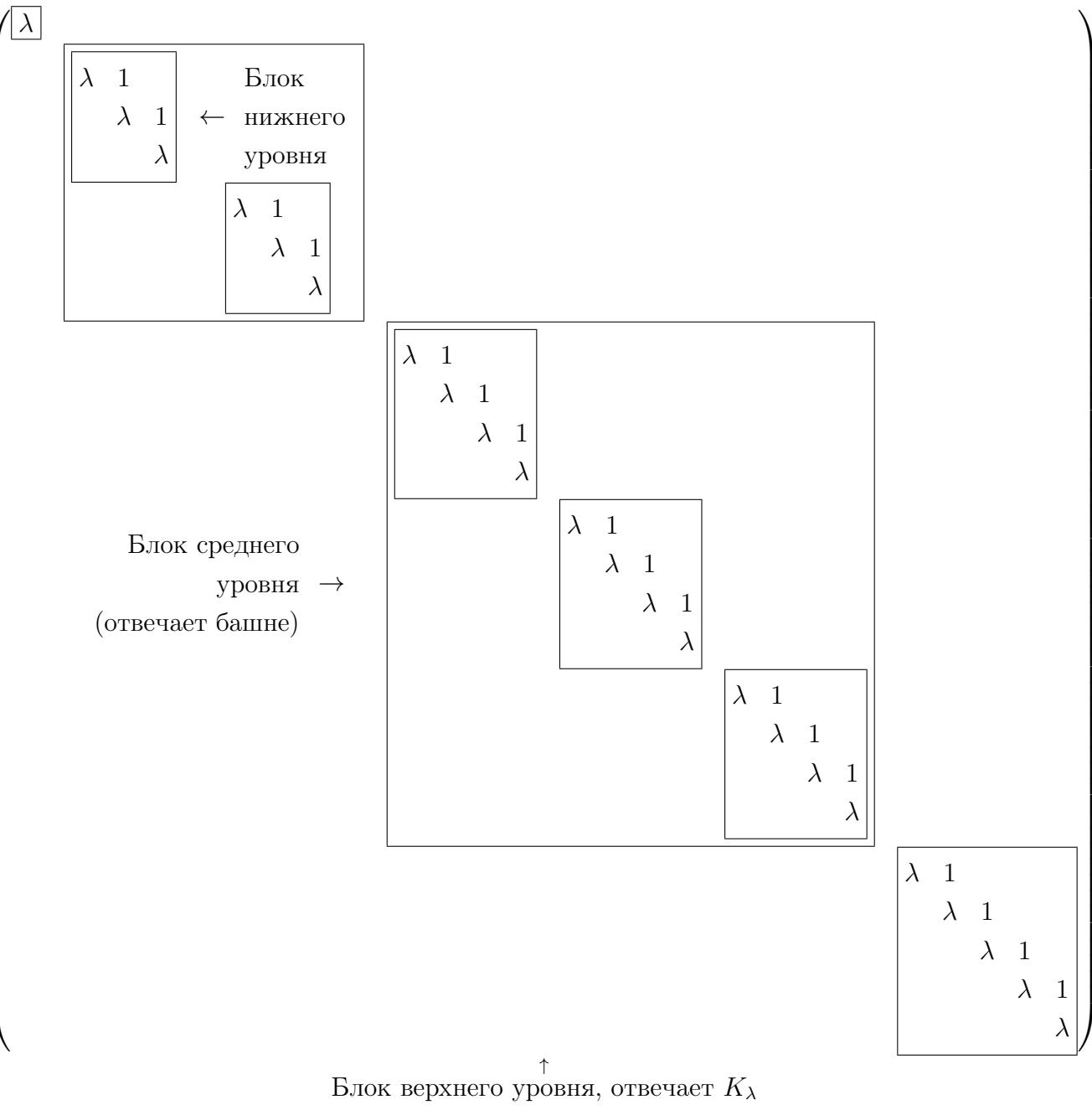
Ширина башни – число циклических базисов одной размерности

Основания каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов = γ

||

Число Жордановых клеток



γ = Число блоков нижнего уровня

α = Число λ на диагонали

\mathcal{A} о.п.с. $\forall \alpha = \gamma$

V_λ $\boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$

"Деревня Жордана"

Примеры. $\lambda \alpha(\lambda) = 4$

$$1. \gamma(\lambda) = 3 \begin{pmatrix} \boxed{\lambda & 1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$2. \gamma(\lambda) = 2 \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ или } ? \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$3. \gamma(\lambda) = 1 \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} \quad T = (\dots j_1 \dots j_5 \dots)$$

Объединение цикл. базисов для всех λ

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \mathcal{J} \\ & & \text{В Жорд. базисе} \\ \uparrow & & \\ A & & \\ & \text{В исходном} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{J} = T^{-1}AT}$$

$$\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}} \rightarrow T\mathcal{J} = AT$$

1, 3

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы $T \rightsquigarrow T$

\rightsquigarrow построить Жорданов базис.

2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \underset{\dim K = \alpha}{K}$
- $K_r = \text{Ker}(A - \lambda E)^2$
- $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$$\forall \lambda \quad K = K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$$m(\lambda) = m$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha$$

$$K_r = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^r \quad r = 1 \dots m$$

$$V_\lambda = K_1$$

$$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$$

Все включения будут строгие:

$$\square K_{r+1} = K_r \quad \text{Ker} \mathcal{B}^{r+1} = \text{Ker} \mathcal{B}^r$$

По Теореме о rg и def: $\dim K = \text{rg} \mathcal{B}^{r+1} + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^{r+1}} = \text{rg} \mathcal{B}^r + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^r} \quad (\text{def} \mathcal{B}^{r+1} = \text{def} \mathcal{B}^r)$

II

1. Найдем $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = \text{Ker}(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$
 $\Rightarrow \dim K_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

$$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} = Im\mathcal{B}^r \rightarrow 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие}$$

$$\parallel$$

$$Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) = Im\mathcal{B}^r \xrightarrow{\text{либо}} \mathcal{B}^r = \emptyset - \text{противоречие мин. } m$$

$$Im\mathcal{B} =: BK$$

$$Z_0 = BK$$

$$Z_r = BK + K_r$$

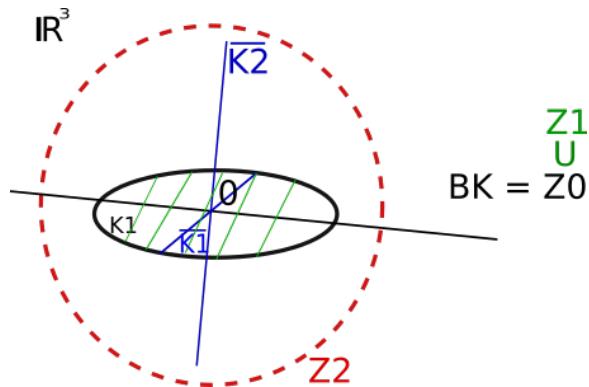
$$r = 1, \dots, m \quad (K_m = K) \quad B : K \rightarrow K$$

$$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_m = K$$

$$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$$

$$\overline{K_r} \subset K_r$$

$$K = \underbrace{BK \oplus \overline{K_1} \oplus \overline{K_2}}_{Z_1} \oplus \dots \oplus \overline{K_m}$$



$$\underset{dim2}{\parallel} \quad \underset{dim3}{\parallel} \quad K_1 \subset K_3$$

$$\underset{def\mathcal{B}}{\parallel} + \underset{dimIm\mathcal{B}}{\parallel} dimK_1 + dimBK = 3$$

$$Z_1 = BK + K_1 \supseteq Z_0$$

\cap

$$Z_2 = BK + K_2$$

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

Теорема 1. $0 \leq r \leq m - 1$

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

Доказательство.

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

$$\forall x \in K \quad x = \underset{\in \overline{K_1}}{x_1} + \underset{\in \overline{K_2}}{x_2} + \dots + \underset{\in \overline{K_m}}{x_m} + \underset{\in BK}{Bx^*}$$

$$1 \leq r \leq m - 1$$

$$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \dots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* [=]$$

$$B^r x_j = B^{r-j} B^j x_j = \underset{\emptyset}{\parallel}$$

$$1 \leq j \leq r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = \text{Ker } B^j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$$\boxed{B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^*}$$

Дизъюнктность?

$$* B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = 0$$

$$B^r (\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^*}_{y}) = 0$$

$$y \in \text{Ker } B^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r \oplus BK$$

$$\Rightarrow y = x_1 + x_2 + \dots + x_r + \underbrace{B}_{x_i \in \overline{K}_i} x^{**}$$

Однозначно представим

$$\begin{aligned} & \| \\ x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^* & \Rightarrow \boxed{x_i = 0} * \\ x_{r+i} \in \overline{K}_{r+i} & \quad \forall i = 1 \dots m \end{aligned}$$

↓ подставим

$$0 + 0 + \dots + 0 + B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow \text{дизъюнктн.}$$

□

Следствие 1.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus$$

$$\underbrace{\oplus B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^{m-2} \overline{K}_{m-1}}_{\text{---}} \oplus B^{m-2} \overline{K}_m \oplus B^{m-1} \overline{K}_m$$

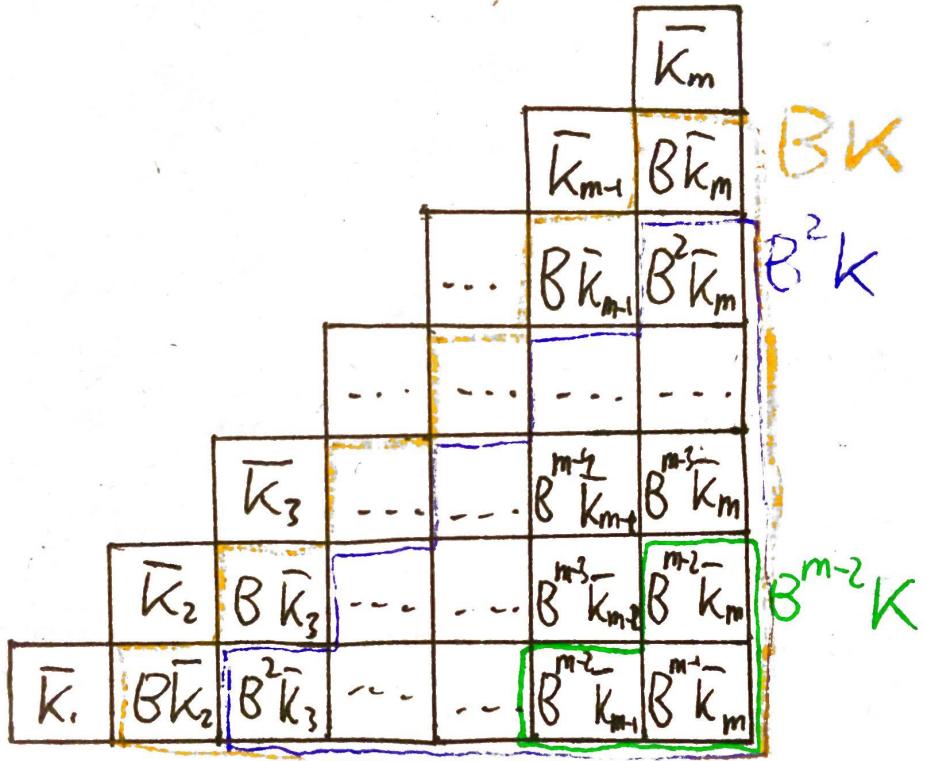
Доказательство.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus BK$$

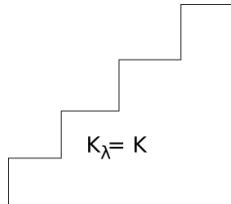
$$BK = \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^2 K$$

$$\underbrace{B^2 K = B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^2 \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^3 K$$

□



\overline{K}_j – Опорные подпространства



$$1 \leq r \leq m$$

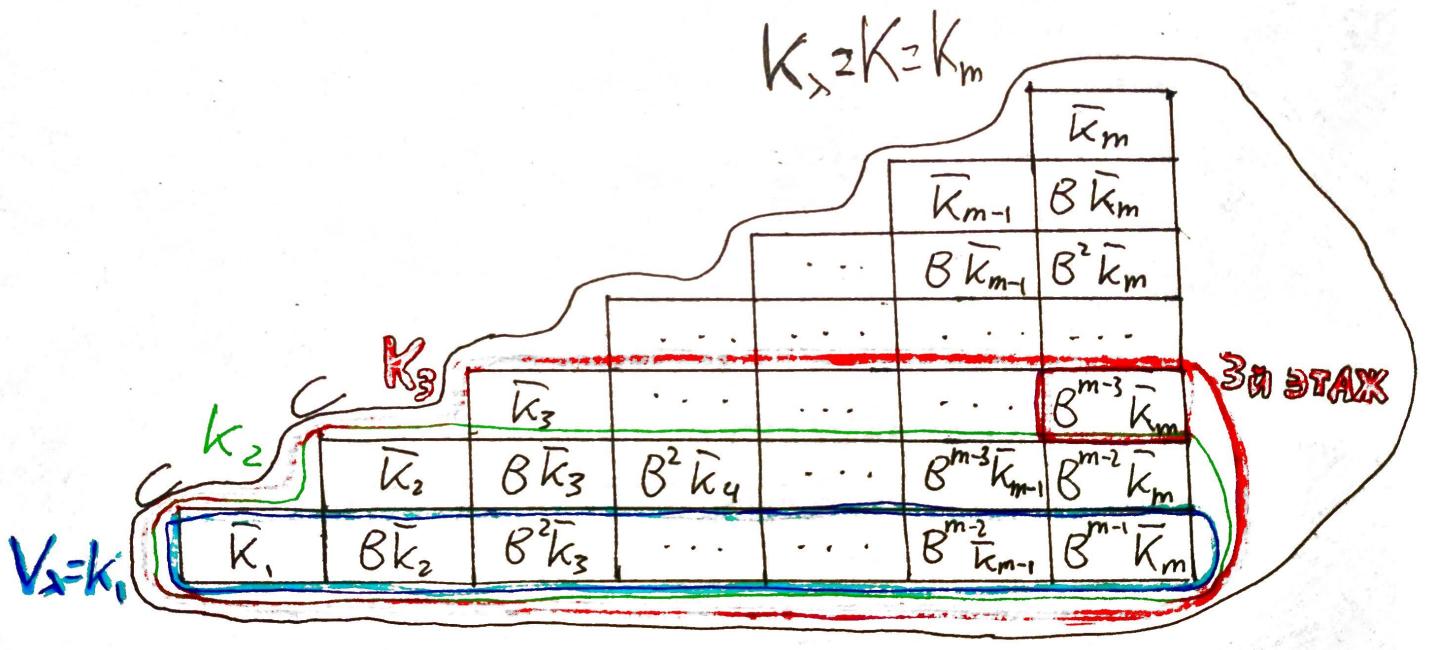
$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset \rightarrow \tau_r = \overline{K}_r \oplus B\overline{K}_r \oplus B^2\overline{K}_r \oplus \dots \oplus B^{r-1}\overline{K}_r$$

Башня высоты r . "Башня растет вниз"

"Основание" башни \equiv опорное подпространство \overline{K}_r

"Крыша" башни $\equiv B^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$

$$x \in B^{r-1}\overline{K}_r \quad \begin{array}{l} x = B^{r-1}y \\ y \in \overline{K}_r \subseteq K_r \end{array} \quad \frac{Bx = B^r y = 0}{x \in \text{Ker } B = V_\lambda}$$



Если $K_r = \{\emptyset\}$, то башня высоты r отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$$1 \leq l \leq m$$

$$\overline{K}_l, B\overline{K}_{l+1}, B^2\overline{K}_{l+2}, \dots, B^{m-1}\overline{K}_m \subset K_l = \text{Ker } B^l$$

— l -ые этажи соотв. башен

Покажем: $B^j \overline{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j \overline{K}_{l+j}) = (B^{l+j})_{\subset K_{l+j} = \text{Ker } B^{l+j}} = 0 \Rightarrow B^j \overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^m \tau_r$$

Теорема 2 (О размерности башни).

$\forall \tau_r$ любой этаж башни имеет одну и ту же размерность $d_r = \dim \overline{K}_r$ = ширина башни.

\overline{K}_r $B\overline{K}_r$ $B^2\overline{K}_r$ \dots $B^{r-1}\overline{K}_r$	$d_r = \dim \overline{K}_r$ = ширина башни
r высота \downarrow τ_r	

Доказательство.

$$B^j|_{\overline{K}_r} : \overline{K}_r \rightarrow B^j \overline{K}_r$$

$B^j_{\overline{K}_r}$ изоморфизм "?"

$$\text{Ker } B^j|_{\overline{K}_r} = \{\emptyset\}$$
 тривиально "?"

$$\Rightarrow \text{Изоморфизм} \Rightarrow \dim(\overline{K_r}) = \dim(B^j \overline{K_r}) = d_r$$

1

Следствие 1. $\sum_{r=1}^m d_r = \dim V_\lambda = \gamma(\lambda)$

$$\sum_{r=1}^m \underbrace{r \cdot d_r}_{\dim \tau_r} = \dim K_\lambda = \dim K = \alpha(\lambda)$$

Следствие 2 (Теорема Фробениуса).

$$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$$

$$(d_m = rgB^{r-1})$$

Доказательство.

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

$$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

$$d_2 + \dots + d_m = \rho_1 - \rho_2$$

$\downarrow =$

$$d_3 + \dots + d_m = \rho_2 - \rho_3$$

—

$$d_{m-2} + d_{m-1} + d_m = \rho_{m-3} - \rho_{m-2}$$

—

$$d_{m-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

—

$$d_m = \rho_{m-1}$$

↓ =

$$\rho_m = 0$$

$$d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$$

1

8 Тензоры

8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования.

Напоминание: $V^* = \{ f: V \rightarrow K \}$ сопряженное (дualное) пр-во к V

$V^* \cong K^n$ - пр-во n -мерных строк. (не естественный)

e_1, \dots, e_n базис V $\forall x \in V$ $x = x^i e_i$ $f(x) = x^i f(e_i) = x^i a_i \Leftrightarrow a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$

$\forall f \in V^*$ \downarrow $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n$ пр-во n -мерных строк базиса.

$\dim V^* = n = \dim V$

Определение: $w^i \in V \rightarrow K$ $\forall x \in V$ $w^i(x) = x^i$ из коор-т x относ. базиса e_1, \dots, e_n

одн. из, w^i лин. отобр. $\Rightarrow w^i \in V^*$

одн. из, $\forall i=1, \dots, n$ $w^i(e_j) = \delta_{ij}^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Кронекера

Теорема 1: w^1, \dots, w^n базис V^*

Док-во! т.к. $\dim V^* = n$, то достаточно проверить лин. незав. w^1, \dots, w^n .

$\exists a_i w^i = 0$, $a_i \in K$
 $\Rightarrow \forall x \in V$ $a_i w^i(x) = 0 \Rightarrow$ в частности, для $\forall j=1, \dots, n$ $a_i w^i(e_j) = 0 \Leftrightarrow a_j = 0$
 $\Leftrightarrow w^1, \dots, w^n$ лин. незав. \Rightarrow базис V^*

Следствие: $\forall f \in V^*$ коор-т $a_i = f(e_i)$ лин. из коор-т формул f в пр-ве V^* относ. базиса w^1, \dots, w^n

т.о. $V^* \cong K^n$ - коорд. изоморфизм. относ. базиса w^1, \dots, w^n

док-во! $\forall f \in V^*$ $\forall x \in V$ $f(x) = x^i a_i$, где $a_i = f(e_i)$
 т.к. $x^i = w^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i w^i(x)$ $\forall x \in V \Rightarrow f = a_i w^i \Leftrightarrow a = (a_1, \dots, a_n)$

def: коорд. ср-е w^1, \dots, w^n , порожденные базисом e_1, \dots, e_n пр-ва V
 т.е. из-за сопряженных (дualных) базисов пр-ва V^* к базису e_1, \dots, e_n пр-ва V

[?] Всякий ли базис V^* будет сопряженным к некоторому базису пр-ва V ?

Теорема 2! $\exists w''_1, w''_2, \dots, w''_n$ базис $V^* \Rightarrow \exists$ базис e'_1, e'_2, \dots, e'_n пр-ва V , т.е.
 базис w' будет сопряженным к базису e'

Док-во! $\exists e_1, \dots, e_n$ базис V , а w^1, \dots, w^n базис V^* , сопряжен. к e .

т.к. w и w' базисы пр-ва V^* , то $(w''_1 \dots w''_n) = (w^1 \dots w^n)^T$

т.к. в коорд. представлении элементов V^* соотв-т строкам, т.е. из-за перехода,
 то начальное равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} w''_1 \\ w''_2 \\ \vdots \\ w''_n \end{pmatrix} = T_{w \rightarrow w'}^T \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

обозначим $S := T_{w \rightarrow w'}^T$

м-ца S , очевидно, невырожденная $\Rightarrow \exists S^{-1} = T$

Определение "новый" базис в пр-ве V следующим равенством:

$$(e'_1 \dots e'_n) = (e_1 \dots e_n) T, \text{ т.о. } T = T_{e \rightarrow e'}$$

доказано, что w' будет сопряженным к полученному e' .

$S = (S_j^i)_{n \times n}$ номер строки
 \uparrow номер столбца, аналогично $T = (T_j^i)_{n \times n} \Rightarrow w'^i = S_k^i w^k$

$\forall x \in V : w'^i(x) = S_k^i w^k(x) = \underbrace{S_k^i x^k}_{(Sx)^i\text{-ая коор.}} = x'^i - \text{ая коор. в базисе } e' \Rightarrow w'^i - \text{координатная}$
 $\text{ср-ка базиса } e'$,
 $\text{т.е. } w' \text{ сопоставлена базису } e'$

t.k. $T = T_{e \rightarrow e'}$, т.о. $x' = T^{-1}x = Sx$

Следствие! e, e' базисы V , $T = T_{e \rightarrow e'}$, $S = T^{-1}$
 w, w' сопоставлены к e и e' , соответственно, базисы V^*

$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in V & x' = Sx = T^{-1}x \\ \forall f \in V^* & a' = af \end{cases}$, причем $Tw \rightarrow w' = S^T = (T^{-1})^T$

док-во: $Tw \rightarrow w' = S$, очевидно, из док-ва т-ни.

такое, очевидно, что $x' = T^{-1}x$.

остается показать, что $\forall f \in V^* a' = af$

t.k. $(w^1, \dots, w^n) = (w^1, \dots, w^n)Tw \rightarrow w'$, т.о. $(a')^T = T^{-1}Tw \rightarrow w' a^T \Rightarrow a' = a \underbrace{(T^T w \rightarrow w)}_S = a^T$

Замечание: очевидно, значение мин-формы f на элементе не зависит от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (T^i_k x'^k) \cdot (a'_m S^m_i) = \underbrace{(S^m_i T^i_k)}_{x = Tx'} x'^k a'_m = x'^k a'_m - \text{инвариантность} \\ \text{формы} \quad \text{относительно} \quad \text{выбора} \quad \text{базиса}$$

def: Векторные координаты которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с фундаментальным замене e на e' , т.е. с матрицей $T = T_{e \rightarrow e'}$, наз-ая ковариантными векторами или ковекторами \equiv элементы пр-ва V^*

Векторные координаты которых, при замене базиса e на e' , не изменяются по закону, противоположному т-не замены e на e' , т.е. с матрицей $T^{-1} = S$, наз-ая ко-ковариантными векторами или просто векторами \equiv элементы пр-ва V

Нормальны, или формы, такие называются просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во $(V^*)^* = V^{**} -$ двойное сопоставление к V

очевидно, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ (все тут пр-ва изоморфны)

Построение изоморфизма между V и V^{**} следующим образом:

$$\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**} : \forall f \in V^* \left["x"(f) = f(x) \right]$$

составим.

очевидно, $"x" : V^* \rightarrow K$

проверим ин-то $"x"$: $\forall \lambda \in K \quad \forall f_1, f_2 \in V^*$

$$"x"(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = "x"(f_1) + \lambda "x"(f_2)$$

\Rightarrow ин-то $\Rightarrow "x" \in (V^*)^*$

Теорема 3: соответствие $x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$

явн-ое вз-одн. и ин-и, т.е. изоморфизм. ($V \cong V^{**}$)

док-во: итак, $\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$

показем, что это отображение обладает св-вом ин-и: $\forall \lambda \in K, \forall x_1, x_2 \in V$.

$$(\lambda x_1 + x_2) \rightarrow " \lambda x_1 + x_2" \quad \forall f \in V^* \quad " \lambda x_1 + x_2 "(f) = f(\lambda x_1 + x_2) =$$

$$= \lambda f(x_1) + f(x_2) = "x_1"(f) + "x_2"(f) \Rightarrow " \lambda x_1 + x_2 " =$$

$= \lambda "x_1" + "x_2"$,

т.е. ин-то.

т.о. мы получаем вложение пр-ва V в пр-во V^{**} ,

единственное св-во ин-и.

В частности, $\exists e_1, \dots, e_n$ базис $V \rightarrow "e_1", \dots, "e_n" \in V^{**}$

$\Rightarrow \forall j=1, \dots, n \quad \forall f \in V^* \quad "e_j"(f) = a_j - \text{коор-та } f \text{ в пр-ве } V^* \text{ относительно базиса } w^j \text{ пр-ва } V^*$

$\Rightarrow "e_j"$ координ. ф-я и сопоставлен. базис к базису $w^j \Rightarrow$ по т-ни $"e_1", \dots, "e_n"$ базис V^{**}

\Rightarrow т.о. такое вложение пр-ва на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис. ■

Замечания:

1. изоморфisme, построенный в т.ч. с являемся составленным изоморфизмом пр-б V и V^{**} , т.к. это построение не зависит от выбора базиса.

2. Применим отображение α к пр-ву V и "х" пр-ва V^{**} ,
помимо письма $\alpha(f) := f(x)$
без кавыек.

$$\forall x \in V \quad \forall f \in V^* : \quad f(x) = x^i f(e_i) = w^i(x) a_i \quad f(e_i) = e_i(f) = a_i \\ x = x^i e_i \quad f = a_i w^i \quad || \quad x(f) = a_i x(w^i) = e_i(f) x^i \quad x(w^i) = w^i(x) = x^i$$

т.е. T-изз показывает, что на самом деле пр-ва V и V^* "правноправильные"
 V^* сопряж. к V , а V сопряж. к V^* . Базис w сопряжен к e , т.к. как
и базис e сопряжен к базису w .

$$3. \quad \forall x \in V \quad \forall f \in V^* \\ \uparrow \quad \downarrow \\ x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad a = (a_1 \dots a_n) \\ f(x) = x^i a_i = a \cdot x \stackrel{\text{"стока" "столбец"} \Rightarrow}{=} \underset{\text{T.k.}}{e_j(f)} = \delta_j^i \\ x(f) \quad || \quad e_j(w^i) \\ \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E}$$

Пример:

$$1) \quad \mathbb{R}^3 : \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{.. линейн. сопряж. базис } w^1, w^2, w^3 \\ w^i \leftrightarrow (a_1^i \ a_2^i \ a_3^i) = a^i \quad \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} (e_1 e_2 e_3) = E \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_B = E \\ \Rightarrow A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{matrix}$$

2)

$$V = \bigoplus V_\lambda \quad P_\lambda : V \rightarrow V_\lambda \quad \sum_\lambda P_\lambda = E \quad P_\lambda P_\mu = 0$$

$$P_{\lambda^2} = P_\lambda$$

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n) \rightarrow \text{построение } w^1, \dots, w^n \text{ сопряж. к } v_1, \dots, v_n$$

$$\Rightarrow \forall x \in V : x = \sum_\lambda x_\lambda = x^i v_i = w^i(x) v_i$$

$$\Rightarrow P_\lambda x = x_\lambda = \sum_{v_k \in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k \in V_\lambda} w^k(x) v_k$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1 \quad \alpha(\lambda_1) = 1 = j(\lambda_1) \quad V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$\lambda_2 = -3 \quad \alpha(\lambda_2) = 2 = j(\lambda_2)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = v_2, v_3$$

построение сопряж. базис! (см. пример 1)

$$w^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w^i(x) = (a_1^i \ a_2^i \ a_3^i) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad i=1,2,3$$

$$P_{\lambda_1}(x) = w^1(x) \cdot v_1 = \left(-\frac{x^1+x^2}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ \frac{x^1+x^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda_2}(x) = w^2(x) \cdot v_2 + w^3(x) \cdot v_3 = \frac{x^1+x^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1+x^2}{2} \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{A^2 = A}$$

8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейное пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейное пр-во тензоров.

V лин. пр-во над полем K (\mathbb{R}, \mathbb{C})

V^* сопряженное пр-во; $\dim V = \dim V^* = n$

def: (1^{oe} def тензора) тензором α типа (p, q) (p -раз ковариантные, q -раз контравариантные) наз-ся линейная функция f : $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$

$$V^p = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз.}}$$

$$(V^*)^q = \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз.}}$$

тензор $\alpha \equiv f$ линейн. ф-ци.

линейная \equiv линейная по каждому аргументу.

p и q - валентности тензора

$r = (p+q)$ - ранг или полнота валентности тензора.

def: Тензор α типа $(p, 0)$, т.е. $f: V^p \rightarrow K$ наз-т ковариантные тензоры валентности p почили.

Тензор α типа $(0, q)$, т.е. $f: (V^*)^q \rightarrow K$ наз-т контравариантные тензоры валентности q почили.

Если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то говорят о тензоре смешанного типа.

Если $r=0$, то тензор типа $(0, 0)$ \equiv скаляр $\in K$

Далее, определены операции "+" и " $\cdot \lambda$ " для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на основе и то же наядре аргументов.

Определение: \mathbb{O} : $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$, т.е. $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad \mathbb{O}(\xi_1, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = 0$

и $-d$, т.е. $-f: V^p \times V^q \rightarrow K$, т.е. $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad -f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = -1 \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$

$$\Rightarrow -f + f = \mathbb{O} = f + (-f)$$

T.O. Выпиши $1^0 - 8^0$ аксиомы лин. пр-ва (урп.)

def: $T_{(p,q)}$ - лин. пр-во тензоров типа (p,q)

ξ_1, \dots, ξ_p базис V

w^1, \dots, w^n базис V^* , сопряженный к

$\xi_k \in V, \quad k=1, \dots, p$
вектор (контравариантный)

$\xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi'_k \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$ - коорд-ты ξ_k относ-но базиса e

$\eta^m \in V^*, \quad m=1, \dots, q$
коекектор (ковариантный)

$\eta^m = \eta^m_{i_m} w^{i_m} \leftrightarrow (\eta^m_1, \dots, \eta^m_n)$ - коорд-ты η^m относ-но базиса w

$d \equiv f$ линейн. ф-ция \Rightarrow

$\boxed{\begin{aligned} &f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q}) \end{aligned}} \quad (1)$

$\boxed{\begin{aligned} &d \in T_{(p,q)} \quad \boxed{d \in T_{(p,q)}} \quad d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q}) \end{aligned}} \quad (2)$ координаты (коэффициенты) тензора d относ-но базисов e и w

Т.о, очевидно, значение понятий ф-ии f (а значит и тензора d), полностью определяется её значениями на бесконечных p -мерах базисных векторов e_j и q -мерах базисных коекекторов w^i .

$$\boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q}} \quad (1')$$

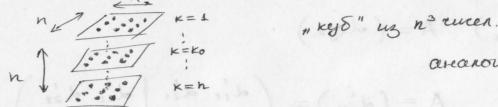
def: $S = (p+q)$ - шерох матрицы порядка n наз-ся ли-бо элеменитов, заполненных двумя типами индексов: верхних i_1, \dots, i_q и нижних j_1, \dots, j_p , при этом все индексы пробегают значения от 1 до n .

$$\boxed{A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &S = (p+q) - \text{шерох матрица порядка } n \text{ содержит } n^{p+q} = n^S \text{ элеменитов.} \\ &\quad \begin{matrix} i_1 = 1, \dots, n \\ i_2 = 1, \dots, n \\ \vdots \\ i_q = 1, \dots, n \end{matrix} \quad \begin{matrix} j_1 = 1, \dots, p \\ j_2 = 1, \dots, p \\ \vdots \\ j_p = 1, \dots, p \end{matrix} \quad \begin{matrix} m = 1, \dots, q \\ n = 1, \dots, q \end{matrix} \end{aligned}}$$

Пример: 1) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $A = (a_{ij}^i)_{n \times n}$ $A = (a^{(ij)})_{n \times n}$
глумерные и-зот порядка n (n^2 элементов)

2) $A = \left(\omega_{jk}^i \right)_{n \times n \times n}$ 3-хмерная м-ва порядка n
фиксируем $k = k_0$ \rightarrow получаем $(d_{jk_0}^i)$ - обычная двумерная м-ва.



аналогично, 4-х мерная и т.д - упражнение из 12
3-х мерных и т.д.

T. o. $\forall \alpha \in T(p, q) \rightarrow A(p+q)$ - первая и-я компонент α

Верно и обратное $A(p+q)$ — первая строка в A — плюсит. p -го и q -го формулами (1)(2), где p, q — некоторые числа. Так

T.O. получаем $d \in T(p,q) \iff A(p,q)$ мерн. и изв.
изобр. корректн.

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующих компонент их матриц, т.е. наше вы-одн. соответствие подаёт св.-вые лин-ти, т.е. есть-ся изоморфизмом

$$\left\{ T_{(p,q)} \cong A = (d_{j_p}^{i_1 \dots i_q}) \cong K^{n^{p+q}} \right\} \Rightarrow \left\{ \dim T_{(p,q)} = n^{p+q} \right\}$$

Соглашение о порядке записи эт-тов именем матричной
матрицы (т.е. матрицы тензора)

общее правило: первый шага всегда верхний левый индекс, далее по верхней строке, а затем по низней:

$$\cdot \exists n = 2$$

$$x=2 \quad \text{воздействие} \quad \text{вариантов матриц:} \quad A = (d_{ij}^i) \quad A = (d^{ij}) \quad A = (d_{ij}) \quad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

1^{ий} индекс - всегда строка
2^{ой} индекс - всегда столбец.

$$A = (d_{ij}^i) = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} \quad A = (d^{ij}) = \begin{pmatrix} d^{11} & d^{12} \\ d^{21} & d^{22} \end{pmatrix}$$

$$x = 3 \quad A = (\alpha^{ijk}) \quad A = (\alpha_x^{ij}) \quad A = (\alpha_{jk}^i) \quad A = (\alpha_{ijk})$$

1^й индекс - begin строка

200^й кнедекс - Beerga сондээг.

3^и индекс - всегда "спой"

$$A = (\lambda_{j,k}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_{11}^1 & \lambda_{21}^1 & \lambda_{12}^1 & \lambda_{22}^1 \\ \lambda_{21}^2 & \lambda_{22}^2 & \lambda_{12}^2 & \lambda_{22}^2 \\ \hline & & 1 \text{ cột} & 2 \text{ cột} \end{array} \right)$$

$\tau = 4$

- 1^й индекс - *всегда строка*
- 2^{ой} индекс - *всегда столбец*.
- 3^{ий} индекс - *всегда строк*
- 4^{ий} индекс - *всегда "серение"*

$$A = \left(d_{km}^{ij} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{12} \end{pmatrix} \quad \text{1 строка} = \left(\frac{A_{11}}{A_{21}} \mid \frac{A_{12}}{A_{22}} \right)$$

$d_{11}^{11} \quad d_{11}^{12}$
 $d_{12}^{11} \quad d_{12}^{12}$
 $d_{21}^{21} \quad d_{21}^{22}$
 $d_{22}^{21} \quad d_{22}^{22}$

$d_{11}^{11} \quad d_{11}^{12}$
 $d_{12}^{11} \quad d_{12}^{12}$
 $d_{21}^{21} \quad d_{21}^{22}$
 $d_{22}^{21} \quad d_{22}^{22}$

$d_{21}^{11} \quad d_{21}^{12}$
 $d_{22}^{11} \quad d_{22}^{12}$
 $d_{21}^{21} \quad d_{21}^{22}$
 $d_{22}^{21} \quad d_{22}^{22}$

$A_{21} \quad 1 \text{ сечение}$
 $A_{22} \quad 2 \text{ сечение}$

Тренировки:

1) $f \in V^*$ $f - (1, 0)$ мензор. ($+$ ныс көвариантын)

$$f: V \rightarrow K$$

with.

$$\forall \xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i \quad f(\xi) = \xi^i \frac{f(e_i)}{e_i} \iff A = (a_{ij}) \text{ une matrice diag.}$$

$$2) \quad V_3 - 3 \text{ избр. вектора. } f: V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3 \quad f(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi \quad \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$$

Очевидно, f - билinearная пр-я - множор типа $(2,0)$, $f \in T_{(2,0)}$

$$e_1 = i, \quad e_2 = j, \quad e_3 = k$$

$$\begin{aligned} f(\bar{a}, \bar{b}) &= a_{ij}^i b_{kj}^j & \bar{a} = a^i e_i, \bar{b} = b^j e_j, a_{ij} = f(e_i, e_j) = \delta_{ij} \\ \Leftrightarrow f &\Leftrightarrow A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \\ \Leftrightarrow f(\bar{a}, \bar{b}) &= a^T A b \quad \Rightarrow \text{в нашем случае } f(\bar{a}, \bar{b}) = a^T b = \sum_{i=1}^3 a^i b^i \quad (\text{тк. оба индекса коверху пишем знаком } \Sigma) \end{aligned}$$

Как изменится вид тензора, если выбрать другой - новый - базис впр-ве V ?

e_1, \dots, e_n базис впр-ва V $T = T_{e \rightarrow e}$, $S = T^{-1} = T_{w \rightarrow w}$, $\forall x \in V \quad x = \sum x^i e_i \quad x^i = t_{ji}^i x^j$

w^1, \dots, w^n базис впр-ва V^* , сопоставл. к e_1, \dots, e_n , коорд-но $\forall a \in V^* \quad a = a^i S^i \quad a = a_j w^j = a_j^i w^{i,j}$

$$\Rightarrow \forall \bar{s}_k \in V \quad \bar{s}_k^{jk} = t_{rk}^{jk} \bar{s}_k^{rj} \quad j_k = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, p$$

$$\forall \eta^m \in V^* \quad \eta^m = S_{im}^{um} \eta^{im} \quad i_m = 1, \dots, n \\ m = 1, \dots, q$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} f(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_p, \eta^1, \dots, \eta^q) &= \left[\begin{array}{cccccc} a_{11}^{11} \dots a_{1p}^{1p} & t_{11}^{11} & \dots & t_{1p}^{1p} & S_{11}^{11} \dots S_{1q}^{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1}^{q1} \dots a_{qp}^{qp} & t_{q1}^{q1} & \dots & t_{qp}^{qp} & S_{q1}^{q1} \dots S_{qq}^{q1} \end{array} \right] \bar{s}_1^{11} \dots \bar{s}_p^{1p} \eta^{11} \dots \eta^{1q} = \dots \end{aligned}$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенным
верху и внизу, происходит суммирование ($\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p$)
 \Rightarrow в результате просуммирован, получим
новую компоненту со штриховаными индексами.

$$= d^{11 \dots 1q} \quad \bar{s}_1^{11} \dots \bar{s}_p^{1p} \eta^{11} \dots \eta^{1q}, \text{ т.о. получим снова тензор типа } (p, q)$$

Т.о., при замене базиса тензор типа (p, q) остается тензором того же типа, а его координаты меняются по следующему закону:

$$d'^{11 \dots 1q} = d^{11 \dots 1q} t_{11}^{11} \dots t_{1p}^{1p} S_{11}^{11} \dots S_{1q}^{1q}$$

коорд-ны тензора в "новых" базисах $\underbrace{\text{коорд-ны тензора}}_{\text{в старых базисах}}$ $\underbrace{\text{коорд-ны тензора}}_{e, w}$

верхние индексы $\underbrace{1 \dots 1q}_{(p, q)}$
преобразуются снизу S , т.е.
по контравариантному закону,
поскольку наз. как контравариантные
индексы, а тензор
q-раз контравариантный

Соотв-но, изменение индексов $\underbrace{1 \dots 1q}_{(p, q)}$ преобразуется с шагом T , т.е.
по ковариантному закону, поэтому наз. как ковариантные индексы, а
тензор p раз ковариантный.

Пример: 1) тензор типа $(0, 0) \equiv \lambda \in K$, очевидно, не меняется при замене базиса,
т.е. инвариантен.

2). $A = (a_{ij}^i)_{nn}$ и-ца тензора $\lambda \in T_{(0, 0)}$
 $a_{im}^k = a_{ij}^i t_{jm}^k s_i^k \Leftrightarrow A' = SAT = T^{-1}AT$ получаем ф-лу замены и-ца
матр. опр. при замене базиса.

3) $\forall f \in V^*$ тензор типа $(1, 0) \Leftrightarrow A = (a_i)_{nn} = a \in K_n$ $a'_j = a_i t_j^i \Leftrightarrow a' = aT$ $a_i = f(e_i)$
 $\forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i = x^i a'_j = a_i \underbrace{t_j^i x^j}_{x^i} = a_i x^i$
 $V \cong V^{**}$ $x(f) \quad x: V^* \rightarrow K$ тензор типа $(0, 1)$ $x'^j = S_i^j x^i \Leftrightarrow x' = Sx \quad x^i = x(S^{-1})$
 $a_i x^i = a'_j x'^j = x^i \underbrace{[S_i^j a'_j]}_{a'_j} = x^i a_i$ контравариант.

4) $\lambda \in T_{(1, 2)} \Rightarrow A = (\lambda_{ij}^k)$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Найти λ'^{121}
 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda'^{121} = \lambda_{ij}^k t_j^i S_i^k \underbrace{s^2 s^1}_{\text{2-я строка } S}$

$\exists K$ фиксир. $\lambda_{ik}^j S_i^2 S_j^1 \Leftrightarrow S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow (S^2 A_k (S^1)^T) t_2^k = (2 - 17 - 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -19$
 λ'^{121}

Вернемся к def тензора. Тензор был определен наше, как полилинейская форма и наше def не зависит от выбора базиса. В пр-ве V, Но, при этом, тензор оказался согласован с базисом, т.е. после замены базиса тензор остается тензором, причем того же типа. Для такого рода объектов иск-я термин геометрический объект. Поэтому сущ-м другого подход к def. тензора.

def: (2^{oe} def тензора) Тензором α типа (p, q) наз-я геометрический объект на пр-ве V , который описывается A ($p+q$)-мерной матрицей элементов типа K размерности $n \times n$ в V . При этом, каковы бы не были базисы e и e' в пр-ве V и соответствующие им сопряженные базисы V^* и w^* , соответствующие компоненты матриц A и A' должны быть связаны формулой (3).

Операции "+" и " $\cdot \lambda$ " между двумя тензорами одного типа, однозначно, оп-я в этом случае как операции "+" и " $\cdot \lambda$ " соответствующих компонент тензоров. При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут уд-ть пр-е (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр структура будет поддерживаться тензором того же типа, что и исходные.

Действительно, $\forall \lambda \in K, \alpha, \beta \in T(p, q)$

$$(\lambda \alpha + \beta)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} := \lambda \alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$$

$$\begin{aligned} & (\lambda \alpha + \beta)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1 \dots j_p}_{z_1 \dots z_p} s^{u_1 \dots u_p}_{z_1 \dots z_p} = (\lambda \alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}) t^{j_1 \dots j_p}_{z_1 \dots z_p} s^{u_1 \dots u_p}_{z_1 \dots z_p} = \\ & \stackrel{+k}{=} \lambda \alpha^{i_1 \dots i_p}_{z_1 \dots z_p} t^{j_1 \dots j_p}_{z_1 \dots z_p} s^{u_1 \dots u_p}_{z_1 \dots z_p} + \beta^{i_1 \dots i_p}_{z_1 \dots z_p} t^{j_1 \dots j_p}_{z_1 \dots z_p} s^{u_1 \dots u_p}_{z_1 \dots z_p} = (\lambda \alpha' + \beta')^{i_1 \dots i_p}_{z_1 \dots z_p} = (\lambda \alpha + \beta)^{i_1 \dots i_p}_{z_1 \dots z_p} \end{aligned}$$

Т.о. мн. операциям на пр-ве посвящ. пр-и соответствуют мн. опер. над многочленами и-дали с сохранением сб-ва (3). Поэтому def 1 \Leftrightarrow def 2.

В зависимости от поставленной задачи, это будет иск-м как 1^{oe}, так и 2^{oe} def.

8.3 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.3 Произведение тензоров. Базисы пр-ва тензоров. Операции свертки.

Def: $\alpha \in T_{(p_1, q_1)}, \beta \in T_{(p_2, q_2)}$

Произведение тензоров α и β наз-ся тензором $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+p_2, q_1+q_2)}$, компоненты которого определяются следующими равенствами:

Корректность def: надо проверить выполнение об-ва (3) для новой многомерной ш-цы μ .

$$\begin{aligned} \gamma^{i_1 \dots i_{p_1} k_1 \dots k_{p_2}} &= \alpha^{i_1 \dots i_{p_1}} \cdot \beta^{k_1 \dots k_{p_2}} = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{p_1}} t^{i_1 \dots i_{p_1}}}_{\text{для } \gamma \in T_{(p_1, p_1)}} \cdot \underbrace{\beta^{k_1 \dots k_{p_2}} t^{k_1 \dots k_{p_2}}}_{\text{для } \beta \text{-многомерн}} \\ &= \gamma^{i_1 \dots i_{p_1} k_1 \dots k_{p_2}} + t^{i_1 \dots i_{p_1}} t^{k_1 \dots k_{p_2}} S_{i_1 \dots i_{p_1}}^{q_1} S_{k_1 \dots k_{p_2}}^{q_2} \Rightarrow \text{об-в (3) выполнено} \Rightarrow \gamma \in T_{(p_1+p_2, q_1+q_2)} \end{aligned}$$

Замечание: $\forall \lambda \in K$ — тензор типа $(0,0)$ $\Rightarrow \lambda \alpha = \alpha \otimes \lambda = \lambda \otimes \alpha$

Тензорное произведение, очевидно, ассоциативно, но не коммутативно! $\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha$

Пример: $\alpha, \beta \in T_{(1,0)}$ $\alpha = (1 \ 0 \ -1) \quad \beta = (0 \ 3 \ 5)$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha \otimes \beta = (\alpha, \beta) \iff \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_1 & \gamma_2 &= \beta \otimes \alpha = (\beta, \alpha) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2 \\ \gamma_1 &\in T_{(2,0)} & \gamma_2 &\in T_{(2,0)} \end{aligned}$$

$\gamma_1 \neq \gamma_2 \quad A_1 = A_2^T$

Лемма: 1) $\alpha \in T_{(p,0)}, \beta \in T_{(q,q)} \Rightarrow \alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$
 2) \otimes гиперкоммутативно

Вспомним $\#$ определение тензора произведения тензоров. Будем смотреть производящие функции, определяющие эти тензоры.

$\alpha \leftrightarrow f: V^p \times (V^*)^{q_1} \rightarrow K$

$\beta \leftrightarrow g: V^p \times (V^*)^{q_2} \rightarrow K$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow f \cdot g: V^{p+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \rightarrow K \\ \forall \xi_1, \dots, \xi_{p_2}, \eta_1, \dots, \eta_{p_2} \in V \quad \forall \theta_1^1, \dots, \theta_1^{q_1}, \theta_2^1, \dots, \theta_2^{q_2} \in V^* \end{cases}$$

$$f \cdot g(\xi_1, \dots, \xi_{p_2}, \eta_1^1, \dots, \eta_{p_2}^1, \theta_1^1, \dots, \theta_2^{q_2}) = \gamma^{i_1 \dots i_{p_1} k_1 \dots k_{p_2}} \xi_1^{i_1} \dots \xi_{p_2}^{i_{p_2}} \eta_1^1 \dots \eta_{p_2}^1 \theta_1^1 \dots \theta_2^{q_2} =$$

поголовное выражение компонент тензора

компоненты тензоров α и β

Взаимосвязь, $\forall f \in T_{(1,0)}, j = 1, \dots, p$ $f^j \otimes f^j \otimes \dots \otimes f^j \in T_{(p,0)}$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad [f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = f^1(\xi_1) \cdot f^2(\xi_2) \dots f^p(\xi_p)]$$

$$\forall g_j \in T_{(0,1)} \quad j = 1, \dots, q \quad g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q \in T_{(0,q)}$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad [g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q(\eta^1, \dots, \eta^q) = g_1(\eta^1) \cdot g_2(\eta^2) \dots g_q(\eta^q)]$$

$$\Rightarrow [f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \dots f^p(\xi_p) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_q(\eta^q)] \quad (4)$$

Проверка: ($\#$ базис пр-ва $T_{(p,q)}$)

если, например V, w^1, \dots, w^n базис V^* , например в

Свойство тензоров вида $w^1 \otimes \dots \otimes w^n \otimes e_1 \otimes \dots \otimes e_q$

является базисом пр-ва $T_{(p,q)}$

по всем возможным наборам индексов $(i_1, \dots, i_{p_1}, j_1, \dots, j_{p_2}, k_1, \dots, k_{q_1}, l_1, \dots, l_{q_2})$, где $i_k = 1, \dots, n, j_m = 1, \dots, n$

Док. 60: очевидно, $\omega^i \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \in T_{(p,q)}$, т.к. $\omega^i: V \rightarrow K$, а $e_L: V^* \rightarrow K$
корондансица! $\forall \lambda \in T_{(p,q)} \leftrightarrow \text{л.п.н.н.ф.з.}$

$$\begin{aligned} & \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \lambda^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_1^{j_1} \eta_2^{j_2} \dots \eta_q^{j_q} = cb60(q) = \\ & = \lambda^{i_1 \dots i_q} \omega^i \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) \\ & \Rightarrow \boxed{\lambda = \lambda^{i_1 \dots i_q} \omega^i \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}} \Rightarrow \text{поправ.} \end{aligned}$$

лич. независимость! $\exists \quad \text{л.п.н.н.ф.з.} = \lambda^{i_1 \dots i_q} \omega^i \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

пунктами нулевой тензор к набору векторов $e_{m_1}, \dots, e_{m_p}, \omega^{k_1}, \dots, \omega^{k_q}$

$$0 = \lambda^{i_1 \dots i_q} \omega^i(e_{m_1}) \dots \omega^i(e_{m_p}) \cdot e_{i_1}(\omega^{k_1}) \dots e_{i_q}(\omega^{k_q}) = \lambda^{i_1 \dots i_q} \delta_{m_1}^{i_1} \delta_{m_2}^{i_2} \dots \delta_{m_p}^{i_p} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_q}^{k_q} = \lambda^{k_1 \dots k_q} \quad \text{символы произв.}$$

верно для любого набора индексов $m_1, \dots, m_p, k_1, \dots, k_q \Rightarrow$ нулевая комбинация тригонометрических

Пример: $\lambda = (\omega^1 - 2\omega^2 + \omega^3) \otimes (3\omega^1 + \omega^2) \otimes e_1 + (\omega^2 + 2\omega^3) \otimes \omega^1 \otimes e_3$ лич. незав.

- напишите выражение λ на векторах $\xi_1 = 2e_1 - e_2, \xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3, \eta^1 = \omega^1 - \omega^2$
- запишите матричный тензор.

$$1) \quad \lambda(\xi_1, \xi_2, \eta^1) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2) \cdot \eta^1_1 + (\xi_1^2 + 2\xi_1^3) \cdot \xi_2^1 \cdot \eta^1_3 = (2+2+0)(3+1+2) \cdot 1 + (-1+2+0) \cdot 1 \cdot (-1) = 21$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \lambda \in T_{(2,1)} \Rightarrow \lambda = (\lambda^{i_1 \dots i_2}) \quad \begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} K=1 \\ K=2 \\ K=3 \end{array}$$

Док. 60: очевидно, $\omega^i \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \in T_{(p,q)}$, т.к. $\omega^i: V \rightarrow K$, а $e_L: V^* \rightarrow K$
корондансица! $\forall \lambda \in T_{(p,q)} \leftrightarrow \text{л.п.н.н.ф.з.}$

$$\begin{aligned} & \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \lambda^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_1^{j_1} \eta_2^{j_2} \dots \eta_q^{j_q} = cb60(q) = \\ & = \lambda^{i_1 \dots i_q} \omega^i \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) \\ & \Rightarrow \boxed{\lambda = \lambda^{i_1 \dots i_q} \omega^i \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}} \Rightarrow \text{поправ.} \end{aligned}$$

лич. независимость! $\exists \quad \text{л.п.н.н.ф.з.} = \lambda^{i_1 \dots i_q} \omega^i \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

пунктами нулевой тензор к набору векторов $e_{m_1}, \dots, e_{m_p}, \omega^{k_1}, \dots, \omega^{k_q}$

$$0 = \lambda^{i_1 \dots i_q} \omega^i(e_{m_1}) \dots \omega^i(e_{m_p}) \cdot e_{i_1}(\omega^{k_1}) \dots e_{i_q}(\omega^{k_q}) = \lambda^{i_1 \dots i_q} \delta_{m_1}^{i_1} \delta_{m_2}^{i_2} \dots \delta_{m_p}^{i_p} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_q}^{k_q} = \lambda^{k_1 \dots k_q} \quad \text{символы произв.}$$

верно для любого набора индексов $m_1, \dots, m_p, k_1, \dots, k_q \Rightarrow$ нулевая комбинация тригонометрических

Пример: $\lambda = (\omega^1 - 2\omega^2 + \omega^3) \otimes (3\omega^1 + \omega^2) \otimes e_1 + (\omega^2 + 2\omega^3) \otimes \omega^1 \otimes e_3$ лич. незав.

- напишите выражение λ на векторах $\xi_1 = 2e_1 - e_2, \xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3, \eta^1 = \omega^1 - \omega^2$
- запишите матричный тензор.

$$1) \quad \lambda(\xi_1, \xi_2, \eta^1) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2) \cdot \eta^1_1 + (\xi_1^2 + 2\xi_1^3) \cdot \xi_2^1 \cdot \eta^1_3 = (2+2+0)(3+1+2) \cdot 1 + (-1+2+0) \cdot 1 \cdot (-1) = 21$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \lambda \in T_{(2,1)} \Rightarrow \lambda = (\lambda^{i_1 \dots i_2}) \quad \begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} K=1 \\ K=2 \\ K=3 \end{array}$$

def:] p,q > 1 л.ет(рф). Приведем один верхний индекс единичной матрице. Тогда, по правилу Эйнштейна, мы должны будем просуммировать соответствующие компоненты. В результате, получим систему званий, у которых число верхних и низких будет на единицу меньше.

$$\begin{array}{c} \text{emeymabigen} \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ \text{z. i. q.} \end{array} = \begin{array}{c} \text{reungere} \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ \text{z. d. i. q.} \end{array}$$

β

$$\begin{array}{c} \text{d. dm. j. p.} \\ \downarrow \\ \text{emeymabigen} \end{array} = \begin{array}{c} \text{z. x. j. p.} \\ \downarrow \\ \text{m-i ungere} \end{array}$$

- она оперативна наряду с верхней менюкой

$$\alpha \in T(p,q) \rightsquigarrow \beta \in T(p-s, q-t)$$

корректность определения? надо проверить выполнение обеих

$$\begin{aligned} \beta^{i_1 \dots i_n \dots i_p} &= d^{i_1 \dots i_n \dots i_p} = d^{i_1 \dots i_n \dots i_p} t_{j_1 \dots j_m \dots j_p}^{j_1 \dots j_m \dots j_p} t_{k_1 \dots k_m \dots k_p}^{k_1 \dots k_m \dots k_p} S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} S_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} = \\ &= d^{i_1 \dots i_n \dots i_p} t_{j_1 \dots j_m \dots j_p}^{j_1 \dots j_m \dots j_p} S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} S_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} \Rightarrow \text{Born-NO (3)} \quad \stackrel{(TS)_{i_k}^{j_m}}{=} \delta_{i_k}^{j_m} = \begin{cases} 0, & i_k \neq j_m \\ 1, & i_k = j_m \end{cases} \\ &\quad \Rightarrow \beta \text{-tergede tura } (\rho = q - 1) \end{aligned}$$

Занятие

- 1) Секретка может проводиться по нескольким индексам.
 - 2) Если в результате секретки получается менюра выше 10,0 (не сканер), то можно секретку наз- ся полной.

Император

- 1) $a \in T_{(4,1)} \Leftrightarrow A = (a_{ij}^i)_{n \times n}$ $\beta = (a_{ij}^i) = t \cdot A \in K$ \Rightarrow норма обертки; $\beta \in T_{(4,0)}$ и обертка
около α замкнута

2) $f \in T_{(1,0)}$ - квадратор $\Leftrightarrow a = (a_{11} \dots a_n)$ $\star = f \otimes x = (a_{ij} x^i) = (a_{ij}^i)$ $\Rightarrow \beta = (a_{ij}^i) = a_i x^i = f(x)$
 $x \in T_{(0,1)}$ - квадрат $\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ обертка \Rightarrow β $\in T_{(0,0)}$ и обертка f
около x

$$3) \quad d \in T_{(i,i)} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} d & \\ & i \end{pmatrix}$$

$$f^i = \alpha_i \otimes x^i = (\alpha_j^i x^k) = (\mu_j^{ik}) \in T_{(i,2)}$$

$$\mathbb{P} = (\mathbb{M}^{i,j}) = (\omega^i x^j) = (\mathbb{B}^i), \quad \iff \quad i = A.$$

сварка

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\beta} = \left(y_j^{j_k} \right) = \left(d_j^j x^k \right) = \left(\tilde{\beta}^k \right) \Leftrightarrow \tilde{e} = (t_L A) \cdot x$$

обратно

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \tilde{p}^2 \\ \tilde{p} \\ \tilde{n} \end{pmatrix}$$

$$4) \quad d \in T^{(i,i)} \quad d_{j,j}^{(i,i)} = d_j^i + t_j^i S_i^{ii} \text{ - обработка по } 2^{\text{му}} \text{ индексам тензора } d @ T @ S = f = (d_j^i t_m^k S_k^{ii}) = (d_{j,m}^{ikl})$$

$$\Rightarrow d_{j,j}^{(i,i)} = f_{j,j,i,i} \text{ - обработка.}$$

8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.

8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.

def: $\exists p \geq 2, d \in T(p,p) \quad \exists \sigma = (\sigma_{ij}, \sigma_p)$ перестановка индексов от d по σ .

(Напоминание) $\varphi: \{1,2,\dots,p\} \rightarrow \{1,2,\dots,p\}$ - подстановка
 б.з. образ. отобр. $\sigma_{ik} = \varphi(i), k=1,\dots,p$
 $\sigma = (\sigma_{ij}, \sigma_p) = (\varphi(i), \varphi(j), \dots, \varphi(p))$ - перестановка

$\beta = \sigma(d)$ - наз. ся тензором, полученным транспонированием тензора d по перестановке σ
 по нижним индексам, если $\boxed{\beta^{i_1\dots i_p} = d^{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(p)}}}$

Аналогично опр.-ся транспонирование по верхним индексам.

Замечание: для тензоров операции транспонирования опр.-ся только по одному индексу: либо по нижнему, либо по верхнему, в отличии от произвольной многомерной матрицы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

Корректность def: как и раньше надо проверить выполнение свойства (3), т.е. что $\beta \in T(p,p)$.
 Как известно, общая перестановка может быть получена конечным числом транспозиций. Поэтому, достаточно показать, что свойство (3) выполняется при транспонировании тензора по паре индексов:

$\boxed{\beta^{i_1\dots i_p} = d^{i_1\dots i_p}} \Rightarrow \boxed{\beta^{i'_1\dots i'_p} = d^{i'_1\dots i'_p}} = \boxed{\text{т.к. } d \in T(p,p)}$
 $= \boxed{\begin{matrix} d^{i_1\dots i_p} \\ \downarrow \text{обозн.} \\ t_{i_1}^{i_1} \dots t_{i_p}^{i_p} \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} t_{i'_1}^{i'_1} \dots t_{i'_p}^{i'_p} \\ \downarrow \text{обозн.} \\ S_{i'_1}^{i'_1} \dots S_{i'_p}^{i'_p} \end{matrix}} = \boxed{\beta^{i_1\dots i_p} \quad \begin{matrix} \leftarrow t_{i_1}^{i_1} \\ \leftarrow t_{i_2}^{i_2} \\ \vdots \\ \leftarrow t_{i_p}^{i_p} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow S_{i'_1}^{i'_1} \\ \leftarrow S_{i'_2}^{i'_2} \\ \vdots \\ \leftarrow S_{i'_p}^{i'_p} \end{matrix}} = \boxed{\text{так. } d \in T(p,p) \Rightarrow (3)}$

Как будет выглядеть транспонирование тензора, если обратно за определение тензора def.?

$d \in T(p,p) \iff d$ линиями, отобр. $\boxed{\beta = \sigma(d)}$ $\sigma = (\sigma_{ij}, \sigma_p)$

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \forall \eta^1, \dots, \eta^p \in V^*$ $\boxed{\beta(\xi_1, \dots, \xi_p; \eta^1, \dots, \eta^p) = \beta^{i_1\dots i_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^p_{i_p}} =$
 $= \boxed{d^{i_1\dots i_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^p_{i_p} = d(\xi_1, \dots, \xi_p; \eta^1, \dots, \eta^p)}$

Замечание: при транспонировании по нижним индексам, очевидно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспонирования по верхним индексам будет обладать теми же свойствами, что и определение транспонирования по нижним. Поэтому все результаты, которые мы получим для нижних индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

Пример: $d = (w^1 - 2w^2) \otimes w^3 \otimes (w^4 - w^5) + w^3 \otimes w^4 \otimes w^5 \quad (\Rightarrow d \in T(3,0) \Rightarrow (d_{ijk}))$

- найти $\beta = \sigma(d) \quad \sigma = (3,1,2)$, вычислить матрицу.
- найти значение β на векторах $\xi_1 = e_1 + e_2, \xi_2 = -e_2 - e_3, \xi_3 = e_1 + 2e_2$

1) $d = (d_{ijk}) \Rightarrow \beta = (d_{kji}) \quad \begin{matrix} i \leftrightarrow j \\ j \leftrightarrow k \\ k \leftrightarrow i \end{matrix}$ $\boxed{\begin{matrix} d_{ijk} = \beta_{kji} \\ \text{неверно!} \end{matrix}}$ (неверно)
 $\sigma = (3,1,2) \quad (\beta_{ijk}) \quad \text{действительные нули}$

$\beta_{ijk} = \beta_{jkl}l_{kj} = d_{j3}j_3 + d_{j2}j_2 = d_{j3}j_3$

2) вычислим и-и-ый d : $d_{131} = 1, d_{133} = -1, d_{233} = 1$
 $d_{132} = -2, d_{232} = 2, d_{333} = 2$ оставшиеся нули

$\Rightarrow \beta_{311} = 1, \beta_{331} = -1, \beta_{132} = 1, \beta_{312} = -2, \beta_{332} = 2$ оставшиеся нули

$\Rightarrow \boxed{\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2 en

иная перестановка \equiv конечное число транспозиций (т.е. транспонирование строк по паре индексов)

транспонирование индексированной матрицы по паре индексов $(i,j) \equiv$ транспонирование двумерных строк и-матрицы, получающихся фиксированием различных состояний всех индексов, кроме индексов (i,j) .

$$\beta_{ijk} = d_{kij}$$

$$d_{kij} \sim \tilde{d}_{ikj} \rightarrow \tilde{d}_{ijk} = \beta_{ijk}$$

за 2 транспозиции эта-т. симметрии в матрице на позиции (k,i,j) , должна переместиться на позицию (i,j,k)

$$d_{kij} \sim \tilde{d}_{ikj}$$

j не меняется, поэтому будем фиксировать различные значения $j=1,2,3$, т.е. извлекать из и-матрицы тензора двумерную и-матрицу, которую после единичной операции транспонирования нужно будет поменять обратно в тензор.

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{d}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

фиксируем $j \neq i \rightarrow$ фиксируем свой \sim какое-то свойство транспонирования

надо транспонировать

$\tilde{d}_{ikj} \rightarrow \tilde{d}_{ijk}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{не изменяя } i \Rightarrow \text{фиксировать } i=1,2,3 \Rightarrow \text{извлекаем двумерную и-матрицу} \Rightarrow \text{транспонируем} \\ \Rightarrow \text{поменяли обратно.} \end{array} \right.$

$i=1$ (1-я стр)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

поменяли обратно, на исходные позиции

$i=2$
(2-я стр)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$i=3$ (3-я стр)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) 1 cm.

$$\beta = \sigma(\alpha) \quad \sigma = (3, 1, 2)$$

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = (\underbrace{w^1(\xi_3)}_1 - 2w^2(\xi_2)) \cdot \underbrace{w^3(\xi_2)}_2 + w^1(\xi_2) \cdot (\underbrace{w^2(\xi_3)}_0 - w^3(\xi_2)) + w^2(\xi_3)w^3(\xi_2)w^1(\xi_2) = -2$$

2 cm

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \beta_{ijk} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k = \frac{\beta_{311}}{\xi_2^3} \frac{\beta_{212}}{\xi_1^2} \frac{\beta_{322}}{\xi_2^3} \frac{\beta_{232}}{\xi_1^2} = \frac{1 \cdot 0 \dots -2 \cdot 0 \dots -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \dots + 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2}{\xi_2^3 \xi_1^2 \xi_2^3 \xi_1^2} = -2$$

по определению транспонирования \Rightarrow лин. операция $\forall \lambda \in K \quad \forall d_{1,2} \in T(p,q) \quad \sigma(d_{1,2}) = \sigma(d_1) + \lambda \sigma(d_2)$

Кроме того, иная подстановка - это вз-одн. отображ. \Rightarrow обратные транспон. вз-одн.

\Rightarrow транспонирование - это изоморфизм на $T(p,q)$

транспонирование ассоциативно, но не коммутативно (!) (очевидно, определяется соотв. свойством перестановок)

$$\sigma, \tau, \theta \text{ перестановки } d \in T(p,q) \Rightarrow \boxed{(\sigma(\tau(\theta)d) = ((\sigma\tau)\theta)d)}$$

Упр.: док-ть: $d \otimes \beta = \sigma(p \otimes \alpha)$

Def: тензор $d \in T(p,q)$ наз-ся симметрическим (по некоторым индексам), если \forall перестановки (некоторых индексов) $\sigma: \sigma(d) = d$

и наз-ся кососимметрическим (антисимметрическим, алтернирующим) (по некоторым индексам), если \forall перестановки (некоторых индексов) $\sigma: \sigma(d) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} d$, где $\epsilon(\sigma)$ - четность перестановки.

по определению
св-во где компоненты
сами и касаются тензоров.
 $\forall \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$$\boxed{d \text{ симм.} \Leftrightarrow d_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}}$$

$$\boxed{d \text{ косимм.} \Leftrightarrow d_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}}$$

\forall нестороннее \Leftrightarrow ковариантное тензорное произведение (\Leftrightarrow трансформирование по праву индексов)

$$\text{d симм.} \Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad d_{\overset{i_1 \dots i_q}{j_k \dots j_m}} = d_{\overset{i_1 \dots i_q}{j_m \dots j_k}}$$

$$\text{d кососимм.} \Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad d_{\overset{i_1 \dots i_q}{j_k \dots j_m}} = -d_{\overset{i_1 \dots i_q}{j_m \dots j_k}}$$

также есть определение Тензора в качестве def 1:

$$\text{d симм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = d(\dots, \xi_m, \xi_k, \dots)$$

$$\text{d кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \xi_k, \dots)$$

$$\text{Умб: } \text{d кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0$$

$$\text{гол-бо! } (\Rightarrow) \text{ d кососимм.} \Rightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \xi_k, \dots) \Rightarrow d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_k, \dots) = 0$$

$$(\Leftarrow) \quad \forall (k, m) \quad d(\dots, (\xi_k + \xi_m), \dots, (\xi_k + \xi_m), \dots) = 0$$

$$d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) + d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) + d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) + d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_m, \dots) \Rightarrow$$

//

$$\Rightarrow d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) = 0 \Rightarrow \text{d кососимм.}$$

$$\text{d кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d_{\overset{i_1 \dots i_q}{j_k \dots j_m}} = 0$$

def: $d \in T(p, q)$ наз-ся полилинейной формой. Если d к-мног. одн., кососимметричн., то d наз-ся антисимм. полилинейной формой или p-формой или внешней p-формой или внешней формой степени p

$d \in T(0, q)$ наз-ся норибектором. Если d к-мног. одн., кососимметричн., то d наз-ся q-бектором.

Упр: вычислить def det у n-мерного квадрата. И спасти его с def p-формы.

$$d \in T(p, q) \text{ кососимм. (по нумерации индексов)} \Rightarrow \begin{aligned} 1) & \text{ если } p > n \Rightarrow d \equiv 0 \\ 2) & \text{ если } p = n \Rightarrow d_{\overset{i_1 \dots i_q}{j_1 \dots j_n}} = (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_q)} d_{\overset{i_1 \dots i_q}{j_2 \dots j_n}} \\ & \sigma = (j_1, \dots, j_n) \text{ несторонняя} \\ & \text{перестановка} \\ & \text{из } (1 \dots n) \end{aligned}$$

Пример: 1) V_3 - нап-бо 3-мерн. квадратов.

$$\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}) \text{ квадр. } \alpha \in T(2, 0), \text{ симм.} \quad \text{Упр: 1) Внешн. ил-я для } d_{12}.$$

$$\beta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \text{ квадр. } \beta \in T(3, 0), \text{ кососимм.} \quad 2) \text{ Упример } \forall \sigma: \sigma(d) = d$$

$$2) \quad A = (a_{ij}) \Leftrightarrow d \in T(2, 0) \quad \text{d симм.} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Rightarrow A \text{ симм. ил-я.}$$

$$\text{d кососимм.} \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Rightarrow A \text{ кососимм. ил-я.}$$

$$3) \quad d \in T(3, 0) \quad d \equiv 0 \quad n > 3$$

кососимм. $\exists n=3 \quad d_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\sigma(j_1 j_2 j_3)} d_{123} \quad \sigma = (j_1, j_2, j_3) \text{ несторонняя (123)}$
 $\text{Однако же } \exists n=3 \text{ несторонняя}$

$$\text{G: } \begin{matrix} (123)(213)(312) \\ (132)(231)(321) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{123} & 0 & d_{123} & 0 \\ 0 & 0 & d_{123} & 0 & 0 & 0 & -d_{123} & 0 & 0 \\ 0 & d_{123} & 0 & d_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Упр: как будем вычислять
ил-я для (кососимм.) $\in T(3, 0)$,
если $n=2$? $n=4$?

$$4) \quad d \in T(3, 0)$$

квадрат

$$\exists n=3 \quad d_{j_1 j_2 j_3} = d_{j_1 j_3} d_{j_2 j_3} d_{j_1 j_2} \quad \forall \sigma = (j_1, j_2, j_3) \text{ несторонняя (123)}$$

$$d_{123} = d_{132} = d_{213} = d_{231} = d_{312} = d_{321} = X$$

$$d_{113} = d_{131} = d_{311} = \frac{y}{z}$$

$$d_{221} = d_{212} = d_{122} = t$$

$$\dots \text{ и т. д.} \quad \text{гипотеза}$$

$$\dots \text{ и т. д.} \quad \text{гипотеза}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} x & y & z & y & t & x & z & x & 0 \\ y & t & x & t & d_{122} & * & x & * & * \\ z & x & * & x & * & * & * & * & d_{233} \end{array} \right)$$

Упр: —————
1) если $n=2$?
2) если $n=4$?

8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров

def: альтернирование (антисимметризация) и симметрирование тензора $\alpha \in T_{(p,q)}$
(по ненулевым индексам) наз. альтернантой

$$\text{Alt}\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma(\alpha)$$

$$\text{Sim}\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$$

\$S_p\$ - мн-во всех перестановок чисел от 1 до \$p\$.

Замечания:

1) очевидно, если α симм. \Rightarrow $\text{Sim}\alpha = \alpha$
если α кососимм. \Rightarrow $\text{Alt}\alpha = \alpha$

2) очевидно, Alt и Sim - линейные операторы на $T_{(p,q)}$, т.к. \$\sigma\$-линейные операции на $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (некоторых) индексов

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым проводится альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказались индексы, по которым альтернирование (симметрирование) не проводится, то эти индексы, выделены вертикальными чертами.

Например, $\alpha_{[i_1 i_2 i_3] / i_4 i_5}$

- по верхним индексам проводится симметрирование по индексам $i_1 i_2 i_3$
- по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример! $\alpha \in T_{(3,0)} \quad n=3$ $\alpha = (\alpha_{i,j,k}) = (\alpha_{i_1 i_2 i_3})$ $\sigma \begin{Bmatrix} (123) & (213) & (312) \\ (132) & (231) & (321) \end{Bmatrix} = S_3$
 1) $\beta = \text{Sim}\alpha = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \sigma(\alpha)$ $\beta = \alpha_{(ijk)} \rightsquigarrow \beta_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} i_{\sigma(3)}}$
 $\beta_{(123)} = \alpha_{(123)} = \frac{1}{6} (\alpha_{123} + \alpha_{132} + \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{312} + \alpha_{321})$
 $\alpha_{(132)} = \alpha_{(213)} = \alpha_{(231)} = \alpha_{(312)} = \alpha_{(321)}$ $\Rightarrow \beta_{(123)} = \beta_{(132)} = \beta_{(213)} = \beta_{(231)} = \beta_{(312)} = \beta_{(321)} = x$ (см. пример 4)

2) $\gamma = \text{Alt}\alpha = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma(\alpha)$ $\gamma = \alpha_{[i_1 i_2 i_3]} \rightsquigarrow \gamma_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} i_{\sigma(3)}}$
 $\gamma_{(123)} = \alpha_{(123)} = \frac{1}{6} (\alpha_{123} - \alpha_{132} - \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{312} - \alpha_{321})$

$\gamma_{(132)} = \alpha_{(132)} = \frac{1}{6} (\alpha_{132} - \alpha_{123} - \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{312} - \alpha_{321})$ $\epsilon(\sigma) \in \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \end{bmatrix}$
 $\gamma_{(213)} = \alpha_{(213)} = \frac{1}{6} (\alpha_{213} - \alpha_{231} - \alpha_{123} + \alpha_{132} + \alpha_{312} - \alpha_{321}) = 0$ $\gamma_{[j_1 j_2 j_3]} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \gamma_{i_1 i_2 i_3}$ $\sigma(j_1 j_2 j_3)$ перестановка \$(123)\$
 $\gamma_{(231)} = \alpha_{(231)} = \frac{1}{6} (\alpha_{231} - \alpha_{213} - \alpha_{123} + \alpha_{132} + \alpha_{312} - \alpha_{321}) = 0$
 $\gamma_{(312)} = \alpha_{(312)} = \frac{1}{6} (\alpha_{312} - \alpha_{321} - \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{123} - \alpha_{132}) = 0$
 $\gamma_{(321)} = \alpha_{(321)} = \frac{1}{6} (\alpha_{321} - \alpha_{312} - \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{123} - \alpha_{132}) = 0$
 $\Rightarrow \gamma_{112} = \gamma_{121} = \gamma_{211} = 0 \Rightarrow$ все компоненты \$\gamma^i\$, у которых сдвигают хотя бы 2 индекса равны нулю (см. пример 3)

$$3) \quad \boxed{\tilde{P} = d_{(i_1 j_1 k_1)}} \quad \rightarrow \quad \tilde{P}_{j_1 i_1 j_2} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} d_{j_2 j_1 \sigma_2} = \frac{1}{2} (d_{j_2 j_1 j_2} + d_{j_2 j_1 j_1}) = \tilde{P}_{(i_1 j_1 j_2)}$$

$$\sigma \in \{(12), (21)\} = S_2 \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\tilde{P}_{i_1 i_2} = d_{(11 i_2)} = \frac{1}{2} (d_{11 i_2} + d_{21 1}) \Rightarrow \tilde{P}_{i_1 i_2} = \tilde{P}_{21 1}$$

$$\tilde{P}_{i_1 i_2} = d_{(11 i_2)} = \frac{1}{2} (d_{i_1 j_2} + d_{i_2 j_1}) = d_{i_2 j_1} \Rightarrow \boxed{\tilde{P}_{i_1 i_2} = d_{(i_1 j_1 i_2)} = d_{i_2 j_1}} \quad \forall i_1, i_2$$

$$\tilde{P}_{i_1 i_2 i_3} = d_{(11 i_2 i_3)} = \frac{1}{2} (d_{i_1 j_2 j_3} + d_{i_2 j_2 j_1}) = d_{i_2 j_2 j_1} \Rightarrow \boxed{\tilde{P}_{i_1 i_2 i_3} = d_{(i_1 j_1 i_2 i_3)} = d_{i_2 j_2 j_1}} \quad \forall i_1, i_2, i_3$$

$$4) \quad \boxed{\tilde{J} = d_{[i_1 j_1 k_1]}} \quad \rightarrow \quad \tilde{J}_{j_1 i_1 j_2} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^{d(\sigma)} d_{j_2 j_1 \sigma_2} = \frac{1}{2} (d_{j_2 j_1 j_2} - d_{j_2 j_1 j_1}) = d_{[i_1 j_1 j_2]}$$

$$d(\sigma) \in \{+, -\}$$

$$\tilde{J}_{i_1 i_2} = d_{[11 i_2]} = \frac{1}{2} (d_{11 i_2} - d_{21 1}) \Rightarrow \tilde{J}_{i_1 i_2} = -\tilde{J}_{21 1}$$

$$\tilde{J}_{i_1 i_2} = d_{[11 i_2]} = \frac{1}{2} (d_{11 i_2} - d_{12 1}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{J}_{i_1 i_2} = d_{[i_1 j_1 i_2]} = 0 \quad \forall i_1, i_2}$$

$$\tilde{J}_{i_1 i_2 i_3} = d_{[11 i_2 i_3]} = \frac{1}{2} (d_{11 i_2 i_3} - d_{32 1}) \Rightarrow \tilde{J}_{i_1 i_2 i_3} = -\tilde{J}_{32 1} \quad \text{u.m.g.} \Rightarrow \boxed{\tilde{J}_{i_1 i_2 i_3} = -\tilde{J}_{k_1 j_1 i_3} \quad \forall i_1, i_2, i_3}$$

$$\text{Ump: } d \in T_{(2,0)} \Leftrightarrow A = (a_{ij}) \quad \text{i) } \text{Sum } A = \frac{A+A^T}{2}, \quad A \circ A = \frac{A+A^T}{2} \quad \text{ii) } \text{Sum } A \text{-element. u=sa?} \\ \text{Act } A = \text{koccoch. u=sa?}$$

