Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

2 апреля 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. U, V *– линейные пространства над полем* $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$
Линейным отображением $\mathcal{A}$ *называется* $\mathcal{A}: U \to V$*, обладающее свойством линейности:*
$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$
$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно"выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}\mathbb{0}_U = \mathbb{0}_V$

Примеры.

1. $\mathbb{0}$ – нулевое отображение $U \to V$
   $\forall u \in U : \mathbb{0}u = \mathbb{0}_v$
2. $\mathcal{E}$ – тождественное отображение: $V \to V$
   $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n
   $\mathcal{A}: V \to V$
   $\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор
   $\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$
   Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
4. $U = \mathbb{R}^n$ $V = \mathbb{R}^m$
   $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$
   $\mathcal{A}: x \in U \to y = \mathcal{A}x \in V$
   $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$
5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K$ $\mathcal{A}: U \to V$
Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение
$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$
$\mathcal{B}: U \to V$ $\forall u \in U$ $\mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$

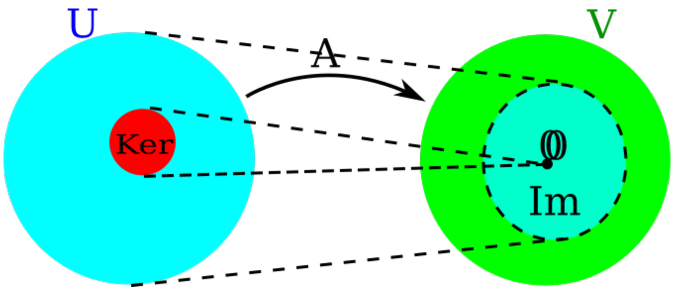
Определение 3. *Суммой линейных отображений* $\mathcal{A}, \mathcal{B}: U \to V$ *называется* $\mathcal{C}: U \to V$
$\forall u \in U$ $\mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$ $\boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ *– отображение противоположное* $\mathcal{A}$
$\forall u \in U$ $(-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$

$L(U, V) = Hom_K(U, V) = Hom(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$
$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V.
Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$
Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).
Значит $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$ – *ядро линейного отображения.*

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \ \forall u \in U\} =$
$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$ – *образ линейного отображения.*



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - это подпространства соответственно пространств U и V. То есть они замкнуты относительно линейных операций.
Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U, то
$\boxed{dim\ Ker\mathcal{A} = def\mathcal{A}}$ – дефект линейного отображения.
Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V, то
$\boxed{dimIm\mathcal{A} = rg\mathcal{A}}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфно между* U *и* $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $Im\mathcal{A} = V$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$ *тривиально*

Доказательство. $\mathcal{A}$ изоморфно $\Leftrightarrow$ взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Пусть $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$
$v_1 = \mathcal{A}u_1 \ v_2 = \mathcal{A}u_2$
$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$ т. к. ядро тривиально.
Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. □

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
–инъективно, если $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
–сюръективно, если $Im\mathcal{A} = v$
–биективно $\equiv$ *изоморфизм, если инъекция + сюръекция.*
–эндоморфизм $\equiv$ *линейный оператор, если* $U \equiv V$
$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$
–автоморфизм $\equiv$ *эндоморфизм + изоморфизм.*
$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. *Произведением линейных отображений* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$
$\mathcal{A} \in L(W, V) \quad \mathcal{B} \in L(U, W) \quad U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$
называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, *которое является композицией функций, определяющих отображения* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$

$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$

Очевидно, $\mathcal{C}$ – линейное отображение.

$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$

Упр:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм
2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
   $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность
3. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ – ассоциативность
4. $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$ – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ *изоморфно.*

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$

$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$

Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения $\mathcal{A}$ на линейное подпространство U_0 называется

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V \quad \forall u \in U_0 \ \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$

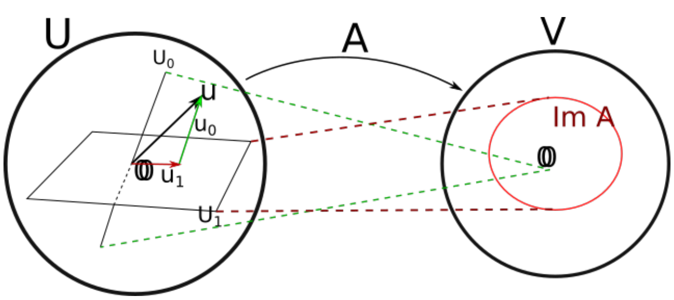
Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфизм* $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ *– изоморфизм*

Примеры.

1. $\mathbb{0} : U \to U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2. $\mathcal{E} : U \to U$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \quad \mathcal{A} : P_n \to P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4. $x \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.
   Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.
   То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$



Доказательство. $U_0 = Ker\mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U:

$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\}$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \qquad Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}_1$ – изоморфизм? $Im\mathcal{A}_1 = Im\mathcal{A}$ – сюръекция

$$\left.\begin{array}{c} \forall w \in Ker\mathcal{A}_1 \in U_1 \\ KerA_1 \subset KerA = U_0 \end{array}\right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow Ker\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong Im\mathcal{A} \Leftrightarrow dimU_1 = dim(Im\mathcal{A})$ – инъекция.

Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $dimU = dimU_0 + dimU_1 = \underbrace{dimKer\mathcal{A}}_{def\mathcal{A}} + \underbrace{dimIm\mathcal{A}}_{rg\mathcal{A}}$ $\square$

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма)**.**
$\mathcal{A} \in L(U, V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A}$ *изоморфно*
2. $dimU = dimV = rg\mathcal{A}$
3. $dimU = dimV$
   $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in End(V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
2. $dimV = rg\mathcal{A}$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$\forall u \in U \ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i$ Достаточно знать, как $\mathcal{A}$ работает на базисных векторах $\xi_1 \dots \xi_n$

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \qquad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}}$ матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ относительно базисов (ξ, η)

Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$

$A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора

$Ae_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

Примеры.

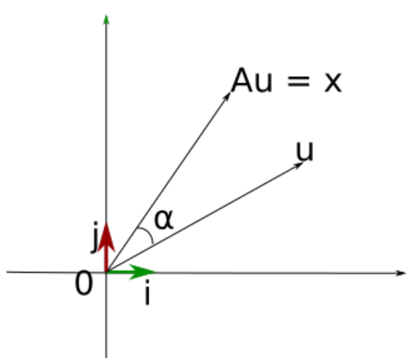
1. $\mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E} e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

2.
$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E} e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \to e'}$$

3.

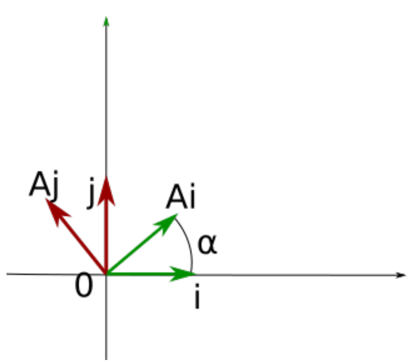


$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v = \mathcal{A} u$

Поворот векторов в плоскости на угол α.

Очевидно, линейный оператор.



$\mathcal{A}_i = \cos\alpha i + \sin\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}_j = -\sin\alpha i \cos\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{A}: \overset{1,t,t^2}{p_2} \to \overset{1,t,t^2}{p_2}$

$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}: \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t}{p_1}$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m\times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм $\equiv$ биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \to A_{m\times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m\times n} = (a_{ij})$

U $\xi_1 \dots \xi_n$ базис

V $\eta_1 \dots \eta_m$ базис

$\mathcal{A}: U \to V$

$\mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \in V$

$\forall u \in U$ $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$

$\mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V)$ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$

$\forall\lambda \in K$ $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda\mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}n_j + \lambda\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность $\Rightarrow$ изоморфизм. □

$\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$

$End(V) \cong M_{n\times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$U\xi_1 \dots \xi_n$ $\quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$V\eta_1 \dots \eta_m$ $\quad u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$

$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

$v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \eta_j$

$\mathcal{A} \in L(U,V) \underset{\xi,\eta}{\leftrightarrow} A$

$\sum\limits_{j=1}^{m} v_j\eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum\limits_{j=1}^{m}(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_{ji})\eta_j$

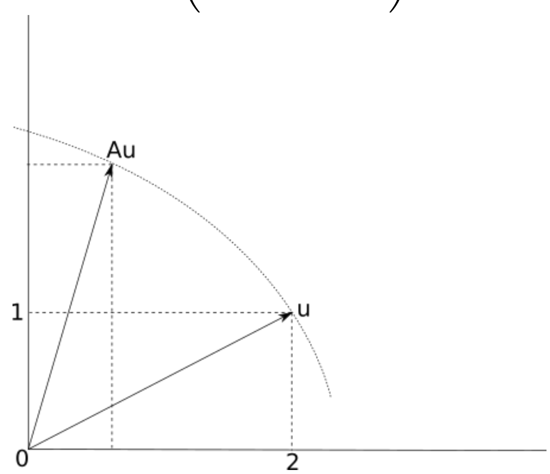
Так как координаты определяются единственным образом:

$\boxed{v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} u_i} \;\leftrightarrow\; \boxed{v = Au} \;\leftrightarrow v = \mathcal{A}u$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ поворот на угол α

   $(i,j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

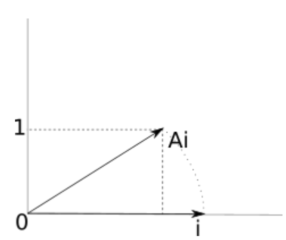
   $\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{u} \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mathcal{A}u} \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{3\sqrt2}{2} \end{pmatrix}$

   $i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} \end{pmatrix}$

2. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t,t^2}{p_2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overbrace{3t^3 + 6t + 4}^{u(t)})' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi,\eta)} A$

$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$

$T_{\eta \to \eta'}$ – *матрица перехода*

$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi',\eta')} A'$

$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} \cdot A \cdot T_{\xi \to \xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \underset{\xi_1 \dots \xi_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows} & \underset{\eta_1 \dots \eta_m}{V} \\ \mathcal{E}_u \uparrow\downarrow & & \downarrow\uparrow \mathcal{E}_v \\ \underset{\xi'_1 \dots \xi'_n}{U} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \underset{\eta'_1 \dots \eta'_m}{V} \end{array}$$

$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$

$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$

$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T^{-1}_{\eta \to \eta'}$ Смотри пример 2 $\square$

Следствие 1.

$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$

$e_1 \dots e_n$ *базис* $V \leftrightarrow A$

$e'_1 \dots e'_n$ *базис* $\leftrightarrow A'$

$\mathcal{A} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$

$T = T_{e \to e'}$

$$\boxed{A' = T^{-1} A T}$$

Замечание. В условиях теоремы $v = \mathcal{A}u \begin{array}{l} \xleftrightarrow{(\xi,\eta)} v = Au \\ \xleftrightarrow{(\xi',\eta')} v' = A'u \end{array}$

$V = T_{\eta \to \eta'} V'$

$U = T_{\xi\to\xi'}U'$
$T_{\eta\to\eta'}v' = AT_{\xi\to\xi'}u'$
$v' = \underbrace{\boxed{T^{-1}_{\eta\to\eta'}AT_{\xi\to\xi'}}}_{A'}u'$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{u} \leftrightarrow v = Au$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.

$v' = A'u'$

Определение 1. $A_{m\times n}$

$ImA = span(A_1, A_2, \dots A_n) = \{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i A_i | \alpha_i \in K\} =$
$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) | x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$

$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$rgA = dimImA$ — *ранг матрицы*

$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) | Ax = \mathbb{0}\} =$ *{множество решений СЛОУ }* — *ядро матрицы*

$dimKerA = n - rgA = defA$ — *дефект матрицы*

$\boxed{rgA + defA = n}$ — *аналогично теореме о ранге и дефекте*

Теорема 1. $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{\begin{array}{l} rg\mathcal{A} = rgA \\ def\mathcal{A} = defA \end{array}}$,

где матрица A – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств U и V.

$rg\mathcal{A}$, $def\mathcal{A}$ инвариантны относительно выбора базиса.

Доказательство. $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi,\eta)}{A}$ $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$

$\mathcal{A}\xi_i \underset{\cong}{\overset{\leftrightarrow}{}} A_i$

Координатный изоморфизм.

Пусть $rgA = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, то из $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$ k линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dimIm\mathcal{A} = k$

$$\begin{array}{ccll} dimU & = & rg\mathcal{A} & +def\mathcal{A} \\ \| & & \| & \\ n & & rgA & \\ & & \| & \\ & & k & \end{array}$$

$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim$ пространства решений $Ax = 0 = defA$ $\square$

Следствие 1. *$\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow$ A невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.*

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{matrix} defA = 0 \\ dimU = dimV \end{matrix} \Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow A$ невырожденная. $\square$

Теорема 2. *$det\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $det\mathcal{A} = detA$, где A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.*

Доказательство. $V\ e_1 \dots e_n$

$det\mathcal{A} = det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$

$\mathcal{A}e_k = \sum\limits_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} =$ (det n-форма, т. е. полиномиальная форма)

$= \sum\limits_{i_1=1}^{n} \sum\limits_{i_2=2}^{n} \dots \sum\limits_{i_n=n}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}\ det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) =$ (n-форма – 2 одинаковых аргумента $\Rightarrow det = 0$)

$= \sum\limits_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \overbrace{\underset{\text{все разные}}{det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}}^{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \quad det(e_1 \dots e_n)=1} = \sum\limits_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = detA$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$T = T_{e \to e'}$

$det\mathcal{A} = detA' \stackrel{?}{=} detA$

$A' = T^{-1}AT$

$detA' = detT^{-1} \cdot detA \cdot detT = detA$ $\square$

Определение 2. *A, B называются подобными, если*
$\exists$ невырожденная $C : B = C^{-1}AC$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$A' = T^{-1}AT$

A, B подобны $\Rightarrow detA = detB$

Следствие 1. *f – n-форма на V*

$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \boxed{f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = det\mathcal{A}\ f(\xi_1 \dots \xi_n)}$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$\underset{n\text{-форма}}{g}(\xi_1 \dots \xi_n) = det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$

$det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underset{\text{смотри док-во теоремы}}{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)} = det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum\limits_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$

$\mathcal{A}e_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$ $\square$

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n \times n}$

$AB = (AB_1\ AB_2 \dots AB_n)$

$det(AB) = det(AB_1 \dots AB_n) =$

$= detA \cdot det(B_1 \dots B_n) = detA \cdot detB$

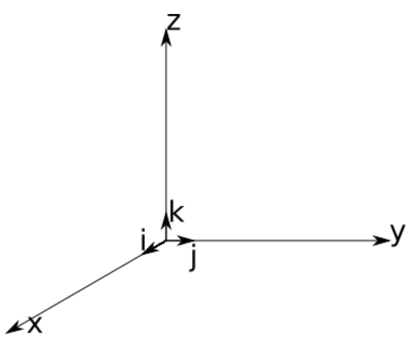
Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$
$det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Доказательство. $det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det(AB) = detA \cdot detB = det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{B}$ □

Следствие 3. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
$\Leftrightarrow det\mathcal{A} \neq 0$
Причем $det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathcal{A}}$

Доказательство. Из следствия 2
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$
$det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{A}^{-1} = det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$ □

Примеры. V_3



$V_{abc\text{–правая тройка}} = \underbrace{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}_{\text{смешанное пр-е}} = f(\underbrace{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}_{\text{3-форма}})$
$\mathcal{A} \in End(V_3)$ $u \in V_3 \to v = \mathcal{A}u \in V_3$
Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$\mathcal{A}(V_{(\overline{a}\overline{b}\overline{c})}) = f(\mathcal{A}\overline{a}, \mathcal{A}\overline{b}, \mathcal{A}\overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot V(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$
$\lambda = |det\mathcal{A}|$ Объем увеличится в λ раз.

1. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
   Оператор подобия
   $\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}\overline{i} = \mu\overline{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A?$ $$\mathcal{A}\overline{j} = \mu\overline{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

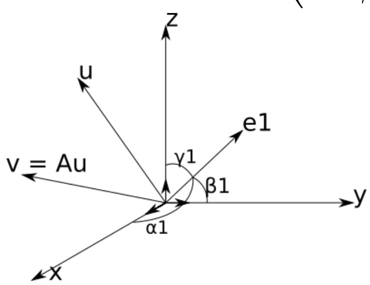
$$\mathcal{A}\overline{k} = \mu\overline{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

   $\lambda = |det\mathcal{A}| = |detA| = |\mu^3|$

2. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$

Оператор поворота

$$\mathcal{A}: \quad \begin{array}{l} \bar{i} \to e_1 \nearrow \\ \bar{j} \to e_2 \to \\ \bar{k} \to e_3 \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \end{array}$$



$|e_i| = 1$
$(e_i, e_j) = 0$
$i \neq j$

$$"\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})" = det\mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$detA = |\cdots| \underbrace{e_1e_2e_3}_{\text{Смешанное произведение}} = 1$$

$$(detA)^2 = detA \cdot detA^T = det(AA^T) = det \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} = detE = 1$$

$$|detA| = 1$$

Утверждение. *A, B подобные матрицы $\Rightarrow trA = trB$*
$trace =$ след

Доказательство. A, B подобные $\Rightarrow$
$\exists\ C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{"-1"}(AC)ji = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{''-1''} a_{jk}C_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_{ki}C_{ij}^{''-1''}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = trA$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{bmatrix} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{bmatrix}} \quad CC^{-1} = E$$

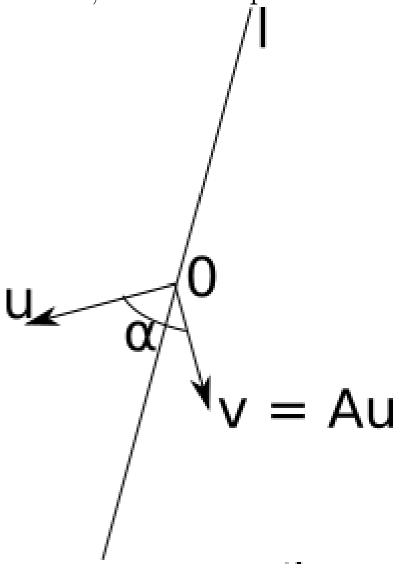
□

Определение 3. *$tr\mathcal{A} = trA$, где A – матрица оператора в некотором базисе.*
$tr\mathcal{A} = trA = trA'$ — не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

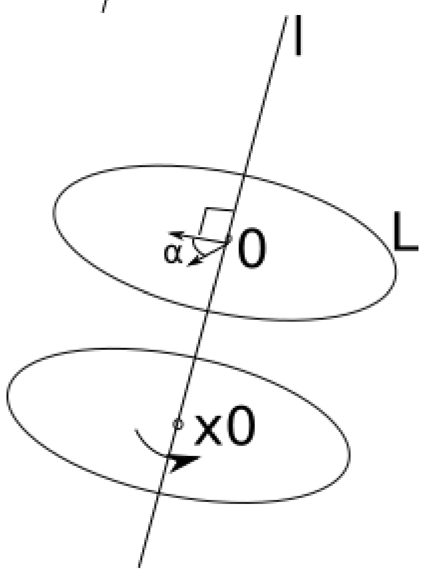
Определение 4. *$L \subset V$ L инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$ если $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$*

Примеры.

1. $\mathbb{0}, V$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$
2. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$



$\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
Поворот вектора(пр-ва) относительно оси l на угол α



Плоскость $\perp l$ инвариантна относительно $\mathcal{A}$
$P = x_0 + L$ инвариантно

Теорема 3. *$L \subset B$ $\mathcal{A} \in End(V)$. Линейное пространство инвариантно относительно $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \exists$ базис пространства V, т.ч. матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \mathbb{0} & A_3 \end{array}\right)$*
$A_1 k \times k$ где $k = dimL$

Доказательство. $L = \underset{\text{базис}}{span(e_1 \dots e_k)}$
Дополним до базиса $V : e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \underset{1\le i\le k}{\mathcal{A}e_i} \in L = \sum_{m=1}^{k} a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^{n} 0\cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k+1\le i\le n}{\mathcal{A}e_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1i} & \\ \vdots & A_i^1 \\ a_{ki} & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_i^{2,3} \\ \dots \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}} \end{pmatrix}$$ □

Следствие 1. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно* $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$ *базис пр-ва V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ будет иметь* <u>*блочно-диагональный вид:*</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\Big(\underset{\text{размерность матрицы}}{A^i}\Big) = dimL_i$$

Доказательство. $L_1 = span(\underset{\text{базис}}{e_i^1 \dots e_i^{i_k}})$

т.к. $\bigoplus$, то базис V – объединение базисов L_i

$V = span(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\underline{\overset{L_1}{1\dots i_1}}} & \multicolumn{3}{c|}{\underline{\overset{L_2}{i_1+1\dots i_2}}} & \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\vphantom{\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}}\right\} \text{отвечает позиции базисных элементов пр-ва } L_i \text{в базисе } V$$ □

Следствие 2. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

Доказательство. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \Rightarrow \forall\ u \in V\ \ \exists! u = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in L_i$

$Im\mathcal{A} \subset \sum\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

Верно и "$\supset$"

Пусть $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in V) \in Im\mathcal{A}$

$Im\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$\bigoplus$ прямая?

$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \mathbb{0} \longleftarrow$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнктны $\nwarrow\Rightarrow \forall i : v_i = \mathbb{0}$

$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i}$ дизъюнктны $\Rightarrow \bigoplus$ $\square$

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(v) \quad V$ линейное пространство над K

Определение 1. $\lambda \in K$ – ***собственное число*** *(с.ч.) линейного оператора* $\mathcal{A}$*, если* $\exists$ $\boxed{v \in V \neq \mathbb{0}}$*, который называется* ***собственным вектором*** *(с.в.), такой что* $\boxed{\mathcal{A}v = \lambda v}$

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$

Определение 2. $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \{$*с.в.* v *и* $\mathbb{0}\}$ *называется собственным подпространством.* $\boxed{\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda}$ *– геометрическая кратность с.ч.*

$\gamma \geq 1$

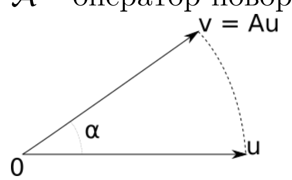
V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$v \in V_\lambda\ \ \mathcal{A}v = \lambda v \overset{?}{\in} V_\lambda$

$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda\mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ – оператор подобия:
   $\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$
   μ с.ч. $\quad V_\lambda = V$
2. $\mathcal{A}$ – оператор поворота на плоскости на угол α



$\alpha \neq \pi k \Rightarrow$ нет с.в.

3. Пусть λ с.ч.$=0$ $\quad \mathcal{A}v = \mathbb{0}$ с.в. $\neq \mathbb{0} \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow Ker\mathcal{A}$ нетривиально $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ не автоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ необратимо $\Leftrightarrow det\mathcal{A} = 0$
4. $\mathcal{A} : V \to V$
   $v_1 \dots v_n$ базис, т.ч. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$
   Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$
   $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
   λ – с.ч. v с.в. $\neq \mathbb{0} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ нетривиально $\Leftrightarrow det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – *характеристический многочлен оператора* $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$ базис $\quad \mathcal{A} \leftrightarrow A$
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = det(A - tE)$ т.к. det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(\underbrace{a_{11} + \dots + a_{nn}}_{trA = tr\mathcal{A}})t^{n-1} + \dots + \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$$

По теореме Виета: $det\mathcal{A} = \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_n}_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)}$

$\underline{\underline{\lambda \in K}}$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \quad (\underline{\underline{\lambda \in K}})$
λ корень характеристического многочлена.
$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.
$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни χ_A будут с.ч.
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$
$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. *Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется* ***спектром*** *линейного оператора.* $(\lambda, \alpha(\lambda))$
Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.
$\alpha(\lambda) = 1 \ \forall \ \lambda$

Немножко про алгебраическую кратность
$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod\limits_{a\text{–корень}} (t - a)^{m_a}$

a–корень $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \ \vdots \ (t - a)$

a – корень f **кратности** $m \Leftrightarrow \begin{matrix} f \mid (t-a)^m \\ f \nmid (t-a)^{m+1} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow f(t) = (t-a)^m g(t)$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a \qquad a$–корень с учетом кратности

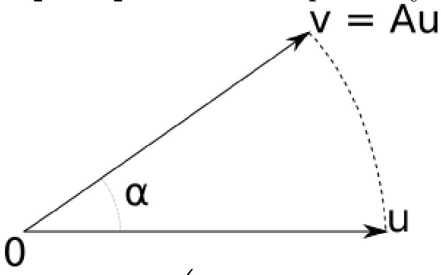
$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \ldots \lambda_n$

$(-1)^n t^n + \ldots = (-1)^n (t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \ldots = (-1)^n (t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)$

$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \ldots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ с.ч.

Примеры. $\mathcal{A}$ – поворот на угол α



$\bar{i}\ \bar{j}$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \begin{pmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{pmatrix} =$$

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha t + t^2 + sin^2\alpha = t^2 - 2\cos\alpha t + 1$

$D = 4\cos^2\alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$

нет вещ. корней $\Rightarrow$ нет с.ч.

$K = \mathbb{R}$

Теорема 1. *λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow$* $\boxed{1 \le \gamma(\lambda) \le \alpha(\lambda)}$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = dimV_\lambda = span(\underbrace{v_1 \ldots v_k}_{\text{базис}})$

V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 \end{array}\right) \quad A^1_{k\times k}$$

Базис $= v_1 \ldots v_k v_{k+1} \ldots v_n$

$$\mathcal{A} \underset{i=1\ldots k}{v_i} \in V_\lambda = \lambda v_i \leftrightarrow A^1_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & \\ 0 & \lambda - t & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 - tE_{n-k} \end{array}\right) \underset{\text{св-ва } det}{=} \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{\mathcal{A}^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \ge k = \gamma(\lambda)$ □

Теорема 2. *$\lambda_1 \ldots \lambda_m$ – различные с.ч. $\mathcal{A}$*

$v_1 \ldots v_m$ соответствующие им с.в. $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \ldots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1 \quad \lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq \mathbb{0}$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m-1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

   От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A}$,

   а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

   Пусть $v_m = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$

   $$\begin{array}{l} \mathcal{A}_{v_m} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i \\ || \\ \lambda_m v_m = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i \end{array}$$

   $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\underset{\overset{\not\parallel}{0}}{\lambda_i - \lambda_m}) v_i = \mathbb{0}$ v_i линейно независим по инд. предположению

   $\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \ \ \forall\ i = 1 \dots m-1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow v_m = \mathbb{0}$ — Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть $\mathbb{0}$

□

Следствие 1. *$\lambda_1 \dots \lambda_m$ различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ дизъюнктны.* $\left(\bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ \text{с.ч.}}} V_\lambda \right)$

Доказательство. $v_1 + \ldots + v_m = \mathbb{0} \quad v_i \ \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq \mathbb{0} \Rightarrow$ это слагаемое с.в. $\Rightarrow$ противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall\ i : v_i = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктны. □

Теорема 3. *$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$*

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \to L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \qquad A_{k_i \times k_i}$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства } det}{=} |A^1 - tE_{k_1}||A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\begin{array}{cccc} \chi_{A^1}(t) & \chi_{A^2}(t) & \dots & \chi_{A^m}(t) \\ || & || & & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & & \mathcal{A}^m \end{array}$$

□

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n\times n} \quad \lambda$ с.ч. $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq \mathbb{0} \quad Ax = \lambda x$

$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейный оператор}}}{Ax}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$$

$t_1 = 0 \ \ \alpha(0) = 2$

$t_2 = 1 \ \ \alpha(1) = 1$

$V_\lambda = Ker(A - \lambda E) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in]R$$

$V_{\lambda_1} = 0 = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$

$\lambda_2 \ \ 1 \le \gamma \le \alpha = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma(1) = 1$

7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.) Проекторы. Спектральное разложение о.п.с. Функция от матрицы.

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V)$

$\mathcal{A}$ называется о.п.с., если $\exists$ базис пространтсва V, т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид $\Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$ базис V из с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda с.ч.\ \mathcal{A}} V_\lambda$

$V = span(v_1 \ldots v_n)$

Теорема 1. *Пусть $\sum\limits_{\lambda с.ч.\ \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = dimV$*

$\Leftrightarrow$все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. $\mathcal{A}$

$\boxed{\mathcal{A} о.п.с. \Leftrightarrow \forall с.ч. \lambda \quad 1 \le \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = dimV = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda)$

$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

$\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \to \quad \nearrow \Rightarrow \forall\lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$ □

Следствие 1. $\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = dimV$

$\mathcal{A}$о.п.с. $\Leftarrow$ спектр – простой.

(n попарно различных с.ч. $\forall\lambda\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$)

Определение 2. *$A_{n\times m}$ называется диагонализируемой, если $\exists$ невырожденная $T_{n\times n}$, т.ч.*
$T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$
("A подобна диагональной матрице")

Следствие 2. *Если матрица $A_{n\times n}$ – матрица некоторого о.п.с. $\mathcal{A}$, то она* ***диагонализируема****. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.*

Доказательство.

$$\begin{array}{llcll}
\mathcal{A} & \text{о.п.с.} & \Leftrightarrow & \exists \text{ базис} & \underset{\text{с.в.}}{v_1 \ldots v_n} \\
\updownarrow & \underset{\text{базис}}{(e_1 \ldots e_n)}V & & & \underset{\text{с.ч.}}{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \\
A & & & & \updownarrow \\
& & & & \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

$T = T_{e\to v}$ невырожденная.

$\Lambda = T^{-1}AT$

$A = T\Lambda T^{-1}$ □

$$\boxed{\begin{array}{r} A \text{ диагонализируема } \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \\ \forall\ \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \end{array}}$$

Определение 3.

$$\begin{array}{ccc}
V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i & & \mathcal{P}_i : V \to L_i \subset V \\
\nwarrow\Leftarrow & \Leftrightarrow & \Rightarrow\searrow \\
\underset{\textit{линейное подпр.}}{L_i \subset V} & \forall v \in V\ \exists! : v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i &
\end{array}$$

$\boxed{\forall\ v \in V \quad \mathcal{P}_i v \overset{def}{:=} v_i} \qquad i = 1 \ldots m$

Оператор проектирования (проектор)

$\mathcal{P}_i \overset{?}{\in} End(V)$

$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_i$ линейный оператор.

$u + \lambda V = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in L_i + \lambda \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\underbrace{u_i + \lambda v_i}_{\in L_i})$

$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$

Свойства проекторов:

1. $\forall\ i \neq j \ \ \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij = \mathbb{0}$
2. $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \ \ (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \varnothing_i^k = \mathcal{P}_i)$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
4. $Ker\mathcal{P}_i = \sum\limits_{j\neq i} L_j \ \ \forall i = 1 \ldots m$
   $Im\mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

1. $\forall v \in V \ \ \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij(v) = \mathcal{P}_iv_j \in L_j = \mathbb{0} \Rightarrow \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij = \mathbb{0}$
   Т.к. L_i дизъюнктны
   $v = v_1 + v_i + \underset{\text{Ед. образом}}{v_j} + \ldots + v_n$
   $v_j = v_j + \mathbb{0}$
2. $\forall v \in V \ \ \mathcal{P}_i \underbrace{\mathcal{P}_i(v)}_{v_i \in L_i} = v_i = \mathcal{P}_iv$
   Т.к. верно $\forall v \in V$, то верно и для базиса $\Rightarrow$ операторы совпадают. $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$
3. $\forall v \in V(\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i)v = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_iv = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i = v = \mathcal{E}v \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} = \mathcal{E}$
4. $\mathcal{P}_i(v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_m) + \mathbb{0}$
   $= \sum\limits_{j\neq i} \underbrace{\mathcal{P}_iv_j}_{\mathbb{0}}$
   $$\boxed{\begin{array}{c}\sum\limits_{j\neq i} L_j \subset Ker\ \mathcal{P}_i \\ \text{т.к. } v = \bigoplus\limits_{j\neq i} L_j \oplus L_i\end{array}} \Rightarrow Ker\ \mathcal{P}_i = \bigoplus\limits_{j\neq i} L_j$$
   $Im\ \mathcal{P}_i = L_i$ по def $\ "\subset"$
   Верно "$\supset$" $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P}v_i = v_i$

$\square$

Утверждение. $\underset{i=1\ldots m}{\mathcal{P}_i \in End(V)} : V \to V$ *и выполнены свойства 1, 3* $\Rightarrow$
$\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{P}_i$ *(т.е.* $\mathcal{P}_i$ *проекторы на* $L_i = Im\mathcal{P}_i$*)*

Доказательство.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2
   $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_i \overset{?}{=} \mathcal{P}_i$
   $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i\mathcal{E} = p_i \sum\limits_{j=1}^{m} \mathcal{P}_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{0} \\ i \neq j}}{\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j} = \mathcal{P}_i^2$
2. $v_1 + v_2 + \ldots + v_m = \mathbb{0}$
   $v_i \in Im\mathcal{P}_i$ дизъюнктно?
   $v_i = \mathcal{P}_iw_i \ w_i \in V$

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \underset{\uparrow}{=} \mathcal{P}_i(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j}}_{=\mathbb{0}}) = \mathbb{0}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j}_{=\mathbb{0}\ i\neq j} w_j) = \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i$$

$$\forall\ v \in V\ \mathcal{E}v = v = \sum_{j=1}^{m} \underset{v_j \in Im\mathcal{P}_j}{\underset{||}{\mathcal{P}_j v}} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{m} Im\mathcal{P}_j$$

$\square$

Теорема 2 (О спектральном разложении о.п.с.). $v = \bigoplus\limits_{\lambda с.ч.} V_\lambda \qquad \underset{проекторы}{\mathcal{P}_\lambda : V \to V_\lambda}$
$\mathcal{A}$ *о.п.с.* $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda с.ч.} \lambda\mathcal{P}_\lambda \leftarrow$*спектральные проекторы*

Доказательство.

1. $\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$
2. $\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$
3. $\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E}$

$\forall v \in V$

$$\mathcal{A}v \underset{V=\bigoplus_\lambda V_\lambda}{\underset{\uparrow}{=}} \mathcal{A}(\sum_\lambda v_\lambda \in V_\lambda) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{=\lambda v_\lambda} =$$

$$\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda\mathcal{P}_\lambda v$$

Доказательство верно $\forall$ векторного про-ва V. В частности для базиса $\Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda\mathcal{P}_\lambda}$ $\square$

Следствие 1. $A_{n\times n}$ ***диагонализируема*** $\Leftrightarrow\ \exists \underset{проекторы}{\mathcal{P}_{\lambda\ n\times n}}\ 1^\circ\ 2^\circ\ 3^\circ$

$$A = \sum_{\lambda с.ч.} \lambda\mathcal{P}_\lambda$$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1\ \alpha(\lambda_1) = \gamma(\alpha_1) = 2$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = span(v_1, v_2)$

$\lambda_2 = -1\ \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = span\ V_3$

$\Rightarrow$ о.п.с. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = span(V_1, V_2, V_3)$

$T_{e\to v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad \boxed{AT = T\Lambda}$

$\mathcal{P}_1 : V \to V_{\lambda_1} \subset V$

$\mathcal{P}_2 : V \to V_{\lambda_2} \subset V$

$\mathcal{P}'_1$ матрица $\mathcal{P}_1$ в базисе $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$– матрицы проекторов в базисе e(канонич.)

$\mathcal{P}_1 v_i = \left[\begin{array}{l} v_i, i = 1, 2 \\ \mathbb{0}, i = 3 \end{array} \right.$

1° 2° 3°

$\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 = E$

$\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2 = \mathbb{0} \ldots$

$\mathcal{P}'_2$ матрица $\mathcal{P}_2$ в базисе $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}'_i = T^{-1} \mathcal{P}_i T \qquad i = 1, 2$

$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}'_i T^{-1} \qquad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \mathbb{0}$

$\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$

$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$

Определение 4. $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$ – *последовательность матриц*

$\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall\ i, j\ \exists a_{ij} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^k$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \overset{\exists}{=} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{N} A_m}_{\substack{s_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$e^x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}\ R = \infty\ \ \cos x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$

$\ln(1 + x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad$ либо $x = 1$

Определение 5. *Функция от матрицы.*

$A_{n\times n}$

$f(A)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m$, *где* $\boxed{\begin{array}{rcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{array}}$

$e^A=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}$

$\cos A=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}A^{2m}$

Теорема 3. f *аналитическая в* $|x|<R$

$A_{n\times n}$ *все с.ч.* $|\lambda|<R$

A ***диагонализируемая*** *То есть:*

$\exists \underset{\text{невырожд.}}{T} : \Lambda = T^{-1}AT$

$\exists \mathcal{P}_\lambda : A=\sum\limits_{\lambda}\lambda\mathcal{P}_\lambda$

$\Downarrow$

1. $\underset{f(A)}{\exists}=T\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n)\end{pmatrix}T^{-1}$
2. $\underset{f(A)}{\exists}=\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$

Доказательство.

1. $$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}C_mA^m$$
$$A^m=(T\Lambda T^{-1})^m=$$
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_mx^m \\ |x|<R \end{array}}$$
$$=T\Lambda\underbrace{T^{-1}T}_{E}\Lambda T^{-1}\dots T\Lambda T^{-1}1=$$
$$=T\Lambda^mT^{-1}=T\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 & \\ 0 & & \lambda_n^m\end{pmatrix}T^{-1}$$
$$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}C_mT\Lambda^mT^{-1}=T(\sum_{m=0}^{\infty}C_m\Lambda^m)T^{-1}=$$
$$=T\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_m\lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{\infty}C_m\lambda_n^m\end{pmatrix}T^{-1}=T\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n)\end{pmatrix}T^{-1}$$
$|\lambda_i|<R$
2. $$A^m=(\sum_{\lambda\text{с.ч.}}\lambda\mathcal{P}_\lambda)^m \underset{\substack{\lambda\neq\mu \\ \mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu=\mathbb{0}}}{=} \sum_{\lambda}\lambda^m\mathcal{P}_\lambda^m=\sum_\lambda\lambda^m\mathcal{P}_\lambda$$
$$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(\sum_\lambda\lambda^m\mathcal{P}_\lambda)=\sum_\lambda(\underset{|\lambda|<R}{\sum_{m=0}^{\infty}C_m\lambda^m=f(\lambda)})\mathcal{P}_\lambda=\sum_\lambda f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$$

$\square$

Замечание. A диагон. $\Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$

$\Leftrightarrow A = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$

$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$

$f(A) = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$

$t \in \mathbb{R}$

$f(At) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$

$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$

$$\boxed{f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}}$$

$t^m A^m = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$

$$\boxed{f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda)\mathcal{P}_\lambda}$$

Примеры. e^{At}

$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$\chi(t) = det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$

$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$

$V_{\lambda_1} : \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array}\right)$

$V_{\lambda_1} = span \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$

$V_{\lambda_2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array}\right)$

$V_{\lambda_2} = span \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{v_3} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$

$\forall\ \lambda : \left.\begin{array}{rcl} \alpha(\lambda) & = & \gamma(\lambda) \\ \sum\limits_{\lambda} \alpha(\lambda) & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A$ диагонализируемая

$$T_{e\to v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \underset{i=1,2}{\to} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cline{1-2} 0 & 0 & 0 \end{array}\right) T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cline{3-3} 0 & 0 & 1 \end{array}\right) T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{n\times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x} - \text{производная}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \qquad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности $\quad \begin{matrix} (e^{At})' = Ae^{At} \\ e^{A\cdot 0} = E \end{matrix}$

$$e^{At} = \left(\sum_{\lambda \text{с.ч.}} e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda\right)' = \underline{\underline{\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda}}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_{\lambda} e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda \underset{\mu=\lambda}{=} \underline{\underline{\sum_{\lambda} \lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda}}$$

Замечание. $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow detA \neq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \neq 0$
(все корни хар. многочлена)

$\sqsupset A$ диагонализируема. Все с.ч. $\lambda \neq 0$

$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$

$\Lambda\Lambda^{-1} = E$

$AA^{-1} = \underbrace{T\,\underbrace{\Lambda\,\underbrace{T^{-1}T}_{E}\,\Lambda^{-1}}_{E}\,T^{-1}}_{E} = E$

$A^{-1} = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda}\mathcal{P}_\lambda$

$(AA^{-1} = E$ упр.$)$

$$\sqrt[m]{A} = T\,\sqrt[m]{\Lambda}T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[n]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\sqsupset$ все $\lambda_i \geq 0$

$(m$ нечет $\Rightarrow \lambda$ любого знака$)$

$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$

$(\sqrt[m]{A})^m = T\,\underbrace{\sqrt[m]{\Lambda}\,\underbrace{T^{-1}T}_{E}\,\sqrt[m]{\Lambda}\,\underbrace{T^{-1}\dots T}_{E}\,\sqrt[m]{\Lambda}}_{\Lambda}\,T^{-1} = T\Lambda T^{-1} = A$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda}\mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.: $(\sqrt[m]{A})^m = A$)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \quad A^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{1}\mathcal{P}_1 + \dfrac{1}{(-1)}\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$

$A^2 = E$

7.6 Комплексификаци линейного вещ. пространства. Продолжение вещ. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$ $\quad V$ над полем K

$$\chi(\lambda) \underset{\lambda \text{ корень}}{=0}$$

$\swarrow$

$K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$

Все корни $\lambda \in K$

Т.е. каждый корень с.ч.

$\sum\limits_{\lambda \text{с.ч}} \alpha(\lambda) = n = dimV$

$\searrow$ III

$K = \mathbb{R}$

Не все корни вещ.

т.е. $\exists \lambda \notin K = \mathbb{R}$

$\sum\limits_{\text{вещ.}\lambda\text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = dimV$

$\mathcal{A} \to A$?

I $\swarrow$

$\forall\ \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ – о.п.с. $\to A$ диагонализир.

$\searrow$ II

$\exists\ \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ не о.п.с.

$\to A$ приводится к Жордановой форме

Определение 1. V *– линейное пространство над* $\mathbb{R}$

$\forall\ x, y \in V \quad v := x + iy\ \in V_{\mathbb{C}}$

$\forall\ v, v' \in V_{\mathbb{C}} :$ $\quad \begin{matrix} x = Re\ v \\ y = Im\ v \end{matrix}$

Определим

1. $v = v' \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = x' \in V \\ y = y' \end{matrix}\right.$
2. $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{matrix}\right.$
3. $\forall\ \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\overbrace{\alpha x - \beta y}^{a \in V} + i \overbrace{\beta x + \alpha y}^{b \in V}}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

4. $\forall\ x \in V \leftrightarrow x + i\mathbb{0} \in V_{\mathbb{C}}$

   $V \subset V_{\mathbb{C}}$

   $\mathbb{0} \leftrightarrow \mathbb{0} + i\mathbb{0}$

Упр.: $V_{\mathbb{C}}$ *– линейное пространство над* $\mathbb{C}$

$\boxed{V_{\mathbb{C}} \text{ – комплексификация линейного вещественного пространства } V}$

Утверждение. $e_1 \dots e_n$ *базис* $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ *базис* $V_{\mathbb{C}}$

Т.е. $dimV = dimV_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$ $\qquad$ *структуры над* *разными* *полями.*

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$?

– порождающая?

– линейно независимая?

1. $\forall\ v \in V_{\mathbb{C}} \quad v = x \in V + iy \in V = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j + i \sum_{j=1}^{n} y_j e_j =$
$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\boxed{x_j + iy_j}}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n$ порождающая.

2. $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j = \mathbb{0} \qquad \begin{matrix} \gamma_j \in \mathbb{C} \\ \gamma_j = \alpha_j + i\beta_j \end{matrix}$

$||$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\alpha_j}\, e_j}_{x} + i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\beta_j}\, e_j}_{y} = \mathbb{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathbb{0} = \sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\alpha_j}\, e_j \\ y = \mathbb{0} = \sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\beta_j}\, e_j \end{cases} \underset{e_1 \dots e_n \text{ линейно независ.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \forall\ j\ \alpha_j = 0 \\ \forall\ j\ \beta_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall j\ \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow \underset{\text{лин. незав.}}{e_1 \dots e_n}$ в $V_{\mathbb{C}}$

$\square$

Определение 2. $z = x + iy \quad x, y \in V$

вектор сопряженный к z**:**

$\overline{z} = x - iy$

$(\overline{\overline{z}} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \overline{\lambda}\overline{z})$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix}$$

Утверждение. *$v_1 \dots v_m$ линейно незав. в $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \overline{v}_1 \dots \overline{v}_m$ линейно независимы в $V_{\mathbb{C}}$*

Очевидно, $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы $\Rightarrow \overline{v}_1 \dots \overline{v}_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$\left.\begin{matrix} \overline{\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \overline{v}_j} = \overline{\mathbb{0}} = \mathbb{0} \\ || \\ \sum_{j=1}^{m} \overline{\gamma}_j \overline{\overline{v}_j} = \sum_{j=1}^{m} \underset{\text{линейно незав.}}{\gamma'_j v_j} \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \forall j\ \gamma'_j = 0 = \overline{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow$ линейно независим. $\square$

$\boxed{rg(v_1 \dots v_m) = rg(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_m)}$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$

$V_{\mathbb{C}}$

$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i\underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$

Линейность?

1. *Аддитивность.* $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1+v_2)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1+\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

   Очевидно, из аддитивности $\mathcal{A}$

   $v_1+v_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

2. *Однородность*

   $\forall\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha+i\beta)(x+iy))=$

   $=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x-\beta y)+i(\alpha y+\beta x))=$

   $=\mathcal{A}(\alpha x-\beta y)+i\mathcal{A}(\alpha y+\beta x)=$

   $=\alpha\mathcal{A}x-\beta\mathcal{A}y+i\alpha\mathcal{A}y+i\beta\mathcal{A}x=$

   $=(\alpha+i\beta)\mathcal{A}x+i(\alpha+i\beta)\mathcal{A}y=\lambda\mathcal{A}x+i\lambda\mathcal{A}y=$

   $=\lambda(\mathcal{A}x+i\mathcal{A}y)=\lambda\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ – ***продолжение линейного вещ. оператора*** $\mathcal{A}$
с пространства V *на его комплексификацию* $V_{\mathbb{C}}$

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $$\left.\begin{array}{c}\underset{\text{веществ.}}{e_1\dots e_n}\text{ базис } V(V_{\mathbb{C}})\\ \mathcal{A}\leftrightarrow A\\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\leftrightarrow A_{\mathbb{C}}\end{array}\right\}\Rightarrow A_{\mathbb{C}}=A$$

   Т.е. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр. $\mathcal{A}$

2. $\forall z\in V_{\mathbb{C}}\ \ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z}=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z}$

   $z=x+iy\ \ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z}=\overline{\underset{\text{вещ.}}{\mathcal{A}x}+i\underset{\text{вещ.}}{\mathcal{A}y}}=\mathcal{A}x-i\mathcal{A}y=$

   $=\mathcal{A}x+i\mathcal{A}(-y)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x-iy)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z}$

3. $$\begin{array}{ccccc}\chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) & & \sqsupset e_1\dots e_n\text{базис}V\\ || & & || & & \mathcal{A}\leftrightarrow A\\ det(A-tE) & & det(A_{\mathbb{C}}-tE) & & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\leftrightarrow A_{\mathbb{C}}=A\end{array}$$

   Все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ являются собственными числами $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

4. $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)=\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda)=0$

   Т.к. многочлен с вещ. коэф. $\Rightarrow\overline{\lambda}$ тоже корень.

   $\lambda=\alpha+i\beta$ корень $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}\quad\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\overline{\lambda})=0$

   v соотв. с.в.

   $\Rightarrow\overline{v}$ с.в. для $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$

   $$\boxed{\text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}:\begin{array}{c}dimV_{\lambda}=dimV_{\overline{\lambda}}(\text{из утв. 2})\\ \gamma(\lambda)=\gamma(\overline{\lambda})\end{array}}$$

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{v}\underset{\text{св-во 2}}{=}\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\underset{\text{с.в. для }\lambda}{\underset{\uparrow}{v}}}=\overline{\lambda v}=\overline{\lambda}\overline{v}\Rightarrow\overline{v}$ с.в. для $\overline{\lambda}$

"III": $\mathcal{A}\in End(V)$

V над $\mathbb{R}$

$\sum\limits_{\lambda\text{с.ч.}}\alpha(\lambda)<n=dimV$

Т.е. не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ **вещ.**

$\rightarrow$ строим$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\in End(V_{\mathbb{C}})\quad A_{\mathbb{C}}=A$

Все корни с.ч. $\Rightarrow$ матрица для $A_{\mathbb{C}}$ будет сведена либо к I, либо к II

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(t) = det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$
$D = -36 < 0$
$\lambda_1 = 1$ с.ч. $\alpha(\lambda_1) = 1 \qquad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3\ \alpha(2,3) = 1$
$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$
$\lambda_1 = 1 \;\; V_{\lambda_1}] span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = 2 + 3i \qquad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$
Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещ. чисел.
Только теперь арифметические операции с комплексными.

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = span \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$

$\forall \lambda : \;\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$ диагонализир.

$T_{e \to v} = \begin{pmatrix} 1 & 3-3i & 3+3i \\ 2 & 5-3i & 5+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix} T^{-1} = \ldots$

7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение 1. *Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен $\psi(t)$ называется* ***аннулятором элемента*** *$v \in V$, если $\psi(\mathcal{A})v = \mathbb{0}$*

$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$
$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in End(V)$
$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$
$\psi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$
$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$
Т.е. перестановочны.

Определение 2. *$\psi(t)$ аннулятор элемента $v \in V$ наименьший возможной степени называется* ***минимальным аннулятором элемента*** *v*

Теорема 1 (О минимальном аннуляторе элемента).
$\mathcal{A} \in End(V)$

1. *$\forall v \in V \ \exists!$ минимальный аннулятор v*
2. *$\forall$ аннулятор элемента делится на его минимальный.*

Доказательство.

1. (a) $\sqsupset v = \mathbb{0} \quad \psi(t) = 1$ Очевидно, минимальный аннулятор.
   $\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = \mathbb{0}$

   (b) $\sqsupset v \neq \mathbb{0}$

   $$\underbrace{\underbrace{(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \dots, \mathcal{A}^{m-1}v,}_{\text{линейно независимая система}} \quad \mathcal{A}^m v}_{\text{линейно зависимая система}}$$

   $dimV = n$

   $m \le n + 1$

   $\mathcal{A}^m v = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$

   $\mathbb{0} = \mathcal{A}^m v - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum\limits_{k-0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow$ Алгоритм

   $\psi(t) = t^m - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k t^k$

   Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента v

2. ψ_1 – аннулятор v

   $\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$

   $deg\ r(t) < deg\ \psi(t)$

   $\mathbb{0} = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A})\underbrace{\psi(\mathcal{A})v}_{=\mathbb{0}} + r(\mathcal{A})v = r(\mathcal{A})v \Rightarrow$

   $$\Rightarrow \left.\begin{matrix} r(t) \text{ аннулятор } v \\ deg\ r < deg\ \psi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$

   $\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdots \psi$

$\square$

Определение 3. *Нормализованный многочлен $\phi(t)$* ***называется аннулятором*** *$\mathcal{A}$, если $\phi(\mathcal{A}) = 0$*
$(\Leftrightarrow \forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0})$
Аннулятор $\mathcal{A}$ минимальной степени называется ***минимальный многочленом***

Теорема 2 (о минимальном многочлене). $\mathcal{A} \in End(V)$

1. *$\forall \mathcal{A} \ \exists!$ минимальный многочлен*
2. *$\forall$ аннулятор $\mathcal{A}$ делится на минимальный многочлен*

Доказательство.
$e_1 \dots e_n$ базис V
$\Rightarrow$ по Теореме 1 для $\forall e_j \ \exists! \ \psi_j$ минимальный аннулятор e_j

$\psi_j(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0}$

$\psi(t) = $ Н.О.К. $(\psi_1 \dots \psi_n)$

$\forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \phi(\mathcal{A}) e_i =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

$\phi \vdots \psi_j \Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)$

$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0} \Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A}$

Давайте покажем, что у ϕ степень минимальная.

От противного.

$\exists \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A} \quad \sqsupset deg\ \phi_1 < deg\ \phi$

$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0} \Rightarrow \phi_1$ аннулятор элемента $e_j \overset{\text{по Теореме 1}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \underset{\text{аннулятор } e_j}{\phi_1} \vdots \underset{\text{минимальный аннулятор } e_j}{\psi_j} \Rightarrow \phi_1 \vdots \phi \Rightarrow deg\ \phi_1 \geq deg\ \phi$. Противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow deg\ \phi$ минимальный $\Rightarrow$ п.2 доказан, т.к. $\forall$ аннулятор $\mathcal{A} \vdots \phi$

Единственность?

$\sqsupset \quad \phi_1, \phi \quad$ минимальные аннуляторы одной степени.

нормализов. $\Rightarrow$ ст. коэф. 1

$deg(\phi_1 - \phi) < deg(\phi) = deg(\phi_1)$

$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \underbrace{\phi_1(\mathcal{A})v}_{=\mathbb{0}} - \underbrace{\phi(\mathcal{A})v}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi_1 - \phi$ аннулятор $\mathcal{A}$ меньшей степени $\Rightarrow$ противоречие <u>минимальн.</u> $\square$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \phi = ?$ минимальный многочлен

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_1?$

$$\underbrace{\underbrace{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{линейно независ.}} \quad \mathcal{A}^2 e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}^2 e_1 = -4e_1 + 4\mathcal{A}e_1$

$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\underbrace{\underbrace{e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{линейно независ.}} \quad \mathcal{A}^2 e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}^2 e_2 = 4\mathcal{A}e_2 - 4e_2$

$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\underbrace{e_2 = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{лин. нез.}} \quad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$

$\psi_3(t) = t - 2$

$\phi(t) = \text{Н.О.К. } ((t-2)^2, (t-2)) = (t-2)^2$

Теорема 3 (Кэли-Гамильтона)**.** $\mathcal{A} \in End(V)$

$\underbrace{\chi(t)}_{\textit{характерист. многочлен}} = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ *– аннулятор* $\mathcal{A}$

Доказательство. $\chi(\mathcal{A}) = det(\mathcal{A} - \mathcal{A}) = \mathbb{0}$ □

Я так и не понял это норм доказательство или нет. В любом случае далее идет длинное док-во.

Доказательство. μ – не корень $\chi(t)$

$det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$

$e_1 \dots e_n$ базис v. $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$(A - \mu E)^{-1} = \dfrac{1}{det(A - \mu E)} B \leftarrow$ союзная матрица (прис-ная)

$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow$ определиитель $(n-1)$-го порядкка $A - \mu E$

Т.е. мн-н степени $n-1$ относительно μ

$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \dots + B_1\mu + B_0$

$$\begin{aligned}
&det(A - \mu E) \cdot E = \ (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + B_1\mu + B_0)\\
&||\\
&\chi(\mu) \cdot E\\
&||\\
&\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k \cdot E
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl|l}
\mu^0 : & \alpha_0 E = AB_0 & A^0\\
\mu^1 : & \alpha_1 E = AB_1 - B_0 & A^1\\
\mu^2 : & \alpha_2 E = AB_2 - B_1 & A^2\\
\dots & & \\
\mu^{n-1} : & \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2} & A^{n-1}\\
\mu^n : & \alpha_n E = -B_{n-1} & A^n
\end{array}$$

$\chi(\mathcal{A}) = \chi(A) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A^2B_1 - AB_0 + A^3B_2 - A^2B_1 + \dots + A^nB_{n-1}$

$- A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \mathbb{0}$

χ – аннулятор $\mathcal{A}$ □

Теорема 4. $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корнеq характеристического многочлена $\mathcal{A}$ совпадает с множеством корней минимального многочлена $\mathcal{A}$ (без учета кратности)

Доказательство. $\chi(t)$ – характерист., $\phi(t)$ – минимальный многочлен.

$" \Leftarrow "$ $\;\sqsupset \phi(\lambda) = 0 \Rightarrow$ т.к. χ аннулятор $\mathcal{A}$, то по Т-ме 2 $\chi \vdots \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

$" \Rightarrow "$ $\;\sqsupset \chi(\lambda) = 0$

1. $\sqsupset \lambda \in K \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A}$ $\quad \exists v \neq \mathbb{0} : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$
   $\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = \mathbb{0} \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$ минимальный аннулятор v
   Т.к. $\phi \vdots \psi \Rightarrow \lambda$ корень ϕ
   $\phi(\lambda) = 0$
2. $\lambda \notin K$ т.е. III случай: $K = \mathbb{R}$
   $\exists$ комплексные корни характерист. многочлена.
   $V \to V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$ базис $V \to$ базис $V_{\mathbb{C}}$
   $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \mathcal{A}e_j + i\mathcal{A}\mathbb{0} = \mathcal{A}e_j$
   $e_j = e_j + i\mathbb{0}$
   $\Rightarrow \forall k \; \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$
   $\Rightarrow$ Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).
   Получим, что минимальные многочлены $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{A}$ совпадают.
   $$\left.\begin{array}{c} \text{Т.е. } \phi \text{ мин. мн-н для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Применим случай а) для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$
   $\Rightarrow \lambda$ с.ч. λ корень ϕ

□

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \left|\begin{array}{cc|c} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ \hline -2 & 1 & 2-t \end{array}\right| = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни $\chi : 2$

Корни $\phi : 2$

$\rightsquigarrow$ еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

Следствие 1.

1. $\psi \quad \vdots \quad \phi$
   характер. (аннулятор) минимальный (аннулятор мин.)
2. $deg\ \phi = n = dimV \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \chi(t) & = & \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{\alpha(\lambda)} \\ \phi(t) & = & \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)} \end{array} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$$

7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$

$\sum\limits_{\lambda} m(\lambda) = m$

$deg\ \phi = m$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$dimP_{m-1} = m$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

$\phi(t) = \underbrace{(t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t)}_{\text{вз. просты}}$

$$\phi_\lambda(\lambda) \neq 0$$
$$\phi_\lambda(\mu) = 0$$
$$\mu \neq \lambda$$

Определение 1. $I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p \vdots \phi_\lambda\}$

Главный идеал, *порожденный многочленом* $\phi_\lambda =$

$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda \phi_\lambda\}$

I_λ – *линейное подпространство* P_{m-1}

$p_{1,2} \vdots \phi_\lambda \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \vdots \phi_\lambda$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$\mathbb{0} = \sum_\lambda \underbrace{f_\lambda \phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda \cdot \phi_\lambda + \underbrace{\sum_{\mu\neq\lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

$$\Rightarrow f_\lambda \cdot \underbrace{\phi_\lambda \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}_{\text{вз. просты}} \Rightarrow \underset{deg\ f_\lambda = m(\lambda)-1}{f_\lambda} \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda \equiv 0$$

$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow f_\lambda \phi_\lambda \equiv \mathbb{0} \Rightarrow$ Дизъюнктны

2. $$\begin{array}{ccc} dimP_{m-1} & = & m \\ \| & & \\ \sum\limits_\lambda dimI_\lambda & = & \sum\limits_\lambda m(\lambda) = m \end{array}$$

$I_\lambda \subset P_{m-1}$

$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda$

$\square$

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1}\ \exists!\ p = \sum\limits_\lambda p_\lambda$

$p_\lambda \in I_\lambda$

$\boxed{1 = \sum\limits_\lambda p_\lambda \text{ – \textit{полиномиальное разложение единицы}}}$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{cccc} p_\lambda & \cdot\ p_\mu & \vdots & \phi \\ \| & \| & & \\ f_\lambda\phi_\lambda & f_\mu\phi_\lambda & = & \eta\cdot\phi \\ & \uparrow & & \\ & (t-\lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

2. $\forall\lambda\ m(\lambda)=1$

   Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

   $f_\lambda = const \quad (def\ f_\lambda = m(\lambda)-1=0)$

Теорема 2 (Лагранжа)**.**
$\forall\lambda : m(\lambda)=1 \Rightarrow$
$\forall p\in P_{m-1}\ \ p(t)=\sum\limits_\lambda \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\cdot\phi_\lambda(t)$

Доказательство.
корень $\phi\to\mu\neq\lambda$ $\begin{array}{l}\phi_\lambda(\mu)=0\\ \phi_\lambda(\lambda)\neq 0\end{array}$

$$p(t)\ \sum_\lambda p_\lambda(t)=\sum_\mu \underbrace{\boxed{f_\mu}}_{\substack{\uparrow \\ const,\ \text{т.к.} \\ \text{корни взаимно} \\ \text{просты}}}\cdot\phi_\mu(t)$$

$p(\lambda)=f_\lambda\cdot\phi_\lambda(\lambda)\Rightarrow\forall\lambda : f_\lambda=\frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$
$\phi(t)=\prod\limits_\mu(t-\mu)$

$$\phi'(t)=\sum_\mu\underbrace{\prod_{\lambda\neq\mu}(t-\lambda)}_{\phi_\mu(t)}=\sum_\mu\phi_\mu(t)$$

$$\phi'(\lambda)=\sum_\mu\ \underset{\substack{\| \\ 0\ \mu\neq\lambda}}{\phi_\mu(\lambda)}\ =\phi_\lambda(\lambda)\ \Rightarrow f_\lambda=\frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\Rightarrow p=\sum_\lambda\frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$$ □

Следствие 1. $\forall\lambda : m(\lambda)=1$
$1=\sum\limits_\lambda p_\lambda\Rightarrow \boxed{t=\sum\limits_\lambda\lambda p_\lambda}$

Доказательство. По теореме: $1=\sum\limits_\lambda \boldsymbol{p_\lambda}=\sum\limits_\lambda f_\lambda\cdot\phi_\lambda=\sum\limits_\lambda\dfrac{1}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}}\cdot\boldsymbol{\phi_\lambda(t)}$

По теореме: $t=\sum\limits_\lambda\dfrac{\lambda}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}}\boldsymbol{\phi_\lambda(t)}=\sum\limits_\lambda\lambda p_\lambda$ □

$\mathcal{A}\in End(V)$
ϕ минималный многочлен, все корни $\in K(\Rightarrow$ все корни $\chi\in K$
$\Rightarrow$ т.е. все с.ч. $\in K$ – I, II случаи)

$1 = \sum\limits_\lambda p_\lambda(t)$

$\mathcal{P}_\lambda := p_\lambda(\mathcal{A})$

$\mathcal{P}_\lambda \in End(V)$ $\quad \boxed{\mathcal{E} = \sum\limits_\lambda \mathcal{P}_\lambda}$ операторное разложение единицы

$\mathcal{P}_\lambda$ – проекторы ? $\quad \uparrow$ это уже есть

Достаточно проверить $\mathcal{P}_\lambda \cdot \mathcal{P}_\mu \underset{\lambda\neq\mu}{=} \mathbb{0}$

$\mathcal{P}_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\lambda \neq \mu$

$\mathcal{P}_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = f_\mu(\mathcal{A}) \cdot \phi_\mu(\mathcal{A})$

перестановочны, т.к. многочлены от $\mathcal{A}$

$\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot f_\mu(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \boldsymbol{\phi_\mu(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$

$\updownarrow$ $\qquad \uparrow$ содержит

$(p_\lambda \cdot p_\mu \vdots \phi$ см. замеч. 1) $\quad \eta(\mathcal{A})\boldsymbol{(t-\mu)^{m(\mu)}} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_\lambda$ проекторы – **спектральные проекторы** $\mathcal{A}$

$Im\mathcal{P}_\lambda$ **спектральное подпространство**

$\underset{7.5}{\Rightarrow} \boxed{V = \bigoplus\limits_\lambda Im\mathcal{P}_\lambda}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow$ не о.п.с.

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \gamma(\lambda_2) = 1$

$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$

$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$

$1 = \sum\limits_\lambda p_\lambda = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1}\phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$

$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$

Прав. дробь $\dfrac{1}{\phi} = \sum\limits_\lambda \underbrace{\dfrac{f_\lambda \cdot \phi_\lambda}{\phi}}_{\text{Правильн.}} = \sum\limits_\lambda \underbrace{\dfrac{f_\lambda}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\text{Правильн. дробь}}$

$deg\ f_\lambda < m(\lambda)$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \underbrace{\frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3}}_{\text{простейшие}} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16})\overbrace{(t-3)}^{\phi_\lambda}}_{p_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}\overbrace{(t+1)^2}^{\phi_{\lambda_2}}}_{p_{\lambda_2}}$$

$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $p_1 + p_2 = E$

$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

$\boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda} \nearrow \quad 1 = \sum p_\lambda$ спектральное разложение о.п.с.

$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1 \qquad \text{Доказательство позже}}$

Определение 2. $K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
называется ***корневым подпространством*** $\mathcal{A}$

Теорема 3.

1. K_λ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$
2. $Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$
3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ *минимальный многочлен* $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda}$

Доказательство.

1. $x \in K_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_\lambda$

   $\underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{A}}x = \mathcal{A}\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

   $\Rightarrow \mathcal{A}x \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

2. $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{P}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A}) =$

   $= f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$

   $\forall x \in V$

   $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda} = \mathbb{0} \Rightarrow Im\mathcal{P}_\lambda \subseteq Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_\lambda$

   Обратно: $K_\lambda \overset{?}{\subseteq} Im\mathcal{P}_\lambda$

   $x \in K_\lambda$

   $\mu \neq K_\lambda$ $\mathcal{P}_\mu x = \underbrace{f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A})x}_{\eta(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}} = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

   $\nearrow$ содержит $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

   $x = \mathcal{E}x = \sum\limits_{\mu} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{0}\ \mu\neq\lambda}}{\mathcal{P}_\mu x} = \mathcal{P}_\lambda x \in Im\mathcal{P}_\lambda \Rightarrow K_\lambda \subseteq Im\mathcal{P}_\lambda$

   $\Rightarrow \boxed{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$?
   $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$
   Минимальный?

   $\sqsupset$ не мини$\overset{\psi}{\text{м}}$альный
   $\psi_1 = (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}$ $\sqsupset$ это минимальный многочлен
   $\phi_1 := (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$ аннулятор $\mathcal{A}$?
   $\underset{\mu\neq\lambda}{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$
   $= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A}) \cdot \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$
   $\forall x \ \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$
   $$= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}}_{\substack{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x \\ \text{мин. многочлен по предположению}}} = \mathbb{0}$$
   $\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0}$
   $$\phi_1(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\sum_\mu \mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu\neq\lambda}\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = \mathbb{0}$$
   $\Rightarrow \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A}$, но степени $< \phi$
   $deg\ \phi_1 = m-1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$\square$

Следствие 1. *A о.п.с.* $\Leftrightarrow \forall\lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A}$ о.п.с.
$\phi(t)\ \prod_\lambda (t-\lambda)$ покажем что это минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ – собственные подпространства $\mathcal{A}$
$\forall v \in V\ \exists!\ v = \sum_\lambda v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$
$\phi(\mathcal{A})v = \prod_\lambda (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})\sum_\mu v_\mu =$
$$= \sum_\mu \underbrace{\prod_\lambda (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})}_{\phi_\mu(\mathcal{A})\cdot(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})} v_\mu = \sum_\mu \phi_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})v_\mu}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{0}}} = \mathbb{0}$$
$v_\mu \in V_\mu = Ker(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}) \nearrow$
$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень $\Rightarrow$ минимальный многочлен.
$(\Leftarrow)\forall\lambda : m(\lambda) = 1$
$$\underset{\substack{\shortparallel \\ Im\mathcal{P}_\lambda}}{K_\lambda} = Ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^1 = V_\lambda$$
$V = \bigoplus_\lambda K_\lambda = \bigoplus_\lambda V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$ о.п.с.

$\square$

Примеры.
$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A-\lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$
$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A-\lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2}$ — упр.

7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. $\mathcal{B} \in End(V)$ *называется* ***нильпотентным****, если* $\phi(t) = t^{\nu}$
Минимальный многочлен $\mathcal{B}$*, т.е.* $\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{0}$
ν – индекс нильпотентности *(мин. степерь* $\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{0}$*)*

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{P}_{\lambda}^2 = \mathcal{P}_{\lambda} \\ \text{Идемпотентность}\end{array}}$$

Степень минимального многочлена $\to \nu \leq dimV \underset{\overset{\uparrow}{\text{степень } \chi}}{=} n$

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \leq dimV_{\lambda}$

Доказательство. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_{\lambda}}$
$\mathcal{B}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{k_{\lambda}} \Rightarrow \mathcal{B}_{\lambda}^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_{\lambda}} = \mathbb{0}$
$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_{\lambda} \in End(K_{\lambda})$
$m(\lambda) \leq dimK_{\lambda}$ □

Замечание. $\underbrace{\sum_{\lambda} m(\lambda)}_{deg\ \phi} \leq \underset{\underset{deg\ \chi}{||}}{\sum} dimK_{\lambda} = n$

$$\bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана)**.**
$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ можно представить в виде:
$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{D}$ о.п.с.
$\mathcal{B}$ нильпотентный, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ перестановочны

Доказательство. ϕ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$\mathcal{E} = \sum\limits_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}$ операторн. разложение единицы
$\mathcal{D} := \sum\limits_{\lambda} \lambda\mathcal{P}_{\lambda}$ $\quad D$ о.п.с.?
$V = \bigoplus\limits_{\lambda} Im\mathcal{P}_{\lambda}$
$\exists\ v_{\lambda} \neq 0 \ \in Im\mathcal{P}_{\lambda}$

$$\underline{\underline{Dv_{\lambda}}} = (\sum_{\mu} \mu\mathcal{P}_{\mu})v_{\lambda} = \sum_{\mu} \mu \underset{\substack{\mathcal{P}_{\mu}\mathcal{P}_{\lambda} = \mathbb{0} \\ \lambda \neq \mu}}{\overset{\substack{0\ \mu \neq \lambda \\ ||}}{(\mathcal{P}_{\mu}v_{\lambda})}} = \lambda\mathcal{P}_{\lambda}v_{\lambda} = \underline{\underline{\lambda \cdot v_{\lambda}}}$$

$\Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{D}, v_{\lambda}$ соотв. с.в. $\mathcal{D}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} Im\mathcal{P}_{\lambda} \subseteq V_{\lambda}^{\mathcal{D}} \text{ собств. подпр-во } \mathcal{D}\text{, отвечающ. с.ч. } \lambda \\ V = \bigoplus\limits_{\lambda} Im\mathcal{P}_{\lambda} \text{ дизъюнктны} \end{array}} \Rightarrow Im\mathcal{P}_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

Объединение базисов $Im\mathcal{P}_{\lambda}$ = базис V
Каждый вектор из $Im\mathcal{P}_{\lambda}$ – это с.в. $\mathcal{D}$
$\Rightarrow$ у V есть базис из с.в. $\Leftrightarrow D$ о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_\lambda \lambda\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{A}\sum_\lambda \mathcal{P}_\lambda - \sum_\lambda \lambda\mathcal{P}_\lambda = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda$$

$$\nu = \max_\lambda m(\lambda) \quad \underset{\text{мин. мн-н } \mathcal{A}}{\phi(t)} = \prod_\lambda (t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^\nu = (\sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda)^\nu = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^\nu \mathcal{P}_\lambda =$$

$$\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

$$= \sum_\lambda \ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^\nu \underbrace{f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_\lambda} =$$

все операторы перестановочны

$$\sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{\nu - m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}} = 0$$

$\mathcal{B}$ нильпотент

$$\mathcal{B} = \sum_\lambda \ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}$$

перестановочны

$$D = \sum_\mu \mu\mathcal{P}_\mu$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$

□

Замечание.

1. $\mathcal{B} = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda = \sum_\lambda \mathcal{B}_\lambda$
   $\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ все три оператора взаимно-перестановочны
   $\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$
   $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \ \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$B^2 \overset{?}{=} \mathbb{0} \quad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \underset{\text{Разложение Жордана}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}}_{\text{Диагонализ.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Нильпотент.}}$$

Теорема 2 (Единственность разложения Жордана)**.**

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)

Рис. 1

Доказательство. $\sqsupset \mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{Нильпотент}}{\mathcal{C}} \quad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

Т.к. $\mathcal{D}'$ о.п.с., то $\mathcal{D}' = \sum\limits_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

M – множество с.ч. $\mathcal{D}'$

Q_μ спектральные проекторы

$Q_\mu : V \to V_\mu^\nu$

$\sum\limits_\mu Q_\mu = \mathcal{E}$

<u>Достаточно доказать: $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$</u>

1. Множество M совпадает с множеством корней ϕ – минимальн. мн-н $\mathcal{A}$

   $\{\mu\} = \{\lambda\}$

2. $ImQ_\mu = K_\mu \leftarrow$ корневое подпространство $\mathcal{A}$, отвеч. с.ч. μ ($Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$)

1. $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})Q_\mu = (\sum\limits_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum\limits_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$

   $$\begin{matrix} Q_\nu Q_\mu = 0 \\ \nu \neq \mu \end{matrix} \qquad Q_\mu^2 = Q$$

   $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu \; = \; \mathcal{C}^k Q_\mu$

   $\uparrow$

   Верно, если $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

   $\Rightarrow$ докажем: $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

   $\sqsupset \lambda \neq \mu \;\; (\lambda - \mu)Q_\lambda\mathcal{C}Q_\mu = \underset{Q_\lambda\mathcal{D}'}{(\lambda Q_\lambda)}\mathcal{C}Q_\mu - Q_\lambda\mathcal{C}\underbrace{(\mu Q_\mu)}_{\mathcal{D}'Q_\mu} =$

   $\mathcal{D}'Q_\mu = \sum\limits_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu\mathcal{D}'$

   $Q_\lambda(\mathcal{D}'\mathcal{C} \underset{\mathbb{0}}{\underset{\parallel}{-}} \mathcal{C}\mathcal{D}')Q_\mu = \mathbb{0}$

$\lambda \neq \mu \qquad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \mathbb{0} = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$

$$\underbrace{\sum_\lambda Q_\lambda}_{\mathcal{E}} \mathcal{C} Q_\mu = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \underset{\boxed{\mathcal{E}}}{\underline{\underline{\boxed{\sum_\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}}$$

$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$

$k(\mu) = minK$, такой что $\mathcal{C}^k Q_\mu = \mathbb{0}$

Такое $K(\mu)$ обязательно найдется, т.к. $\mathcal{C}$ – нильпотент.
$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$

$(t-\mu)^{k(\mu)}$ – минимальный аннулятор элементов imQ_μ

$ImQ_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)}$

ϕ минимальный многочлен $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулирует любые элементы V,
в частности элементы ImQ_μ
Т.е. $\phi(t)$ аннулятор элементов $ImQ_\mu \Rightarrow \phi(t) \vdots (t-\mu)^{k(\mu)} \leftarrow$ минимальный аннулятор для ImQ_μ

$\Rightarrow$ верно $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t-\mu)^{k(\mu)}$$

$\Rightarrow \phi \vdots \psi$

Покажем, что ψ аннулятор $\mathcal{A}$

$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{перестановочны}}}{(\mathcal{A} - \nu\mathcal{E})^{k(\nu)}} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu\mathcal{E})^{k(\nu)} \underset{\substack{|| \\ \mathbb{0}}}{\underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \psi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \vdots \phi$ минимальный аннулятор
$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda$ – корни $\phi\}$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$
$$\mu = \lambda$$

2. $$\begin{array}{ll} (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu & = \mathbb{0} \\ \quad || & \\ (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu & = \mathbb{0} \end{array}$$

μ корень ϕ

$$ImQ_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = Im\mathcal{P}_\mu$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bigoplus\limits_\mu K_\mu & = V \\ \bigoplus\limits_\mu ImQ_\mu & = V \end{array}\right\} \Rightarrow ImQ_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

$\square$

Теорема 3. *$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана*
$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$

Доказательство. $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

μ – не корень $\underset{\text{не зависит от } t}{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu} = det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\substack{\| \\ \mathbb{0}}}) =$

$= det(\mathcal{A} - \underset{t=1}{\mu\mathcal{E}} - t\mathcal{B}) \cdot det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + \underset{t=0}{(}\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \ldots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1})$

μ – не корень

$\underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu} = det(\underset{\boxed{\mathcal{D}}}{\underline{\underline{\boxed{\mathcal{A}} - \mu\mathcal{E}\boxed{-\mathcal{B}}}}}) \cdot det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} =$

$= \underbrace{det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{(det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}))^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}}$

$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$ $\square$

Следствие 1. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана*

То $det\mathcal{A} = det\mathcal{D}$

Доказательство. Очевидно, $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$ $\square$

Следствие 2. $\boxed{dimK_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{о.п.с.}}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = dim\mathcal{P}_\lambda = dimK_\lambda$

$\forall\lambda$ корня χ с.ч. (I, II) $\square$

7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda$ корневые $\quad dimK_\lambda = \alpha(\lambda)$

$\chi(t) = \prod\limits_{\lambda\text{с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \qquad \lambda \in K$ все корни с.ч.

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$

$V_\lambda \ = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \qquad \gamma(\lambda) = dimV_\lambda$

$\bigcap|$

$K_\lambda \ = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

$\forall\lambda\ K_\lambda \rightsquigarrow$ строим базис $\rightsquigarrow$ матрица оператора будет иметь
$\bigcup\limits_\lambda$ Жорданов базис блочно-диагональную структуру
– Жорданова форма матрицы

$\sqsupset K_\lambda = K \ \ \gamma(\lambda) = \gamma$
$\alpha(\lambda) = \alpha \ \ m(\lambda) = m$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{K_\lambda} \qquad dim = \gamma$

$$\begin{array}{lcl} K_1 & = & V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \\ \bigcap| & & \\ K_2 & = & Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \\ \vdots & & \\ \bigcap| & & \\ K_m & = & Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad dim = \alpha \end{array}$$

Пример.

$\alpha = dimK_\lambda = dimK_5 = 24$

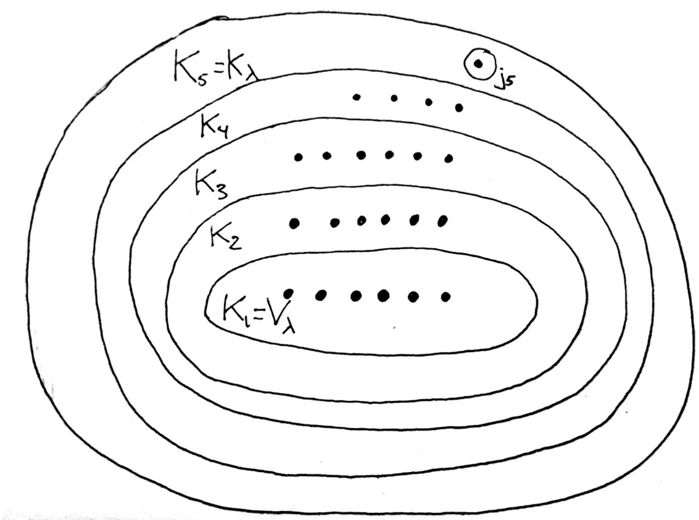
$m = 5$

$\gamma = 7$

Циклический базис

$$\begin{array}{|c|}\hline j_5 \\ j_4 \\ j_3 \\ j_2 \\ j_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{cl} \in & K_5 \backslash K_4 \\ = & \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_5 \in K_4 \\ = & \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_4 \in K_3 \\ = & \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_3 \in K_2 \\ = & \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda \end{array}$$

j_1, j_2, j_3, j_4 – **присоединенные вектора.**



$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$

$j_{r+1} \in K_{r+1} = Ker\mathcal{B}^{r+1} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r+1}$

$\mathcal{B}^r j_r = \mathcal{B}^r \mathcal{B} j_{r+1} = \mathcal{B}^{r+1} j_{r+1} = \mathbb{0}$

$\Rightarrow j_r \; inK_r = Ker\mathcal{B}^r$

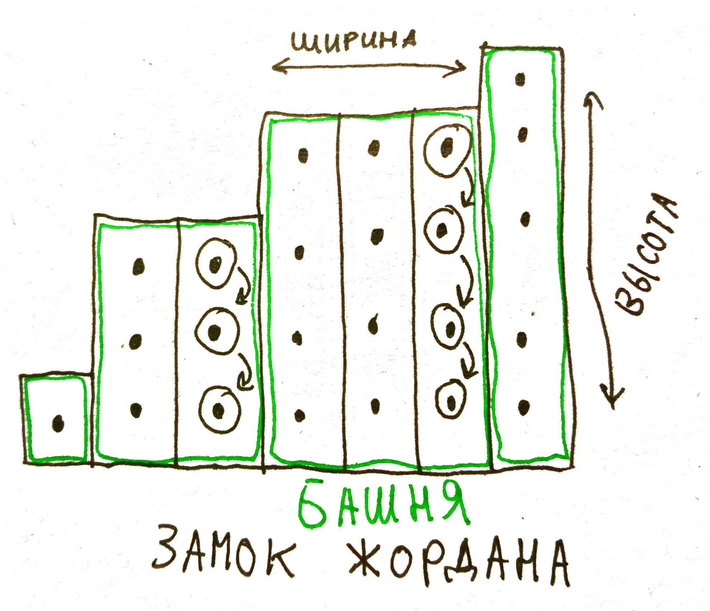
$L = span(j_1 \; j_2 \; j_3 \; j_4 \; j_5)$

$\mathcal{A}|_L$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 & \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 & \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 & \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 & \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5 \end{array}$$

Матрица $\mathcal{A}|_L$ в базисе $j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **Клетка Жордана 5×5** (блок нижнего уровня)

$$(j_5\ j_4\ j_3\ j_2\ j_1) \to \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



Башня – циклическое объединение базисов одной длины.

Высота башни – количество векторов в базисе.

Ширина башни – число циклических базисов одной размерности

Основания каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов $= \gamma$

$\quad ||$

Число Жордановых клеток

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\lambda} & & & \\
& \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} & \leftarrow \begin{matrix}\text{Блок}\\ \text{нижнего}\\ \text{уровня}\end{matrix} \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} \end{matrix}} & & \\
\begin{matrix}\text{Блок среднего}\\ \text{уровня} \rightarrow\\ \text{(отвечает башне)}\end{matrix} & & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} \end{matrix}} & \\
& & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{matrix}}
\end{pmatrix}$$

$\uparrow$
Блок верхнего уровня, отвечает K_λ

$\gamma =$ Число блоков нижнего уровня

$\alpha =$ Число λ на диагонали

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\forall \alpha = \gamma$

V_λ $\boxed{\cdot}\,\boxed{\cdot}\,\boxed{\cdot}\,\boxed{\cdot}\,\boxed{\cdot}$

"Деревня Жордана"

Примеры. λ $\alpha(\lambda) = 4$

1. $\gamma(\lambda) = 3$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}\boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda}\end{matrix} \end{pmatrix}$

2. $\gamma(\lambda) = 2$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}$ $\underset{?}{\text{или}}$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$

3. $\gamma(\lambda) = 1$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{J}$ $T = (\ldots j_1 \ldots j_5 \ldots)$

Объединение цикл. базисов для всех λ

$\mathcal{A} \quad \leftrightarrow \quad \underset{\text{В Жорд. базисе}}{\mathcal{J}}$

$\updownarrow$

$\underset{\text{В исходном}}{A}$

$\boxed{\mathcal{J} = T^{-}1AT}$

$\underset{1,\,3}{\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}}} \to T\mathcal{J} = AT$

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы $T \rightsquigarrow T$

$\rightsquigarrow$ построить Жорданов базис.

2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \underset{dimK=\alpha}{K}$

   $K_r = Ker(A - \lambda E)^2$

   $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

II

1. Найдем $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m = Ker(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$

   $\Rightarrow dimK_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$\forall\lambda \;\; K = K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$m(\lambda) = m$

$\alpha(\lambda) = \alpha$

$K_r = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^r \qquad r = 1 \ldots m$

$V_\lambda = K_1$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_m = K_\lambda = K$

Все включения будут строгие:

$\sqsupset K_{r+1} = K_r \qquad Ker\mathcal{B}^{r+1} = Ker\mathcal{B}^3$

По Теореме о rg и def: $dimK = rg\mathcal{B}^{r+1} + \cancel{def\mathcal{B}^{r+1}} = rg\mathcal{B}^r + \cancel{def\mathcal{B}^r}$ $(def\mathcal{B}^{r+1} = def\mathcal{B}^r)$

$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$

$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$

$$\begin{array}{lclcl} Im\mathcal{B}^{r+1} & = & Im\mathcal{B}^r & & \to 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие} \\ \| & & & \nearrow & \\ Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) & = & Im\mathcal{B}^r & \stackrel{\text{либо}}{\to} & \mathcal{B}^r = \mathbb{0} - \text{противоречие мин. } m \end{array}$$

$Im\mathcal{B} =: BK$

$Z_0 = BK$

$Z_r = BK + K_r$

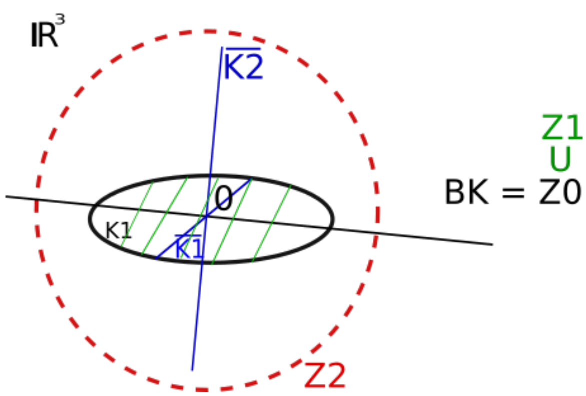
$r = 1, \ldots, m \ \ (K_m = K) \quad B : K \to K$

$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_m = K$

$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$

$\overline{K_r} \subset K_r$

$$K = \underbrace{\underbrace{\underbrace{BK} \oplus \underbrace{\overline{K_1}}}_{Z_1} \oplus \underbrace{\overline{K_2}}}_{Z_2} \oplus \ldots \oplus \overline{K_m}$$



$\underset{dim2}{K_1} \subset \underset{dim3}{K_3}$

$\underset{def\mathcal{B}}{\underset{||}{dimK_1}} + \underset{dimIm\mathcal{B}}{\underset{||}{dimBK}} = 3$

$$\begin{array}{lcl} Z_1 & = & BK + K_1 \supset Z_0 \\ \bigcap & & \\ Z_2 & = & BK + K_2 \end{array}$$

$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus BK$

Теорема 1. $0 \leq r \leq m-1$

$B^r K = B^r\overline{K}_{r+1} \oplus B^r\overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r\overline{K}_m \oplus B^{r+1}K$

Доказательство.

$K = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus BK$

$\forall x \in K \quad x = \underset{\in\overline{K}_1}{x_1} + \underset{\in\overline{K}_2}{x_2} + \ldots + \underset{\in\overline{K}_m}{x_m} + \underset{\in BK}{Bx^*}$

$1 \leq r \leq m-1$

$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \ldots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1}x^* \boxed{=}$

$$B^r x_j = B^{r-j}\underset{\mathbb{0}}{\underset{||}{B^j x_j}} = \mathbb{0}$$

$$1 \le j \le r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = Ker B^j = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$\boxed{=} B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^*$

Дизъюнктность?

$* \; B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = \mathbb{0}$

$B^r(\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m + Bx^*}_{y}) = \mathbb{0}$

$y \in Ker B^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K_r} \oplus BK$

$\Rightarrow \underset{\text{Однозначно представим}}{y} = \underset{x_i \in \overline{K_i}}{x_1 + x_2 + \ldots + x_r + B} x^{**}$

$||$

$\underset{x_{r+i} \in \overline{K_{r+i}}}{x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m + Bx^*} \Rightarrow \underset{\forall i = 1 \ldots m}{\boxed{x_i = \mathbb{0}}} *$

$\Downarrow$ подставим

$\mathbb{0} + \mathbb{0} + \ldots + \mathbb{0} + B^{r+1} x^* = \mathbb{0} \Rightarrow B^{r+1} x^* = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктн. $\square$

Следствие 1.

$K = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus$

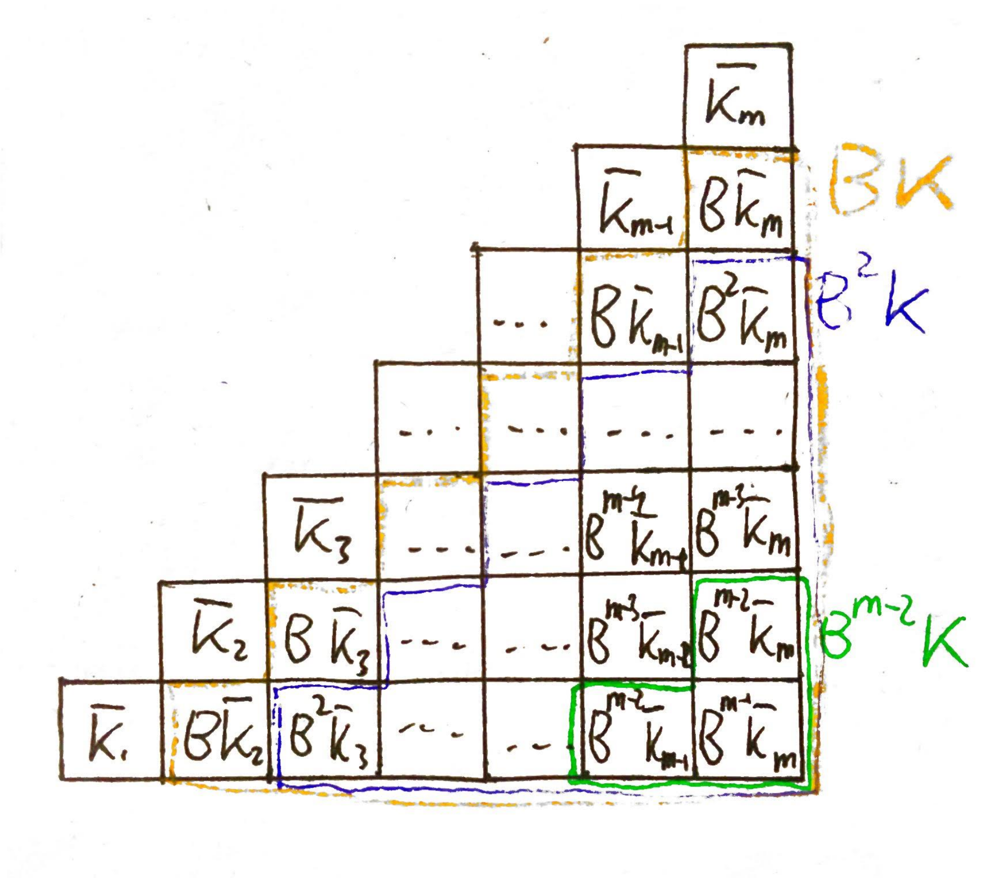
$\oplus \underline{B^2\overline{K}_3 \oplus B^2\overline{K}_4} \oplus \ldots \oplus B^{m-2}\overline{K}_{m-1} \oplus B^{m-2}\overline{K}_m \oplus B^{m-1}\overline{K}_m$

Доказательство.

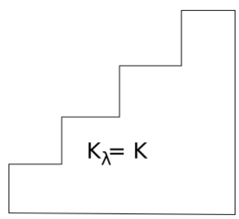
$K = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus BK$

$BK = \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus B^2 K$

$B^2 K = \underline{B^2\overline{K}_3 \oplus B^2\overline{K}_4 \oplus \ldots \oplus B^2\overline{K}_m} \oplus B^3 K$ $\square$



$\overline{K}_j$ – **Опорные подпространства**



$1 \leq r \leq m$

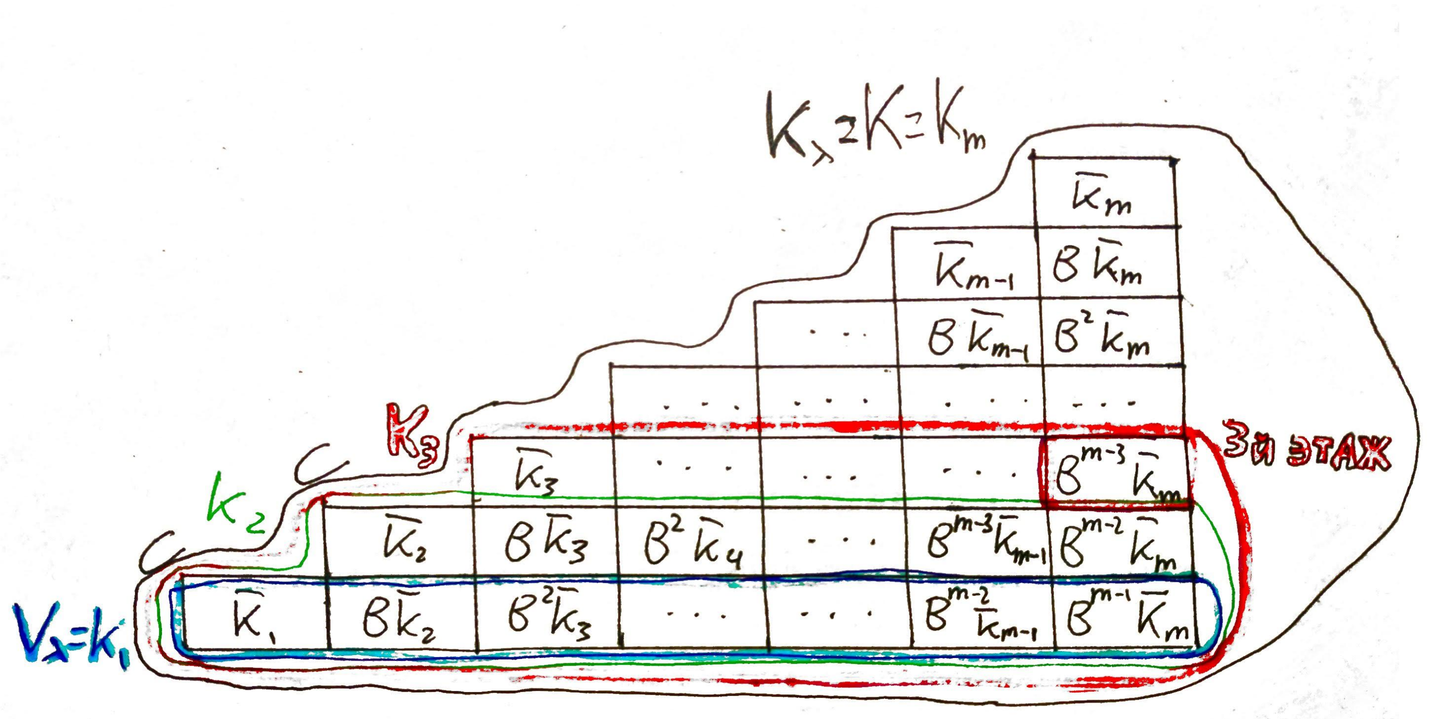
Если $\overline{K_r} \neq \mathbb{0} \longrightarrow \boxed{\tau_r = \overline{K_r} \oplus B\overline{K_r} \oplus B^2\overline{K_r} \oplus \ldots \oplus B^{r-1}\overline{K_r}}$

Башня высоты r. "Башня растет вниз"

"Основание" башни $\equiv$ опорное подпространство $\overline{K_r}$

"Крыша" башни $\equiv B^{r-1}\overline{K_r} \subset V_\lambda$

$x \in B^{r-1}\overline{K_r} \qquad \underline{\begin{matrix} x = B^{r-1}y \\ y \in \overline{K_r} \subseteq K_r \end{matrix}} \qquad \underline{Bx = B^r y = \mathbb{0}} \quad x \in KerB = V_\lambda$



Если $K_r = \{\mathbb{0}\}$, то башня высоты r отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$1 \le l \le m$
$\overline{K}_l, B\overline{K}_{l+1}, B^2\overline{K}_{l+2}, \dots B^{m-1}\overline{K}_m \quad \subset K_l = KerB^l$
– l-ые этажи соотв. башен

Покажем: $B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\overline{K}_{l+j}) = (B^{l+j})\underbrace{\overline{K}_{l+j}}_{\subset K_{l+j} = KerB^{l+j}} = \mathbb{0} \Rightarrow B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^{m} \tau_r$$

Теорема 2 (О размерности башни)**.**
$\forall \tau_r$ любой этаж башни имеет одну и ту же размерность $d_r = dim\overline{K}_r$ = ширина башни.

$\overline{K}_r$
$B\overline{K}_r$
$B^2\overline{K}_r$
$\dots$
$B^{r-1}\overline{K}_r$

r высота $\updownarrow$; τ_r

$\boxed{d_r = dim\overline{K}_r}$ = *ширина башни*

Доказательство.
$B^j|_{\overline{K}_r} : \overline{K}_r \to B^j\overline{K}_r$

$B^j_{\overline{K}_r}$ изоморфизм "?"

$KerB^j|_{\overline{K}_r} = \{\mathbb{0}\}$ тривиально "?"

$$
\begin{array}{lcl}
x \in \overline{K}_r \subset K_r \subset Z_r & = & Z_{r-1} \quad \oplus \overset{\ni x}{\overset{\downarrow}{\overline{K}_r}} \Rightarrow \boxed{x = \mathbb{0}} \qquad \boxed{Z_{r-1} = BK + K_{r-1}} \\
x \in \underset{j=1\ldots r-1}{KerB^j} = K_j \rightarrow & \nearrow & \cup \\
 & & K_{r-1} \\
 & & \cup \\
 & & \vdots \\
 & & \cup \\
 & & K_1
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Изоморфизм $\Rightarrow dim(\overline{K_r}) = dim(B^j \overline{K}_r) = d_r$ $\square$

Следствие 1. $\sum\limits_{r=1}^{m} d_r = dimV_\lambda = \gamma(\lambda)$

$\sum\limits_{r=1}^{m} \underbrace{r \cdot d_r}_{dim\ \ \tau_r} = dimK_\lambda = dimK = \alpha(\lambda)$

Следствие 2 (Теорема Фробениуса)**.**
$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$

$(d_m = rgB^{r-1})$

Доказательство.
$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$

$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \ldots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$

$$
\begin{aligned}
d_1 + d_2 + \ldots + d_m &= \rho_0 - \rho_1 \\
d_2 + \ldots + d_m &= \rho_1 - \rho_2 && \downarrow - \\
d_3 + \ldots + d_m &= \rho_2 - \rho_3 && \downarrow - \\
d_{m-2} + d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-3} - \rho_{m-2} && \downarrow - \\
d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-2} - \rho_{m-1} && \downarrow - \\
d_m &= \rho_{m-1} && \downarrow - \\
\rho_m &= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}}$ $\square$

8 Тензоры

8.1 Линейные формы(линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контрвариантные преобразования.

__Напоминание:__ $V^* = \{ \underset{\text{лин.}}{f} : V \to K \}$ __сопряженное (дуальное) пр-во к V__

$V^* \cong K_n$ — пр-во n-мерных строк. (не естественный)

$e_1 \dots e_n$ базис V $\quad \forall x \in V \quad x = x^i e_i \quad f(x) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \text{ коэф-ты } f} = x^i a_i \leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \in K_n$

$\forall f \in V^*$ $\qquad \Updownarrow$

$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n$ пр-во n-мерных столбцов.

$\dim V^* = n = \dim V$

__Определим:__ $\omega^i : V \to K \quad \forall x \in V \quad \omega^i(x) = x^i$ i-ая коор-та x отн-но базиса $e_1 \dots e_n$

$i = 1 \dots, n$ $\qquad \omega^i$ — __координатные ф-ии__

__очевидно,__ ω^i лин. отобр. $\Rightarrow \omega^i \in V^*$

__очевидно,__ $\forall j = 1 \dots, n$, $\forall i = 1 \dots, n$ $\quad \omega^i(e_j) = \underset{\text{символ Кронекера}}{\delta^i_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

> __Теорема 1:__ $\omega^1, \dots, \omega^n$ базис V^*

__Док-во:__ т.к. $\dim V^* = n$, то достаточно проверить лин. незав. $\omega^1, \dots, \omega^n$.

$\exists\ \alpha_i \omega^i = 0$, $\alpha_i \in K$

$\Rightarrow \forall x \in V \quad \alpha_i \omega^i(x) = 0 \Rightarrow$ в частности, для $\forall j = 1 \dots n \quad \alpha_i \underbrace{\omega^i(e_j)}_{\delta^i_j} = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$

$\Leftrightarrow \omega^1, \dots, \omega^n$ лин. незав. $\Rightarrow$ базис V^* ∎

> __Следствие:__ $\forall f \in V^*$ коэф-ты $a_i = f(e_i)$ (отн-но базиса e) явл-ся коор-ми формы f в пр-ве V^* отн-но базиса $\omega^1, \dots, \omega^n$.

т.о. $V^* \cong K_n$ — координ. изоморфизм отн-но базиса $\omega^1, \dots, \omega^n$

__док-во:__ $\forall f \in V^* \ \forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i$, где $a_i = f(e_i)$

т.к. $x^i = \omega^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i \omega^i(x) \ \forall x \in V \Rightarrow f = a_i \omega^i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n)$ коор-ты f отн-но базиса $\omega^1 \dots \omega^n$ ∎

__def:__ коорд. ф-ии $\omega^1 \dots \omega^n$, порожденные базисом $e_1, \dots, e_n$ пр-ва V наз-ся __сопряженным (дуальным) базисом__ пр-ва V^* к базису $e_1 \dots e_n$ пр-ва V.

$\boxed{?}$ Всякий ли базис V^* будет сопряженным к некоторому базису пр-ва V?

> __Теорема 2:__ $\exists\ \omega'^1, \omega'^2, \dots, \omega'^n$ базис $V^* \Rightarrow \exists$ базис $e_1', e_2', \dots, e_n'$ пр-ва V, т.ч. базис ω' будет сопряженным к базису e'

__Док-во:__ $\exists\ e_1, \dots, e_n$ базис V, а $\omega^1, \dots, \omega^n$ базис V^*, сопряжен. к e.

т.к. ω и ω' базисы пр-ва V^*, то $(\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) \underset{\uparrow \text{ м-ца перехода.}}{T_{\omega \to \omega'}}$

т.к. в координ. представлении эл-там V^* соот-т строки, то последнее равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = T^T_{\omega \to \omega'} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} \qquad \text{Обозначим } \boxed{S := T^T_{\omega \to \omega'}}$$

м-ца S, очевидно, невырожденная $\Rightarrow \exists\ S^{-1} =: T$

Определим „новый" базис в пр-ве V следующим равенством:

$(e_1' \dots e_n') = (e_1 \dots e_n) T$, т.о. $T = T_{e \to e'}$

Покажем, что ω' будет сопряженным к построенному e'.

$S=(s^i_j)_{n\times n}$ ← номер стр, ← номер столбца, аналогично $T=(t^i_j)_{n\times n}$ $\Rightarrow$ $w'^i = S^i_k w^k$

$\forall x\in V$: $w'^i(x) = S^i_k w^k(x) = \underbrace{S^i_k x^k}_{(Sx)_{i\text{-ая коор-та}}} = x'^i$ – i-ая коор-та x в базисе e' $\Rightarrow$ w'^i – координатная ф-я отн-но базиса e', т.е w' сопряж. базис к e' ∎

т.к. $T=T_{e\to e'}$, то $x'=T^{-1}x=Sx$

Следствие: e, e' базисы V, $T=T_{e\to e'}$, $S=T^{-1}$
w, w' сопряжен. к e и e', соот-но, базисы V^*

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll}\forall x\in V & x'=Sx=T^{-1}x\\ \forall f\in V^* & a'=aT\end{array}}$, причем $T_{w\to w'}=S^T=(T^{-1})^T$

док-во: $T_{w\to w'}=S^T$, очевидно, из док-ва т-мы.
также, очевидно, что $x'=T^{-1}x$.
остается показать, что $\forall f\in V^*$ $a'=aT$
т.к. $(w'^1 .. w'^n) = (w^1 .. w^n)T_{w\to w'}$, то $(a')^T = T^{-1}_{w\to w'}a^T \Rightarrow a' = a(\underbrace{T^T_{w\to w'}}_{S})^{-1} = aT$ ∎

Замечание: очевидно, значение лин-формы f на элементе x не должно зависеть от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (t^i_k x'^k)\cdot(a'_m S^m_i) = \underbrace{(S^m_i t^i_k)}_{(ST)^m_k=\delta^m_k,\ E} x'^k a'_m = x'^k a'_k$$

$x=Tx'$, $a=a'S$ – инвариантность формы записи лин. формы отн-но выбора базиса

def: Векторы, координаты которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с формулой замены e на e', т.е. с той же м-цей $T=T_{e\to e'}$, наз-ся ковариантными векторами или ковекторами ≡ элементы пр-ва V^*

Векторы, коор-ты которых, при замене базиса e на e', меняются по закону, противоположному ф-ле замены e на e', т.е. с матрицей $T^{-1}=S$, наз-ся контравариантными векторами или просто векторами ≡ элементы пр-ва V

Поэтому, лин. формы, также называют просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во $(V^*)^*=V^{**}$ – дважды сопряженное к V
очевидно, $\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V=n$ (все три пр-ва изоморфны)

Построим изоморфизм между V и V^{**} следующим образом:
$\forall x\in V \longrightarrow$ „x" $\in V^{**}$: $\forall f\in V^*$ $\boxed{„x"(f)=f(x)}$
сопоставим; очевидно, „x": $V^*\to K$

проверим лин-ть „x": $\forall\lambda\in K$ $\forall f_{1,2}\in V^*$
„x"$(f_1+\lambda f_2) = (f_1+\lambda f_2)(x) = f_1(x)+\lambda f_2(x) =$ „x"$(f_1)+\lambda$„x"(f_2) $\Rightarrow$ лин-но $\Rightarrow$ „x"$\in(V^*)^*$

Теорема 3: соответствие $x\in V\to$ „x"$\in V^{**}$ явл-ся вз-одн. и лин-м, т.е. изоморфизмом. ($V\cong V^{**}$)

Док-во: итак, $\forall x\in V \mapsto$ „x"$\in V^{**}$
покажем, что это отображение обладает св-вом лин-ти: $\forall\lambda\in K$, $\forall x_1,x_2\in V$
$\underset{\in V}{(\lambda x_1+x_2)} \longrightarrow \underset{\in V^{**}}{„\lambda x_1+x_2"}$ $\forall f\in V^*$ „λx_1+x_2"$(f) = f(\lambda x_1+x_2) =$
$=\lambda f(x_1)+f(x_2) = \lambda$„$x_1$"$(f)$+„$x_2$"$(f)$ $\Rightarrow$ „λx_1+x_2" $=\lambda$„x_1"+„x_2", т.е. лин-но.

Т.о. мы получаем вложение пр-ва V в пр-во V^{**}, обладающее св-вом лин-ти.
В частности, $\exists$ $e_1,..,e_n$ базис $V \longrightarrow$ „e_1",...,„e_n" $\in V^{**}$
$\Rightarrow$ $\forall j=1..n$ $\forall f\in V$ „e_j"$(f)=f(e_j)=a_j$ – коор-та f в пр-ве V^* отн-но базиса w^j пр-ва V^*
$\Rightarrow$ „e_j" координ. ф-я и сопряжен. базис к базису w^j $\Rightarrow$ по т-ме 1 „e_1".."e_n" базис V^{**}
$\Rightarrow$ Т.о. наше вложение пр-в на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис. ∎

Замечания! 1. изоморфизм, построенный в т-ме 3 является естественным изоморфизмом пр-в V и V^{**}, т.к. его построение не зависело от выбора базиса.

2. Принято отождествлять эл-ты x пр-ва V и „x" пр-ва V^{**}, поэтому пишут $x(f) := f(x)$ без кавычек.

$$\forall x\in V \quad \forall f\in V^*: \qquad f(x) = x^i f(e_i) = \omega^i(x) a_i \qquad f(e_i) = e_i(f) = a_i$$

$$x = x^i e_i \qquad f = a_i\omega^i \qquad \underset{\displaystyle x(f)}{\overset{\shortparallel}{}} = a_i x(\omega^i) = e_i(f)\, x^i \qquad x(\omega^i) = \omega^i(x) = x^i$$

т.е. Т-ма 3 показывает, что на самом деле пр-ва V и V^* „равноправные" V^* сопряж. к V, а V сопряж. к V^*. Базис ω сопряжен к e, также как и базис e сопряжен к базису ω.

3. $\forall x\in V \quad \forall f\in V^*$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \updownarrow \qquad a = (a_1 \dots a_n) \updownarrow$$

$$f(x) = x^i a_i = a\cdot X = (a_1\dots a_n)\cdot\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{„строка * столбец"}$$

$f(x) = x(f)$

$$\text{т.к.} \quad \omega^i(e_j) = \delta^i_j, \qquad \omega^i(e_j) = e_j(\omega^i)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E}$$

Примеры! 1) $\mathbb{R}^3$: базис $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти сопряж. базис $\omega^1, \omega^2, \omega^3$.

$$\omega^i \longleftrightarrow (a^i_1\, a^i_2\, a^i_3) = a^i$$

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} (e_1 e_2 e_3) = E \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = E$$

$$\Rightarrow \quad A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \omega^1 \\ = \omega^2 \\ = \omega^3 \end{matrix}$$

2) $V = \oplus V_\lambda$ $\quad \mathcal{P}_\lambda : V \to V_\lambda$ проекторы. $\quad \sum_\lambda \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E}$ $\quad \mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = \mathcal{O}$, $\quad \mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$

$V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) \longrightarrow$ построим $\omega^1, \dots, \omega^n$ сопряж. к $v_1 \dots v_n$

$$\Rightarrow \forall x\in V: \quad x = \sum_\lambda x_\lambda = x^i v_i = \omega^i(x) v_i$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_\lambda x = x_\lambda = \sum_{v_k\in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k\in V_\lambda} \omega^k(x) v_k$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 & \alpha(\lambda_1) = 1 = \gamma(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -3 & \alpha(\lambda_2) = 2 = \gamma(\lambda_2) \end{matrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}\right)$$

построим сопряж. базис! (см. пример 1)

$$\omega^1 = \left(-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 0\right) \qquad \omega^2 = \left(\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 0\right) \qquad \omega^3 = (0\ 0\ 1)$$

$$\omega^i(x) = (a^i_1\, a^i_2\, a^i_3)\cdot\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad i = 1,2,3.$$

$$\mathcal{P}_{\lambda_1}(x) = \omega^1(x)\cdot v_1 = \left(-\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{2} - \frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{\lambda_2}(x) = \omega^2(x)\cdot v_2 + \omega^3(x)\cdot v_3 = \left(\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейное пр-во тензоров

V лин. пр-во над полем K $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

V^* сопряженное пр-во; $\dim V = \dim V^* = n$

def: ($1^{ое}$ def тензора) тензором α типа (p,q) (p-раз ковариантным, q-раз контравариантным) наз-ся полилинейная функция $f: V^p \times (V^*)^q \to K$

$$V^p = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p \text{ раз}} \qquad (V^*)^q = \underbrace{V^* \times \ldots V^*}_{q \text{ раз}} \qquad \boxed{\text{тензор } \alpha \equiv f \text{ полилин. ф-я}}$$

полилинейная $\equiv$ линейная по каждому аргументу.

p и q – валентности тензора

$r = (p+q)$ – ранг или полная валентность тензора.

def: Тензор α типа $(p,0)$, т.е. $f: V^p \xrightarrow[\text{полилин.}]{} K$ наз-т ковариантным тензором валентности p

Тензор α типа $(0,q)$, т.е. $f: (V^*)^q \xrightarrow[\text{полилин.}]{} K$ наз-т контравариантным тензором валентности q

если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то говорят о тензоре смешанного типа.

если $r = 0$, то тензор типа $(0,0) \equiv$ скаляр $\in K$

Далее, определим операции „+" и „$\cdot\lambda$" для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на одном и том же наборе аргументов.

Определим $\underset{\text{нулевой тензор}}{\mathbb{O}}: V^p \times (V^*)^q \to K$, т.ч. $\underset{k=1,..,p}{\forall \xi_k \in V}$ $\underset{m=1,..,q}{\forall \eta^m \in V^*}$ $\mathbb{O}(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^q) = 0$

и $\underset{\text{противопол. тензор}}{-\alpha}$, т.е. $-f: V^p \times V^q \to K$ т.ч. $\underset{k=1,..,p}{\forall \xi_k \in V}$ $\underset{m=1,..,q}{\forall \eta^m \in V^*}$ $-f(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^q) = -1 \cdot f(\xi_1,..,\xi_k,\eta^1,..\eta^m)$

$$\Rightarrow -f + f = \mathbb{O} = f + (-f)$$

Т.о. вып-ны 1°–8° аксиомы лин. пр-ва (упр.)

def: $T_{(p,q)}$ – лин. пр-во тензоров типа (p,q)

$e_1,..,e_n$ базис V

$\omega^1,..,\omega^n$ базис V^*, сопряженный e

$\xi_k \in V$, $k = 1,..,p$ вектор (контравариантный) $\qquad \xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_k^1 \\ \vdots \\ \xi_k^n \end{pmatrix}$ – коор-ты ξ_k отн-но базиса e

$\eta^m \in V^*$, $m = 1,..,q$ ковектор (ковариантный) $\qquad \eta^m = \eta^m_{i_m} \omega^{i_m} \leftrightarrow (\eta^m_1 \ldots \eta^m_n)$ – коор-ты η^m отн-но базиса ω

$\alpha \equiv f$ полилин. ф-ция $\Rightarrow$

тензор типа (p,q)

$$\boxed{f(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^m) = \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \ldots \eta^q_{i_q} f(e_{j_1},..,e_{j_p},\omega^{i_1},..,\omega^{i_q})} \quad (1)$$

$\boxed{\alpha \in T_{(p,q)}}$

$$\boxed{\alpha^{i_1..i_q}_{j_1..j_p} := f(e_{j_1},..,e_{j_p},\omega^{i_1},..,\omega^{i_q})} \quad (2)$$

координаты (компоненты) тензора α отн-но базисов e и ω

Т.о, очевидно, значение полилин. ф-ии f (а значит и тензора α), полностью опр-ся её значениями на всевозможных p-наборах базисных векторов e_j и q-наборах базисных ковекторов ω^i

$$\boxed{f(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^m) = \alpha^{i_1..i_q}_{j_1..j_p} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \ldots \eta^q_{i_q}} \quad (1')$$

def: $s = (p+q)$ – мерной матрицей порядка n наз-ся мн-во элементов, занумерованных двумя типами индексов: верхних $i_1,..,i_q$ и нижних $j_1,..,j_p$, при этом все индексы пробегают значения от 1 до n.

$$\boxed{A = (\alpha^{i_1..i_q}_{j_1..j_p})}$$

$s = (p+q)$ – мерная м-ца порядка n содержит $\boxed{n^{p+q} = n^s \text{ элементов.}}$

$i_m = 1,..,n \quad m = 1,..,q$

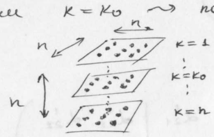
$j_k = 1,..,n \quad k = 1,..,p$

Примеры! 1) $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $A = (a^i_j)_{n\times n}$ $A = (a^{ij})_{n\times n}$

двумерные м-цы порядка n (n^2 элементов)

2) $A = (\alpha^i_{jk})_{n\times n\times n}$ 3-хмерная м-ца порядка n

фиксируем $k = k_0 \rightsquigarrow$ получаем $(\alpha^i_{j k_0})$ – обычная двумерная м-ца.



„куб" из n^3 чисел.

аналогично, 4-хмерная м-ца – упорядоч. набор из n 3-х мерных м-ц.

Т.о. $\forall\ \alpha \in T_{(p,q)} \longrightarrow A$ – $(p+q)$ – мерная м-ца компонент α

Верно и обратное $\forall$ $(p+q)$ – мерной м-це A порядка n $\longrightarrow$ полилин. ф-ю f по формулам (1)(2), где $e_1 \ldots e_n$ некоторый фиксир. базис V, а $\omega^1, \ldots, \omega^n$ базис V^*, сопряж. e.

Т.о. получаем $\boxed{\alpha \in T_{(p,q)} \xleftrightarrow{\text{вз.одн.}} A\ (p+q) \text{ мерн. м-ца порядка } n}$

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующих компонент их матриц, т.е. наше вз-одн. соответствие обладает св-вом лин-ти, т.е. явл-ся изоморфизмом

$$\boxed{T_{(p,q)} \cong A = (\alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p}) \cong K^{n^{p+q}}} \Rightarrow \boxed{\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}}$$

Соглашение о порядке записи эл-тов многомерной матрицы (т.е. матрицы тензора)

общее правило: первый индекс всегда верхний левый индекс, далее по верхней строке, а затем по нижней.

$\exists$ $n = 2$

$r = 2$ возможные варианты матриц: $A = (\alpha^i_j)$ $A = (\alpha^{ij})$ $A = (\alpha_{ij})$ $\quad i = 1,2$; $j = 1,2$

1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец

$$A = (\alpha^i_j) = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \end{pmatrix} \qquad A = (\alpha^{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} \end{pmatrix}$$

$r = 3$ $A = (\alpha^{ijk})$ $A = (\alpha^{ij}_k)$ $A = (\alpha^i_{jk})$ $A = (\alpha_{ijk})$

1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец.

3й индекс – всегда „слой"

$$A = (\alpha^i_{jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha^1_{11} & \alpha^1_{21} & \alpha^1_{12} & \alpha^1_{22} \\ \alpha^2_{11} & \alpha^2_{21} & \alpha^2_{12} & \alpha^2_{22} \end{array}\right)$$

1 слой 2 слой

$$A = (\alpha_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{121} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \alpha_{212} & \alpha_{222} \end{array}\right)$$

$r = 4$ 1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец

3й индекс – всегда слой

4й индекс – всегда „сечение"

$$A = (\alpha^{ij}_{km}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha^{11}_{11} & \alpha^{12}_{11} & \alpha^{11}_{12} & \alpha^{12}_{12} \\ \alpha^{21}_{11} & \alpha^{22}_{11} & \alpha^{21}_{12} & \alpha^{22}_{12} \\ \hline \alpha^{11}_{21} & \alpha^{12}_{21} & \alpha^{11}_{22} & \alpha^{12}_{22} \\ \alpha^{21}_{21} & \alpha^{22}_{21} & \alpha^{21}_{22} & \alpha^{22}_{22} \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{1 слой} \\ \\ \text{2 слой} \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

A_{11} A_{12} A_{21} 1 сечение 2 сечение A_{22}

Примеры!

1) $f \in V^*$ $\quad f$ – (1,0) тензор (1 раз ковариантный)

$f : V \longrightarrow K$ лин.

$\forall\ \xi \in V$ $\quad \xi = \xi^i e_i$ $\quad f(\xi) = \xi^i \underbrace{f(e_i)}_{\alpha_i} \longleftrightarrow A = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ 1 мерная м-ца.

$e_1 \ldots e_n$ базис V

2) V_3 – 3х мерн. геом. вектора. $\quad f : V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3$ $\quad \underbrace{f(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\varphi}_{\text{скал. пр-е}}$ $\quad \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$

очевидно, f – билинейная ф-я – тензор типа (2,0), $f \in T_{(2,0)}$

$\exists$ $e_1 = \bar{i}$, $e_2 = \bar{j}$, $e_3 = \bar{k}$

$f(\bar a,\bar b) = \alpha_{ij} a^i b^j$ $\qquad \bar a = a^i e_i,\ \bar b = b^j e_j,\ \alpha_{ij} = f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

$\Rightarrow f \longleftrightarrow A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E$

$f(\bar a,\bar b) = a^T A b \Rightarrow$ в нашем случае $f(\bar a,\bar b) = a^T b = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i$ (т.к. оба индекса наверху пишем значок Σ)

$\boxed{?}$ Как изменится вид тензора, если выбрать другой — „новый" — базис в пр-ве V?

$e_1 \ldots e_n$, $e_1' \ldots e_n'$ базисы пр-ва V $\quad T = T_{e\to e'}$, $S = T^{-1} = T^T_{w\to w'}$ $\quad \forall x \in V \quad x = Tx' \quad x = x^i e_i = x'^i e_i'$ $\quad \boxed{x^i = t^i_j x'^j}$

$w^1 \ldots w^n$, $w'^1 \ldots w'^n$ базисы пр-ва V^*, сопряжен. к e и e', соот-но $\quad \forall a \in V^* \quad a = a'S \quad a = a_j w^j = a_j' w'^j$ $\quad \boxed{a_i = a_j' S^j_i}$

$\Rightarrow \forall \xi_k \in V \quad \xi^{j_k}_k = t^{j_k}_{r_k} \xi'^{r_k}_k \qquad j_k = 1,\ldots,n;\ k = 1,\ldots,p$

$\forall \eta^m \in V^* \quad \eta^m_{i_m} = S^{u_m}_{i_m} \eta'^m_{u_m} \qquad i_m = 1,\ldots,n;\ m = 1,\ldots,q$

$\Rightarrow$ подставим в (1')

$$f(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q) = \boxed{\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q}} \xi'^{r_1}_1 \ldots \xi'^{r_p}_p \eta'^1_{u_1}\ldots\eta'^q_{u_q} =$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенным вверху и внизу, происходит суммирование (i_m, j_k) $\Rightarrow$ в результате, просуммировав, получим новую компоненту со штрихованными индексами.

$$= \boxed{\alpha'^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p}} \xi'^{r_1}_1 \ldots \xi'^{r_p}_p \eta'^1_{u_1}\ldots\eta'^q_{u_q}$$, т.о. получим снова тензор типа (p,q)

Т.о., при замене базиса тензор типа (p,q) остаётся тензором того же типа, а его координаты меняются по следующему закону:

$$\boxed{\underset{\substack{\text{коор-ты тензора}\\ \text{в „новых" базисах}\\ e', w'}}{\alpha'^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p}} = \underset{\substack{\text{коор-ты тензора}\\ \text{в „старых" базисах}\\ e, w}}{\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}} t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q}} \qquad (3)$$

верхние индексы $\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots}$ преобразуются с м-цей S, т.е. по контрвариантному закону, поэтому наз-ся контрвариантными индексами, а тензор q-раз контрвариантным

Соот-но, нижние индексы $\alpha^{\ldots}_{j_1\ldots j_p}$ преобразуются с матрицей T, т.е. по ковариантному закону, поэтому наз-ся ковариантными индексами, а тензор p раз ковариантным.

Примеры: 1) тензор типа $(0,0) \equiv \lambda \in K$, очевидно, не меняется при замене базиса, т.е. инвариант

2). $A = (a^i_j)_{n\times n}$ м-ца тензора $\alpha \in T_{(1,1)}$

$a'^k_m = a^i_j t^j_m S^k_i \iff A' = SAT = T^{-1}AT$ получаем ф-лу замены м-цы лин. опер. при замене базиса.

3) $\forall f \in V^*$ тензор типа $(1,0) \longleftrightarrow A = (a_i)_{1\times n} = a \in K_n$ $\qquad a_j' = a_i t^i_j \iff a' = aT$ ковариантн. $\qquad a_i = f(e_i)$

$\forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i = x'^j a_j' = a_i \boxed{t^i_j\ x'^j} = a_i x^i$

$V \cong V^{**} \quad x(f) \quad x: V^* \to K$ тензор типа $(0,1)$ $\qquad x'^j = S^j_i x^i \iff X' = SX \qquad x^i = x(w^i)$ контрвариант.

$x(f) = a_i x^i = a_j' x'^j = x^i \boxed{S^j_i a_j'} = x^i a_i$

4) $\alpha \in T_{(1,2)} \Rightarrow A = (\alpha^{ij}_k)$ $\qquad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{A_1} & \multicolumn{3}{c|}{A_2} & \multicolumn{3}{c}{A_3}\\ 0&0&0 & 3&1&0 & 0&0&0\\ 2&0&0 & -7&-2&0 & 1&0&0\\ 0&0&0 & 3&1&0 & 3&0&0 \end{array}\right)$ $\quad e_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ e_2' = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\ e_3' = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Найти α'^{21}_2

$T = \begin{pmatrix} 1&-1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ (t_2) $\qquad S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ (S^1, S^2) $\qquad \alpha'^{21}_2 = \alpha^{ij}_k t^k_2 S^2_i S^1_j$ — 2ая строка S; 2ой столбец T; 1ая строка S

$\exists K$ фиксир. $\alpha^{ij}_k S^2_i S^1_j \iff S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow \underbrace{(S^2 A_k (S^1)^T) t^k_2}_{\alpha'^{21}_2} = (2\ -17\ -5)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -19$

$\alpha^{ij}_k \in A_k$

Вернемся к def тензора. Тензор был определен нами как полилинейная ф-ция и наше def не зависило от выбора базиса в пр-ве V. Но, при этом, тензор оказался согласован с заменой базиса, т.е. после замены базиса тензор остался тензором, причем того же типа. Для такого рода объектов исп-ся термин геометрический объект. Поэтому сущ-т другой подход к def. тензора.

def: ($2^{ое}$ def тензора) Тензором α типа (p,q) наз-ся геометрический объект на пр-ве V, который описывается A $(p+q)$ мерной матрицей элементов поля K размерности $n=\dim V$. При этом, каковы бы не были базисы e и e' в пр-ве V и соответствующие им сопряженные базисы V^* w и w', соответствующие компоненты матриц A и A' должны быть связаны формулой (3).

Операции „+" и „$\cdot\lambda$" между двумя тензорами одного типа, очевидно, опр-ся в этом случае как операции „+" и „$\cdot\lambda$" соответствующих компонент матриц тензоров.

При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут уд-ть ф-ле (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр снова будет получать тензор того же типа, что и исходные.

Действительно, $\forall \lambda\in K$; $\alpha,\beta\in T(p,q)$

$$(\lambda\alpha+\beta)^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} := \lambda\cdot\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} + \beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}$$

$$(\lambda\alpha+\beta)^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q} = \left(\lambda\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} + \beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\right) t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q} =$$

$$\underset{\alpha,\beta\in T(p,q)}{\overset{\text{т.к.}}{=}} \lambda\alpha'^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p} + \beta'^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p} = (\lambda\alpha'+\beta')^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p} = (\lambda\alpha+\beta)'^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p}$$

Т.о. лин. операциям на пр-ве полилин. ф-й соответствуют лин. опер. над многомерными м-цами с сохранением св-ва (3). Поэтому def 1 $\Leftrightarrow$ def 2.

В зависимости от поставленой задачи, мы будем исп-ть как $1^{ое}$, так и $2^{ое}$ def.

8.3 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.3 Произведение тензоров. Базис пр-ва тензоров. Операция свертки.

def: $\alpha \in T_{(p_1,q_1)}$, $\beta \in T_{(p_2,q_2)}$

Произведением тензоров α и β наз-ся тензор $\boxed{\gamma = \alpha \otimes \beta} \in T_{(p_1+p_2,\, q_1+q_2)}$, компоненты которого опр-ся следующим равенством:

$$\boxed{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}} = \alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} \cdot \beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}}}$$

корректность def: надо проверить выполнение св-ва (3) для новой многомерной м-цы γ:

$$\gamma'^{i_1' \dots i_{q_1}' k_1' \dots k_{q_2}'}_{j_1' \dots j_{p_1}' m_1' \dots m_{p_2}'} = \alpha'^{i_1' \dots i_{q_1}'}_{j_1' \dots j_{p_1}'} \cdot \beta'^{k_1' \dots k_{q_2}'}_{m_1' \dots m_{p_2}'} \underset{\alpha, \beta \text{ - тензоры}}{=} \overbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} t^{j_1}_{j_1'} \dots t^{j_{p_1}}_{j_{p_1}'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_{q_1}'}_{i_{q_1}} \cdot \beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}}}^{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}}} t^{m_1}_{m_1'} \dots t^{m_{p_2}}_{m_{p_2}'} S^{k_1'}_{k_1} \dots S^{k_{q_2}'}_{k_{q_2}} =$$

$$= \gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}} t^{j_1}_{j_1'} \dots t^{j_{p_1}}_{j_{p_1}'} t^{m_1}_{m_1'} \dots t^{m_{p_2}}_{m_{p_2}'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_{q_1}'}_{i_{q_1}} S^{k_1'}_{k_1} \dots S^{k_{q_2}'}_{k_{q_2}} \Rightarrow \text{св-во (3) вып-но} \Rightarrow \gamma \in T_{(p_1+p_2,\, q_1+q_2)}$$

Замечание: $\forall \lambda \in K$ - тензор типа $(0,0)$ $\Rightarrow$ $\lambda \alpha = \lambda \otimes \alpha = \alpha \otimes \lambda$

Тензорное произведение, очевидно, ассоциативно, но не коммутативно! $\boxed{\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha}$

Пример: $\alpha, \beta \in T_{(1,0)}$ $\alpha = (1\ 0\ {-1})$ $\beta = (0\ 3\ 5)$

$\gamma_1 = \alpha \otimes \beta = (\alpha_i \beta_j) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_1$, $\gamma_1 \in T_{(2,0)}$

$\gamma_2 = \beta \otimes \alpha = (\beta_i \alpha_j) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2$, $\gamma_2 \in T_{(2,0)}$

$\gamma_1 \neq \gamma_2$ $A_1 = A_2^T$

Упр: 1) $\alpha \in T_{(p,0)}$, $\beta \in T_{(0,q)}$ $\Rightarrow$ $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$

2) $\otimes$ дистрибутивно

В смысле 1$^{\text{го}}$ def тензора произведению тензоров будет соот-ть произведение функций, определяющих эти тензоры.

$\alpha \leftrightarrow f : V^{p_1} \times (V^*)^{q_1} \to K$

$\beta \leftrightarrow g : V^{p_2} \times (V^*)^{q_2} \to K$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow f \cdot g : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \to K}$

$\forall\ \xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V$ $\quad \forall\ \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$

$$f \cdot g(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2}) = \underbrace{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}}}_{\text{подставим выражения компонент } \gamma \text{ через компоненты } \alpha \text{ и } \beta} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \eta^1_{i_1} \dots \eta^{q_1}_{i_{q_1}} \theta^1_{k_1} \dots \theta^{q_2}_{k_{q_2}} =$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \eta^1_{i_1} \dots \eta^{q_1}_{i_{q_1}}}_{f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1})} \cdot \underbrace{\beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \cdot \theta^1_{k_1} \dots \theta^{q_2}_{k_{q_2}}}_{g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})}$$

В частности, $\forall \underset{\text{лин. форма}}{f^j} \in T_{(1,0)}$, $j = 1, \dots, p$ $\quad f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p \in T_{(p,0)}$

$\forall\ \xi_1, \dots, \xi_p \in V$ $\quad \boxed{f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = f^1(\xi_1) \cdot f^2(\xi_2) \cdot \dots \cdot f^p(\xi_p)}$

$\forall\ g_j \in T_{(0,1)}$ $j = 1, \dots, q$ $\quad g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q \in T_{(0,q)}$

$\forall\ \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$ $\quad \boxed{g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q(\eta^1, \dots, \eta^q) = g_1(\eta^1) \cdot g_2(\eta^2) \cdot \dots \cdot g_q(\eta^q)}$

$$\Rightarrow \boxed{f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \dots f^p(\xi_p) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_q(\eta^q)} \quad (4)$$

Теорема: (о базисе пр-ва $T_{(p,q)}$)

$e_1, \dots, e_n$ базис V, $\omega^1, \dots, \omega^n$ базис V^*, сопряжен. e

Совокупность тензоров вида $\boxed{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}}$ по всевозможным наборам индексов $(j_1, \dots, j_p, i_1, \dots, i_q)$, где $j_k = 1, \dots, n$, $i_m = 1, \dots, n$ явл-ся базисом пр-ва $T_{(p,q)}$

Док-во: очевидно, $\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q} \in T_{(p,q)}$, т.к. $\underset{\text{лин. форма}}{\omega^j : V \to K}$, а $\underset{\text{лин. отобр.}}{e_i : V^* \to K}$

$\omega^j \in T_{(1,0)}$ $\quad e_i \in T_{(0,1)}$

порождающая: $\forall \alpha \in T_{(p,q)} \leftrightarrow f$ полилин. ф-я.

$\forall \xi_1,\ldots,\xi_p \in V \quad \forall \eta^1,\ldots,\eta^q \in V^* \quad f(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q) = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} \underbrace{\xi_1^{j_1}\ldots\xi_p^{j_p}\eta^1_{i_1}\ldots\eta^q_{i_q}}_{\omega^{j_1}(\xi_1)\ldots\omega^{j_p}(\xi_p)e_{i_1}(\eta^1)\ldots e_{i_q}(\eta^q)} =$ св-во(4) $=$

$= \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, \omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q)$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, \omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}} \Rightarrow$ поро309.

лин. независимость: $\exists \underset{\substack{\text{нулевой}\\\text{тензор}}}{\mathbb{O}} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, \omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}$

применим нулевой тензор к набору векторов $e_{m_1},\ldots,e_{m_p},\omega^{k_1},\ldots,\omega^{k_q}$

$$0 = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, \omega^{j_1}(e_{m_1})\ldots\omega^{j_p}(e_{m_p})\cdot e_{i_1}(\omega^{k_1})\ldots e_{i_q}(\omega^{k_q}) = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} \underbrace{\delta^{j_1}_{m_1}\ldots\delta^{j_p}_{m_p}\delta^{k_1}_{i_1}\ldots\delta^{k_q}_{i_q}}_{\text{символы Кронекера}} = \alpha^{k_1\ldots k_q}_{m_1\ldots m_p}$$

верно для любого набора индексов $m_1\ldots m_p, k_1\ldots,k_q$ $\Rightarrow$ нулевая комбинация тривиальна $\Rightarrow$ лин. незав ■

Пример: $\alpha = (\omega^1 - 2\omega^2 + \omega^3)\otimes(3\omega^1 + \omega^2)\otimes e_2 + (\omega^2 + 2\omega^3)\otimes\omega^1\otimes e_3$

1) найти значение α на векторах $\xi_1 = 2e_1 - e_2$, $\xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\eta = \omega^2 - \omega^3$

2) записать матрицу тензора.

1) $\alpha(\xi_1,\xi_2,\eta) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2)\cdot\eta_2 + (\xi_1^2 + 2\xi_1^3)\cdot\xi_2^1\cdot\eta_3 = (2+2+0)(3\cdot1+2)\cdot1 + (-1+2\cdot0)1\cdot(-1) = 21$

$\xi_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

2) $\alpha \in T_{(2,1)} \Rightarrow \alpha = (\alpha^i_{jk})$

$\alpha^2_{11} = 3 \quad \alpha^2_{21} = -6 \quad \alpha^2_{31} = 3$

$\alpha^2_{12} = 1 \quad \alpha^2_{22} = -2 \quad \alpha^2_{32}\ 1$

$\alpha_{21} = 1 \quad \alpha^3_{31} = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 3&-6&3&1&-2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$k=1 \qquad k=2 \qquad k=3$

Док-во: очевидно, $\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q} \in T_{(p,q)}$, т.к. $\underset{\text{лин. форма}}{\omega^j : V \to K}$, а $\underset{\text{лин. отобр.}}{e_i : V^* \to K}$

$\omega^j \in T_{(1,0)}$ $\quad e_i \in T_{(0,1)}$

порождающая: $\forall \alpha \in T_{(p,q)} \leftrightarrow f$ полилин. ф-я.

$\forall \xi_1,\ldots,\xi_p \in V \quad \forall \eta^1,\ldots,\eta^q \in V^* \quad f(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q) = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} \underbrace{\xi_1^{j_1}\ldots\xi_p^{j_p}\eta^1_{i_1}\ldots\eta^q_{i_q}}_{\omega^{j_1}(\xi_1)\ldots\omega^{j_p}(\xi_p)e_{i_1}(\eta^1)\ldots e_{i_q}(\eta^q)} =$ св-во(4) $=$

$= \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, \omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q)$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, \omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}} \Rightarrow$ поро309.

лин. независимость: $\exists \underset{\substack{\text{нулевой}\\\text{тензор}}}{\mathbb{O}} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, \omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}$

применим нулевой тензор к набору векторов $e_{m_1},\ldots,e_{m_p},\omega^{k_1},\ldots,\omega^{k_q}$

$$0 = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, \omega^{j_1}(e_{m_1})\ldots\omega^{j_p}(e_{m_p})\cdot e_{i_1}(\omega^{k_1})\ldots e_{i_q}(\omega^{k_q}) = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} \underbrace{\delta^{j_1}_{m_1}\ldots\delta^{j_p}_{m_p}\delta^{k_1}_{i_1}\ldots\delta^{k_q}_{i_q}}_{\text{символы Кронекера}} = \alpha^{k_1\ldots k_q}_{m_1\ldots m_p}$$

верно для любого набора индексов $m_1\ldots m_p, k_1\ldots,k_q$ $\Rightarrow$ нулевая комбинация тривиальна $\Rightarrow$ лин. незав ■

Пример: $\alpha = (\omega^1 - 2\omega^2 + \omega^3)\otimes(3\omega^1 + \omega^2)\otimes e_2 + (\omega^2 + 2\omega^3)\otimes\omega^1\otimes e_3$

1) найти значение α на векторах $\xi_1 = 2e_1 - e_2$, $\xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\eta = \omega^2 - \omega^3$

2) записать матрицу тензора.

1) $\alpha(\xi_1,\xi_2,\eta) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2)\cdot\eta_2 + (\xi_1^2 + 2\xi_1^3)\cdot\xi_2^1\cdot\eta_3 = (2+2+0)(3\cdot1+2)\cdot1 + (-1+2\cdot0)1\cdot(-1) = 21$

$\xi_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

2) $\alpha \in T_{(2,1)} \Rightarrow \alpha = (\alpha^i_{jk})$

$\alpha^2_{11} = 3 \quad \alpha^2_{21} = -6 \quad \alpha^2_{31} = 3$

$\alpha^2_{12} = 1 \quad \alpha^2_{22} = -2 \quad \alpha^2_{32}\ 1$

$\alpha_{21} = 1 \quad \alpha^3_{31} = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 3&-6&3&1&-2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$k=1 \qquad k=2 \qquad k=3$

def: $\exists\, p,q \geq 1$ $\alpha \in T_{(p,q)}$. Приравняем один верхний индекс одному нижнему. Тогда, по правилу Эйнштейна, мы должны будем просуммировать соответствующие компоненты. В результате, получим систему элементов, у которых число верхних и нижних будет на единицу меньше.

$$\boxed{\beta^{i_1 \ldots \overset{\text{отсутствует}}{\hat{i}_k} \ldots i_q}_{j_1 \ldots \underset{\text{отсутствует}}{\hat{j}_m} \ldots j_p} = \alpha^{i_1 \ldots \overset{k\text{-й индекс}}{\varkappa} \ldots i_q}_{j_1 \ldots \underset{m\text{-й индекс}}{\varkappa} \ldots j_p}}$$

– эта операция наз-ся **свёрткой тензора**

$\alpha \in T_{(p,q)} \rightsquigarrow \beta \in T_{(p-1,q-1)}$

корректность определения: надо проверить выполнение св-ва (3)

$$\beta'^{\,i_1' \ldots \hat{i}_k' \ldots i_q'}_{\,j_1' \ldots \hat{j}_m' \ldots j_p'} = \alpha'^{\,i_1' \ldots \varkappa' \ldots i_q'}_{\,j_1' \ldots \varkappa' \ldots j_p'} = \alpha^{i_1 \ldots i_k \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_m \ldots j_p} t^{j_1}_{j_1'} \ldots t^{j_m}_{\varkappa'} \ldots t^{j_p}_{j_p'} S^{i_1'}_{i_1} \ldots S^{\varkappa'}_{i_k} \ldots S^{i_q'}_{i_q} =$$

$$(TS)^{j_m}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k} = \begin{cases} 0, & j_m \neq i_k \\ 1, & j_m = i_k = \varkappa \end{cases}, \quad TS = E$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \ldots \varkappa \ldots i_q}_{j_1 \ldots \varkappa \ldots j_p}}_{\beta^{i_1 \ldots \hat{i}_k \ldots i_q}_{j_1 \ldots \hat{j}_m \ldots j_p}} \underbrace{t^{j_1}_{j_1'} \ldots t^{j_p}_{j_p'}}_{\text{нет } t^{j_m}_{\varkappa}} \underbrace{S^{i_1'}_{i_1} \ldots S^{i_q'}_{i_q}}_{\text{нет } S^{\varkappa}_{i_k}} \Rightarrow \text{вып-но (3)}$$

$\Rightarrow$ β тензор типа $(p-1, q-1)$

Замечания:

1) Свёртка может проводится по нескольким индексам.
2) Если в результате свёртки получается тензор типа $(0,0)$ (т.е. скаляр), то такая <u>свёртка</u> наз-ся <u>полной</u>.

Примеры:

1) $\alpha \in T_{(1,1)} \leftrightarrow A = (\alpha^i_j)_{n \times n}$ $\quad \underset{\text{свёртка}}{\beta} = (\alpha^i_i) = \mathrm{tr}\, A \in K$ $\Rightarrow$ полная свёртка; $\beta \in T_{(0,0)}$ инвариант отн-но замен базиса.

2) $f \in T_{(1,0)}$ – ковектор $\longleftrightarrow a = (a_1, \ldots a_n)$
$x \in T_{(0,1)}$ – вектор $\longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$$\alpha = f \otimes x = (a_j x^i) = (\alpha^i_j) \Rightarrow \underset{\text{свёртка}}{\beta} = (\alpha^i_i) = a_i x^i = \underset{\text{значение лин. формы } f \text{ на векторе } x}{f(x)} = x(f)$$

3) $\alpha \in T_{(1,1)} \leftrightarrow A = (\alpha^i_j)$
$x \in T_{(0,1)} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$$\mu = \alpha \otimes x = (\alpha^i_j x^k) = (\mu^{ik}_j) \in T_{(1,2)}$$

$$\underset{\text{свёртка}}{\beta} = (\mu^{ij}_j) = (\alpha^i_j x^j) = (\beta^i) \iff b = Ax$$

$\alpha^i_j x^j \updownarrow (Ax)^{i\text{-ая коор-та}}$ $\qquad \beta \in T_{(0,1)}$

$\beta \updownarrow b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{свёртка}}{\tilde{\beta}} = (\mu^{jk}_j) = (\alpha^j_j x^k) = (\tilde{\beta}^k) \iff \tilde{b} = (\mathrm{tr}\, A) \cdot x$$

$\tilde{\beta} \updownarrow \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^n \end{pmatrix}$

4) $\alpha \in T_{(1,1)}$ $\qquad \alpha'^{\,i'}_{\,j'} = \alpha^i_j t^j_{j'} S^{i'}_i$ = свёртка по $2^{м}$ индексам тензора $\alpha \otimes T \otimes S = \mu = (\alpha^i_j t^k_m S^l_r) = (\mu^{ikl}_{jmr})$

$$\Rightarrow \alpha'^{\,i'}_{\,j'} = \underset{\text{свёртка}}{\mu^{i\,j\,i'}_{j\,j'\,i}}$$

8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметричческие тензоры.

8.4 Транспонирование тензора. Симметричные и кососимметричные тензоры

def: $\exists\ p \geqslant 2$, $\alpha \in T_{(p,q)}$ $\exists\ \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ перестановка p чисел от 1 до p.

(напоминание: $\varphi: \{1, 2, \dots, p\} \to \{1, 2, \dots, p\}$ – подстановка

вз. однозн. отобр. $\sigma_k = \varphi(k)$, $k = 1, \dots, p$

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(p))$ – перестановка

$\varphi \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & p \\ 1 & 2 & 3 & \dots & p \end{matrix} \right)$)

$\boxed{\beta = \sigma(\alpha)}$ – наз-ся тензором, полученным транспонированием тензора α перестановкой σ

$\boxed{p \geqslant 2}$ по нижним индексам, если $\boxed{\beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}}$

Аналогично опр-ся транспонирование по верхним индексам.

Замечание: для тензоров операция транспонирования опр-ся только по одному типу индексов; либо по нижним, либо по верхним, в отличии от произвольной многомерной м-цы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

корректность def: как и раньше надо проверить выполнение св-ва (3), т.е. что $\beta \in T_{(p,q)}$

Как известно, любая перестановка может быть получена конечным числом транспозиций. Поэтому, достаточно показать, что св-во (3) вып-ся при транспонировании тензора по паре индексов.

$\exists\ \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_k \dots j_m \dots j_p} = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_m \dots j_k \dots j_p} \Rightarrow \beta'^{i_1' \dots i_q'}_{j_1' \dots j_k' \dots j_m' \dots j_p'} = \alpha'^{i_1' \dots i_q'}_{j_1' \dots j_m' \dots j_k' \dots j_p'} =$ т.к. $\alpha \in T_{(p,q)} \Rightarrow$ вып-но (3)

$$= \underbrace{\boxed{\alpha^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_k \dots r_m \dots r_p}}}_{\beta^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_m \dots r_k \dots r_p}} t^{r_1}_{j_1'} \dots t^{r_k}_{j_m'} \dots t^{r_m}_{j_k'} \dots t^{r_p}_{j_p'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_q'}_{i_q} = \beta^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_m \dots r_k \dots r_p} t^{r_1}_{j_1'} \dots t^{r_m}_{j_k'} \dots t^{r_k}_{j_m'} \dots t^{r_p}_{j_p'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_q'}_{i_q} \Rightarrow (3)$$

вып-но.

Как будет выглядеть транспонирование тензора, если брать за определения тензора def 1?

$\alpha \in T_{(p,q)} \longleftrightarrow \alpha$ полилин. отобр. $\exists\ \boxed{\beta = \sigma(\alpha)}$ $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$\forall\ \xi_1, \dots, \xi_p \in V$, $\forall\ \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$ $\boxed{\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)} = \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \xi^{j_1}_1 \dots \xi^{j_p}_p \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} =$

$= \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} \xi^{j_{\sigma_1}}_{\sigma_1} \dots \xi^{j_{\sigma_p}}_{\sigma_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} = \boxed{\alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)}$

Замечание: при транспонировании по нижним индексам, очевидно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспонирования по верхним индексам будет обладать теми же св-ми, что и операция транспонирования по нижним. Поэтому все результаты, которые мы получим для нижних индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

Пример: $\alpha = (\omega^1 - 2\omega^2) \otimes \omega^3 \otimes (\omega^1 - \omega^3) + \omega^2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^3$ $(\Rightarrow \alpha \in T_{(3,0)} \Rightarrow (\alpha_{ijk}))$

1) найти $\beta = \sigma(\alpha)$ $\sigma = (3, 1, 2)$, выписать матрицу.

2) найти значение β на векторах $\xi_1 = e_1 + e_2$, $\xi_2 = -e_2 - e_3$, $\xi_3 = e_1 + 2e_2$

1) $\alpha = (\alpha_{ijk}) \Rightarrow \beta = (\alpha_{kij})$ т.е. $i \leftrightarrow j_1$, $j \leftrightarrow j_2$, $k \leftrightarrow j_3$

$\sigma\ (3, 1, 2)$ (β_{ijk})

$\boxed{\cancel{\alpha_{ijk} = \beta_{kij}}}$ неверно! здесь $\sigma = (2\ 3\ 1)$

$$\beta_{ijk} = \beta_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_3 j_1 j_2} = \alpha_{kij}$$

$\boxed{1\ \text{сп.}}$ выпишем м-цу α: $\alpha_{131} = 1$, $\alpha_{231} = -2$, $\alpha_{133} = -1$, $\alpha_{233} = 2$, $\alpha_{213} = 1$, остальные нули

$\Rightarrow \beta_{311} = 1$, $\beta_{312} = -2$, $\beta_{331} = -1$, $\beta_{332} = 2$, $\beta_{132} = 1$, остальные нули $\Rightarrow$ $\beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\boxed{2\text{ сп}}$ любая перестановка $\equiv$ конечное число транспозиций (т.е. транспонирование м-цы по паре индексов)

Транспонирование многомерной м-цы по паре индексов (i,j) $\equiv$ Транспонирование двумерных слоёв м-цы, получаемых фиксированием различных сочетаний всех индексов, кроме индексов (i,j).

$$\beta_{ijk} = \alpha_{kij} \qquad \alpha_{kij} \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{\tilde{\alpha}}_{ijk} = \beta_{ijk}$$

за 2 транспозиции эл-т, стоящий в матрице на позиции $(k\,i\,j)$, должен переместиться на позицию (ijk)

$\alpha_{kij} \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_{ikj}$

j не меняется, поэтому будем фиксировать различные значения $j = 1,2,3$, т.е. извлекать из м-цы тензора двумерные м-цы, которые после обычной операции транспонирования нужно будет поместить обратно в тензор.

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

фиксируем j в α $\rightsquigarrow$ фиксируем слой $\rightsquigarrow$ каждый слой надо транспонировать

$$\tilde{\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\tilde{\alpha}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{\tilde{\alpha}}_{ijk}$ не меняется i $\Rightarrow$ фиксируем $i = 1,2,3$ $\Rightarrow$ извлекаем двумерную м-цу $\Rightarrow$ транспонируем $\Rightarrow$ помещаем обратно.

$i = 1$ (1ая стр)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

помещаем обратно на исходные позиции

$i = 2$ (2ая стр)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$i = 3$ (3-я стр)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{\alpha}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \beta$$

2) $\boxed{1\text{ сп.}}$ $\beta = \sigma(\alpha)$ $\quad \sigma = (3,1,2)$

$$\beta(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \alpha(\xi_3,\xi_1,\xi_2) = (\underset{1}{\omega^1(\xi_3)} - 2\underset{2}{\omega^2(\xi_3)})\cdot \underset{0}{\omega^3(\xi_1)}\cdot(\omega^1(\xi_2) - \omega^3(\xi_2)) + \underset{2}{\omega^2(\xi_3)}\,\underset{1}{\omega^1(\xi_1)}\,\underset{-1}{\omega^3(\xi_2)} =$$
$$= -2$$

$\boxed{2\text{ сп}}$
$$\beta(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \beta_{ijk}\xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k = \overset{\beta_{311}}{1}\cdot\underset{\xi_1^3}{0}\ldots - \overset{\beta_{312}}{2}\cdot\underset{\xi_1^3}{0}\ldots - \overset{\beta_{331}}{1}\cdot\underset{\xi_1^3}{0}\ldots + \overset{\beta_{332}}{2}\cdot\underset{\xi_1^3}{0}\ldots + \overset{\beta_{132}}{1}\cdot\underset{\xi_1^1}{1}\underset{\xi_2^3}{(-1)}\cdot\underset{\xi_3^2}{2} = -2$$

Из def транспонирования $\Rightarrow$ лин. операция $\forall \lambda \in K$ $\forall \alpha_{1,2} \in T(p,q)$ $\boxed{\sigma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda\sigma(\alpha_2)}$

Кроме того, любая подстановка – это вз-одн. отобр. $\Rightarrow$ операция транспон. вз. одн.

$\Rightarrow$ транспонирование – это изоморфизм на $T(p,q)$

Транспонирование ассоциат., но не коммутативно (!) (очевидно, следует из соотв. свойств перестановок)

σ, τ, θ перестановки $\alpha \in T(p,q)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} (\sigma(\tau\theta))(\alpha) = ((\sigma\tau)\theta)(\alpha) \\ \sigma\tau(\alpha) \neq \tau\sigma(\alpha) \end{array}}$

упр! док-ть: $\alpha \otimes \beta = \sigma(\beta \otimes \alpha)$

def: тензор $\alpha \in T(p,q)$ наз-ся симметричным (по нижним индексам), если $\forall$ перестановки (нижних индексов) σ: $\boxed{\sigma(\alpha) = \alpha}$

и наз-ся кососимметричным (антисимметричным, альтернированным) (по нижним индексам), если $\forall$ перестановки (нижних индексов) σ: $\boxed{\sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha}$, где $\varepsilon(\sigma)$ – четность перестановки.

Из def автоматически получаем св-во для компонент симм. и кососимм. тензоров. $\forall \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}} \\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}} \end{array}}$$

Т.к. $\forall$ перестановка $\equiv$ конечное число транспозиций ($\equiv$ транспонирование по паре индексов)

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall\,(j_k, j_m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{\dots j_k \dots j_m \dots} = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{\dots j_m \dots j_k \dots} \\ \\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\,(j_k, j_m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{\dots j_k \dots j_m \dots} = -\alpha^{i_1 \dots i_q}_{\dots j_m \dots j_k \dots} \end{array}}$$

или если брать $\overset{def}{\vee}$ тензора в смысле def 1:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall\,(k,m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = \alpha(\dots \xi_m, \xi_k, \dots) \\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\,(k,m) \quad \alpha(\dots \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -\alpha(\dots \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Утв: } \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\,(k,m) \quad \alpha(\dots \xi, \dots, \xi \dots) = 0}$$

док-во: $(\Rightarrow)$ α кососимм. $\Rightarrow \forall\,(k,m)$ $\alpha(\dots \xi, \dots, \xi \dots) = -\alpha(\dots \xi, \dots, \xi \dots) \Rightarrow \alpha(\dots \xi, \dots \xi, \dots) = 0$

$(\Leftarrow)$ $\forall\,(k,m)$ $\underset{\parallel}{\alpha(\dots(\xi_k+\xi_m), \dots, (\xi_k+\xi_m), \dots) = 0}$

$$\underset{\underset{0}{\parallel}}{\alpha(\dots \xi_k, \dots, \xi_k, \dots)} + \alpha(\dots \xi_k, \dots, \xi_m \dots) + \alpha(\dots \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) + \underset{\underset{0}{\parallel}}{\alpha(\dots \xi_m, \dots, \xi_m, \dots)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\dots \xi_k, \dots, \xi_m \dots) = -\alpha(\dots \xi_m, \dots, \xi_k \dots) \Rightarrow \alpha \text{ кососимм.} \blacksquare$$

$$\boxed{\alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\,(k,m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{\dots j \dots j \dots} = 0}$$

def: $\alpha \in T(p,0)$ наз-ся полилинейной формой. Если α к тому же, кососимметрич., то α наз-ся антисимм. полилин. формой или p-формой или внешней p-формой или внешней формой степени p

---

$\alpha \in T(0,q)$ наз-ся поливектором. Если α к тому же, кососимметрич., то α наз-ся q-вектором

упр: вспомнить def det из прошлого семестра и сравнить с def p-формы.

$$\boxed{\alpha \in T(p,q) \text{ кососимм (по нижним индексам)} \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ \text{если } p>n \Rightarrow \alpha \equiv 0 \\ 2)\ \text{если } p=n \Rightarrow \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_n} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha^{i_1 \dots i_q}_{1 2 \dots n} \\ \qquad \sigma = (j_1, \dots, j_n) \text{ перестановка чисел } (12\dots n) \end{array}}$$

Примеры: 1) V_3 – пр-во 3^{х}мерн. геом. векторов.

$\alpha(\bar a, \bar b) = (\bar a, \bar b)$ скал.пр-е $\quad \alpha \in T(2,0)$, симметр. $\quad$ упр: 1) вычислить м-цы α, β

$\beta(\bar a, \bar b, \bar c) = \bar a\, \bar b\, \bar c$ смеш. пр-е $\quad \beta \in T(3,0)$, кососимм. $\quad$ 2) убедиться $\forall \sigma$: $\sigma(\alpha) = \alpha$; $\forall \sigma$: $\sigma(\beta) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\beta$

2) $A = (a_{ij}) \leftrightarrow \alpha \in T(2,0)$ $\quad$ α симм. $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow A$ симм. м-ца

α кососим. $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Leftrightarrow A$ кососим. м-ца.

3) $\alpha \in T(3,0)$ кососимм. (3-форма) $\quad \alpha \equiv 0 \quad n>3$

$\exists\ n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{123}$, $\sigma = (j_1, j_2, j_3)$ перестановка $(1\,2\,3)$

остальные эл-ты нули.

σ: $(1\,2\,3)\oplus$ $(2\,1\,3)\ominus$ $(3\,1\,2)\oplus$
$(1\,3\,2)\ominus$ $(2\,3\,1)\oplus$ $(3\,2\,1)\ominus$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

упр: как будет выглядеть м-ца α (кососимм) $\in T(3,0)$, если $n=2$? $n=4$?

4) $\alpha \in T(3,0)$ симметр. $\quad \exists\ n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_{\sigma_1} j_{\sigma_2} j_{\sigma_3}} \quad \forall\, \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ перестановка $(1\,2\,3)$

$\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} =: x$
$\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211} = y$
$\alpha_{113} = \alpha_{131} = \alpha_{311} = z$
$\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122} = t$
…. и т.д. доделать

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_{111} & y & z & y & t & x & z & x & \cdot \\ y & t & x & t & \alpha_{222} & \cdot & x & \cdot & \cdot \\ z & x & \cdot & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{333} \end{array}\right)$$

упр: —"—
1) если $n=2$?
2) если $n=4$

8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров

def: Альтернированием (антисимметризацией) и симметрированием тензора $\alpha \in T_{(p,q)}$ (по нижним индексам) наз-ся операции:

$$\boxed{\begin{aligned} Alt\,\alpha &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(\alpha) \\ Sim\,\alpha &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\sigma(\alpha) \end{aligned}}$$

S_p - мн-во всех перестановок чисел от 1 до p.

Замечания:

1) очевидно, если α симм. $\Rightarrow$ $Sim\,\alpha = \alpha$ $\left(Sim\,\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\alpha = \frac{p!}{p!}\alpha, \text{ т.к. } \sigma(\alpha)=\alpha\ \forall\sigma \right)$

если α кососимм $\Rightarrow$ $Alt\,\alpha = \alpha$ $\left(Alt\,\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha = \frac{p!}{p!}\alpha, \text{ т.к. } \sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha\ \forall\sigma \right)$

2) очевидно, Alt и Sim - лин. операции на $T_{(p,q)}$, т.к. σ - лин. операция на $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (нижних) индексов.

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым происходит альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказались индексы, по которым альтернирование (симметрирование) не проводится, то эти индексы, выделяют вертикальными чертами.

например, $\alpha^{(i_1|i_2|i_3|i_4|i_5)}_{[j_1 j_2 j_3]}$ - по верхним индексам проводится симметрирование по индексам $i_1 i_3 i_5$

- по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример: $\alpha \in T_{(3,0)}$ $n=3$ $\alpha = (\alpha_{ijk}) = (\alpha_{j_1j_2j_3})$ $\sigma \in \left\{ \begin{matrix} (123) & (213) & (312) \\ (132) & (231) & (321) \end{matrix} \right\} = S_3$

$\sigma = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$

1) $\boxed{\beta = Sim\,\alpha} = \frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in S_3}\sigma(\alpha)$ $\beta = \alpha_{(ijk)}$ $\rightsquigarrow$ $\beta_{j_1j_2j_3} = \frac{1}{6!}\sum_{\sigma\in S_3}\alpha_{j_{\sigma_1}j_{\sigma_2}j_{\sigma_3}}$

симметрир. по всем индексам

$\boxed{\beta_{123}} = \alpha_{(123)} = \frac{1}{6}(\alpha_{123}+\alpha_{132}+\alpha_{213}+\alpha_{231}+\alpha_{312}+\alpha_{321})$

$\alpha_{(132)} = \alpha_{(213)} = \alpha_{(231)} = \alpha_{(312)} = \alpha_{(321)}$ $\Rightarrow$ $\beta_{123} = \beta_{132} = \beta_{213} = \beta_{231} = \beta_{312} = \beta_{321} = x$ (см. пример 4)

$\beta_{112} = \alpha_{(112)} = \frac{1}{6}(\alpha_{112}+\alpha_{121}+\alpha_{112}+\alpha_{121}+\alpha_{211}+\alpha_{211})$

$j_1j_2j_3$; $j_1j_2j_3$ (123); $j_1j_3j_2$ (132); $j_2j_1j_3$ (213); $j_2j_3j_1$ (231); $j_3j_1j_2$ (312); $j_3j_2j_1$ (321)

$\alpha_{(121)} = \alpha_{(211)}$ $\Rightarrow$ $\beta_{112} = \beta_{121} = \beta_{211} = y$ (см. пример 4) и т.д. $\Rightarrow$ $\boxed{\beta \text{ - симметр. тензор.}}$

2) $\boxed{\gamma = Alt\,\alpha} = \frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(\alpha)$ $\gamma = \alpha_{[ijk]}$ $\rightsquigarrow$ $\gamma_{j_1j_2j_3} = \frac{1}{6!}\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha_{j_{\sigma_1}j_{\sigma_2}j_{\sigma_3}}$

альтернир. по всем индексам

$\boxed{\gamma_{123}} = \alpha_{[123]} = \frac{1}{6}(\alpha_{123}-\alpha_{132}-\alpha_{213}+\alpha_{231}+\alpha_{312}-\alpha_{321})$ $\varepsilon(\sigma) \in \left\{ \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \end{matrix} \right\}$

$-\alpha_{[132]} = \alpha_{[312]} = -\alpha_{[321]} = \alpha_{[231]} = -\alpha_{[213]}$ $\Rightarrow$ $\gamma_{j_1j_2j_3} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\gamma_{123}$ $\sigma = (j_1j_2j_3)$ перестановка (123)

$\gamma_{112} = \alpha_{[112]} = \frac{1}{6}(\cancel{\alpha_{112}} - \cancel{\alpha_{121}} - \cancel{\alpha_{112}} + \cancel{\alpha_{121}} + \cancel{\alpha_{211}} - \cancel{\alpha_{211}}) = 0$

$j_1j_2j_3$; $j_1j_2j_3$ (123); $j_1j_3j_2$ (132); $j_2j_1j_3$ (213); $j_2j_3j_1$ (231); $j_3j_1j_2$ (312); $j_3j_2j_1$ (321)

$\alpha_{[112]} = -\alpha_{[121]} = \alpha_{[211]}$

$\Rightarrow$ $\gamma_{112} = \gamma_{121} = \gamma_{211} = 0$ $\Rightarrow$ все компоненты γ, у которых совпадают хотя бы 2 индекса равны нулю (см. пример.3)

$\Rightarrow$ $\boxed{\gamma \text{ - кососимм. тензор.}}$

3) $\boxed{\tilde\beta = \alpha(i|j|k)}$ $\rightsquigarrow$ $\tilde\beta_{j_1 j j_2} = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2} \alpha_{j_{\sigma_1} j j_{\sigma_2}} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{j_1 j j_2} + \alpha_{j_2 j j_1}\right) = \alpha_{(j_1|j|j_2)}$

симметрир. по 1 и 3 индексам.

$\sigma \in \{(12)\ (21)\} = S_2 \qquad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$

$\tilde\beta_{112} = \alpha_{(1|1|2)} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{112} + \alpha_{211}\right) \Rightarrow \tilde\beta_{112} = \tilde\beta_{211}$

$\alpha_{(1|1|2)} = \alpha_{(2|1|1)}$; α_{112}: $j_1 j j_2$ (12); α_{211}: $j_2 j j_1$ (21)

$\tilde\beta_{121} = \alpha_{(1|2|1)} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{121} + \alpha_{121}\right) = \alpha_{121} \Rightarrow \boxed{\tilde\beta_{iji} = \alpha_{(i|j|i)} = \alpha_{iji}}\quad \forall i, j$

α_{121}: $j_1 j j_2$ (12); α_{121}: $j_2 j j_1$ (21)

$\tilde\beta_{123} = \alpha_{(1|2|3)} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{123} + \alpha_{321}\right) \Rightarrow \tilde\beta_{123} = \tilde\beta_{321}$ и т.д. $\Rightarrow \boxed{\tilde\beta_{ijk} = \tilde\beta_{kji}}\quad \forall i, j, k$

$\alpha_{(1|2|3)} = \alpha_{(3|2|1)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde\beta \text{ симметр по 1 и 3 индексам}}$

4) $\boxed{\tilde\gamma = \alpha[i|j|k]}$ $\rightsquigarrow$ $\tilde\gamma_{j_1 j j_2} = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma_1} j j_{\sigma_2}} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{j_1 j j_2} - \alpha_{j_2 j j_1}\right) = \alpha_{[j_1|j|j_2]}$

$\varepsilon(\sigma) \in \{+\ -\}$

$\tilde\gamma_{112} = \alpha_{[1|1|2]} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{112} - \alpha_{211}\right) \Rightarrow \tilde\gamma_{112} = -\tilde\gamma_{211}$

$\alpha_{[1|1|2]} = -\alpha_{[2|1|1]}$

$\tilde\gamma_{121} = \alpha_{[1|2|1]} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{121} - \alpha_{121}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde\gamma_{iji} = \alpha_{[i|j|i]} = 0 \quad \forall i, j}$

$\tilde\gamma_{123} = \alpha_{[1|2|3]} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{123} - \alpha_{321}\right) \Rightarrow \tilde\gamma_{123} = -\tilde\gamma_{321}$ и т.д. $\Rightarrow \boxed{\tilde\gamma_{ijk} = -\tilde\gamma_{kji} \quad \forall i, j, k.}$

$\alpha_{[1|2|3]} = -\alpha_{[3|2|1]}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde\gamma \text{ кососимм. по 1 и 3 индексам}}$

Упр: $\alpha \in T(2,0) \leftrightarrow A = (a_{ij})$ 1) $\mathrm{Sim}\, A = \frac{A + A^T}{2}$, $\mathrm{Alt}\, A = \frac{A + A^T}{2}$ 2) $\mathrm{Sim}\, A$ - симм. м-ца? $\mathrm{Alt}\, A$ - кососим. м-ца?