Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

19 апреля 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. *U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$*
Линейным отображением $\mathcal{A}$ называется $\mathcal{A} : U \to V$, обладающее свойством линейности:
$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$
$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно"выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}\mathbb{0}_U = \mathbb{0}_V$

Примеры.

1. $\mathbb{0}$ – нулевое отображение $U \to V$
   $\forall u \in U : \mathbb{0}u = \mathbb{0}_v$
2. $\mathcal{E}$ – тождественное отображение: $V \to V$
   $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n
   $\mathcal{A} : V \to V$
   $\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор
   $\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$
   Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
4. $U = \mathbb{R}^n$ $V = \mathbb{R}^m$
   $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$
   $\mathcal{A} : x \in U \to y = \mathcal{A}x \in V$
   $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$
5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K$ $\mathcal{A} : U \to V$
Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение
$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$
$\mathcal{B} : U \to V$ $\forall u \in U$ $\mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$

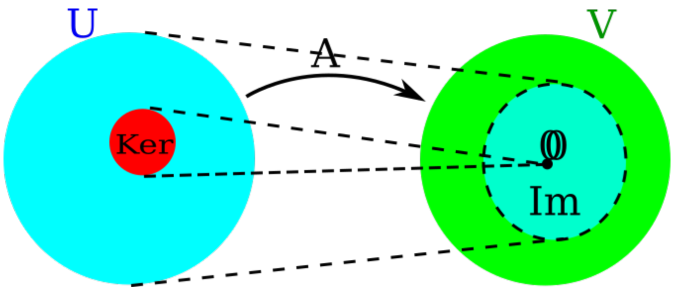
Определение 3. *Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \to V$ называется $\mathcal{C} : U \to V$*
$\forall u \in U$ $\mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$ $\quad \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ *– отображение противоположное $\mathcal{A}$*
$\forall u \in U$ $(-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$

$L(U, V) = Hom_K(U, V) = Hom(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$
$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V.
Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$
Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).
Значит $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$ *– ядро линейного отображения.*

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u\ \forall u \in U\} =$
$\{v \in V \mid \exists u \in U\ v = \mathcal{A}u\}$ *– образ линейного отображения.*



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - это подпространства соответственно пространств U и V. То есть они замкнуты относительно линейных операций.
Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U, то
$\boxed{dim\ Ker\mathcal{A} = def\mathcal{A}}$ – дефект линейного отображения.
Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V, то
$\boxed{dimIm\mathcal{A} = rg\mathcal{A}}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. *$\mathcal{A}$ изоморфно между U и V $\Leftrightarrow$*

1. *$\mathcal{A} \in L(U, V)$*
2. *$Im\mathcal{A} = V$*
3. *$Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$ тривиально*

Доказательство. $\mathcal{A}$ изоморфно $\Leftrightarrow$ взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Пусть $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$
$v_1 = \mathcal{A}u_1\ v_2 = \mathcal{A}u_2$
$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$ т. к. ядро тривиально.
Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. $\square$

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
–инъективно, если $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
–сюръективно, если $Im\mathcal{A} = v$
–биективно $\equiv$ изоморфизм, если инъекция + сюръекция.
–эндоморфизм $\equiv$ линейный оператор, если $U \equiv V$
$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$
–автоморфизм $\equiv$ эндоморфизм + изоморфизм.
$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. *Произведением линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B}$*
$\mathcal{A} \in L(W, V)\ \ \mathcal{B} \in L(U, W)\ \ U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$
называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, которое является композицией функций, определяющих отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$

$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$

Очевидно, $\mathcal{C}$ – линейное отображение.

$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$

Упр:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм
2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
   $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность
3. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ – ассоциативность
4. $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$ – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ *изоморфно.*

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$

$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$

Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения $\mathcal{A}$ на линейное подпространство U_0 называется

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V \quad \forall u \in U_0 \ \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$

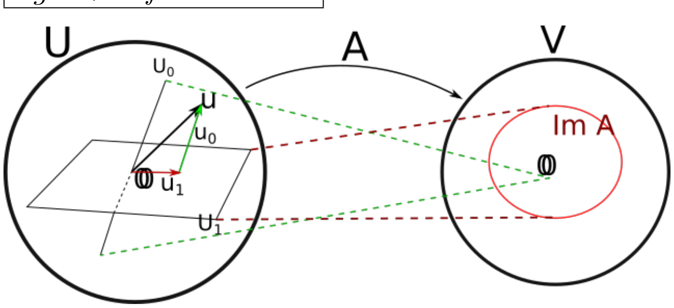
Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфизм* $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ – *изоморфизм*

Примеры.

1. $\mathbb{0} : U \to U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2. $\mathcal{E} : U \to U$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \quad \mathcal{A} : P_n \to P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4. $x \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.
   Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists\mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.
   То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$



Доказательство. $U_0 = Ker\mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U:

$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\}$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \qquad Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}_1$ – изоморфизм? $Im\mathcal{A}_1 = Im\mathcal{A}$ – сюръекция

$$\left.\begin{array}{c} \forall w \in Ker\mathcal{A}_1 \in U_1 \\ KerA_1 \subset KerA = U_0 \end{array}\right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow Ker\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong Im\mathcal{A} \Leftrightarrow dimU_1 = dim(Im\mathcal{A})$ – инъекция.

Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $dimU = dimU_0 + dimU_1 = \underbrace{dimKer\mathcal{A}}_{def\mathcal{A}} + \underbrace{dimIm\mathcal{A}}_{rg\mathcal{A}}$ □

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма)**.**
$\mathcal{A} \in L(U, V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A}$ *изоморфно*
2. $dimU = dimV = rg\mathcal{A}$
3. $dimU = dimV$
   $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in End(V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
2. $dimV = rg\mathcal{A}$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$$\forall u \in U \;\; u = \sum_{i=1}^{n} u_i\xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\mathcal{A}\xi_i$ Достаточно знать, как $\mathcal{A}$ работает на базисных векторах $\xi_1 \dots \xi_n$

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \qquad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m\times n}}$ матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ относительно базисов (ξ, η)

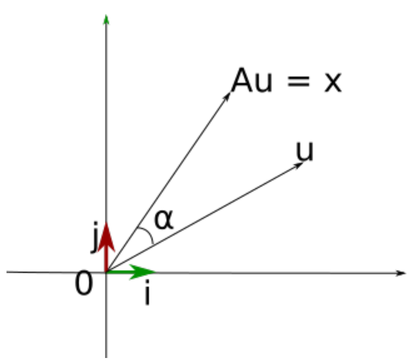
Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$
$A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора
$Ae_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

Примеры.

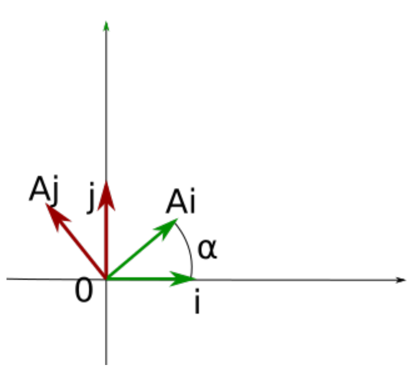
1. $\mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E} e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

2.
$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$
$$\mathcal{E} e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$
$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \to e'}$$

3.



$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$v = \mathcal{A} u$
Поворот векторов в плоскости на угол α.
Очевидно, линейный оператор.



$\mathcal{A}_i = \cos\alpha i + \sin\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$
$\mathcal{A}_j = -\sin\alpha i \cos\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$
$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{A} : \overset{1,t,t^2}{p_2} \to \overset{1,t,t^2}{p_2}$
$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t}{p_1}$
$$\mathcal{A} = \tfrac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m\times n}$
(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм $\equiv$ биекция + линейность.
Биекция. $\mathcal{A} \to A_{m\times n}$ – поняли, как сопоставлять.
Теперь обратно. Пусть $A_{m\times n} = (a_{ij})$

$U\ \xi_1 \dots \xi_n$ базис $\qquad \mathcal{A} : U \to V$

$V\ \eta_1 \dots \eta_m$ базис $\qquad \mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \in V$

$\forall u \in U\ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$

$\mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V)\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$

$\forall \lambda \in K\ \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda\mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}n_j + \lambda \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность $\Rightarrow$ изоморфизм. □

$\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$
$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$
$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$
$End(V) \cong M_{n\times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).
Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$V\eta_1 \dots \eta_m \qquad u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$

$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

$v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \eta_j$

$\mathcal{A} \in L(U, V) \underset{\xi,\eta}{\leftrightarrow} A$

$\sum\limits_{j=1}^{m} v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_{ji})\eta_j$

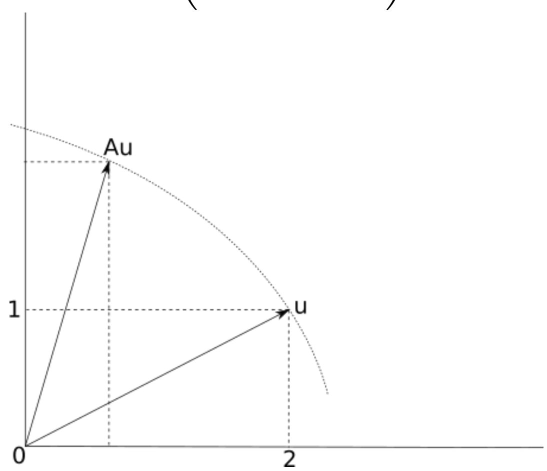
Так как координаты определяются единственным образом:

$\boxed{v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} u_i} \leftrightarrow \quad \boxed{v = Au} \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ поворот на угол α

   $(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

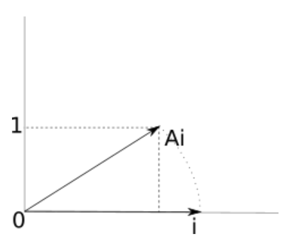
   $\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{u} \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mathcal{A}u} \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   $i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

2. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t,t^2}{p_2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overbrace{3t^3 + 6t + 4}^{u(t)})' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi,\eta)} A$

$\quad \xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$

$T_{\eta\to\eta'}$ – *матрица перехода*

$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi',\eta')} A'$

$\quad \eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$

$\boxed{\mathcal{A}' = T^{-1}_{\eta\to\eta'} \cdot A \cdot T_{\xi\to\xi'}}$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \underset{\xi_1\dots\xi_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows} & \underset{\eta_1\dots\eta_m}{V} \\ \mathcal{E}_u \uparrow\upharpoonleft & & \downharpoonleft\uparrow \mathcal{E}_v \\ \underset{\xi'_1\dots\xi'_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\to} & \underset{\eta'_1\dots\eta'_m}{V} \end{array}$$

$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T^{-1}_{\eta\to\eta'} A T_{\xi\to\xi'}$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$

$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$

$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T^{-1}_{\eta\to\eta'}$ Смотри пример 2 $\square$

Следствие 1.

$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1\dots e_n}{V} \to \underset{e_1\dots e_n}{V}$

$e_1 \dots e_n$ *базис* $V \leftrightarrow A$

$e'_1 \dots e'_n$ *базис* $\leftrightarrow A'$

$\mathcal{A} : \underset{e'_1\dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1\dots e'_n}{V}$

$T = T_{e\to e'}$

$\boxed{A' = T^{-1} A T}$

Замечание. В условиях теоремы $v = \mathcal{A}u \begin{array}{l} \xleftrightarrow{(\xi,\eta)} v = Au \\ \xleftrightarrow{(\xi',\eta')} v' = A'u \end{array}$

$V = T_{\eta\to\eta'} V'$

$U = T_{\xi\to\xi'}U'$
$T_{\eta\to\eta'}v' = AT_{\xi\to\xi'}u'$
$v' = \underbrace{\boxed{T^{-1}_{\eta\to\eta'}AT_{\xi\to\xi'}}}_{A'}u'$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{u} \leftrightarrow v = Au$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.
$v' = A'u'$

Определение 1. $A_{m\times n}$
$ImA = span(A_1, A_2, \dots A_n) = \{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i A_i | \alpha_i \in K\} =$
$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) | x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$

$$x = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$rgA = dimImA$ *— ранг матрицы*
$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) | Ax = \mathbb{0}\} =$ *{множество решений СЛОУ } — ядро матрицы*
$dimKerA = n - rgA = defA$ *— дефект матрицы*
$\boxed{rgA + defA = n}$ *— аналогично теореме о ранге и дефекте*

Теорема 1. $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$
$\boxed{\begin{matrix} rg\mathcal{A} = rgA \\ def\mathcal{A} = defA\end{matrix}}$,
где матрица A – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств U и V. $rg\mathcal{A}$, $def\mathcal{A}$ инвариантны относительно выбора базиса.

Доказательство. $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi,\eta)}{A}$ $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U
$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V
$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$
$\mathcal{A}\xi_i \overset{\leftrightarrow}{\underset{\cong}{}} A_i$
Координатный изоморфизм.
Пусть $rgA = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.
По свойствам изоморфизма это означает, то из $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$ k линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dimIm\mathcal{A} = k$

$$\begin{matrix} dimU & = & rg\mathcal{A} & +def\mathcal{A} \\ \| & & \| & \\ n & & rgA & \\ & & \| & \\ & & k & \end{matrix}$$

$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim$ пространства решений $Ax = 0 = defA$ $\square$

Следствие 1. *$\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow$ A невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.*

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{matrix} defA = 0 \\ dimU = dimV \end{matrix} \Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow A$ невырожденная. $\square$

Теорема 2. *$det\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $det\mathcal{A} = detA$, где A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.*

Доказательство. V $e_1 \dots e_n$

$det\mathcal{A} = det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (det\ n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма})$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=2}^{n}\dots\sum_{i_n=n}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_n n}\ det(e_{i_1}, e_{i_2}\dots e_{i_n}) = (n\text{-форма – 2 одинаковых аргумента} \Rightarrow det = 0)$$

$$= \sum_{\sigma=(i_1\dots i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_n n} \overbrace{\underset{\text{все разные}}{det(e_{i_1}\dots e_{i_n})}}^{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \quad det(e_1\dots e_n)=1} = \sum_{\sigma=(i_1\dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_n n} = detA$$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$T = T_{e\to e'}$

$det\mathcal{A} = detA' \stackrel{?}{=} detA$

$A' = T^{-1}AT$

$detA' = detT^{-1} \cdot detA \cdot detT = detA$ $\square$

Определение 2. *A, B называются подобными, если*
$\exists$ невырожденная $C : B = C^{-1}AC$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$A' = T^{-1}AT$

A, B подобны $\Rightarrow detA = detB$

Следствие 1. *f – n-форма на V*

$\forall \xi_1 \dots \xi_n \ \ \forall \mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \boxed{f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = det\mathcal{A}\ f(\xi_1 \dots \xi_n)}$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$\underset{n\text{-форма}}{g(\xi_1 \dots \xi_n)} = det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$

$det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underset{\text{смотри док-во теоремы}}{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)} = det(\xi_1 \dots \xi_n)\sum_{\sigma}(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1}\dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1\dots\xi_n)} \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$$ $\square$

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n\times n}$

$AB = (AB_1\ AB_2 \dots AB_n)$

$det(AB) = det(AB_1 \dots AB_n) =$

$= detA \cdot det(B_1 \dots B_n) = detA \cdot detB$

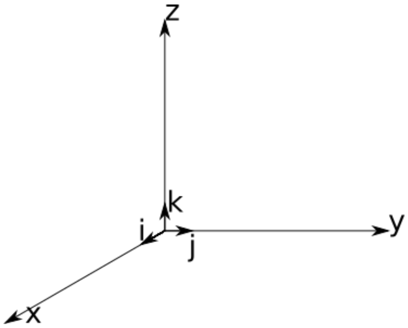
Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$
$det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Доказательство. $det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det(AB) = detA \cdot detB = det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{B}$ □

Следствие 3. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
$\Leftrightarrow det\mathcal{A} \neq 0$
Причем $det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathcal{A}}$

Доказательство. Из следствия 2
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$
$det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{A}^{-1} = det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$ □

Примеры. V_3



$V_{abc\text{–правая тройка}} = \underset{\text{смешанное пр-е}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} = f(\underset{\text{3-форма}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}})$
$\mathcal{A} \in End(V_3)$ $u \in V_3 \to v = \mathcal{A}u \in V_3$
Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$\mathcal{A}(V_{(\overline{a}\overline{b}\overline{c})}) = f(\mathcal{A}\overline{a}, \mathcal{A}\overline{b}, \mathcal{A}\overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot V(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$
$\lambda = |det\mathcal{A}|$ Объем увеличится в λ раз.

1. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
   Оператор подобия
   $\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$

   $$\mathcal{A}\overline{i} = \mu\overline{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $A?$ $$\mathcal{A}\overline{j} = \mu\overline{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

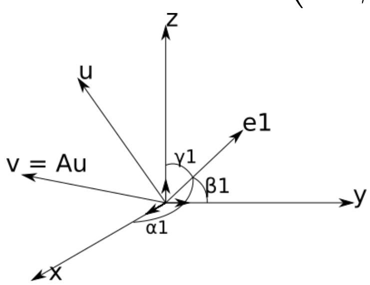
   $$\mathcal{A}\overline{k} = \mu\overline{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

   $\lambda = |det\mathcal{A}| = |detA| = |\mu^3|$

2. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$

   Оператор поворота

$$\mathcal{A}: \quad \begin{array}{l} \bar{i} \to e_1 \nearrow \\ \bar{j} \to e_2 \to \\ \bar{k} \to e_3 \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \end{array}$$



$|e_i| = 1$
$(e_i, e_j) = 0$
$i \neq j$

$"\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})" = det\mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$detA = |\cdots| \underbrace{e_1 e_2 e_3}_{\text{Смешанное произведение}} = 1$$

$$(detA)^2 = detA \cdot detA^T = det(AA^T) = det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = detE = 1$$

$|detA| = 1$

Утверждение. *A, B подобные матрицы $\Rightarrow trA = trB$*
$trace =$ след

Доказательство. A, B подобные $\Rightarrow$
$\exists\ C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{"-1"}(AC)ji = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{''-1''} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_{ki} C_{ij}^{''-1''}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = trA$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \left[\begin{array}{l} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{array}\right.} \quad CC^{-1} = E$$

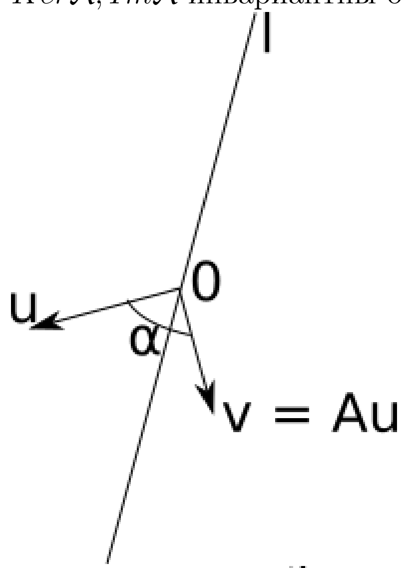
□

Определение 3. *$tr\mathcal{A} = trA$, где A – матрица оператора в некотором базисе.*
$tr\mathcal{A} = trA = trA'$ — не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

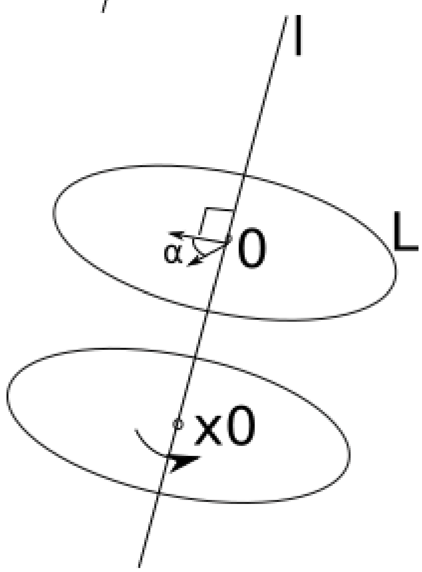
Определение 4. *$L \subset V$ L инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$ если $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$*

Примеры.

1. $\mathbb{0}, V$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$
2. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$



$\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
Поворот вектора(пр-ва) относительно оси l на угол α



Плоскость $\perp$ l инвариантна относительно $\mathcal{A}$
$P = x_0 + L$ инвариантно

Теорема 3. *$L \subset B$ $\mathcal{A} \in End(V)$. Линейное пространство инвариантно относительно $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \exists$ базис пространства V, т.ч. матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \mathbb{0} & A_3 \end{array}\right)$*
$A_1 k \times k$ где $k = dimL$

Доказательство. $L = \underset{\text{базис}}{span(e_1 \dots e_k)}$
Дополним до базиса $V : e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \underset{1\le i\le k}{\mathcal{A}e_i} \in L = \sum_{m=1}^{k} a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^{n} 0\cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i}\\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k+1\le i\le n}{\mathcal{A}e_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i}\\ \vdots \\ a_{ni}\end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1i} & \\ \vdots & A_i^1 \\ a_{ki} & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_i^{2,3} \\ \dots \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad \square$$

Следствие 1. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно* $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$ *базис пр-ва* V*, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *будет иметь* <u>*блочно-диагональный вид:*</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\Big(\underset{\text{размерность матрицы}}{A^i}\Big) = dimL_i$$

Доказательство. $L_1 = span(\underset{\text{базис}}{e_i^1 \dots e_i^{i_k}})$

т.к. $\bigoplus$, то базис V – объединение базисов L_i

$V = span(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overset{L_1}{\underline{1\dots i_1}}} & \multicolumn{3}{c|}{\overset{L_2}{\underline{i_1+1\dots i_2}}} & \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{отвечает позиции базисных элементов пр-ва } L_i \text{в базисе } V \qquad \square$$

Следствие 2. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

Доказательство. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \Rightarrow \forall\ u \in V \ \ \exists! u = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in L_i$

$Im\mathcal{A} \subset \sum\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

Верно и "$\supset$"

Пусть $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in V) \in Im\mathcal{A}$

$Im\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$\bigoplus$ прямая?

$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \mathbb{0} \longleftarrow$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнктны $\nwarrow\Rightarrow \forall i : v_i = \mathbb{0}$

$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i}$ дизъюнктны $\Rightarrow \bigoplus$ $\square$

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(v) \quad V$ линейное пространство над K

Определение 1. *$\lambda \in K$ – **собственное число** (с.ч.) линейного оператора $\mathcal{A}$, если $\exists$ $\boxed{v \in V \neq \mathbb{0}}$, который называется **собственным вектором** (с.в.), такой что $\boxed{\mathcal{A}v = \lambda v}$*

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$

Определение 2. *$V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \{$с.в. v и $\mathbb{0}\}$ называется собственным подпространством.* $\boxed{\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda}$ *– геометрическая кратность с.ч.*

$\gamma \geq 1$

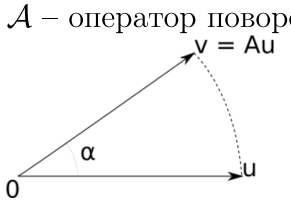
V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$v \in V_\lambda \ \ \mathcal{A}v = \lambda v \overset{?}{\in} V_\lambda$

$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda\mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ – оператор подобия:
   $\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$
   μ с.ч. $\quad V_\lambda = V$
2. $\mathcal{A}$ – оператор поворота на плоскости на угол α



$\alpha \neq \pi k \Rightarrow$ нет с.в.

3. Пусть λ с.ч.$= 0 \quad \mathcal{A}v = \mathbb{0}$ с.в. $\neq \mathbb{0} \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow Ker\mathcal{A}$ нетривиально $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ не автоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ необратимо $\Leftrightarrow det\mathcal{A} = 0$
4. $\mathcal{A} : V \to V$
   $v_1 \dots v_n$ базис, т.ч. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$
   Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$
   $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
   λ – с.ч. v с.в. $\neq \mathbb{0} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ нетривиально $\Leftrightarrow det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – *характеристический многочлен оператора* $\mathcal{A}, t \in K$

$Ve_1 \dots e_n$ базис $\quad \mathcal{A} \leftrightarrow A$
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = det(A - tE)$ т.к. det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (\underbrace{a_{11} + \dots + a_{nn}}_{trA = tr\mathcal{A}}) t^{n-1} + \dots + \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$$

По теореме Виета: $det\mathcal{A} = \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_n}_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)}$

$\underline{\underline{\lambda \in K}}$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \;\; (\underline{\underline{\lambda \in K}})$
λ корень характеристического многочлена.
$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.
$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни χ_A будут с.ч.
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$
$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. *Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется* ***спектром*** *линейного оператора.* $(\lambda, \alpha(\lambda))$
Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.
$\alpha(\lambda) = 1 \; \forall \; \lambda$

Немножко про алгебраическую кратность
$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod\limits_{a\text{–корень}} (t - a)^{m_a}$

a–корень $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \;\vdots\; (t - a)$

a – корень f **кратности** $m \Leftrightarrow \begin{matrix} f \mid (t-a)^m \\ f \nmid (t-a)^{m+1} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow f(t) = (t-a)^m g(t)$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a$ $\quad a$–корень с учетом кратности

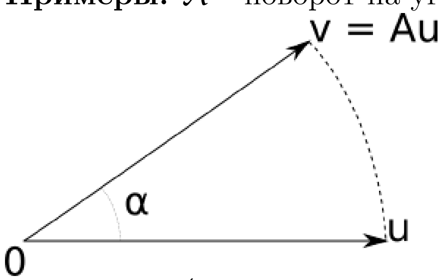
$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$

$(-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n)$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_n)$

$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ с.ч.

Примеры. $\mathcal{A}$ – поворот на угол α



$\bar{i}\ \bar{j}$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \begin{pmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{pmatrix} =$$

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha t + t^2 + sin^2\alpha = t^2 - 2\cos\alpha t + 1$

$D = 4\cos^2\alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$

нет вещ. корней $\Rightarrow$ нет с.ч.

$K = \mathbb{R}$

Теорема 1. *λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow$* $\boxed{1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = dim V_\lambda = span(\underbrace{v_1 \dots v_k}_{\text{базис}})$

V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 \end{array}\right) \quad A^1_{k\times k}$$

Базис $= v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$

$$\mathcal{A} \underset{i=1\dots k}{v_i} \in V_\lambda = \lambda v_i \leftrightarrow A^1_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & \\ 0 & \lambda - t & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 - tE_{n-k} \end{array}\right) \underset{\text{св-ва } det}{=} \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{\mathcal{A}^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$ □

Теорема 2. *$\lambda_1 \dots \lambda_m$ – различные с.ч. $\mathcal{A}$*

$v_1 \dots v_m$ соответствующие им с.в. $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1 \quad \lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq \mathbb{0}$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m-1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

   От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A}$,

   а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

   Пусть $v_m = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$

   $$\begin{array}{l} \mathcal{A}_{v_m} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i \\ \| \\ \lambda_m v_m = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i \end{array}$$

   $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \underset{\overset{\nparallel}{0}}{(\lambda_i - \lambda_m)} v_i = \mathbb{0}$ $\;v_i$ линейно независим по инд. предположению

   $\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall\, i = 1 \dots m-1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow v_m = \mathbb{0}$ — Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть $\mathbb{0}$

□

Следствие 1. *$\lambda_1 \dots \lambda_m$ различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ дизъюнктны.* $\left(\bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ \text{с.ч.}}} V_\lambda\right)$

Доказательство. $v_1 + \ldots + v_m = \mathbb{0} \quad v_i \;\in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq \mathbb{0} \Rightarrow$ это слагаемое с.в. $\Rightarrow$ противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall\, i : v_i = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктны. □

Теорема 3. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \to L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \qquad A_{k_i \times k_i}$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства } det}{=} |A^1 - tE_{k_1}||A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$

$$\begin{array}{cccc} \chi_{A^1}(t) & \chi_{A^2}(t) & \dots & \chi_{A^m}(t) \\ \| & \| & & \| \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & & \mathcal{A}^m \end{array}$$

□

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n\times n} \quad \lambda$ с.ч. $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq \mathbb{0} \quad Ax = \lambda x$

$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейный оператор}}}{Ax}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$

$t_1 = 0 \;\; \alpha(0) = 2$

$t_2 = 1 \;\; \alpha(1) = 1$

$V_\lambda = Ker(A - \lambda E) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in]R$

$V_{\lambda_1} = 0 = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$

$\lambda_2 \;\; 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma(1) = 1$

7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.) Проекторы. Спектральное разложение о.п.с. Функция от матрицы.

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V)$

$\mathcal{A}$ называется о.п.с., если $\exists$ базис пространтсва V, т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид $\Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$ базис V из с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda с.ч.\ \mathcal{A}} V_\lambda$

$V = span(v_1 \ldots v_n)$

Теорема 1. *Пусть $\sum\limits_{\lambda с.ч.\ \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = dimV$*

$\Leftrightarrow$все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. $\mathcal{A}$

$\boxed{\mathcal{A} о.п.с. \Leftrightarrow \forall с.ч. \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = dimV = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \gamma(\lambda) \underset{\nearrow}{=} \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda)$

$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \qquad \nearrow$

$\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \to \quad \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$ □

Следствие 1. $\sum\limits_{\lambda с.ч.} \alpha(\lambda) = n = dimV$

$\mathcal{A}$о.п.с. $\Leftarrow$ спектр – простой.

(n попарно различных с.ч. $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$)

Определение 2. *$A_{n\times m}$ называется диагонализируемой, если $\exists$ невырожденная $T_{n\times n}$, т.ч.*

$T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$

("A подобна диагональной матрице")

Следствие 2. *Если матрица $A_{n\times n}$ – матрица некоторого о.п.с. $\mathcal{A}$, то она **диагонализируема**. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.*

Доказательство.

$$\begin{array}{llcll}
\mathcal{A} & \text{о.п.с.} & \Leftrightarrow & \exists \text{ базис} & \underset{\text{с.в.}}{v_1 \ldots v_n} \\
\updownarrow & \underset{\text{базис}}{(e_1 \ldots e_n)} V & & & \underset{\text{с.ч.}}{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \\
A & & & & \updownarrow \\
 & & & & \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

$T = T_{e\to v}$ невырожденная.

$\Lambda = T^{-1}AT$

$A = T\Lambda T^{-1}$ □

$$\boxed{\begin{array}{r} A \text{ диагонализируема } \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \\ \forall\ \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \end{array}}$$

Определение 3.

$$\begin{array}{ccc}
V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i & & \mathcal{P}_i : V \to L_i \subset V \\
\nwarrow\Leftarrow & \Leftrightarrow & \Rightarrow\searrow \\
\underset{\textit{линейное подпр.}}{L_i \subset V} & \forall v \in V\ \exists! : v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i &
\end{array}$$

$\boxed{\forall\ v \in V \quad \mathcal{P}_i v \overset{def}{:=} v_i} \qquad i = 1 \ldots m$

Оператор проектирования (проектор)

$\mathcal{P}_i \overset{?}{\in} End(V)$

$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_i$ линейный оператор.

$u + \lambda V = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in L_i + \lambda \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\underbrace{u_i + \lambda v_i}_{\in L_i})$

$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$

Свойства проекторов:

1. $\forall\ i \neq j\ \ \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij = \mathbb{0}$
2. $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i\ \ (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\varnothing_i^k = \mathcal{P}_i)$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
4. $Ker\mathcal{P}_i = \sum\limits_{j\neq i} L_j\ \ \forall i = 1 \ldots m$

   $Im\mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

1. $\forall v \in V\ \ \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij(v) = \mathcal{P}_iv_j \in L_j = \mathbb{0} \Rightarrow \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij = \mathbb{0}$

   Т.к. L_i дизъюнктны

   $v = v_1 + v_i + \underset{\text{Ед. образом}}{v_j} + \ldots + v_n$

   $v_j = v_j + \mathbb{0}$
2. $\forall v \in V\ \ \mathcal{P}_i \underbrace{\mathcal{P}_i(v)}_{v_i \in L_i} = v_i = \mathcal{P}_iv$

   Т.к. верно $\forall v \in V$, то верно и для базиса $\Rightarrow$ операторы совпадают. $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$
3. $\forall v \in V(\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i)v = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_iv = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i = v = \mathcal{E}v \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} = \mathcal{E}$
4. $\mathcal{P}_i(v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_m) + \mathbb{0}$

   $= \sum\limits_{j\neq i} \underbrace{\mathcal{P}_iv_j}_{\mathbb{0}}$

   $$\boxed{\begin{gathered}\sum_{j\neq i} L_j \subset Ker\ \mathcal{P}_i \\ \text{т.к. } v = \bigoplus_{j\neq i} L_j \oplus L_i\end{gathered}} \Rightarrow Ker\ \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j\neq i} L_j$$

   $Im\ \mathcal{P}_i = L_i$ по $def\ \ " \subset "$

   Верно "$\supset$" $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P}v_i = v_i$

$\square$

Утверждение. *$\underset{i=1\ldots m}{\mathcal{P}_i \in End(V)} : V \to V$ и выполнены свойства 1, 3 $\Rightarrow$*

$\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{P}_i$ (т.е. $\mathcal{P}_i$ проекторы на $L_i = Im\mathcal{P}_i$)

Доказательство.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

   $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_i \overset{?}{=} \mathcal{P}_i$

   $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i\mathcal{E} = p_i \sum\limits_{j=1}^{m} \mathcal{P}_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{0} \\ i \neq j}}{\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j} = \mathcal{P}_i^2$
2. $v_1 + v_2 + \ldots + v_m = \mathbb{0}$

   $v_i \in Im\mathcal{P}_i$ дизъюнктно?

   $v_i = \mathcal{P}_iw_i\ w_i \in V$

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \underset{\uparrow}{=} \mathcal{P}_i(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j}}_{=\mathbb{0}}) = \mathbb{0}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j}_{=\mathbb{0}\ i\neq j} w_j) = \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i$$

$$\forall\ v \in V\ \mathcal{E}v = v = \sum_{j=1}^{m} \underset{\substack{\| \\ v_j \in Im\mathcal{P}_j}}{\mathcal{P}_j v} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{m} Im\mathcal{P}_j$$

□

Теорема 2 (О спектральном разложении о.п.с.). $v = \bigoplus\limits_{\lambda c.ч.} V_\lambda \quad \underset{проекторы}{\mathcal{P}_\lambda : V \to V_\lambda}$

$\mathcal{A}$ *о.п.с.* $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda c.ч.} \lambda \mathcal{P}_\lambda \leftarrow$*спектральные проекторы*

Доказательство.

1. $\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$
2. $\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$
3. $\sum\limits_{\lambda с.ч.} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E}$

$\forall v \in V$

$$\mathcal{A}v \underset{\substack{\uparrow \\ V=\bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda}}{=} \mathcal{A}(\sum_{\lambda} v_\lambda \in V_\lambda) = \sum_{\lambda с.ч.} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{=\lambda v_\lambda} =$$

$$\sum_{\lambda с.ч.} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda с.ч.} \lambda \mathcal{P}_\lambda v$$

Доказательство верно $\forall$ векторного про-ва V. В частности для базиса $\Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda с.ч.} \lambda \mathcal{P}_\lambda}$ □

Следствие 1. $A_{n\times n}$ ***диагонализируема*** $\Leftrightarrow\ \exists \underset{проекторы}{\mathcal{P}_{\lambda\ n\times n}}\ 1^\circ\ 2^\circ\ 3^\circ$

$$A = \sum_{\lambda c.ч.} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1\ \alpha(\lambda_1) = \gamma(\alpha_1) = 2$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = span(v_1, v_2)$

$\lambda_2 = -1\ \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = span\ V_3$

$\Rightarrow$ о.п.с. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = span(V_1, V_2, V_3)$

$T_{e\to v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad \boxed{AT = T\Lambda}$

$\mathcal{P}_1 : V \to V_{\lambda_1} \subset V$

$\mathcal{P}_2 : V \to V_{\lambda_2} \subset V$

$\mathcal{P}_1'$ матрица $\mathcal{P}_1$ в базисе $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$– матрицы проекторов в базисе e(канонич.)

$\mathcal{P}_1 v_i = \left[\begin{array}{l} v_i, i = 1,2 \\ \mathbb{0}, i = 3 \end{array} \right.$

1° 2° 3°

$\mathcal{P}_1' + \mathcal{P}_2' = E$

$\mathcal{P}_1'\mathcal{P}_2' = \mathbb{0} \dots$

$\mathcal{P}_2'$ матрица $\mathcal{P}_2$ в базисе $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_i' = T^{-1}\mathcal{P}_i T \qquad i = 1,2$

$\mathcal{P}_i = T\mathcal{P}_i' T^{-1} \qquad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \mathbb{0}$

$\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$

$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$

Определение 4. $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$ – *последовательность матриц*

$\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall\ i,j\ \exists a_{ij} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^k$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{N} A_m}_{\substack{s_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$e^x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}\ R = \infty\ \cos x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$

$\ln(1+x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad \text{либо } x = 1$

Определение 5. *Функция от матрицы.*

$A_{n\times n}$

$f(A)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_mA^m$, *где* $\boxed{\begin{array}{rcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum\limits_{m=0}^{\infty}C_mx^m \end{array}}$

$e^A=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}$

$\cos A=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}A^{2m}$

Теорема 3. *f аналитическая в $|x|<R$*

$A_{n\times n}$ все с.ч. $|\lambda|<R$

*A **диагонализируемая** То есть:*

$\exists \underset{\textit{невырожд.}}{T}:\Lambda=T^{-1}AT$

$\exists\mathcal{P}_\lambda:A=\sum\limits_\lambda\lambda\mathcal{P}_\lambda$

$\Downarrow$

1. $\underset{f(A)}{\exists}=T\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n)\end{pmatrix}T^{-1}$
2. $\underset{f(A)}{\exists}=\sum\limits_{\lambda \textit{с.ч.}}f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$

Доказательство.

1. $f(A)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_mA^m$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_mx^m \\ |x|<R\end{array}}$

   $A^m=(T\Lambda T^{-1})^m=$

   $$=T\Lambda\underbrace{T^{-1}T}_{E}\Lambda T^{-1}\dots T\Lambda T^{-1}1=$$

   $$=T\Lambda^mT^{-1}=T\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 & \\ 0 & & \lambda_n^m\end{pmatrix}T^{-1}$$

   $$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}C_mT\Lambda^mT^{-1}=T(\sum_{m=0}^{\infty}C_m\Lambda^m)T^{-1}=$$

   $$=T\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_m\lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{\infty}C_m\lambda_n^m\end{pmatrix}T^{-1}=T\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n)\end{pmatrix}T^{-1}$$

   $|\lambda_i|<R$
2. $A^m=(\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}}\lambda\mathcal{P}_\lambda)^m \underset{\substack{\lambda\neq\mu \\ \mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu-\mathbb{0}}}{=} \sum\limits_\lambda\lambda^m\mathcal{P}_\lambda^m=\sum\limits_\lambda\lambda^m\mathcal{P}_\lambda$

   $$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(\sum_\lambda\lambda^m\mathcal{P}_\lambda)=\sum_\lambda(\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}C_m\lambda^m=f(\lambda)}_{|\lambda|<R})\mathcal{P}_\lambda=\sum_\lambda f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$$

$\square$

Замечание. A диагон. $\Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$

$\Leftrightarrow A = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$

$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$

$f(A) = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$

$t \in \mathbb{R}$

$f(At) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$

$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$

$$\boxed{f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}}$$

$t^m A^m = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$

$$\boxed{f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda)\mathcal{P}_\lambda}$$

Примеры. e^{At}

$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$\chi(t) = det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$

$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$

$V_{\lambda_1}: \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array}\right)$

$V_{\lambda_1} = span \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$

$V_{\lambda_2}: \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array}\right)$

$V_{\lambda_2} = span \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{v_3} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$

$\forall\ \lambda: \left.\begin{array}{rcl} \alpha(\lambda) & = & \gamma(\lambda) \\ \sum\limits_{\lambda} \alpha(\lambda) & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A$ диагонализируемая

$$T_{e\to v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \underset{i=1,2}{\to} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$A_{n\times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x}$ – производная

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \qquad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности $\quad \begin{matrix} (e^{At})' = Ae^{At} \\ e^{A\cdot 0} = E \end{matrix}$

$$e^{At} = \left(\sum_{\lambda \text{с.ч.}} e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda\right)' = \underline{\underline{\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda}}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_\mu \mu\mathcal{P}_\mu \cdot \sum_\lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda \underset{\mu=\lambda}{=} \underline{\underline{\sum_\lambda \lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda}}$$

Замечание. $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow detA \neq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \neq 0$
(все корни хар. многочлена)

$\sqsupset$ A диагонализируема. Все с.ч. $\lambda \neq 0$

$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$

$\Lambda\Lambda^{-1} = E$

$$AA^{-1} = \underbrace{T \underbrace{\Lambda \underbrace{T^{-1}T}_{E} \Lambda^{-1}}_{E} T^{-1}}_{E} = E$$

$A^{-1} = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda}\mathcal{P}_\lambda$

($AA^{-1} = E$ упр.)

$$\sqrt[m]{A} = T\,\sqrt[m]{\Lambda}T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[n]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\sqsupset$ все $\lambda_i \geq 0$

(m нечет $\Rightarrow \lambda$ любого знака)

$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$

$$(\sqrt[m]{A})^m = T\,\underbrace{\sqrt[m]{\Lambda}\underbrace{T^{-1}T}_{E}\,\sqrt[m]{\Lambda}\underbrace{T^{-1}\dots T}_{E}\,\sqrt[m]{\Lambda}}_{\Lambda}T^{-1} = T\Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda}\mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.: $(\sqrt[m]{A})^m = A$)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \quad A^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\mathcal{P}_1 + \frac{1}{(-1)}\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$$

$A^2 = E$

7.6 Комплексификаци линейного вещ. пространства. Продолжение вещ. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V) \quad V$ над полем K

$$\chi(\lambda) \underset{\lambda \text{ корень}}{=0}$$

$\swarrow$

$K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$

Все корни $\lambda \in K$

Т.е. каждый корень с.ч.

$\sum\limits_{\lambda \text{с.ч}} \alpha(\lambda) = n = dimV$

I $\swarrow$

$\forall\ \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ – о.п.с. $\to A$ диагонализир.

$\searrow$ II

$\exists\ \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ не о.п.с.

$\to A$ приводится к Жордановой форме

$\searrow$ III

$K = \mathbb{R}$

Не все корни вещ.

т.е. $\exists \lambda \notin K = \mathbb{R}$

$\sum\limits_{\text{вещ.}\lambda\text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = dimV$

$\mathcal{A} \to A$?

Определение 1. *V – линейное пространство над $\mathbb{R}$*

$\forall\ x, y \in V \quad v := x + iy\ \in V_{\mathbb{C}}$

$\forall\ v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \quad \begin{array}{l} x = Re\ v \\ y = Im\ v \end{array}$

Определим

1. $v = v' \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x' \in V \\ y = y' \end{array}\right.$
2. $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{array}\right.$
3. $\forall\ \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\overbrace{\alpha x - \beta y}^{a \in V} + i\overbrace{\beta x + \alpha y}^{b \in V}}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

4. $\forall\ x \in V \leftrightarrow x + i\mathbb{0} \in V_{\mathbb{C}}$
   $V \subset V_{\mathbb{C}}$
   $\mathbb{0} \leftrightarrow \mathbb{0} + i\mathbb{0}$

Упр.: $V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство над $\mathbb{C}$

$\boxed{V_{\mathbb{C}} \text{ – комплексификация линейного вещественного пространства } V}$

Утверждение. *$e_1 \dots e_n$ базис $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$*

Т.е. $dimV = dimV_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}} \qquad$ структуры над разными полями.

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$?

– порождающая?

– линейно независимая?

1. $\forall\ v \in V_{\mathbb{C}}\ \ v = x \in V + iy \in V = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j + i\sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j =$

$\sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\boxed{x_j + iy_j}}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \ldots e_n$ порождающая.

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j e_j = \mathbb{0} \qquad \begin{matrix} \gamma_j \in \mathbb{C} \\ \gamma_j = \alpha_j + i\beta_j \end{matrix}$

$||$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\alpha_j}\, e_j}_{x} + i\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\beta_j}\, e_j}_{y} = \mathbb{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathbb{0} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\alpha_j}\, e_j \\ y = \mathbb{0} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\beta_j}\, e_j \end{cases} \underset{e_1 \ldots e_n \text{ линейно независ.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \forall\ j\ \alpha_j = 0 \\ \forall\ j\ \beta_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall j\ \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow \underset{\text{лин. незав.}}{e_1 \ldots e_n}$ в $V_{\mathbb{C}}$

$\square$

Определение 2. $z = x + iy \quad x, y \in V$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

вектор сопряженный к z**:**

$\overline{z} = x - iy$

$(\overline{\overline{z}} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \overline{\lambda}\overline{z})$

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix}$$

Утверждение. *$v_1 \ldots v_m$ линейно незав. в $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \overline{v}_1 \ldots \overline{v}_m$ линейно независимы в $V_{\mathbb{C}}$*

Очевидно, $v_1 \ldots v_m$ линейно зависимы $\Rightarrow \overline{v}_1 \ldots \overline{v}_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$\left.\begin{matrix} \overline{\sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j \overline{v}_j} = \overline{\mathbb{0}} = \mathbb{0} \\ || \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{\gamma}_j \overline{\overline{v}_j} = \sum\limits_{j=1}^{m} \underset{\text{линейно незав.}}{\gamma_j' v_j} \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \forall j\ \gamma_j' = 0 = \overline{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow$ линейно независим.

$\square$

$\boxed{rg(v_1 \ldots v_m) = rg(\overline{v}_1 \ldots \overline{v}_m)}$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$

$V_{\mathbb{C}}$

$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i\underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$

Линейность?

1. *Аддитивность.* $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1+v_2)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1+\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

   Очевидно, из аддитивности $\mathcal{A}$

   $v_1+v_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
2. *Однородность*

   $\forall\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha+i\beta)(x+iy))=$

   $=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x-\beta y)+i(\alpha y+\beta x))=$

   $=\mathcal{A}(\alpha x-\beta y)+i\mathcal{A}(\alpha y+\beta x)=$

   $=\alpha\mathcal{A}x-\beta\mathcal{A}y+i\alpha\mathcal{A}y+i\beta\mathcal{A}x=$

   $=(\alpha+i\beta)\mathcal{A}x+i(\alpha+i\beta)\mathcal{A}y=\lambda\mathcal{A}x+i\lambda\mathcal{A}y=$

   $=\lambda(\mathcal{A}x+i\mathcal{A}y)=\lambda\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ – ***продолжение линейного вещ. оператора*** $\mathcal{A}$

с пространства V *на его комплексификацию* $V_{\mathbb{C}}$

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $$\left.\begin{array}{c}\underset{\text{веществ.}}{e_1\dots e_n}\ \text{базис } V(V_{\mathbb{C}})\\ \mathcal{A}\leftrightarrow A\\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\leftrightarrow A_{\mathbb{C}}\end{array}\right\}\Rightarrow A_{\mathbb{C}}=A$$

   Т.е. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр. $\mathcal{A}$
2. $\forall z\in V_{\mathbb{C}}\ \ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z}=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z}$

   $z=x+iy\ \ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z}=\overline{\underset{\text{вещ.}}{\mathcal{A}x}+i\underset{\text{вещ.}}{\mathcal{A}y}}=\mathcal{A}x-i\mathcal{A}y=$

   $=\mathcal{A}x+i\mathcal{A}(-y)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x-iy)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z}$
3. $$\begin{array}{ccccc}\chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) & & \sqsupset e_1\dots e_n\text{базис}V\\ || & & || & & \mathcal{A}\leftrightarrow A\\ det(A-tE) & & det(A_{\mathbb{C}}-tE) & & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\leftrightarrow A_{\mathbb{C}}=A\end{array}$$

   Все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ являются собственными числами $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
4. $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)=\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda)=0$

   Т.к. многочлен с вещ. коэф. $\Rightarrow\overline{\lambda}$ тоже корень.

   $\lambda=\alpha+i\beta$ корень $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}\quad\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\overline{\lambda})=0$

   v соотв. с.в.

   $\Rightarrow\overline{v}$ с.в. для $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$

   $$\boxed{\text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}:\begin{array}{c}dimV_{\lambda}=dimV_{\overline{\lambda}}(\text{из утв. 2})\\ \gamma(\lambda)=\gamma(\overline{\lambda})\end{array}}$$

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{v}\underset{\text{св-во 2}}{=}\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{с.в. для }\lambda}}{v}}=\overline{\lambda v}=\overline{\lambda}\overline{v}\Rightarrow\overline{v}$ с.в. для $\overline{\lambda}$

"III": $\mathcal{A}\in End(V)$

V над $\mathbb{R}$

$\sum\limits_{\lambda\text{с.ч.}}\alpha(\lambda)<n=dimV$

Т.е. не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ **вещ.**

$\rightarrow$ строим$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\in End(V_{\mathbb{C}})\quad A_{\mathbb{C}}=A$

Все корни с.ч. $\Rightarrow$ матрица для $A_{\mathbb{C}}$ будет сведена либо к I, либо к II

Примеры.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$\chi_A(t) = det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$
$D = -36 < 0$
$\lambda_1 = 1$ с.ч. $\alpha(\lambda_1) = 1 \qquad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3 \ \alpha(2,3) = 1$
$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$
$\lambda_1 = 1 \ \ V_{\lambda_1}]span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = 2 + 3i \qquad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$
Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещ. чисел.
Только теперь арифметические операции с комплексными.
$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$
$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = span \begin{pmatrix} 3 + 3i \\ 5 + 3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$
$\forall \lambda : \ \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$ диагонализир.
$T_{e \to v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 - 3i & 3 + 3i \\ 2 & 5 - 3i & 5 + 3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix} T^{-1} = \ldots$

7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение 1. *Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен $\psi(t)$ называется* ***аннулятором элемента*** *$v \in V$, если $\psi(\mathcal{A})v = \mathbb{0}$*

$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$
$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in End(V)$
$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$
$\psi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$
$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$
Т.е. перестановочны.

Определение 2. *$\psi(t)$ аннулятор элемента $v \in V$ наименьший возможной степени называется* ***минимальным аннулятором элемента*** *v*

Теорема 1 (О минимальном аннуляторе элемента).
$\mathcal{A} \in End(V)$

1. *$\forall v \in V$ $\exists!$ минимальный аннулятор v*
2. *$\forall$ аннулятор элемента делится на его минимальный.*

Доказательство.

1. (a) $\sqsupset v = \mathbb{0}$ $\quad \psi(t) = 1$ $\qquad$ Очевидно, минимальный аннулятор.
   $\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = \mathbb{0}$

   (b) $\sqsupset v \neq \mathbb{0}$
   $$\underbrace{\underbrace{(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \dots, \mathcal{A}^{m-1}v,}_{\text{линейно независимая система}} \quad \mathcal{A}^m v}_{\text{линейно зависимая система}}$$
   $dimV = n$

   $m \leq n+1$

   $\mathcal{A}^m v = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$

   $\mathbb{0} = \mathcal{A}^m v - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum\limits_{k-0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow$ Алгоритм

   $\psi(t) = t^m - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k t^k$

   Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента v
2. ψ_1 – аннулятор v

   $\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$

   $deg\ r(t) < deg\ \psi(t)$

   $\mathbb{0} = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A}) \underbrace{\psi(\mathcal{A})v}_{=\mathbb{0}} + r(\mathcal{A})v = r(\mathcal{A})v \Rightarrow$

   $\Rightarrow \left.\begin{matrix} r(t) \text{ аннулятор } v \\ deg\ r < deg\ \psi \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Противоречие с минимальностью $\psi \Rightarrow$

   $\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdots \psi$

$\square$

Определение 3. *Нормализованный многочлен $\phi(t)$* ***называется аннулятором*** *$\mathcal{A}$, если $\phi(\mathcal{A}) = 0$*
$(\Leftrightarrow \forall v \in V \ \ \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0})$
Аннулятор $\mathcal{A}$ минимальной степени называется ***минимальный многочленом***

Теорема 2 (о минимальном многочлене). $\mathcal{A} \in End(V)$

1. *$\forall \mathcal{A}$ $\exists!$ минимальный многочлен*
2. *$\forall$ аннулятор $\mathcal{A}$ делится на минимальный многочлен*

Доказательство.
$e_1 \dots e_n$ базис V
$\Rightarrow$ по Теореме 1 для $\forall e_j$ $\exists!$ ψ_j минимальный аннулятор e_j

$\psi_j(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0}$

$\psi(t) = \text{Н.О.К. } (\psi_1 \ldots \psi_n)$

$\forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \phi(\mathcal{A}) e_i =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

$\phi \vdots \psi_j \Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)$

$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0} \Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A}$

Давайте покажем, что у ϕ степень минимальная.

От противного.

$\exists \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A}$ $\quad \sqsupset deg\ \phi_1 < deg\ \phi$

$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0} \Rightarrow \phi_1$ аннулятор элемента $e_j \overset{\text{по Теореме 1}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \underset{\text{аннулятор } e_j}{\phi_1} \vdots \underset{\text{минимальный аннулятор } e_j}{\psi_j} \Rightarrow \phi_1 \vdots \phi \Rightarrow deg\ \phi_1 \geq deg\ \phi$. Противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow deg\ \phi$ минимальный $\Rightarrow$ п.2 доказан, т.к. $\forall$ аннулятор $\mathcal{A} \vdots \phi$

Единственность?

$\sqsupset \quad \phi_1, \phi \quad$ минимальные аннуляторы одной степени.

нормализов. $\Rightarrow$ ст. коэф. 1

$deg(\phi_1 - \phi) < deg(\phi) = deg(\phi_1)$

$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \underset{=\mathbb{0}}{\phi_1(\mathcal{A})v} - \underset{=\mathbb{0}}{\phi(\mathcal{A})v} = \mathbb{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi_1 - \phi$ аннулятор $\mathcal{A}$ меньшей степени $\Rightarrow$ противоречие <u>минимальн.</u> $\square$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \phi =?$ минимальный многочлен

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_1?$

$$\underbrace{\underbrace{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{линейно независ.}} \quad \mathcal{A}^2 e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}^2 e_1 = -4e_1 + 4\mathcal{A}e_1$

$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\underbrace{\underbrace{e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{линейно независ.}} \quad \mathcal{A}^2 e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}^2 e_2 = 4\mathcal{A}e_2 - 4e_2$

$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\underbrace{e_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{лин. нез.}} \qquad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$

$\psi_3(t) = t - 2$

$\phi(t) = \text{Н.О.К.}\ ((t-2)^2, (t-2)) = (t-2)^2$

Теорема 3 (Кэли-Гамильтона)**.** $\mathcal{A} \in End(V)$

$\underbrace{\chi(t)}_{\text{характерист. многочлен}} = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – *аннулятор* $\mathcal{A}$

Доказательство. $\chi(\mathcal{A}) = det(\mathcal{A} - \mathcal{A}) = \mathbb{0}$ □

Я так и не понял это норм доказательство или нет. В любом случае далее идет длинное док-во.

Доказательство. μ – не корень $\chi(t)$

$det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$

$e_1 \dots e_n$ базис v. $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$(A - \mu E)^{-1} = \dfrac{1}{det(A - \mu E)} B \leftarrow$ союзная матрица (прис-ная)

$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow$ определиитель $(n-1)$-го порядкка $A - \mu E$

Т.е. мн-н степени $n-1$ относительно μ

$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \dots + B_1\mu + B_0$

$$\begin{array}{l} det(A - \mu E) \cdot E = \ (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + B_1\mu + B_0) \\ || \\ \chi(\mu) \cdot E \\ || \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k \cdot E \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l} \mu^0: & \alpha_0 E = AB_0 & A^0 \\ \mu^1: & \alpha_1 E = AB_1 - B_0 & A^1 \\ \mu^2: & \alpha_2 E = AB_2 - B_1 & A^2 \\ \dots & & \\ \mu^{n-1}: & \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2} & A^{n-1} \\ \mu^n: & \alpha_n E = -B_{n-1} & A^n \end{array}$$

$\chi(\mathcal{A}) = \chi(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A^2B_1 - AB_0 + A^3B_2 - A^2B_1 + \dots + A^nB_{n-1}$

$- A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \mathbb{0}$

χ – аннулятор $\mathcal{A}$ □

Теорема 4. $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корнец характеристического многочлена $\mathcal{A}$ совпадает с множеством корней минимального многочлена $\mathcal{A}$ (без учета кратности)

Доказательство. $\chi(t)$ – характерист., $\phi(t)$ – минимальный многочлен.

$"\Leftarrow"$ $\quad \sqsupset \phi(\lambda) = 0 \ \Rightarrow$ т.к. χ аннулятор $\mathcal{A}$, то по Т-ме 2 $\chi \vdots \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

$"\Rightarrow"$ $\quad \sqsupset \chi(\lambda) = 0$

1. $\sqsupset \lambda \in K \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \qquad \exists v \neq \mathbb{0} : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$

   $\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = \mathbb{0} \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$ минимальный аннулятор v

   Т.к. $\phi \vdots \psi \Rightarrow \lambda$ корень ϕ

   $\phi(\lambda) = 0$

2. $\lambda \notin K$ т.е. III случай: $K = \mathbb{R}$

   $\exists$ комплексные корни характерист. многочлена.

   $V \to V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$ базис $V \to$ базис $V_{\mathbb{C}}$

   $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \mathcal{A}e_j + i\mathcal{A}\mathbb{0} = \mathcal{A}e_j$

   $e_j = e_j + i\mathbb{0}$

   $\Rightarrow \forall k \ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$

   $\Rightarrow$ Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).

   Получим, что минимальные многочлены $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{A}$ совпадают.

   $$\left.\begin{array}{c} \text{Т.е. } \phi \text{ мин. мн-н для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Применим случай а) для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

   $\Rightarrow \lambda$ с.ч. λ корень ϕ

□

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \left|\begin{array}{cc|c} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ \hline -2 & 1 & 2-t \end{array}\right| = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни $\chi : 2$

Корни $\phi : 2$

$\rightsquigarrow$ еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

Следствие 1.

1. $$\begin{array}{ccc} \psi & \vdots & \phi \\ \textit{характер. (аннулятор)} & & \textit{минимальный (аннулятор мин.)} \end{array}$$
2. $deg\ \phi = n = dimV \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \chi(t) & = & \prod\limits_{\lambda} (t-\lambda)^{\alpha(\lambda)} \\ \phi(t) & = & \prod\limits_{\lambda} (t-\lambda)^{m(\lambda)} \end{array} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$$

7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ $\qquad\qquad$ $\sum\limits_{\lambda} m(\lambda) = m$

$deg\ \phi = m$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$dim P_{m-1} = m$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

$$\phi(t) = \underbrace{(t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t)}_{\text{вз. просты}} \qquad \phi_\lambda(\lambda)\neq 0$$

$$\phi_\lambda(\mu) = 0$$

$$\mu\neq\lambda$$

Определение 1. $I_\lambda = \{p\in P_{m-1} | p\vdots\phi_\lambda\}$

Главный идеал, *порожденный многочленом* $\phi_\lambda =$

$= \{f\in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda\phi_\lambda\}$

I_λ – *линейное подпространство* P_{m-1}

$p_{1,2}\vdots\phi_\lambda \Rightarrow (p_1+\alpha p_2)\vdots\phi_\lambda$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$\mathbb{0} = \sum_\lambda \underbrace{f_\lambda\phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda\cdot\phi_\lambda + \underbrace{\sum_{\mu\neq\lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

$$\Rightarrow f_\lambda\cdot\underbrace{\phi_\lambda\vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)}}_{\text{вз. просты}} \Rightarrow \underset{deg\ f_\lambda = m(\lambda)-1}{f_\lambda} \vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda\equiv 0$$

$\Rightarrow \forall\lambda\quad f_\lambda\equiv 0 \Rightarrow f_\lambda\phi_\lambda\equiv\mathbb{0}\Rightarrow$ Дизъюнктны

2. $$\begin{array}{ccc} dim P_{m-1} & = & m \\ || & & \\ \sum\limits_\lambda dim I_\lambda & = & \sum\limits_\lambda m(\lambda) = m \end{array}$$

$I_\lambda\subset P_{m-1}$

$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus\limits_\lambda I_\lambda$

□

Следствие 1. $\forall p\in P_{m-1}\ \exists!\ p = \sum\limits_\lambda p_\lambda$

$p_\lambda\in I_\lambda$

$$\boxed{1 = \sum_\lambda p_\lambda \text{ – полиномиальное разложение единицы}}$$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{cccc} p_\lambda & \cdot\ p_\mu & \vdots & \phi \\ || & || & & \\ f_\lambda\phi_\lambda & f_\mu\phi_\lambda & = & \eta\cdot\phi \\ & \uparrow & & \\ & (t-\lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

2. $\forall\lambda\ m(\lambda)=1$

   Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

   $f_\lambda = const \quad (def\ f_\lambda = m(\lambda)-1=0)$

Теорема 2 (Лагранжа)**.**
$\forall\lambda : m(\lambda)=1 \Rightarrow$
$\forall p \in P_{m-1} \ \ p(t) = \sum\limits_\lambda \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\cdot\phi_\lambda(t)$

Доказательство.

корень $\phi \to \mu \neq \lambda$ $\begin{array}{l}\phi_\lambda(\mu)=0\\ \phi_\lambda(\lambda)\neq 0\end{array}$

$$p(t)\ \sum_\lambda p_\lambda(t) = \sum_\mu \underset{\substack{\uparrow \\ const,\ \text{т.к.} \\ \text{корни взаимно} \\ \text{просты}}}{\boxed{f_\mu}} \cdot\phi_\mu(t)$$

$p(\lambda) = f_\lambda\cdot\phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall\lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$

$\phi(t) = \prod\limits_\mu (t-\mu)$

$$\phi'(t) = \sum_\mu \underbrace{\prod_{\lambda\neq\mu}(t-\lambda)}_{\phi_\mu(t)} = \sum_\mu \phi_\mu(t)$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_\mu \underset{\substack{|| \\ 0\ \mu\neq\lambda}}{\phi_\mu(\lambda)} = \phi_\lambda(\lambda) \ \Rightarrow f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_\lambda \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$$ □

Следствие 1. $\forall\lambda : m(\lambda)=1$

$$1 = \sum_\lambda p_\lambda \Rightarrow \boxed{t = \sum_\lambda \lambda p_\lambda}$$

Доказательство. По теореме: $1 = \sum\limits_\lambda \boldsymbol{p_\lambda} = \sum\limits_\lambda f_\lambda\cdot\phi_\lambda = \sum\limits_\lambda \dfrac{1}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}}\cdot\boldsymbol{\phi_\lambda(t)}$

По теореме: $t = \sum\limits_\lambda \dfrac{\lambda}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}}\boldsymbol{\phi_\lambda(t)} = \sum\limits_\lambda \lambda p_\lambda$ □

$\mathcal{A}\in End(V)$

ϕ минималный многочлен, все корни $\in K(\Rightarrow$ все корни $\chi\in K$

$\Rightarrow$ т.е. все с.ч. $\in K$ – I, II случаи)

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t)$

$\mathcal{P}_\lambda := p_\lambda(\mathcal{A})$ $\quad \boxed{\mathcal{E} = \sum\limits_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$ операторное разложение единицы

$\mathcal{P}_\lambda \in End(V)$

$\mathcal{P}_\lambda$ – проекторы ? $\quad \uparrow$ это уже есть

Достаточно проверить $\underset{\lambda \neq \mu}{\mathcal{P}_\lambda \cdot \mathcal{P}_\mu} = \mathbb{0}$

$\mathcal{P}_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\lambda \neq \mu$

$\mathcal{P}_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = f_\mu(\mathcal{A}) \cdot \phi_\mu(\mathcal{A})$

перестановочны, т.к. многочлены от $\mathcal{A}$

$\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot f_\mu(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \boldsymbol{\phi_\mu(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$

$\updownarrow$ $\quad \uparrow$ содержит

$(p_\lambda \cdot p_\mu \vdots \phi$ см. замеч. 1) $\quad \eta(\mathcal{A})\boldsymbol{(t-\mu)^{m(\mu)}} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_\lambda$ проекторы – **спектральные проекторы** $\mathcal{A}$

$Im\mathcal{P}_\lambda$ **спектральное подпространство**

$\underset{7.5}{\Rightarrow} \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} Im\mathcal{P}_\lambda}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow$ не о.п.с.

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$

$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$

$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1}\phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$

$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$

Прав. дробь $\dfrac{1}{\phi} = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{\dfrac{f_\lambda \cdot \phi_\lambda}{\phi}}_{\text{Правильн.}} = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{\dfrac{f_\lambda}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\text{Правильн. дробь}}$

$deg\ f_\lambda < m(\lambda)$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \underbrace{\frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3}}_{\text{простейшие}} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16})\overbrace{(t-3)}^{\phi_\lambda}}_{p_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}\overbrace{(t+1)^2}^{\phi_{\lambda_2}}}_{p_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \ p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

$\boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda} \nearrow \quad 1 = \sum p_\lambda$ спектральное разложение о.п.с.

$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1 \qquad \text{Доказательство позже}}$

Определение 2. $K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
называется ***корневым подпространством*** $\mathcal{A}$

Теорема 3.

1. K_λ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$
2. $Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$
3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ *минимальный многочлен* $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda}$

Доказательство.

1. $x \in K_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_\lambda$
   $(\mathcal{A} - \underset{\text{перестановочны}}{\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{A}}x = \mathcal{A}\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$
   $\Rightarrow \mathcal{A}x \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
2. $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{P}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A}) =$
   $= f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$
   $\forall x \in V$
   $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda} = \mathbb{0} \Rightarrow Im\mathcal{P}_\lambda \subseteq Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_\lambda$
   Обратно: $K_\lambda \overset{?}{\subseteq} Im\mathcal{P}_\lambda$
   $x \in K_\lambda$
   $\mu \neq K_\lambda \ \mathcal{P}_\mu x = \underbrace{f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A})x}_{\eta(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}} = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$
   $\nearrow$ содержит $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
   $x = \mathcal{E}x = \sum\limits_{\mu} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{0} \ \mu\neq\lambda}}{\mathcal{P}_\mu x} = \mathcal{P}_\lambda x \in Im\mathcal{P}_\lambda \Rightarrow K_\lambda \subseteq Im\mathcal{P}_\lambda$
   $\Rightarrow \boxed{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$?
   $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$
   Минимальный?

   $\sqsupset$ не мини$\overset{\psi}{\text{м}}$альный
   $\psi_1 = (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}$ $\sqsupset$ это минимальный многочлен
   $\phi_1 := (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$ аннулятор $\mathcal{A}$?
   $\underset{\mu\neq\lambda}{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$
   $= \ldots\phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A})\cdot\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$
   $\forall x\ \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$
   $= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}}_{\substack{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x \\ \text{мин. многочлен по предположению}}} = \mathbb{0}$
   $\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0}$
   $\phi_1(\mathcal{A})\cdot\mathcal{E} = \underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\sum_\mu \mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu\neq\lambda}\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = \mathbb{0}$
   $\Rightarrow \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A}$, но степени $< \phi$
   $deg\ \phi_1 = m-1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$\square$

Следствие 1. *A о.п.с.* $\Leftrightarrow \forall\lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A}$ о.п.с.
$\phi(t)\ \prod_\lambda(t-\lambda)$ покажем что это минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ – собственные подпространства $\mathcal{A}$
$\forall v \in V\ \exists!\ v = \sum_\lambda v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$
$\phi(\mathcal{A})v = \prod_\lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})\sum_\mu v_\mu =$
$= \sum_\mu \underbrace{\prod_\lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})}_{\phi_\mu(\mathcal{A})\cdot(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})} v_\mu = \sum_\mu \phi_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})v_\mu}_{\substack{\| \\ \mathbb{0}}} = \mathbb{0}$
$v_\mu \in V_\mu = Ker(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}) \nearrow$
$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень $\Rightarrow$ минимальный многочлен.
$(\Leftarrow)\forall\lambda : m(\lambda) = 1$
$\underset{\substack{\| \\ Im\mathcal{P}_\lambda}}{K_\lambda} = Ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^1 = V_\lambda$
$V = \bigoplus_\lambda K_\lambda = \bigoplus_\lambda V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$ о.п.с.

$\square$

Примеры.
$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A-\lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$
$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A-\lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2}$ — упр.

7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. $\mathcal{B} \in End(V)$ *называется* ***нильпотентным***, *если* $\phi(t) = t^{\nu}$
Минимальный многочлен $\mathcal{B}$, *т.е.* $\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{0}$
<u>ν *– индекс нильпотентности*</u> *(мин. степерь* $\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{0}$*)*

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda \\ \textit{Идемпотентность}\end{array}}$$

Степень минимального многочлена $\to \nu \leq dimV \underset{\substack{\uparrow \\ \text{степень } \chi}}{=} n$

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \leq dimV_\lambda$

Доказательство. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$
$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{k_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = \mathbb{0}$
$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_\lambda \in End(K_\lambda)$
$m(\lambda) \leq dimK_\lambda$ □

Замечание. $\underbrace{\sum_\lambda m(\lambda)}_{deg\ \phi} \leq \underset{\substack{|| \\ deg\ \chi}}{\sum} dimK_\lambda = n$

$$\bigoplus_\lambda K_\lambda = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана)**.**
$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ *можно представить в виде:*
$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{D}$ *о.п.с.*
$\mathcal{B}$ *нильпотентный, причем* $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ *перестановочны*

Доказательство. ϕ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$\mathcal{E} = \sum\limits_\lambda \mathcal{P}_\lambda$ операторн. разложение единицы
$\mathcal{D} := \sum\limits_\lambda \lambda \mathcal{P}_\lambda \quad D$ о.п.с.?
$V = \bigoplus\limits_\lambda Im\mathcal{P}_\lambda$
$\exists\ v_\lambda \neq 0\ \in Im\mathcal{P}_\lambda$

$$\underline{\underline{Dv_\lambda}} = (\sum_\mu \mu \mathcal{P}_\mu) v_\lambda = \sum_\mu \mu \underset{\substack{\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0} \\ \lambda \neq \mu}}{\overset{\substack{0\ \mu \neq \lambda \\ ||}}{(\mathcal{P}_\mu v_\lambda)}} = \lambda \mathcal{P}_\lambda v_\lambda = \underline{\underline{\lambda \cdot v_\lambda}}$$

$\Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{D}, v_\lambda$ соотв. с.в. $\mathcal{D}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} Im\mathcal{P}_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathcal{D}} \text{ собств. подпр-во } \mathcal{D}, \text{ отвечающ. с.ч. } \lambda \\ V = \bigoplus\limits_\lambda Im\mathcal{P}_\lambda \text{ дизъюнктны} \end{array}} \Rightarrow Im\mathcal{P}_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$$

Объединение базисов $Im\mathcal{P}_\lambda =$ базис V
Каждый вектор из $Im\mathcal{P}_\lambda$ – это с.в. $\mathcal{D}$
$\Rightarrow$ у V есть базис из с.в. $\Leftrightarrow D$ о.п.с.

$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum\limits_\lambda \lambda\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{A}\sum\limits_\lambda \mathcal{P}_\lambda - \sum\limits_\lambda \lambda\mathcal{P}_\lambda = \sum\limits_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda$

$\nu = \max\limits_\lambda m(\lambda) \quad \underset{\text{мин. мн-н } \mathcal{A}}{\phi(t)} = \prod\limits_\lambda (t-\lambda)^{m(\lambda)}$

$\mathcal{B}^\nu = (\sum\limits_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda)^\nu = \sum\limits_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^\nu \mathcal{P}_\lambda =$

$\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$

$\lambda \neq \mu$

$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$

$= \sum\limits_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^\nu \underbrace{f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_\lambda} =$

все операторы перестановочны

$\sum\limits_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{\nu - m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}} = 0$

$\mathcal{B}$ нильпотент

$\mathcal{B} = \sum\limits_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}$

перестановочны

$D = \sum\limits_\mu \mu\mathcal{P}_\mu$

$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$ $\square$

Замечание.

1. $\mathcal{B} = \sum\limits_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda = \sum\limits_\lambda \mathcal{B}_\lambda$

   $\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ все три оператора взаимно-перестановочны

   $\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$

   $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$

Примеры.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$

$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$

$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\nu = \max\limits_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$

$$B^2 \overset{?}{=} \mathbb{0} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \underset{\text{Разложение Жордана}}{=} \underset{\text{Диагонализ.}}{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}} + \underset{\text{Нильпотент.}}{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Теорема 2 (Единственность разложения Жордана)**.**

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)

Рис. 1

Доказательство. $\sqsupset \mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{Нильпотент}}{\mathcal{C}} \qquad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

Т.к. $\mathcal{D}'$ о.п.с., то $\mathcal{D}' = \sum\limits_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

M – множество с.ч. $\mathcal{D}'$

Q_μ спектральные проекторы

$Q_\mu : V \to V_\mu^\nu$

$\sum\limits_\mu Q_\mu = \mathcal{E}$

<u>Достаточно доказать:</u> $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

1. Множество M совпадает с множеством корней ϕ – минимальн. мн-н $\mathcal{A}$

   $\{\mu\} = \{\lambda\}$

2. $ImQ_\mu = K_\mu \leftarrow$ корневое подпространство $\mathcal{A}$, отвеч. с.ч. μ ($Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$)

1. $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})Q_\mu = (\sum\limits_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum\limits_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$

   $$\begin{matrix} Q_\nu Q_\mu = 0 \\ \nu \neq \mu \end{matrix} \qquad Q_\mu^2 = Q$$

   $$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Верно, если } \mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}}}{=} \mathcal{C}^k Q_\mu$$

   $\Rightarrow$ докажем: $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

   $\sqsupset \lambda \neq \mu \;\; (\lambda - \mu)Q_\lambda\mathcal{C}Q_\mu = \underset{Q_\lambda\mathcal{D}'}{(\lambda Q_\lambda)}\mathcal{C}Q_\mu - Q_\lambda\mathcal{C}\underbrace{(\mu Q_\mu)}_{\mathcal{D}'Q_\mu} =$

   $\mathcal{D}'Q_\mu = \sum\limits_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu\mathcal{D}'$

   $Q_\lambda(\mathcal{D}'\mathcal{C} \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{0}}}{-} \mathcal{C}\mathcal{D}')Q_\mu = \mathbb{0}$

$\lambda \neq \mu \qquad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \mathbb{0} = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$

$$\underbrace{\sum_\lambda Q_\lambda}_{\mathcal{E}} \mathcal{C} Q_\mu = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \underset{\boxed{\mathcal{E}}}{\underline{\underline{\boxed{\sum_\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}}$$

$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$

$k(\mu) = minK$, такой что $\mathcal{C}^k Q_\mu = \mathbb{0}$

Такое $K(\mu)$ обязательно найдется, т.к. $\mathcal{C}$ – нильпотент.
$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$

$(t-\mu)^{k(\mu)}$ – минимальный аннулятор элементов imQ_μ

$ImQ_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)}$

ϕ минимальный многочлен $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулирует любые элементы V,
в частности элементы ImQ_μ
Т.е. $\phi(t)$ аннулятор элементов $ImQ_\mu \Rightarrow \phi(t) \vdots (t-\mu)^{k(\mu)} \leftarrow$ минимальный аннулятор для ImQ_μ

$\Rightarrow$ верно $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t-\mu)^{k(\mu)}$$

$\Rightarrow \phi \vdots \psi$

Покажем, что ψ аннулятор $\mathcal{A}$
$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{перестановочны}}}{(\mathcal{A} - \nu\mathcal{E})^{k(\nu)}} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu\mathcal{E})^{k(\nu)} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{0}}}{\underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \psi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \vdots \phi$ минимальный аннулятор
$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda$ – корни $\phi\}$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$
$$\mu = \lambda$$

2. $$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu &= \mathbb{0} \\ \| \qquad & \\ (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu &= \mathbb{0} \end{aligned}$$

μ корень ϕ

$$ImQ_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = Im\mathcal{P}_\mu$$

$$\left.\begin{aligned} \bigoplus_\mu K_\mu &= V \\ \bigoplus_\mu ImQ_\mu &= V \end{aligned}\right\} \Rightarrow ImQ_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

□

Теорема 3. $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ *разложение Жордана*
$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$

Доказательство. $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

μ – не корень $\underset{\text{не зависит от } t}{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu} = det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\substack{\| \\ \mathbb{0}}}) =$

$= det(\mathcal{A} - \underset{t=1}{\mu\mathcal{E}} - t\mathcal{B}) \cdot det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + \underset{t=0}{(}\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1})$

μ – не корень

$\underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu} = det(\underset{\boxed{\mathcal{D}}}{\underline{\underline{\boxed{\mathcal{A}} - \mu\mathcal{E}\boxed{-\mathcal{B}}}}}) \cdot det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} =$

$= \underbrace{det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{(det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}))^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}}$

$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$ □

Следствие 1. *Если* $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ *разложение Жордана*

То $det\mathcal{A} = det\mathcal{D}$

Доказательство. Очевидно, $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$ □

Следствие 2. $\boxed{dimK_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{о.п.с.}}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = dim\mathcal{P}_\lambda = dimK_\lambda$

$\forall\lambda$ корня χ с.ч. (I, II) □

7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda$ корневые $\quad dimK_\lambda = \alpha(\lambda)$

$\chi(t) = \prod\limits_{\lambda\text{с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \qquad \lambda \in K$ все корни с.ч.

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$

$$\begin{aligned} V_\lambda &= Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \qquad \gamma(\lambda) = dimV_\lambda \\ \bigcap | & \\ K_\lambda &= Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \end{aligned}$$

$\forall\lambda\ K_\lambda \rightsquigarrow$ строим базис $\rightsquigarrow$ матрица оператора будет иметь
$\bigcup\limits_\lambda$ Жорданов базис — блочно-диагональную структуру
– Жорданова форма матрицы

$\sqsupset K_\lambda = K \ \ \gamma(\lambda) = \gamma$
$\alpha(\lambda) = \alpha \ \ m(\lambda) = m$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{K_\lambda} \qquad dim = \gamma$

$$\begin{array}{rcl} K_1 & = & V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \\ \bigcap| & & \\ K_2 & = & Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \\ \vdots & & \\ \bigcap| & & \\ K_m & = & Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad dim = \alpha \end{array}$$

Пример.

$\alpha = dim K_\lambda = dim K_5 = 24$

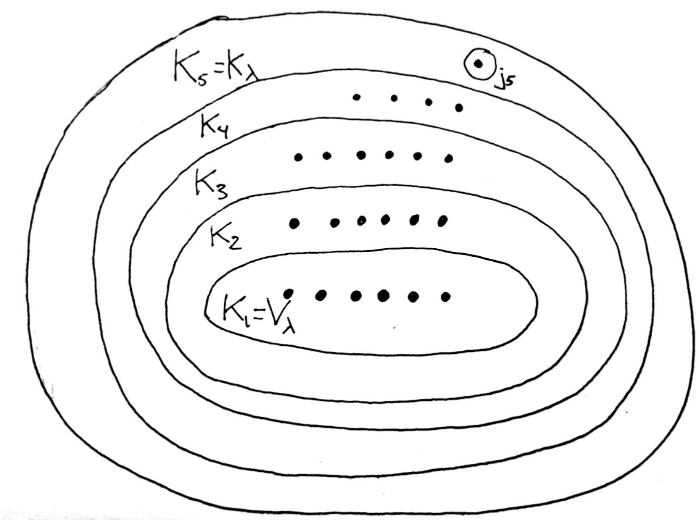
$m = 5$

$\gamma = 7$

Циклический базис

$$\begin{array}{|c|cl} \hline j_5 & \in & K_5 \backslash K_4 \\ j_4 & = & \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_5 \in K_4 \\ j_3 & = & \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_4 \in K_3 \\ j_2 & = & \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_3 \in K_2 \\ j_1 & = & \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda \\ \hline \end{array}$$

j_1, j_2, j_3, j_4 – **присоединенные вектора.**



$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$

$j_{r+1} \in K_{r+1} = Ker\mathcal{B}^{r+1} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r+1}$

$\mathcal{B}^r j_r = \mathcal{B}^r \mathcal{B} j_{r+1} = \mathcal{B}^{r+1} j_{r+1} = \mathbb{0}$

$\Rightarrow j_r\ in K_r = Ker\mathcal{B}^r$

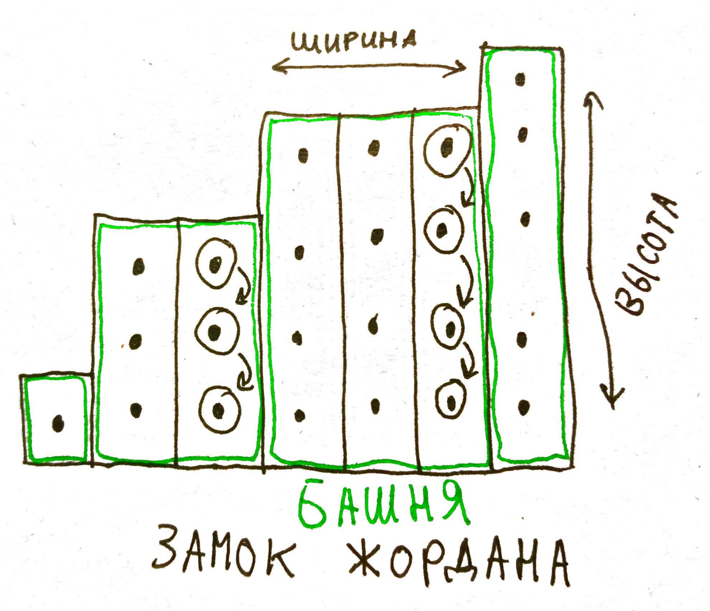
$L = span(j_1\ j_2\ j_3\ j_4\ j_5)$

$\mathcal{A}|_L$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 & \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 & \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 & \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 & \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5 \end{array}$$

Матрица $\mathcal{A}|_L$ в базисе $j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **Клетка Жордана 5×5** (блок нижнего уровня)

$$(j_5\ j_4\ j_3\ j_2\ j_1) \to \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



Башня – циклическое объединение базисов одной длины.

Высота башни – количество векторов в базисе.

Ширина башни – число циклических базисов одной размерности

Основания каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов $= \gamma$

$\quad ||$

Число Жордановых клеток

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\lambda} & & & \\
& \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} & \leftarrow \begin{matrix}\text{Блок}\\ \text{нижнего}\\ \text{уровня}\end{matrix} \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} \end{matrix}} & & \\
\begin{matrix}\text{Блок среднего}\\ \text{уровня} \rightarrow\\ \text{(отвечает башне)}\end{matrix} & & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} \end{matrix}} & \\
& & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{matrix}}
\end{pmatrix}$$

$\uparrow$
Блок верхнего уровня, отвечает K_λ

$\gamma =$ Число блоков нижнего уровня
$\alpha =$ Число λ на диагонали

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\forall \alpha = \gamma$
V_λ $\boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}$
"Деревня Жордана"

Примеры. $\lambda \ \ \alpha(\lambda) = 4$

1. $\gamma(\lambda) = 3$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}\boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda}\end{matrix}\end{pmatrix}$

2. $\gamma(\lambda) = 2$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}$ $\underset{?}{\text{или}}$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$

3. $\gamma(\lambda) = 1$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{J}$ $T = (\dots j_1 \dots j_5 \dots)$

Объединение цикл. базисов для всех λ

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \underset{\text{В Жорд. базисе}}{\mathcal{J}} \\ \updownarrow & & \\ \underset{\text{В исходном}}{A} & & \end{array}$$

$\boxed{\mathcal{J} = T^-1AT}$

$\underset{1,\ 3}{\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}}} \to T\mathcal{J} = AT$

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы $T \rightsquigarrow T$

$\rightsquigarrow$ построить Жорданов базис.

2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \underset{dimK=\alpha}{K}$

   $K_r = Ker(A - \lambda E)^2$

   $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

II

1. Найдем $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m = Ker(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$

   $\Rightarrow dimK_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$\forall\lambda \;\; K = K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$m(\lambda) = m$

$\alpha(\lambda) = \alpha$

$K_r = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^r \qquad r = 1 \dots m$

$V_\lambda = K_1$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_m = K_\lambda = K$

Все включения будут строгие:

$\sqsupset K_{r+1} = K_r \qquad Ker\mathcal{B}^{r+1} = Ker\mathcal{B}^3$

По Теореме о rg и def: $dimK = rg\mathcal{B}^{r+1} + \cancel{def\mathcal{B}^{r+1}} = rg\mathcal{B}^r + \cancel{def\mathcal{B}^r}$ $(def\mathcal{B}^{r+1} = def\mathcal{B}^r)$

$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$

$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$

$$\begin{array}{lclcl} Im\mathcal{B}^{r+1} & = & Im\mathcal{B}^r & & \to 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие} \\ || & & & \nearrow & \\ Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) & = & Im\mathcal{B}^r & \overset{\text{либо}}{\to} & \mathcal{B}^r = \mathbb{0} - \text{противоречие мин. } m \end{array}$$

$Im\mathcal{B}|_K =: BK$

$Z_0 = BK$

$Z_r = BK + K_r$

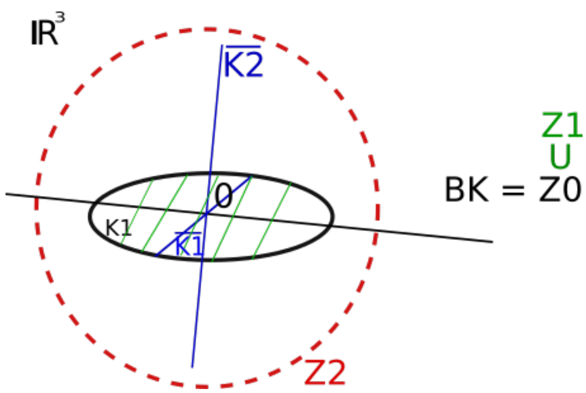
$r = 1, \ldots, m \ \ (K_m = K) \quad B : K \to K$

$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_m = K$

$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$

$\overline{K_r} \subset K_r$

$$K = \underbrace{\underbrace{\underbrace{BK}\oplus\underbrace{\overline{K_1}}}_{Z_1}\oplus\underbrace{\overline{K_2}}}_{Z_2}\oplus\ldots\oplus\overline{K_m}$$



$\underset{dim2}{K_1} \subset \underset{dim3}{K_3}$

$\underset{\underset{def\mathcal{B}}{||}}{dimK_1} + \underset{\underset{dimIm\mathcal{B}}{||}}{dimBK} = 3$

$$\begin{array}{lcl} Z_1 & = & BK + K_1 \supset Z_0 \\ \bigcap & & \\ Z_2 & = & BK + K_2 \end{array}$$

$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus BK$

Теорема 1. $0 \leq r \leq m - 1$

$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$

Доказательство.

$K = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus BK$

$\forall x \in K \quad x = \underset{\in \overline{K}_1}{x_1} + \underset{\in \overline{K}_2}{x_2} + \ldots + \underset{\in \overline{K}_m}{x_m} + \underset{\in BK}{Bx^*}$

$1 \leq r \leq m - 1$

$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \ldots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^* \boxed{=}$

$$B^r x_j = B^{r-j} \underset{\underset{\mathbb{0}}{||}}{B^j x_j} = \mathbb{0}$$

$$1 \le j \le r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = KerB^j = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$\boxed{=} B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1}x^*$

Дизъюнктность?

$* \; B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1}x^* = \mathbb{0}$

$B^r(\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m + Bx^*}_{y}) = \mathbb{0}$

$y \in KerB^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K_r} \oplus BK$

$\Rightarrow \underset{\text{Однозначно представим}}{y} = x_1 + x_2 + \ldots + x_r + \underset{x_i \in \overline{K_i}}{B} x^{**}$

$||$

$\underset{x_{r+i} \in \overline{K_{r+i}}}{x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m} + Bx^* \Rightarrow \underset{\forall i = 1 \ldots m}{\boxed{x_i = \mathbb{0}}} *$

$\Downarrow$ подставим

$\mathbb{0} + \mathbb{0} + \ldots + \mathbb{0} + B^{r+1}x^* = \mathbb{0} \Rightarrow B^{r+1}x^* = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктн. □

Следствие 1.

$K = \underline{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m} \oplus \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus$

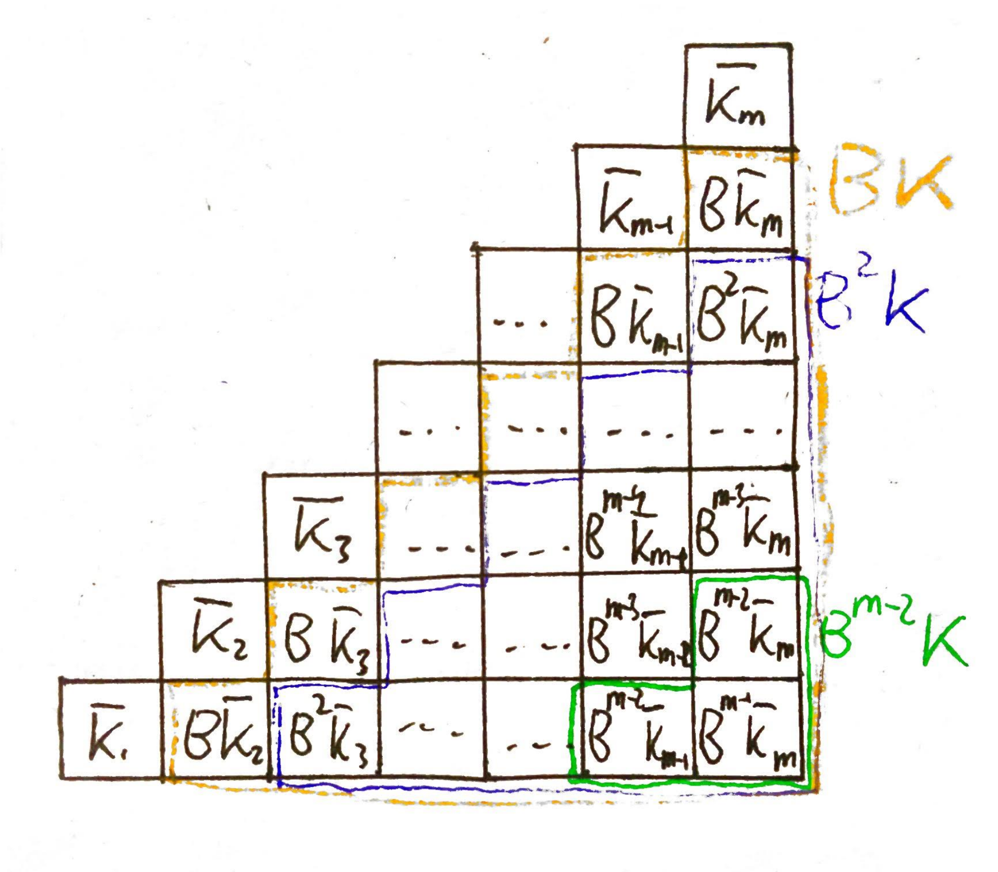
$\oplus \underline{B^2\overline{K}_3 \oplus B^2\overline{K}_4} \oplus \ldots \oplus B^{m-2}\overline{K}_{m-1} \oplus B^{m-2}\overline{K}_m \oplus B^{m-1}\overline{K}_m$

Доказательство.

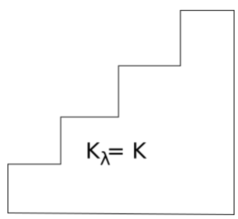
$K = \underline{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m} \oplus BK$

$BK = \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus B^2K$

$B^2K = \underline{B^2\overline{K}_3 \oplus B^2\overline{K}_4 \oplus \ldots \oplus B^2\overline{K}_m} \oplus B^3K$ □



$\overline{K}_j$ – **Опорные подпространства**



$1 \leq r \leq m$

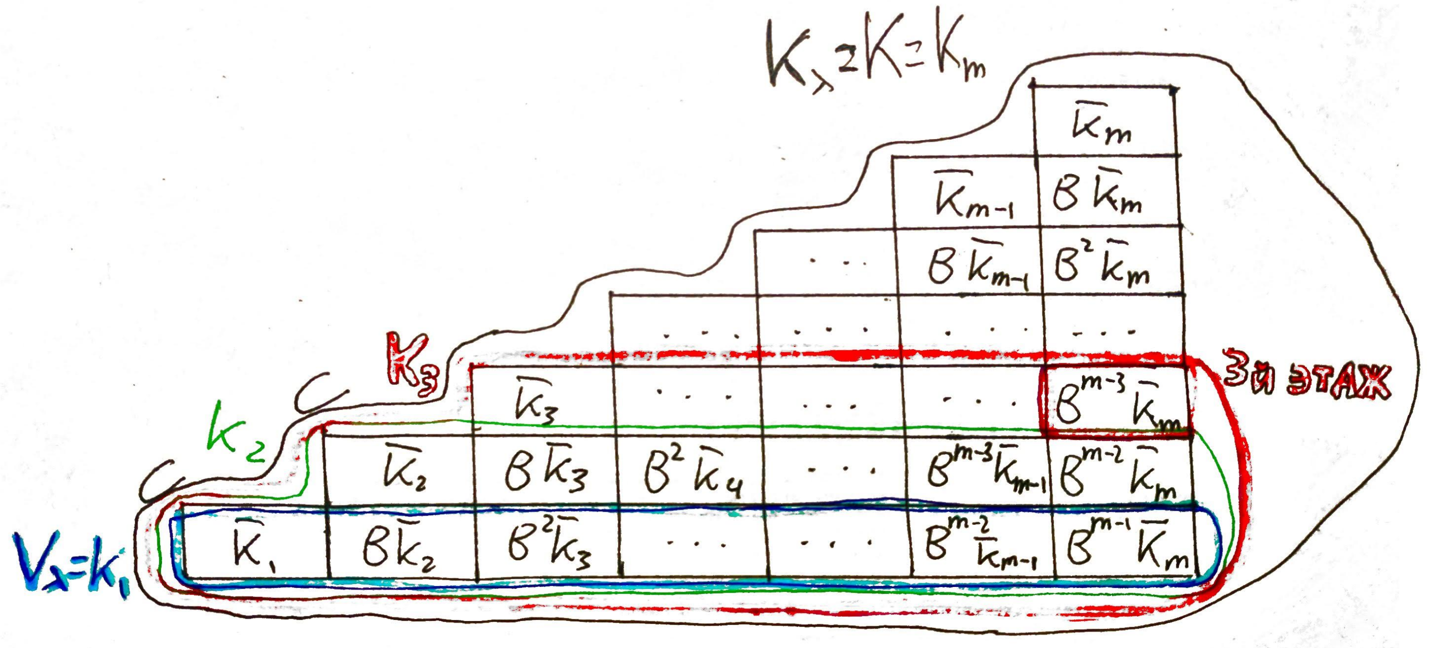
Если $\overline{K_r} \neq \mathbb{0} \longrightarrow \boxed{\tau_r = \overline{K_r} \oplus B\overline{K_r} \oplus B^2\overline{K_r} \oplus \ldots \oplus B^{r-1}\overline{K_r}}$

Башня высоты r. "Башня растет вниз"

"Основание" башни $\equiv$ опорное подпространство $\overline{K_r}$

"Крыша" башни $\equiv B^{r-1}\overline{K_r} \subset V_\lambda$

$x \in B^{r-1}\overline{K_r} \qquad \dfrac{x = B^{r-1}y}{y \in \overline{K_r} \subseteq K_r} \qquad \underline{Bx = B^r y = \mathbb{0}} \quad x \in KerB = V_\lambda$



Если $K_r = \{\mathbb{0}\}$, то башня высоты r отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$1 \le l \le m$

$\overline{K}_l, B\overline{K}_{l+1}, B^2\overline{K}_{l+2}, \dots B^{m-1}\overline{K}_m \quad \subset K_l = KerB^l$

– l-ые этажи соотв. башен

Покажем: $B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\overline{K}_{l+j}) = (B^{l+j}) \underbrace{\overline{K}_{l+j}}_{\subset K_{l+j} = KerB^{l+j}} = \mathbb{0} \Rightarrow B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^{m} \tau_r$$

Теорема 2 (О размерности башни).

$\forall \tau_r$ любой этаж башни имеет одну и ту же размерность $d_r = dim\overline{K}_r$ = ширина башни.

$$r \text{ высота } \updownarrow \underset{\tau_r}{\begin{array}{|c|} \hline \overline{K}_r \\ \hline B\overline{K}_r \\ \hline B^2\overline{K}_r \\ \hline \dots \\ \hline B^{r-1}\overline{K}_r \\ \hline \end{array}} \qquad \boxed{d_r = dim\overline{K}_r} = \text{ширина башни}$$

Доказательство.

$B^j|_{\overline{K}_r} : \overline{K}_r \to B^j\overline{K}_r$

$B^j_{\overline{K}_r}$ изоморфизм "?"

$KerB^j|_{\overline{K}_r} = \{\mathbb{0}\}$ тривиально "?"

$$
\begin{array}{llll}
x \in \overline{K}_r \subset K_r \subset Z_r & = & Z_{r-1} & \oplus \overset{\exists x \atop \downarrow}{\overline{K}_r} \Rightarrow \boxed{x = \mathbb{0}} \qquad \boxed{Z_{r-1} = BK + K_{r-1}} \\
x \in \underset{j=1\ldots r-1}{KerB^j} = K_j \rightarrow & \nearrow & \cup & \\
 & & K_{r-1} & \\
 & & \cup & \\
 & & \vdots & \\
 & & \cup & \\
 & & K_1 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Изоморфизм $\Rightarrow dim(\overline{K_r}) = dim(B^j\overline{K}_r) = d_r$ □

Следствие 1. $\sum\limits_{r=1}^{m} d_r = dimV_\lambda = \gamma(\lambda)$

$\sum\limits_{r=1}^{m} \underbrace{r \cdot d_r}_{dim\ \ \tau_r} = dimK_\lambda = dimK = \alpha(\lambda)$

Следствие 2 (Теорема Фробениуса)**.**
$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$

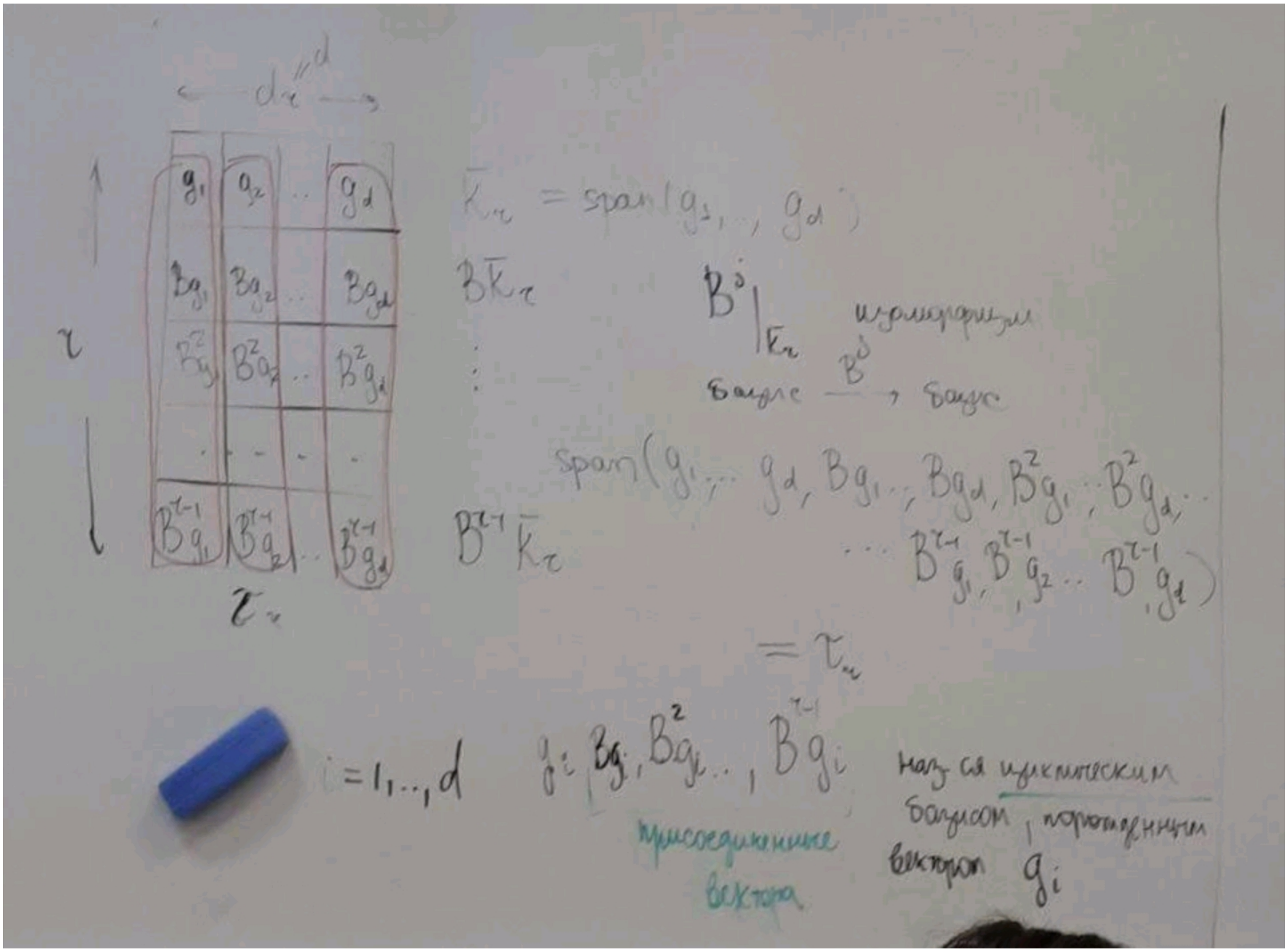
$(d_m = rgB^{r-1})$

Доказательство.
$B^rK = B^r\overline{K}_{r+1} \oplus B^r\overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r\overline{K}_m \oplus B^{r+1}K$

$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \ldots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$

$$
\begin{aligned}
d_1 + d_2 + \ldots + d_m &= \rho_0 - \rho_1 \\
d_2 + \ldots + d_m &= \rho_1 - \rho_2 && \downarrow - \\
d_3 + \ldots + d_m &= \rho_2 - \rho_3 && \downarrow - \\
d_{m-2} + d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-3} - \rho_{m-2} && \downarrow - \\
d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-2} - \rho_{m-1} && \downarrow - \\
d_m &= \rho_{m-1} && \downarrow - \\
\rho_m &= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}}$ □


$d_\tau = d$
$\bar{K}_\tau = \mathrm{span}(g_1, \dots, g_d)$
$B\bar{K}_\tau$
$B^{\tau-1}\bar{K}_\tau$
$B^\delta|_{\bar{K}_\tau}$ изоморфизм
базис $\xrightarrow{B^\delta}$ базис
$\mathrm{span}(g_1, \dots, g_d, Bg_1, \dots, Bg_d, B^2g_1, \dots, B^2g_d, \dots, B^{\tau-1}g_1, B^{\tau-1}g_2, \dots, B^{\tau-1}g_d) = T_\tau$
$i = 1, \dots, d$ $\quad g_i, Bg_i, B^2g_i, \dots, B^{\tau-1}g_i$ наз-ся циклическим базисом, порождённым вектором g_i
присоединенные вектора

$$S_i = \operatorname{span}(g_i, Bg_i, \ldots, B^{r-1} g_i)$$ циклическое подпр-во

$$\mathcal{K}_r = \bigoplus_{i=1}^{d} S_i$$

$$A\big|_{S_i} \longleftrightarrow$$ м-ца в базисе $g_i, Bg_i, \ldots, B^{r-1} g_i$?

$$A\big|_{S_i} = (B + \lambda \mathcal{E})\big|_{S_i}$$

$$Ag_i = Bg_i + \lambda g_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$ABg_i = B^2 g_i + \lambda B g_i$$

$$AB^{r-2} g_i = B^{r-1} g_i + \lambda B^{r-2} g_i$$

$$AB^{r-1} g_i = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{B^{r} g_i} + \lambda B^{r-1} g_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_i \in \bar{K}_r < K_r = \operatorname{Ker} B^r$$

упорядочим базис:

$$B^{r-1} g_i \; B^{r-2} g_i \ldots B g_i \; g_i$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

жорд клетка $r \times r$ (блок нижн уровня)

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_{r\times r} = \lambda E_r + I_r$$

$$I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

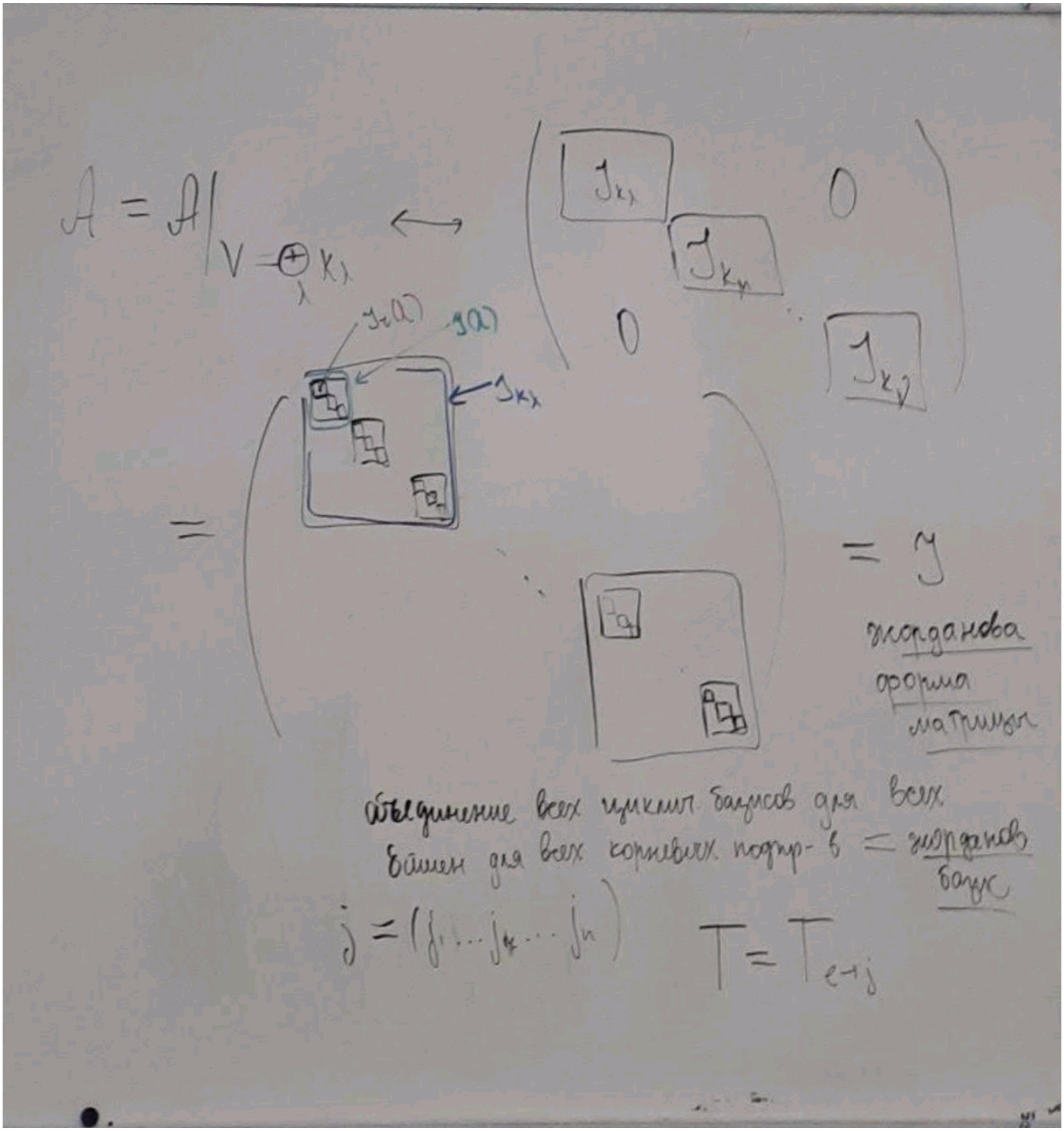
$$\mathcal{A}\Big|_{\tau_r = \bigoplus_{i=1}^{d} S_i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{J_r(\lambda)} & & & 0 \\ & \boxed{J_r(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r(\lambda)} \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

d клеток (блоков нижнего уровня)

← блок среднего уровня (соот-т башне высоты r)

$$\mathcal{A}\Big|_{K_\lambda = K = \bigoplus_{r=1}^{m} \tau_r} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} J(\lambda) & \\ & J(\lambda) \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} J(\lambda) & \\ & J(\lambda) \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} J(\lambda) & \\ & J(\lambda) \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

← блок верхнего уровня (соот-т корневому подпр-ву)


A = A|V = ⊕ K_λ ⟷
J_{K_λ}
J_{K_μ}
J_{K_ν}
0
0
J_1(λ)
J(λ)
J_{K_λ}
= J
жорданова форма матрицы
объединение всех циклич. базисов для всех башен для всех корневых подпр-в = жорданов базис
j = (j_1, … j_k … j_n)
T = T_{e→j}

$$\boxed{J = T^{-1} A T}$$

$e_1 \dots e_n$ базис V

$\mathcal{A} \longleftrightarrow A$

в базисе e.

$TJ = AT$

$\Rightarrow$ можно найти T, решив матрич. сист. ур-й

3-й алгоритм построения Ж.ф. и Ж.б для м-цы.

λ: $K_\lambda = K = \underbrace{\bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2 \oplus \dots \oplus \bar{K}_m}_{\bar{K}} \oplus BK$

1. найдем $K = K_\lambda$
2. найдем $BK = \mathrm{Im}\, B|_K$ $\quad B = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$
3. дополним BK до K

т.е. найдем базисные вектора $\bar{K} = \bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2 \oplus \dots \oplus \bar{K}_m = \mathrm{span}(v_1 \dots v_t)$

4. будем строить циклич. базисы:

$$\underbrace{v_i,\ Bv_i,\ \ldots,\ B^{\nu}v_i}_{\text{циклич. базис}},\ B^{\nu+1}v_i \quad \text{пока не получим } 0$$

$B^{\nu}v_i \in V_\lambda$, $B^{\nu+1}v_i = 0$

$\longrightarrow$ клетка $\longrightarrow$ Ж. ф

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = (t-5)(t-4)^3$$

$\lambda_1 = 5 \quad d(\lambda_1) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 4 \quad d(\lambda_2) = 3$

$\gamma(\lambda_2) = ?$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_2 E) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-3} \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 + 1 = 3$$

$\gamma(\lambda_2) = 1 \longrightarrow 1$ клетка

(1 цикл. базис)

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{5} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$K = K_3 = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 E)^3 =$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}}_{v_1}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3}\Big)$$

$$BK = \operatorname{span}(Bv_1, Bv_2, Bv_3) =$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}\cancel{\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}}\right)$$

$$\overline{K}$$

$$K = BK \oplus \overset{0}{\overline{K}_1} \oplus \overset{0}{\overline{K}_2} \oplus \overline{K}_3$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

an(

$\overline{K} = \mathrm{span}(v_3) \to$ 1 цикл. базис.

базис жорд.

v_3

$$Bv_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

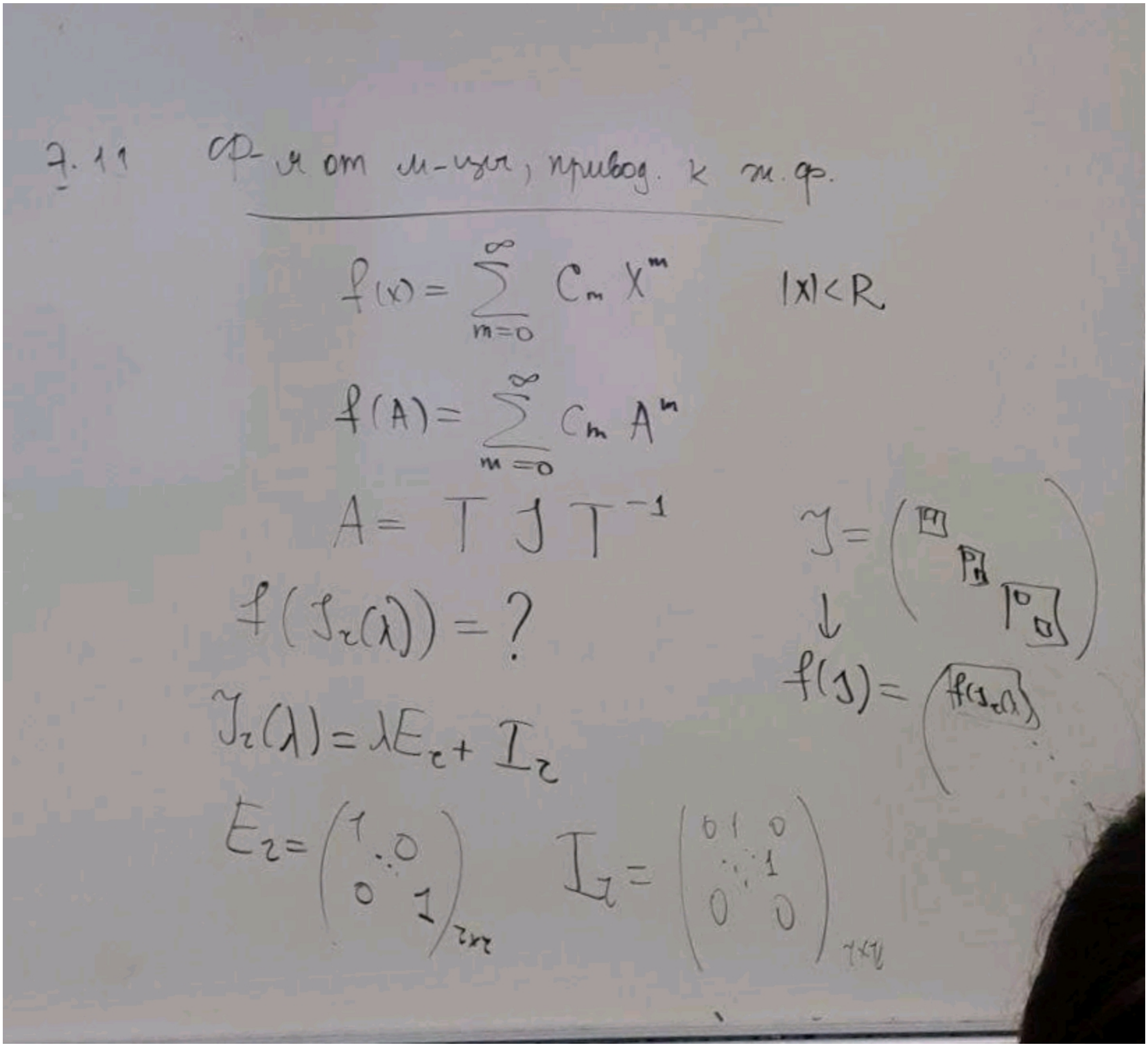
$$B^2 v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 v_3 = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \mathrm{span}(v)$$

$$j = \left(v_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме



$$f(J_r(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \, J_r^m(\lambda)$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \, I^k \, \lambda^{m-k} =$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2!}\lambda^{m-2} & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3} & \cdots \\ & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ & & & & \lambda^m \end{pmatrix}$$

$I^4 = 0$ $\quad \boxed{I_r^r = 0}$

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2!}$$

7.11 Ф-я от м-цы, привод. к ж.ф.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad |x|<R$$

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m x^{m-1}$$

$$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1) x^{m-2}$$

$$f(tJ_r(\lambda)) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m (\lambda t)^m & \frac{t}{1!}\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m m (\lambda t)^{m-1} & \frac{t^2}{2!}\sum\limits_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)(\lambda t)^{m-2} & \frac{t^3}{3!}\sum\limits_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2)(\lambda t)^{m-3} & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$f(At) = T f(Jt) T^{-1}$$

$$f(tJ_r(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_r^m(\lambda) t^m$$

$t \in \mathbb{R}$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda t) & t\frac{f'(\lambda t)}{1!} & \frac{t^2 f''(\lambda t)}{2!} & t^3\frac{f'''(\lambda t)}{3!} & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & f(\lambda t) \end{pmatrix}$$

$$f^{(k)}(\lambda t) = \left(f^{(k)}(x)\right)\Big|_{x=\lambda t}$$

Пример:

$$\tau = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= T \tau T^{-1} \\ f(A) &= T f(\tau) T^{-1} \end{aligned}}$$

$$\sin(\tau t) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda t) & t\cos\lambda t & -\frac{t^2}{2!}\sin\lambda t & -\frac{t^3}{3!}\cos\lambda t \\ 0 & \sin\lambda t & t\cos\lambda t & -\frac{t^2}{2!}\sin\lambda t \\ 0 & 0 & \sin\lambda t & t\cos\lambda t \\ 0 & 0 & 0 & \sin\lambda t \end{pmatrix}$$

$f(x) = \sin x$

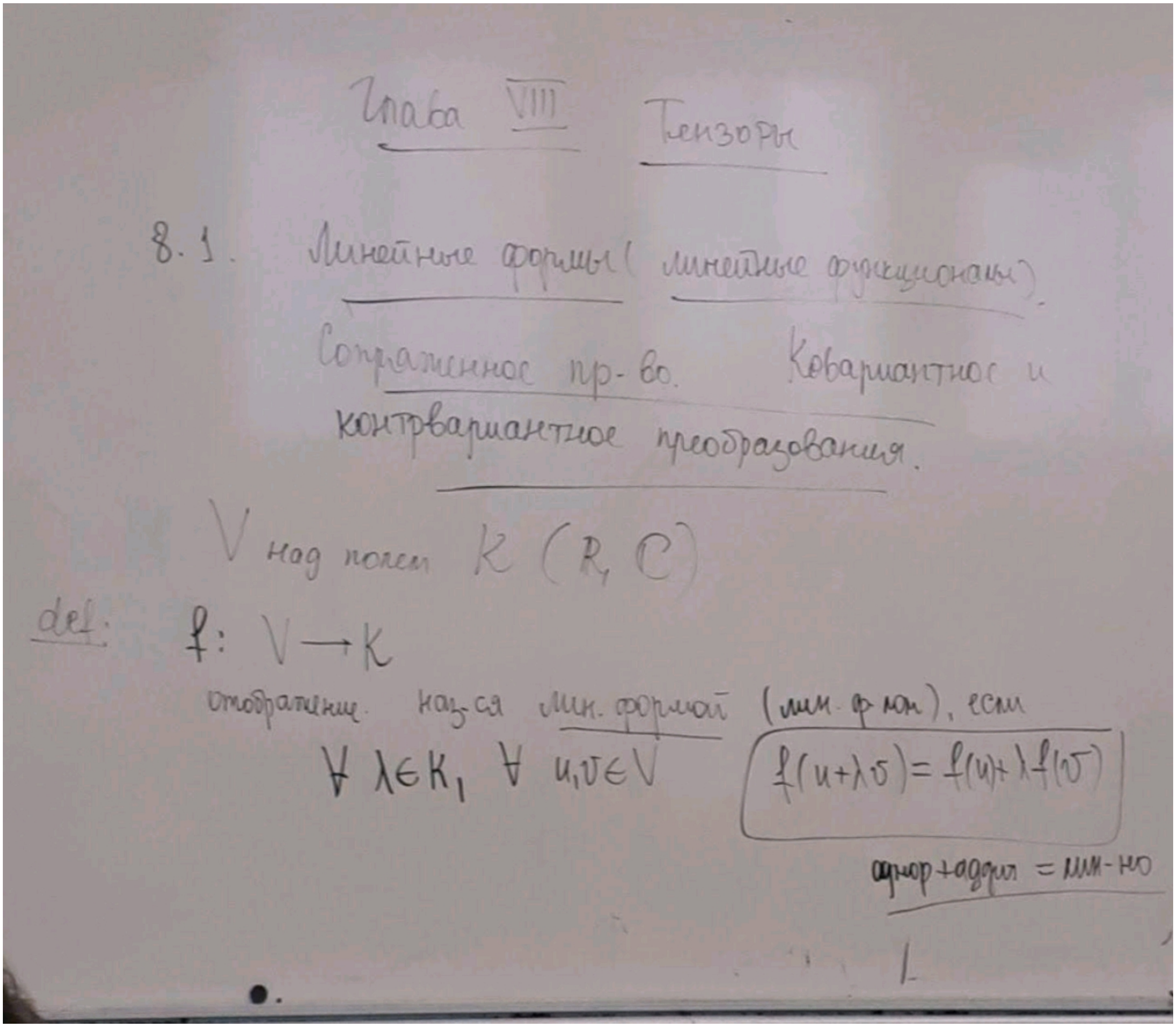
$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

8 Тензоры

8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контрвариантные преобразования.



Примери:

1. $V = \{ g \mid g \in C(\mathbb{R}) \}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\delta : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{\delta(g) = g(0)}$$

лин. форма.

делъта-ф-я Дирака

2. V_3 $\bar{a}$ – фиксируем.

$f: V_3 \to \mathbb{R}$

$\forall v \in V_3 \quad f(\bar{v}) = (\bar{a}, \bar{v})$

скал. пр-е.

лин. форма

3. P_n мн-ны степени $\leq n$

$m \in \mathbb{N}$

$t_0 \in \mathbb{R}$ фикс

$$f_m : P_n \to \mathbb{R}$$

$$\forall p \in P_n \quad f_m(p) = \frac{p^{(m)}(t_0)}{m!}$$ лин. форма.

4. $A_{n \times n}$ $\quad M_{n\times n}$ пр-во м-ц $n \times n$

$$f : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$$

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr} A$$ лин. форма.

$$f(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} \lambda B = f(A) + f(\lambda B)$$

V <u>конечномерн.</u>

$e = (e_1 \dots e_n)$ базис V

$$\forall x \in V : \quad x = x^i e_i \left(= \sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right)$$
пр-ло Эйнштейна

$$\longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$ коор-ты x отн-но e

$f : V \to \mathbb{R}$
лин. форма $\quad$ „+" „$\cdot\lambda$" как у обычных ф-й $\quad f_1 + f_2$, λf_1

def: $\mathbb{O} : V \to \mathbb{R}$ лин. форма $\quad \forall v \in V \quad \mathbb{O}(v) = 0$

$-f : V \to \mathbb{R}$ противопол. лин. форма f $\quad \forall v \in V \quad -f(v) = -(f(v))$

$V^* = \{ f : V \to K$ лин. формы $\}$

выч-ны 1°–8° аксиомы $=$ лин. пр-во

V^* сопряженное (дуальное) пр-во к V

$f \in V^* \quad \forall x \in V$

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K} = x^i a_i$$

вз одн соотв. $\longleftrightarrow (a_1 \dots a_n) = a \in K_n$ пр-во n-мерных строк

строка

обладает св-вом лин-ти

a_i коэфф-ты f отн-но базиса e

$f \leftrightarrow a = (a_1 .. a_n)$

$g \leftrightarrow b = (b_1 .. b_n)$

$f + \lambda g \to a + \lambda b$

$V^* \cong K_n$ (изоморфизм не естеств, т.е. зависит от базиса)

$\Rightarrow \dim V^* = n = \dim V$

напоминание! $V^* = \{ \underset{\text{лин.}}{f: V \to K} \}$ сопряженное (дуальное) пр-во к V

$V^* \cong K_n$ — пр-во n-мерных строк. (не естественный)

$e_1 .. e_n$ базис V $\quad \forall\, x \in V \quad x = x^i e_i \quad f(x) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \text{ коэф-ты } f} = x^i a_i \leftrightarrow a = (a_1 .. a_n) \in K_n$

$\forall f \in V^* \quad \Updownarrow \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n$ пр-во n-мерных столбцов.

$\dim V^* = n = \dim V$

определим: $\omega^i : V \to K \quad \forall x \in V \quad \omega^i(x) = x^i$ i-ая коор-та x отн-но базиса $e_1 .. e_n$

$i = 1..,n \qquad \omega^i$ — координатные ф-ии

очевидно, ω^i лин. отобр. $\Rightarrow \omega^i \in V^*$

очевидно, $\forall j = 1..,n \quad \forall i = 1..,n \qquad \omega^i(e_j) = \underset{\text{символ Кронекера}}{\delta^i_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Теорема 1: $\omega^1, .., \omega^n$ базис V^*

Док-во! т.к. $\dim V^* = n$, то достаточно проверить лин. незав. $\omega^1, .., \omega^n$.

$\exists\ \alpha_i \omega^i = 0 \quad , \alpha_i \in K$

$\Rightarrow \forall x \in V \quad \alpha_i \omega^i(x) = 0 \Rightarrow$ в частности, для $\forall j = 1..n \quad \alpha_i \underbrace{\omega^i(e_j)}_{\delta^i_j} = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1..n$

$\Leftrightarrow \omega^1, .., \omega^n$ лин. незав. $\Rightarrow$ базис V^* ∎

Следствие: $\forall f \in V^*$ коэф-ты $a_i = f(e_i)$ (отн-но базиса e) явл-ся коор-ми формы f в пр-ве V^* отн-но базиса $\omega^1, .., \omega^n$.

т.о. $V^* \cong K_n$ — координ. изоморфизм. отн-но базиса $\omega^1 .. \omega^n$

док-во: $\forall f \in V^* \ \forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i$, где $a_i = f(e_i)$

т.к. $x^i = \omega^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i \omega^i(x) \ \forall x \in V \Rightarrow f = a_i \omega^i \Leftrightarrow a = (a_1 .. a_n)$ коор-ты f отн-но базиса $\omega^1 .. \omega^n$ ∎

def: коорд. ф-ии $\omega^1 .. \omega^n$, порожденные базисом $e_1, .., e_n$ пр-ва V наз-ся сопряженным (дуальным) базисом пр-ва V^* к базису $e_1 .. e_n$ пр-ва V.

? Всякий ли базис V^* будет сопряженным к некоторому базису пр-ва V ?

Теорема 2! $\exists\ \omega'^1, \omega'^2, .., \omega'^n$ базис $V^* \Rightarrow \exists$ базис $e_1', e_2', .., e_n'$ пр-ва V, т.ч. базис ω' будет сопряженным к базису e'

Док-во! $\exists\ e_1, .., e_n$ базис V, а $\omega^1, .., \omega^n$ базис V^*, сопряжен. к e.

т.к. ω и ω' базисы пр-ва V^*, то $(\omega'^1 .. \omega'^n) = (\omega^1 .. \omega^n) T_{\omega \to \omega'}$ ↑ м-ца перехода.

т.к. в координ. представлении эл-там V^* соот-т строки, то последнее равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = T^T_{\omega \to \omega'} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

Обозначим $\boxed{S := T^T_{\omega \to \omega'}}$

м-ца S, очевидно, невырожденная $\Rightarrow \exists\ S^{-1} =: T$

Определим „новый" базис в пр-ве V следующим равенством:

$(e_1' .. e_n') = (e_1 .. e_n) T$, т.о. $T = T_{e \to e'}$

Покажем, что ω' будет сопряженным к построенному e'.

$S = (s^i_j)_{n\times n}$ ← номер стр, ← номер столбца, аналогично $T = (t^i_j)_{n\times n}$ $\Rightarrow$ $\omega'^i = S^i_k \omega^k$

$\forall x \in V$: $\omega'^i(x) = S^i_k \omega^k(x) = \underbrace{S^i_k x^k}_{(S^i x)_{i\text{-ая коорд-та}}} = x'^i$ – i-ая коорд-та x в базисе e' $\Rightarrow$ ω'^i – координатная ф-я отн-но базиса e', т.е ω' сопряж. базис к e' ∎

т.к. $T = T_{e\to e'}$, то $x' = T^{-1}x = Sx$

Следствие: e, e' базисы V, $T = T_{e\to e'}$, $S = T^{-1}$
ω, ω' сопряжен. к e и e', соот-но, базисы V^*

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\forall x \in V & x' = Sx = T^{-1}x \\ \forall f \in V^* & a' = aT\end{matrix}}, \text{ причем } T_{\omega\to\omega'} = S^T = (T^{-1})^T$$

док-во: $T^T_{\omega\to\omega'} = S$, очевидно, из док-ва т-мы.
также, очевидно, что $x' = T^{-1}x$.
остается показать, что $\forall f \in V^*$ $a' = aT$
т.к. $(\omega'^1 .. \omega'^n) = (\omega^1 .. \omega^n) T_{\omega\to\omega'}$, то $(a')^T = T^{-1}_{\omega\to\omega'} a^T \Rightarrow a' = a\underbrace{(T^T_{\omega\to\omega'})}_{S} = aT$ ∎

Замечание: очевидно, значение лин. формы f на элементе x не должно зависеть от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (t^i_k x'^k)\cdot(a'_m S^m_i) = \underbrace{(S^m_i t^i_k)}_{(ST)^m_k = \delta^m_k} x'^k a'_m = x'^k a'_k$$

$x = Tx'$, $a = a'S$; $ST = E$ – инвариантность формы записи лин. формы отн-но выбора базиса

def: Векторы, координаты которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с формулой замены e на e', т.е. с той же м-цей $T = T_{e\to e'}$, наз-ся ковариантными векторами или ковекторами $\equiv$ элементы пр-ва V^*

Векторы, коор-ты которых, при замене базиса e на e', меняются по закону, противоположному ф-ле замены e на e', т.е. с матрицей $T^{-1} = S$, наз-ся контрвариантными векторами или просто векторами $\equiv$ элементы пр-ва V.

Поэтому, лин. формы, также называют просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во $(V^*)^* = V^{**}$ – дважды сопряженное к V

очевидно, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ (все три пр-ва изоморфны)

Построим изоморфизм между V и V^{**} следующим образом:

$\forall x \in V \xrightarrow[\text{сопоставим}]{} „x" \in V^{**}$: $\forall f \in V^*$ $\boxed{„x"(f) = f(x)}$

очевидно, $„x"$: $V^* \to K$

проверим лин-ть $„x"$: $\forall \lambda \in K$ $\forall f_{1,2} \in V^*$

$„x"(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = „x"(f_1) + \lambda „x"(f_2)$
$\Rightarrow$ лин-но $\Rightarrow „x" \in (V^*)^*$

Теорема 3: соответствие $x \in V \longrightarrow „x" \in V^{**}$ явл-ся вз-одн. и лин-м, т.е. изоморфизмом. ($V \cong V^{**}$)

Док-во: итак, $\forall x \in V \rightsquigarrow „x" \in V^{**}$
покажем, что это отображение обладает св-вом лин-ти: $\forall \lambda \in K$, $\forall x_1, x_2 \in V$

$\underset{\in V}{(\lambda x_1 + x_2)} \longrightarrow \underset{\in V^{**}}{„\lambda x_1 + x_2"}$ $\forall f \in V^*$ $„\lambda x_1 + x_2"(f) = f(\lambda x_1 + x_2) =$
$= \lambda f(x_1) + f(x_2) = \lambda„x_1"(f) + „x_2"(f) \Rightarrow „\lambda x_1 + x_2" = \lambda„x_1" + „x_2"$, т.е. лин-но.

Т.о. мы получаем вложение пр-ва V в пр-во V^{**}, обладающее св-вом лин-ти.

В частности, $\exists$ $e_1, .., e_n$ базис $V \longrightarrow „e_1", .., „e_n" \in V^{**}$

$\Rightarrow \forall j = 1..n$ $\forall f \in V$ $„e_j"(f) = f(e_j) = a_j$ – коор-та f в пр-ве V^* отн-но базиса ω^j пр-ва V^*

$\Rightarrow$ $„e_j"$ координ. ф-я и сопряжен. базис к базису ω^j $\Rightarrow$ по т-ме 1 $„e_1" .. „e_n"$ базис V^{**}

$\Rightarrow$ Т.о. наше вложение пр-в на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис. ∎

Замечания! 1. изоморфизм, построенный в т-ме 3 является <u>естественным</u> <u>изоморфизмом</u> пр-в V и V^{**}, т.к его построение не зависело от выбора базиса.

2. Принято отождествлять эл-ты x пр-ва V и „x" пр-ва V^{**}, поэтому пишут $x(f) := f(x)$ без кавычек.

$$\forall x \in V \quad \forall f \in V^* : \qquad f(x) = x^i f(e_i) = \omega^i(x) a_i \qquad f(e_i) = e_i(f) = a_i$$

$$x = x^i e_i \qquad f = a_i \omega^i \qquad \overset{\shortparallel}{x(f)} = a_i x(\omega^i) = e_i(f) x^i \qquad x(\omega^i) = \omega^i(x) = x^i$$

т.е. <u>Т-ма 3</u> показывает, что на самом деле пр-ва V и V^* „равноправные" V^* сопряж. к V, а V сопряж. к V^*. Базис ω сопряжен к e, также как и базис e сопряжен к базису ω.

3. $\forall x \in V \quad \forall f \in V^*$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad a = (a_1 \dots a_n)$$

$$f(x) = x^i a_i = a \cdot X = (a_1 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad f(x) = x(f)$$

„строка $\ast$ столбец" $\Longrightarrow$ т.к. $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$, $\omega^i(e_j) = e_j(\omega^i)$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E}$$

Примеры! 1) $\mathbb{R}^3$: базис $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти сопряж. базис $\omega^1, \omega^2, \omega^3$.

$$\omega^i \longleftrightarrow (a^i_1 a^i_2 a^i_3) = a^i \qquad \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} (e_1 e_2 e_3) = E \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = E$$

$$\Rightarrow \quad A = B^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} = \omega^1 \\ = \omega^2 \\ = \omega^3 \end{array}$$

2) $V = \oplus V_\lambda \qquad \underset{\text{проекторы}}{P_\lambda : V \to V_\lambda} \qquad \sum\limits_\lambda P_\lambda = \mathcal{E} \qquad P_\lambda P_\mu = \mathcal{O}, \quad P_\lambda^2 = P_\lambda$

$V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) \longrightarrow$ построим $\omega^1, \dots, \omega^n$ сопряж. к $v_1 \dots v_n$

$$\Rightarrow \forall x \in V : \; x = \sum_\lambda x_\lambda = x^i v_i = \omega^i(x) v_i$$

$$\Rightarrow P_\lambda x = x_\lambda = \sum_{v_k \in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k \in V_\lambda} \omega^k(x) v_k$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \alpha(\lambda_1) = 1 = \gamma(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -3 & \alpha(\lambda_2) = 2 = \gamma(\lambda_2) \end{array} \qquad V_{\lambda_1} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$V_{\lambda_2} = \operatorname{span}\Big(\underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\Big)$$

построим сопряж. базис! (см. пример 1)

$$\omega^1 = \left(-\tfrac{1}{2} \; \tfrac{1}{2} \; 0\right) \qquad \omega^2 = \left(\tfrac{1}{2} \; \tfrac{1}{2} \; 0\right) \qquad \omega^3 = (0 \; 0 \; 1)$$

$$\omega^i(x) = (a^i_1 a^i_2 a^i_3) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$P_{\lambda_1}(x) = \omega^1(x) \cdot v_1 = \left(-\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{2} - \frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda_2}(x) = \omega^2(x) \cdot v_2 + \omega^3(x) \cdot v_3 = \left(\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейное пр-во тензоров.

V лин. пр-во над полем K $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

V^* сопряженное пр-во; $\dim V = \dim V^* = n$

def: ($1^{ое}$ def тензора) тензором α типа (p,q) (p-раз ковариантным, q-раз контрвариантным) наз-ся полилинейная функция $f: V^p \times (V^*)^q \to K$

$$V^p = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p \text{ раз}} \qquad (V^*)^q = \underbrace{V^* \times \ldots V^*}_{q \text{ раз}}$$

$\boxed{\text{тензор}\ \alpha \equiv f \text{ полилин. ф-я}}$

полилинейная $\equiv$ линейная по каждому аргументу.

p и q – валентности тензора

$r = (p+q)$ – ранг или полная валентность тензора.

def: Тензор α типа $(p,0)$, т.е. $f: V^p \xrightarrow[\text{полилин.}]{} K$ наз-т ковариантным тензором валентности p

Тензор α типа $(0,q)$, т.е. $f: (V^*)^q \xrightarrow[\text{полилин.}]{} K$ наз-т контрвариантным тензором валентности q

если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то говорят о тензоре смешанного типа.

если $r = 0$, то тензор типа $(0,0) \equiv$ скаляр $\in K$

Далее, определим операции „$+$" и „$\cdot\lambda$" для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на одном и том же наборе аргументов.

Определим $\underset{\text{нулевой тензор}}{\mathbb{O}}: V^p \times (V^*)^q \to K$, т.ч. $\forall \underset{k=1,..,p}{\xi_k} \in V$ $\forall \underset{m=1,..,q}{\eta^m} \in V^*$ $\mathbb{O}(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^q) = 0$

и $\underset{\text{противопол. тензор}}{-\alpha}$, т.е. $-f: V^p \times V^q \to K$, т.ч. $\forall \underset{k=1,..,p}{\xi_k} \in V$ $\forall \underset{m=1,..,q}{\eta^m} \in V^*$ $-f(\xi_1,..,\xi_p,\eta^1,..,\eta^q) = -1 \cdot f(\xi_1,..,\xi_k,\eta^1,..,\eta^m)$

$$\Rightarrow -f + f = \mathbb{O} = f + (-f)$$

Т.о. вып-ны $1^\circ - 8^\circ$ аксиомы лин. пр-ва (упр.)

def: $T_{(p,q)}$ – лин. пр-во тензоров типа (p,q)

$e_1, \dots, e_n$ базис V

$\omega^1, \dots, \omega^n$ базис V^*, сопряженный e

$\xi_k \in V$, $k = 1, \dots, p$ $\quad \xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_k^1 \\ \vdots \\ \xi_k^n \end{pmatrix}$ – коор-ты ξ_k отн-но базиса e

вектор (контрвариантный)

$\eta^m \in V^*$, $m = 1, \dots, q$ $\quad \eta^m = \eta^m_{i_m} \omega^{i_m} \longleftrightarrow (\eta^m_1 \dots \eta^m_n)$ – коор-ты η^m отн-но базиса ω

ковектор (ковариантный)

$\alpha \equiv f$ полилин. ф-ция $\Rightarrow$

тензор типа (p,q)

$\boxed{\alpha \in T_{(p,q)}}$

$$\boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^m) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_q})} \quad (1)$$

$$\boxed{\alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_q})} \quad (2)$$

координаты (компоненты) тензора α отн-но базисов e и ω

Т.о, очевидно, значение полилин. ф-ии f (а значит и тензора α), полностью опр-ся её значениями на всевозможных p-наборах базисных векторов e_j и q-наборах базисных ковекторов ω^i.

$$\boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^m) = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q}} \quad (1')$$

def: $S = (p+q)$ – мерной матрицей порядка n наз-ся мн-во элементов, занумерованных двумя типами индексов: верхних $i_1, \dots, i_q$ и нижних $j_1, \dots, j_p$, при этом все индексы пробегают значения от 1 до n.

$$\boxed{A = (\alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p})}$$

$S = (p+q)$ – мерная м-ца порядка n содержит $\boxed{n^{p+q} = n^S \text{ элементов.}}$

$i_m = 1, \dots, n \quad m = 1, \dots, q$

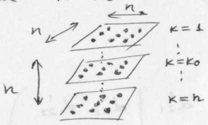
$j_k = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, p$

Примеры: 1) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $\quad A = (a^i_j)_{n \times n}$ $\quad A = (a^{ij})_{n \times n}$

двумерные м-цы порядка n (n^2 элементов)

2) $A = (\alpha^i_{jk})_{n \times n \times n}$ 3-х мерная м-ца порядка n

фиксируем $k = k_0 \rightsquigarrow$ получаем $(\alpha^i_{jk_0})$ – обычная двумерная м-ца.



„куб" из n^3 чисел.

аналогично, 4-х мерная м-ца – упорядоч. набор из n 3-х мерных м-ц.

Т.о. $\forall \alpha \in T_{(p,q)} \longrightarrow A$ – $(p+q)$ – мерная м-ца компонент α

Верно и обратное $\forall$ $(p+q)$ – мерной м-це A порядка n $\longrightarrow$ полилин. ф-ю f по формулам (1) (2), где $e_1 \dots e_n$ некоторый фиксир. базис V, а $\omega^1, \dots, \omega^n$ базис V^*, сопряж. e.

Т.о. получаем $\boxed{\alpha \in T_{(p,q)} \underset{\text{вз-одн.}}{\longleftrightarrow} A \ (p+q) \text{ мерн. м-ца порядка } n}$

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующих компонент их матриц, т.е. наше вз-одн. соответствие обладает св-вом лин-ти, т.е. явл-ся изоморфизмом

$$\boxed{T_{(p,q)} \cong A = (\alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}) \cong K^{n^{p+q}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}}$$

Соглашение о порядке записи эл-тов многомерной матрицы (т.е. матрицы тензора)

общее правило: первый индекс всегда верхний левый индекс, далее по верхней строке, а затем по нижней.

$\exists$ $n=2$

$r=2$ возможные варианты матриц: $A=(\alpha^i_j)$ $A=(\alpha^{ij})$ $A=(\alpha_{ij})$ $\quad i=1,2$, $j=1,2$

1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец.

$$A=(\alpha^i_j)=\begin{pmatrix}\alpha^1_1 & \alpha^1_2\\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2\end{pmatrix} \qquad A=(\alpha^{ij})=\begin{pmatrix}\alpha^{11} & \alpha^{12}\\ \alpha^{21} & \alpha^{22}\end{pmatrix}$$

$r=3$ $A=(\alpha^{ijk})$ $A=(\alpha^{ij}_k)$ $A=(\alpha^i_{jk})$ $A=(\alpha_{ijk})$

1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец.

3й индекс – всегда „слой"

$$A=(\alpha^i_{jk})=\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha^1_{11} & \alpha^1_{21} & \alpha^1_{12} & \alpha^1_{22}\\ \alpha^2_{11} & \alpha^2_{21} & \alpha^2_{12} & \alpha^2_{22}\end{array}\right)$$

1 слой $\qquad$ 2 слой

$$A=(\alpha_{ijk})=\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha_{111} & \alpha_{121} & \alpha_{112} & \alpha_{122}\\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \alpha_{212} & \alpha_{222}\end{array}\right)$$

$r=4$ 1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец

3й индекс – всегда слой

4й индекс – всегда „сечение"

$$A=(\alpha^{ij}_{km})=\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha^{11}_{11} & \alpha^{12}_{11} & \alpha^{11}_{12} & \alpha^{12}_{12}\\ \alpha^{21}_{11} & \alpha^{22}_{11} & \alpha^{21}_{12} & \alpha^{22}_{12}\\ \hline \alpha^{11}_{21} & \alpha^{12}_{21} & \alpha^{11}_{22} & \alpha^{12}_{22}\\ \alpha^{21}_{21} & \alpha^{22}_{21} & \alpha^{21}_{22} & \alpha^{22}_{22}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A_{11} & A_{12}\\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right)$$

A_{11}, A_{12} – 1 слой; A_{21}, A_{22} – 2 слой; A_{11}, A_{21} – 1 сечение; A_{12}, A_{22} – 2 сечение

<u>Примеры:</u>

1) $f\in V^*$ $\quad f$ – $(1,0)$ <u>тензор</u>. (1 раз ковариантный)

$f: V\longrightarrow K$ лин.

$\forall\, \xi\in V$ $\quad \xi=\xi^i e_i$ $\quad f(\xi)=\xi^i \underbrace{f(e_i)}_{\alpha_i}$ $\longleftrightarrow$ $A=(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ 1мерная м-ца

$e_1\ldots e_n$ базис V

2) V_3 – 3х мерн. геом. вектора. $\quad f: V_3\times V_3\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \forall \bar a,\bar b\in V_3$ $\quad \underbrace{f(\bar a,\bar b)=|\bar a||\bar b|\cos\varphi}_{\text{скал. пр-е}}$ $\quad (\varphi=\angle(\bar a,\bar b))$

очевидно, f – билинейная ф-я – <u>тензор</u> типа $(2,0)$, $f\in T_{(2,0)}$

$\exists$ $e_1=\bar i$, $e_2=\bar j$, $e_3=\bar k$

$f(\bar a,\bar b)=\alpha_{ij}a^i b^j$ $\qquad \bar a=a^i e_i$, $\bar b=b^j e_j$, $\alpha_{ij}=f(e_i,e_j)=\delta_{ij}$

$$\Rightarrow\quad f\longleftrightarrow A=(\alpha_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

$f(\bar a,\bar b)=a^T A b$ $\Rightarrow$ в нашем случае $f(\bar a,\bar b)=a^T b=\sum\limits_{i=1}^{3}a^i b^i$ (т.к. оба индекса наверху пишем значок Σ)

$\boxed{?}$ Как изменится вид тензора, если выбрать другой – „новый" – базис в пр-ве V?

$e_1\ldots e_n$, $e_1'\ldots e_n'$ базисы пр-ва V $\quad T=T_{e\to e'}$, $S=T^{-1}=T^T_{w\to w'}$ $\quad \forall x\in V$ $\quad x=Tx'$ $\quad x=x^i e_i=x'^i e_i'$ $\quad \boxed{x^i=t^i_j x'^j}$

$\omega^1\ldots\omega^n$, $\omega'^1\ldots\omega'^n$ базисы пр-ва V^*, сопряжен. к e и e', соот-но $\quad \forall a\in V^*$ $\quad a=a'S$ $\quad a=a_j\omega^j=a_j'\omega'^j$ $\quad \boxed{a_i=a_j' S^j_i}$

$\Rightarrow$ $\forall\, \xi_k\in V$ $\quad \xi^{j_k}_k=t^{j_k}_{r_k}\xi'^{r_k}_k$ $\qquad j_k=1,\ldots,n$; $k=1,\ldots,p$

$\forall\, \eta^m\in V^*$ $\quad \eta^m_{i_m}=S^{u_m}_{i_m}\eta'^m_{u_m}$ $\qquad i_m=1,\ldots,n$; $m=1,\ldots,q$

$\Rightarrow$ подставим в (1')

$$f(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q)=\boxed{\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\,t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p}S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q}}\,\xi'^{r_1}_1\ldots\xi'^{r_p}_p\,\eta'^1_{u_1}\ldots\eta'^q_{u_q}=$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенным вверху и внизу, происходит суммирование (i_m, j_k) $\Rightarrow$ в результате, просуммировав, получим новую компоненту со штрихованными индексами.

$$=\boxed{\alpha'^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p}}\,\xi'^{r_1}_1\ldots\xi'^{r_p}_p\,\eta'^1_{u_1}\ldots\eta'^q_{u_q},$$

т.о. получим снова тензор типа (p,q)

Т.о., при замене базиса тензор типа (p,q) остаётся тензором того же типа, а его координаты меняются по следующему закону:

$$\boxed{\underset{\substack{\text{коор-ты тензора}\\ \text{в „новых" базисах}\\ e',\omega'}}{\alpha'^{\,u_1\ldots u_q}_{\;r_1\ldots r_p}} = \underset{\substack{\text{коор-ты тензора}\\ \text{в „старых" базисах}\\ e,\omega}}{\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\underbrace{j_1\ldots j_p}}}\; t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p}\, S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q}} \qquad (3)$$

верхние индексы $\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots}$ преобразуются с м-цей S, т.е. по контрвариантному закону, поэтому наз-ся контрвариантными индексами, а тензор q-раз контрвариантным

Соот-но, нижние индексы $\alpha^{\ldots}_{j_1\ldots j_p}$ преобразуются с матрицей T, т.е. по ковариантному закону, поэтому наз-ся ковариантными индексами, а тензор p раз ковариантным.

Примеры: 1) тензор типа $(0,0)\equiv\lambda\in K$, очевидно, не меняется при замене базиса, т.е. инвариант

2). $A=(a^i_j)_{n\times n}$ м-ца тензора $\alpha\in T_{(1,1)}$

$$a'^{\,k}_{m} = a^i_j\, t^j_m\, S^k_i \iff A' = SAT = T^{-1}AT$$ получаем ф-лу замены м-цы лин. опер. при замене базиса.

3) $\forall f\in V^*$ тензор типа $(1,0) \longleftrightarrow A=(a_i)_{1\times n} = a\in K_n$ $\qquad a'_j = a_i t^i_j \iff a' = aT$ $\qquad a_i = f(e_i)$

ковариантн.

$\forall x\in V \quad f(x) = x^i a_i = x'^j a'_j = a_i \boxed{t^i_j\; x'^j} = a_i x^i$

$V\cong V^{**} \quad \begin{matrix} \| \\ x(f) \\ \| \end{matrix} \quad x: V^*\longrightarrow K$ тензор типа $(0,1)$ $\qquad x'^j = S^j_i x^i \iff x' = Sx \qquad x^i = x(\omega^i)$

контрвариант.

$a_i x^i = a'_j x'^j = x^i \boxed{S^j_i a'_j} = x^i a_i$

4) $\alpha\in T_{(1,2)} \Rightarrow A = (\alpha^{ij}_k)$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{A_1} & \multicolumn{3}{c|}{A_2} & \multicolumn{3}{c}{A_3}\\ 0&0&0 & 3&1&0 & 0&0&0\\ 2&0&0 & -7&-2&0 & 1&0&0\\ 0&0&0 & 3&1&0 & 3&0&0 \end{array}\right) \qquad e_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\; e_2' = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\; e_3' = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Найти $\alpha'^{\,21}_{2}$

$$T = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad S = T^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix} \end{array}\begin{matrix}S^1\\S^2\\ \end{matrix} \qquad \alpha'^{\,21}_{2} = \alpha^{ij}_k\, t^k_2\, S^2_i\, S^1_j$$

t_2 — 2ой столбец T; S^2 — 2ая строка S; S^1 — 1ая строка S

$\exists$ k фиксир. $\alpha^{ij}_k\in A_k$ $\qquad \alpha^{ij}_k S^2_i S^1_j \iff S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow \underset{\alpha'^{\,21}_{2}}{\underbrace{(S^2 A_k (S^1)^T)\, t^k_2}} = (2\;\; -17\;\; -5)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -19$

Вернемся к def тензора. Тензор был определен нами, как полилинейная ф-ция и наше def не зависило от выбора базиса в пр-ве V. Но, при этом, тензор оказался согласован с заменой базиса, т.е. после замены базиса тензор остался тензором, причем того же типа. Для такого рода объектов исп-ся термин геометрический объект. Поэтому сущ-т другой подход к def. тензора.

def: (2ое def тензора) Тензором α типа (p,q) наз-ся геометрический объект на пр-ве V, который описывается A $(p+q)$ мерной матрицей элементов поля K размерности $n=\dim V$. При этом, каковы бы не были базисы e и e' в пр-ве V и соответствующие им сопряженные базисы V^* ω и ω', соответствующие компоненты матриц A и A' должны быть связаны формулой (3).

Операции „+" и „$\cdot\lambda$" между двумя тензорами одного типа, очевидно, опр-ся в этом случае как операции „+" и „$\cdot\lambda$" соответствующих компонент матриц тензоров.

При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут уд-ть ф-ле (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр снова будет получать тензор того же типа, что и исходные.

Действительно, $\forall\lambda\in K$; $\alpha,\beta\in T_{(p,q)}$

$$(\lambda\alpha+\beta)^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} := \lambda\cdot\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} + \beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}$$

$$(\lambda\alpha+\beta)^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q} = \left(\lambda\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} + \beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\right)\boxed{t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p} S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q}} =$$

$$\underset{\alpha,\beta\in T_{(p,q)}}{\overset{\text{т.к.}}{=}} \lambda\alpha'^{\,u_1\ldots u_q}_{\;r_1\ldots r_p} + \beta'^{\,u_1\ldots u_q}_{\;r_1\ldots r_p} = (\lambda\alpha'+\beta')^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p} = (\lambda\alpha+\beta)'^{\,u_1\ldots u_q}_{\;r_1\ldots r_p}$$

Т.о. лин. операциям на пр-ве полилин. ф-й соответствуют лин. опер. над многомерными м-цами с сохранением св-ва (3). Поэтому def 1 $\iff$ def 2.

В зависимости от поставленой задачи, мы будем исп-ть как 1ое, так и 2ое def.

8.3 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.3 <u>Произведение тензоров</u>. <u>Базис пр-ва тензоров</u>. <u>Операция свертки</u>.

<u>def</u>: $\alpha \in T_{(p_1,q_1)}$, $\beta \in T_{(p_2,q_2)}$

<u>Произведением тензоров α и β</u> наз-ся тензор $\boxed{\gamma = \alpha \otimes \beta} \in T_{(p_1+p_2,\, q_1+q_2)}$, компоненты которого опр-ся следующим равенством:

$$\boxed{\gamma^{i_1 \ldots i_{q_1} k_1 \ldots k_{q_2}}_{j_1 \ldots j_{p_1} m_1 \ldots m_{p_2}} = \alpha^{i_1 \ldots i_{q_1}}_{j_1 \ldots j_{p_1}} \cdot \beta^{k_1 \ldots k_{q_2}}_{m_1 \ldots m_{p_2}}}.$$

<u>корректность def</u>: надо проверить выполнение св-ва (3) для новой многомерной м-цы γ:

$$\gamma'^{\,i_1' \ldots i_{q_1}' k_1' \ldots k_{q_2}'}_{\;j_1' \ldots j_{p_1}' m_1' \ldots m_{p_2}'} = \alpha'^{\,i_1' \ldots i_{q_1}'}_{\;j_1' \ldots j_{p_1}'} \cdot \beta'^{\,k_1' \ldots k_{q_2}'}_{\;m_1' \ldots m_{p_2}'} \underset{\alpha,\beta\text{ - тензоры}}{=} \overbrace{\alpha^{i_1 \ldots i_{q_1}}_{j_1 \ldots j_{p_1}} t^{j_1}_{j_1'} \ldots t^{j_{p_1}}_{j_{p_1}'} S^{i_1'}_{i_1} \ldots S^{i_{q_1}'}_{i_{q_1}} \cdot \beta^{k_1 \ldots k_{q_2}}_{m_1 \ldots m_{p_2}}}^{\gamma^{i_1 \ldots i_{q_1} k_1 \ldots k_{q_2}}_{j_1 \ldots j_{p_1} m_1 \ldots m_{p_2}}} t^{m_1}_{m_1'} \ldots t^{m_{p_2}}_{m_{p_2}'} S^{k_1'}_{k_1} \ldots S^{k_{q_2}'}_{k_{q_2}} =$$

$$= \gamma^{i_1 \ldots i_{q_1} k_1 \ldots k_{q_2}}_{j_1 \ldots j_{p_1} m_1 \ldots m_{p_2}} t^{j_1}_{j_1'} \ldots t^{j_{p_1}}_{j_{p_1}'} t^{m_1}_{m_1'} \ldots t^{m_{p_2}}_{m_{p_2}'} S^{i_1'}_{i_1} \ldots S^{i_{q_1}'}_{i_{q_1}} S^{k_1'}_{k_1} \ldots S^{k_{q_2}'}_{k_{q_2}} \Rightarrow \text{св-во (3) вып-но} \Rightarrow \gamma \in T_{(p_1+p_2,\, q_1+q_2)}$$

<u>Замечание</u>: $\forall \lambda \in K$ - тензор типа $(0,0)$ $\Rightarrow$ $\lambda\alpha = \lambda \otimes \alpha = \alpha \otimes \lambda$

Тензорное произведение, очевидно, <u>ассоциативно</u>, но <u>не коммутативно</u>! $\boxed{\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha}$

<u>Пример</u>: $\alpha, \beta \in T_{(1,0)}$ $\quad \alpha = (1\ 0\ {-1})$ $\quad \beta = (0\ 3\ 5)$

$\gamma_1 = \alpha \otimes \beta = (\alpha_i \beta_j) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_1$ $\quad \gamma_2 = \beta \otimes \alpha = (\beta_i \alpha_j) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2$

$\gamma_1 \in T_{(2,0)}$ $\quad \gamma_2 \in T_{(2,0)}$

$\gamma_1 \neq \gamma_2 \qquad A_1 = A_2^T$

<u>Утв</u>: 1) $\alpha \in T_{(p,0)}$, $\beta \in T_{(q,q)}$ $\Rightarrow$ $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$

2) $\otimes$ дистрибутивно

В смысле 1$^{\text{го}}$ def тензора произведению тензоров будет соот-ть произведение функций, определяющих эти тензоры.

$$\alpha \leftrightarrow f : V^{p_1} \times (V^*)^{q_1} \to K \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow f\cdot g : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \to K}$$

$$\beta \leftrightarrow g : V^{p_2} \times (V^*)^{q_2} \to K$$

$$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V \quad \forall\, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$$

$$f\cdot g(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2}) = \underbrace{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}}}_{\text{подставим выражения компонент } \gamma \text{ через компоненты } \alpha \text{ и } \beta} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \eta^1_{i_1} \dots \eta^{q_1}_{i_{q_1}} \theta^1_{k_1} \dots \theta^{q_2}_{k_{q_2}} =$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \eta^1_{i_1} \dots \eta^{q_1}_{i_{q_1}}}_{f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1})} \cdot \underbrace{\beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \theta^1_{k_1} \dots \theta^{q_2}_{k_{q_2}}}_{g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})}$$

В частности, $\forall \underset{\text{лин. форма}}{f^j} \in T_{(1,0)}$, $j = 1, \dots, p$ $\quad f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p \in T_{(p,0)}$

$$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_p \in V \qquad \boxed{f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = f^1(\xi_1) \cdot f^2(\xi_2) \cdot \dots \cdot f^p(\xi_p)}$$

$$\forall\, g_j \in T_{(0,1)} \quad j = 1, \dots, q \qquad g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q \in T_{(0,q)}$$

$$\forall\, \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \qquad \boxed{g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q(\eta^1, \dots, \eta^q) = g_1(\eta^1) \cdot g_2(\eta^2) \cdot \dots \cdot g_q(\eta^q)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \dots f^p(\xi_p) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_q(\eta^q)} \quad (4)$$

Теорема: (о базисе пр-ва $T_{(p,q)}$)

$e_1, \dots, e_n$ базис V, $\omega^1, \dots, \omega^n$ базис V^*, сопряжен. e

Совокупность тензоров вида $\boxed{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}}$ по всевозможным наборам индексов $(j_1, \dots, j_p, i_1, \dots, i_q)$, где $j_k = 1, \dots, n$, $i_m = 1, \dots, n$

явл-ся базисом пр-ва $T_{(p,q)}$

Док-во: очевидно, $\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \in T_{(p,q)}$, т.к. $\underset{\text{лин. форма}}{\omega^j : V \to K}$, а $\underset{\text{лин. отобр.}}{e_i : V^* \to K}$

$\omega^j \in T_{(1,0)}$ $\qquad e_i \in T_{(0,1)}$

порождающая: $\forall\, \alpha \in T_{(p,q)} \leftrightarrow f$ полилин. ф-я

$$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \forall\, \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \qquad f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q}}_{\omega^{j_1}(\xi_1) \dots \omega^{j_p}(\xi_p) e_{i_1}(\eta^1) \dots e_{i_q}(\eta^q)} = \text{св-во}(4) =$$

$$= \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}} \Rightarrow \text{пород.}$$

лин. независимость: $\exists \underset{\text{нулевой тензор}}{0} = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

применим нулевой тензор к набору векторов $e_{m_1}, \dots, e_{m_p}, \omega^{k_1}, \dots, \omega^{k_q}$

$$0 = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \omega^{j_1}(e_{m_1}) \dots \omega^{j_p}(e_{m_p}) \cdot e_{i_1}(\omega^{k_1}) \dots e_{i_q}(\omega^{k_q}) = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \underbrace{\delta^{j_1}_{m_1} \dots \delta^{j_p}_{m_p} \delta^{k_1}_{i_1} \dots \delta^{k_q}_{i_q}}_{\text{символы Кронекера}} = \alpha^{k_1 \dots k_q}_{m_1 \dots m_p}$$

верно для любого набора индексов $m_1 \dots m_p, k_1 \dots, k_q$ $\Rightarrow$ нулевая комбинация тривиальна $\Rightarrow$ лин. незав ■

Пример: $\alpha = (\omega^1 - 2\omega^2 + \omega^3) \otimes (3\omega^1 + \omega^2) \otimes e_2 + (\omega^2 + 2\omega^3) \otimes \omega^1 \otimes e_3$

1) найти значение α на векторах $\xi_1 = 2e_1 - e_2$, $\xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\eta = \omega^2 - \omega^3$

2) записать матрицу тензора.

1) $\alpha(\xi_1, \xi_2, \eta) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2) \cdot \eta_2 + (\xi_1^2 + 2\xi_1^3) \cdot \xi_2^1 \cdot \eta_3 = (2+2+0)(3\cdot 1+2)\cdot 1 + (-1+2\cdot 0)1\cdot(-1) = 21$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) $\alpha \in T_{(2,1)} \Rightarrow \alpha = (\alpha^i_{jk})$

$\alpha^2_{11} = 3 \quad \alpha^2_{21} = -6 \quad \alpha^2_{31} = 3$

$\alpha^2_{12} = 1 \quad \alpha^2_{22} = -2 \quad \alpha^2_{32}\ 1$

$\alpha_{21} = 1 \quad \alpha^3_{31} = 2$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \quad k=1 \qquad\quad k=2 \qquad\quad k=3 \end{array}$$

def: $\exists\, p,q \geq 1$ $\alpha \in T_{(p,q)}$. Приравняем один верхний индекс одному нижнему. Тогда, по правилу Эйнштейна, мы должны будем просуммировать соответствующие компоненты. В результате, получим систему элементов, у которых число верхних и нижних будет на единицу меньше.

$$\boxed{\beta^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_q}_{j_1 \dots \hat{j}_m \dots j_p} = \alpha^{i_1 \dots \varkappa \dots i_q}_{j_1 \dots \varkappa \dots j_p}}$$

отсутствует; k-й индекс; отсутствует; m-й индекс.

– эта операция наз-ся <u>свёрткой тензора</u>

$\alpha \in T_{(p,q)} \rightsquigarrow \beta \in T_{(p-1,q-1)}$

<u>корректность определения:</u> надо проверить выполнение св-ва (3)

$$\beta'^{\,i_1' \dots \hat{i}_k' \dots i_q'}_{\;j_1' \dots \hat{j}_m' \dots j_p'} = \alpha'^{\,i_1' \dots \varkappa' \dots i_q'}_{\;j_1' \dots \varkappa' \dots j_p'} = \alpha^{i_1 \dots i_k \dots i_q}_{j_1 \dots j_m \dots j_p}\, t^{j_1}_{j_1'} \dots \boxed{t^{j_m}_{\varkappa'} \dots t^{j_p}_{j_p'}\, S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{\varkappa'}_{i_k}} \dots S^{i_q'}_{i_q} =$$

$$(TS)^{j_m}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k} = \begin{cases} 0, & j_m \neq i_k \\ 1, & j_m = i_k = \varkappa \end{cases} \qquad (TS = E)$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots \varkappa \dots i_q}_{j_1 \dots \varkappa \dots j_p}}_{\beta^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_q}_{j_1 \dots \hat{j}_m \dots j_p}}\, \underbrace{t^{j_1}_{j_1'} \dots t^{j_p}_{j_p'}}_{\text{нет } t^{j_m}_{\varkappa}}\, \underbrace{S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_q'}_{i_q}}_{\text{нет } S^{\varkappa}_{i_k}} \Rightarrow \text{вып-но (3)}$$

$\Rightarrow$ β тензор типа $(p-1, q-1)$

<u>Замечания:</u>

1) Свёртка может проводится по нескольким индексам.
2) Если в результате свёртки получается тензор типа $(0,0)$ (т.е. скаляр), то такая <u>свёртка</u> наз-ся <u>полной</u>.

<u>Примеры:</u>

1) $\alpha \in T_{(1,1)} \leftrightarrow A = (\alpha^i_j)_{n\times n}$ $\qquad \underset{\text{свёртка}}{\beta} = (\alpha^i_i) = \operatorname{tr} A \in K$ $\Rightarrow$ полная свёртка; $\beta \in T_{(0,0)}$ инвариант отн-но замены базиса.

2) $f \in T_{(1,0)}$ – ковектор $\longleftrightarrow a = (a_1, \dots a_n)$
$x \in T_{(0,1)}$ – вектор $\longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$\alpha = f \otimes x = (a_j x^i) = (\alpha^i_j) \Rightarrow \underset{\text{свёртка}}{\beta} = (\alpha^i_i) = a_i x^i = \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{значение}\\ \text{лин. формы } f\\ \text{на векторе } x}} = x(f)$

3) $\alpha \in T_{(1,1)} \leftrightarrow A = (\alpha^i_j)$
$x \in T_{(0,1)} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$

$\gamma = \alpha \otimes x = (\alpha^i_j X^k) = (\gamma^{ik}_j) \in T_{(1,2)}$

$\underset{\text{свёртка}}{\beta} = (\gamma^{ij}_j) = (\alpha^i_j X^j) = (\beta^i) \iff b = AX$

$\updownarrow$ $\qquad (AX)^i$ – i-ая коор-та $\qquad \beta \in T_{(0,1)}$

$b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix}$

$\underset{\text{свёртка}}{\tilde{\beta}} = (\gamma^{jk}_j) = (\alpha^j_j X^k) = (\tilde{\beta}^k) \iff \tilde{b} = (\operatorname{tr} A) \cdot X$

$\updownarrow$

$\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^n \end{pmatrix}$

4) $\alpha \in T_{(1,1)}$ $\qquad \alpha'^{\,i'}_{j'} = \alpha^i_j\, t^j_{j'}\, S^{i'}_i$ = свёртка по 2-м индексам тензора $\alpha \otimes T \otimes S = \gamma = (\alpha^i_j\, t^k_m\, S^\ell_r) = (\gamma^{ik\ell}_{jmr})$

$\Rightarrow \alpha'^{\,i'}_{j'} = \gamma^{i\,j\,i'}_{j\,j'\,i}$ свёртка.

8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметричческие тензоры.

8.4 Транспонирование тензора. Симметричные и кососимметричные тензоры

def: $\exists\ p \geqslant 2$, $\alpha \in T_{(p,q)}$ $\exists\ \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ перестановка p чисел от 1 до p.

(напоминание! $\varphi : \{1, 2, \dots, p\} \to \{1, 2, \dots, p\}$ – подстановка

вз. однозн. отобр. $\sigma_k = \varphi(k)$, $k = 1, \dots, p$

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(p))$ – перестановка

$\varphi \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & p \\ 1 & 2 & 3 & \dots & p \end{pmatrix}$)

$\boxed{\beta = \sigma(\alpha)}$ – наз-ся тензором, полученным транспонированием тензора α перестановкой σ по нижним индексам, если $\boxed{\beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}}$

$\boxed{p \geqslant 2}$

Аналогично опр-ся транспонирование по верхним индексам.

Замечание: для тензоров операция транспонирования опр-ся только по одному типу индексов; либо по нижним, либо по верхним, в отличии от произвольной многомерной м-цы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

корректность def: как и раньше надо проверить выполнение св-ва (3), т.е. что $\beta \in T_{(p,q)}$

Как известно, любая перестановка может быть получена конечным числом транспозиций. Поэтому, достаточно показать, что св-во (3) вып-ся при транспонировании тензора по паре индексов.

$$\exists\ \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_k \dots j_m \dots j_p} = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_m \dots j_k \dots j_p} \Rightarrow \beta'^{i_1' \dots i_q'}_{j_1' \dots j_k' \dots j_m' \dots j_p'} = \alpha'^{i_1' \dots i_q'}_{j_1' \dots j_m' \dots j_k' \dots j_p'} \underset{\substack{\text{т.к. } \alpha \in T_{(p,q)} \\ \Rightarrow \text{ вып-но } (3)}}{=}$$

$$= \underbrace{\boxed{\alpha^{i_1 \dots i_q}_{\tau_1 \dots \tau_k \dots \tau_m \dots \tau_p}}}_{\beta^{i_1 \dots i_q}_{\tau_1 \dots \tau_m \dots \tau_k \dots \tau_p}} t^{\tau_1}_{j_1'} \dots t^{\tau_k}_{j_m'} \dots t^{\tau_m}_{j_k'} \dots t^{\tau_p}_{j_p'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_q'}_{i_q} = \beta^{i_1 \dots i_q}_{\tau_1 \dots \tau_m \dots \tau_k \dots \tau_p} t^{\tau_1}_{j_1'} \dots t^{\tau_m}_{j_k'} \dots t^{\tau_k}_{j_m'} \dots t^{\tau_p}_{j_p'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_q'}_{i_q} \Rightarrow (3) \text{ вып-но.}$$

Как будет выглядеть транспонирование тензора, если брать за определение тензора def 1?

$\alpha \in T_{(p,q)} \longleftrightarrow \alpha$ полилин. отобр. $\quad \exists\ \boxed{\beta = \sigma(\alpha)} \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \ \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad \boxed{\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)} = \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \xi_1^{j_1} \cdots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \cdots \eta^q_{i_q} =$

$$= \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} \xi_{\sigma_1}^{j_{\sigma_1}} \cdots \xi_{\sigma_p}^{j_{\sigma_p}} \eta^1_{i_1} \cdots \eta^q_{i_q} = \boxed{\alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)}$$

Замечание: при транспонировании по нижним индексам, очевидно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспонирования по верхним индексам будет обладать теми же св-ми, что и операция транспонирования по нижним. Поэтому все результаты, которые мы получим для нижних индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

Пример: $\alpha = (\omega^1 - 2\omega^2) \otimes \omega^3 \otimes (\omega^1 - \omega^3) + \omega^2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^3 \quad (\Rightarrow \alpha \in T_{(3,0)} \Rightarrow (\alpha_{ijk}))$

1) найти $\beta = \sigma(\alpha)$ $\quad \sigma = (3,1,2)$, выписать матрицу.

2) найти значение β на векторах $\xi_1 = e_1 + e_2$, $\xi_2 = -e_2 - e_3$, $\xi_3 = e_1 + 2e_2$

1) $\alpha = (\alpha_{ijk}) \Rightarrow \beta = (\alpha_{kij}) = (\beta_{ijk})$, $\quad \sigma(3,1,2)$ $\quad$ т.е. $i \leftrightarrow j_1$, $j \leftrightarrow j_2$, $k \leftrightarrow j_3$

$\cancel{\boxed{\alpha_{ijk} = \beta_{kij}}}$ неверно! здесь $\sigma = (2\ 3\ 1)$

$$\beta_{ijk} = \beta_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_3 j_1 j_2} = \alpha_{kij}$$

$\boxed{1\text{ сп.}}$ выпишем м-цу α: $\alpha_{131} = 1$, $\alpha_{231} = -2$, $\alpha_{133} = -1$, $\alpha_{233} = 2$, $\alpha_{213} = 1$, остальные нули

$\Rightarrow \beta_{311} = 1$, $\beta_{312} = -2$, $\beta_{331} = -1$, $\beta_{332} = 2$, $\beta_{132} = 1$, остальные нули $\Rightarrow$

$$\beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{2\text{ сп.}}$ любая перестановка $\equiv$ конечное число транспозиций (т.е. транспонирование м-цы по паре индексов)

транспонирование многомерной м-цы по паре индексов (i,j) $\equiv$ транспонирование двумерных слоёв м-цы, получаемых фиксированием различных сочетаний всех индексов, кроме индексов (i,j).

$\beta_{ijk} = \alpha_{kij} \qquad \alpha_{kij} \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_{ikj} \to \tilde{\tilde{\alpha}}_{ijk} = \beta_{ijk}$

за 2 транспозиции эл-т, стоящий в матрице на позиции $(k\,i\,j)$, должен переместиться на позицию $(i\,j\,k)$

$\alpha_{kij} \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_{ikj}$

j не меняется, поэтому будем фиксировать различные значения $j = 1,2,3$, т.е. извлекать из м-цы тензора двумерные м-цы, которые после обычной операции транспонирования нужно будет поместить обратно в тензор.

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

фиксируем j в α $\rightsquigarrow$ фиксируем слой $\rightsquigarrow$ каждый слой надо транспониров.

$$\tilde{\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\tilde{\alpha}_{ikj} \to \tilde{\tilde{\alpha}}_{ijk}$ $\quad$ не меняется i $\Rightarrow$ фиксируем $i = 1,2,3$ $\Rightarrow$ извлекаем двумерную м-цу $\Rightarrow$ транспонируем $\Rightarrow$ помещаем обратно.

$i = 1$ (1ая стр) $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ помещаем обратно на исходные позиции

$i = 2$ (2ая стр) $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad i = 3$ (3-я стр) $\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{\alpha}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \beta$$

2) $\boxed{1\text{ сп.}}$ $\beta = \sigma(\alpha)$ $\quad \sigma = (3,1,2)$

$$\beta(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \alpha(\xi_3,\xi_1,\xi_2) = (\underset{1}{\underset{\parallel}{\omega^1(\xi_3)}} - 2\underset{2}{\underset{\parallel}{\omega^3(\xi_3)}})\cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{\omega^3(\xi_1)}}\cdot(\omega^1(\xi_2) - \omega^3(\xi_2)) + \underset{2}{\underset{\parallel}{\omega^2(\xi_3)}}\,\underset{1}{\underset{\parallel}{\omega^1(\xi_1)}}\,\underset{-1}{\underset{\parallel}{\omega^3(\xi_2)}} =$$
$$= -2$$

$\boxed{2\text{ сп}}$ $$\beta(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \beta_{ijk}\,\xi_1^i\xi_2^j\xi_3^k = \overset{\beta_{311}}{\overset{\parallel}{1}}\cdot\underset{\xi_1^3}{\underset{\parallel}{0}}\ldots - \overset{\beta_{212}}{\overset{\parallel}{2}}\cdot\underset{\xi_1^3}{\underset{\parallel}{0}}\ldots - \overset{\beta_{331}}{\overset{\parallel}{1}}\cdot\underset{\xi_1^3}{\underset{\parallel}{0}}\ldots + \overset{\beta_{332}}{\overset{\parallel}{2}}\cdot\underset{\xi_1^3}{\underset{\parallel}{0}}\ldots + \overset{\beta_{132}}{\overset{\parallel}{1}}\cdot\underset{\xi_1^1}{\underset{\parallel}{1}}\,\underset{\xi_2^3}{\underset{\parallel}{(-1)}}\cdot\underset{\xi_3^2}{\underset{\parallel}{2}} = -2$$

Из def транспонирования $\Rightarrow$ лин. операция $\forall \lambda \in K$ $\forall\, \alpha_{1,2}\in T(p,q)$ $\boxed{\sigma(\alpha_1+\lambda\alpha_2) = \sigma(\alpha_1)+\lambda\sigma(\alpha_2)}$

Кроме того, любая подстановка – это вз-одн. отобр. $\Rightarrow$ операция транспон. вз. одн.

$\Rightarrow$ транспонирование – это изоморфизм на $T(p,q)$

Транспонирование ассоциат., но не коммутативно (!) (очевидно, следует из соотв. свойств перестановок)

σ,τ,θ перестановки $\quad \alpha\in T(p,q)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}(\sigma(\tau\theta)(\alpha)) = ((\sigma\tau)\theta(\alpha))\\ \sigma\tau(\alpha)\neq\tau\sigma(\alpha)\end{array}}$

упр: док-ть: $\alpha\otimes\beta = \sigma(\beta\otimes\alpha)$

def: тензор $\alpha\in T(p,q)$ наз-ся симметричным (по нижним индексам), если $\forall$ перестановки (нижних индексов) σ: $\boxed{\sigma(\alpha)=\alpha}$

и наз-ся кососимметричным (антисимметричным, альтернированным) (по нижним индексам), если $\forall$ перестановки (нижних индексов) σ: $\boxed{\sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha}$, где $\varepsilon(\sigma)$ – четность перестановки.

Из def автоматически получаем св-во для компонент симм. и кососимм. тензоров. $\forall\,\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_p)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}\\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}\end{array}}$$

Т.к. $\forall$ перестановка $\equiv$ конечное число транспозиций ($\equiv$ транспонирование по паре индексов)

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall\,(j_k,j_m)\quad \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_k\ldots j_m\ldots} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_m\ldots j_k\ldots}\\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\,(j_k,j_m)\quad \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_k\ldots j_m\ldots} = -\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_m\ldots j_k\ldots}\end{array}}$$

или если брать $\overset{\text{def}}{\vee}$ тензора в смысле def 1:

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall\,(k,m)\quad \alpha(\ldots,\xi_k,\ldots,\xi_m,\ldots) = \alpha(\ldots\xi_m,\ \xi_k,\ldots)\\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\,(k,m)\quad \alpha(\ldots\xi_k,\ldots,\xi_m,\ldots) = -\alpha(\ldots\xi_m,\ldots,\xi_k,\ldots)\end{array}}$$

$\boxed{\text{Утв: } \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\,(k,m)\quad \alpha(\ldots\xi,\ldots,\xi\ldots) = 0}$

док-во: ($\Rightarrow$) α кососимм. $\Rightarrow \forall\,(k,m)$ $\alpha(\ldots\xi,\ldots,\xi\ldots) = -\alpha(\ldots\xi,\ldots,\xi\ldots) \Rightarrow \alpha(\ldots\xi,\ldots\xi\ldots)=0$

($\Leftarrow$) $\forall\,(k,m)$ $\quad \underset{\parallel}{\alpha(\ldots(\xi_k+\xi_m),\ldots,(\xi_k+\xi_m),\ldots)} = 0$

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{\alpha(\ldots\xi_k,\ldots,\xi_k,\ldots)}} + \alpha(\ldots\xi_k,\ldots\xi_m\ldots) + \alpha(\ldots\xi_m,\ldots,\xi_k,\ldots) + \underset{0}{\underset{\parallel}{\alpha(\ldots\xi_m,\ldots,\xi_m,\ldots)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\ldots\xi_k,\ldots,\xi_m\ldots) = -\alpha(\ldots\xi_m,\ldots,\xi_k\ldots) \Rightarrow \alpha \text{ кососимм.} \blacksquare$$

$$\boxed{\alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\,(k,m)\quad \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j\ldots j\ldots} = 0}$$

def: $\alpha\in T(p,0)$ наз-ся полилинейной формой. Если α к тому же, кососимметричн., то α наз-ся антисимм. полилин. формой или p-формой или внешней p-формой или внешней формой степени p

$\alpha \in T(0,q)$ наз-ся <u>поливектором</u>. Если α к тому же, кососимметричен, то α наз-ся <u>q-вектором</u>

<u>упр</u>: вспомнить def det из прошлого семестра. и сравнить с def p-формы.

> $\alpha \in T(p,q)$ кососимм (по нижним индексам) $\Rightarrow$ 1) если $p > n \Rightarrow \alpha \equiv 0$
>
> 2) если $p = n \Rightarrow \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_n} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{1 2 \ldots n}$
>
> $\sigma = (j_1, \ldots, j_n)$ перестановка чисел $(1 2 \ldots n)$

<u>Примеры</u>: 1) V_3 – пр-во 3^{x}мерн. геом векторов.

$\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b})$ скал.пр-е. $\alpha \in T(2,0)$, симметр.

$\beta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ смеш. пр-е. $\beta \in T(3,0)$, кососимм.

<u>упр</u>: 1) вычисть м-цы α, β.
2) убедиться $\forall \sigma$: $\sigma(\alpha) = \alpha$
$\forall \sigma$: $\sigma(\beta) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\beta$.

2) $A = (a_{ij}) \leftrightarrow \alpha \in T(2,0)$ α симм. $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow A$ симм. м-ца.
α кососимм. $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Leftrightarrow A$ кососимм. м-ца.

3) $\alpha \in T(3,0)$ <u>кососимм.</u> (3-форма) $\alpha \equiv 0$ $n > 3$

$\exists\ n = 3$ $\alpha_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{123}$, $\sigma = (j_1, j_2, j_3)$ перестановка $(1 2 3)$
Остальные эл-ты нули.

σ: $(1 2 3) \oplus$ $(2 1 3) \ominus$ $(3 1 2) \oplus$
$(1 3 2) \ominus$ $(2 3 1) \oplus$ $(3 2 1) \ominus$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>упр</u>: как будет выглядеть м-ца α (кососимм) $\in T(3,0)$, если $n = 2$? $n = 4$?

4) $\alpha \in T(3,0)$ <u>симметр.</u> $\exists\ n = 3$ $\alpha_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_{\sigma_1} j_{\sigma_2} j_{\sigma_3}}$ $\forall \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ перестановка $(1 2 3)$

$\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} =: x$
$\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211} = y$
$\alpha_{113} = \alpha_{131} = \alpha_{311} = z$
$\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122} = t$
.... и т.д. <u>доделать</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_{111} & y & z & y & t & x & z & x & \cdot \\ y & t & x & t & \alpha_{222} & \cdot & x & \cdot & \cdot \\ z & x & \cdot & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{333} \end{array}\right)$$

<u>упр</u>: — " —
1) если $n = 2$?
2) если $n = 4$

8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров

def: Альтернированием (антисимметризацией) и симметрированием тензора $\alpha \in T_{(p,q)}$ (по нижним индексам) наз-ся операции:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{Alt}\alpha = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(\alpha) & \\ \operatorname{Sim}\alpha = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\sigma(\alpha) & S_p \text{ - мн-во всех перестановок чисел от 1 до } p. \end{array}}$$

Замечания:

1) очевидно, если $\boxed{\alpha \text{ симм.} \Rightarrow \operatorname{Sim}\alpha = \alpha}$ $\left(\operatorname{Sim}\alpha = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha = \frac{p!}{p!}\alpha,\ \text{т.к. } \sigma(\alpha)=\alpha\ \forall\sigma\right)$

если $\boxed{\alpha \text{ кососимм} \Rightarrow \operatorname{Alt}\alpha = \alpha}$ $\left(\operatorname{Alt}\alpha = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha = \frac{p!}{p!}\alpha,\ \text{т.к. } \sigma(\alpha)=(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha\ \forall\sigma\right)$

2) очевидно, Alt и Sim – лин. операции на $T_{(p,q)}$, т.к. σ – лин. операция на $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (нижних) индексов.

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым происходит альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказались индексы, по которым альтернирование (симметрирование) не проводится, то эти индексы выделяют вертикальными чертами.

например, $\alpha^{(i_1|i_2|i_3|i_4|i_5)}_{[j_1 j_2 j_3]}$ – по верхним индексам проводится симметрирование по индексам $i_1 i_3 i_5$

– по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример: $\alpha \in T_{(3,0)}$ $\quad n=3 \quad$ $\alpha = (\alpha_{ijk}) = (\alpha_{j_1j_2j_3})$ $\quad \sigma \in \left\{ \begin{matrix} (123) & (213) & (312) \\ (132) & (231) & (321) \end{matrix} \right\} = S_3$

$\sigma = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$

1) $\boxed{\beta = \mathrm{Sim}\,\alpha} = \frac{1}{3!}\sum\limits_{\sigma\in S_3}\sigma(\alpha)$ $\qquad \beta = \alpha_{(ijk)} \rightsquigarrow \beta_{j_1j_2j_3} = \frac{1}{6!}\sum\limits_{\sigma\in S_3}\alpha_{j_{\sigma_1}j_{\sigma_2}j_{\sigma_3}}$

симметрир. по всем индексам

$\boxed{\beta_{123}} = \alpha_{(123)} = \frac{1}{6}(\alpha_{123}+\alpha_{132}+\alpha_{213}+\alpha_{231}+\alpha_{312}+\alpha_{321})$

$\alpha_{(132)} = \alpha_{(213)} = \alpha_{(231)} = \alpha_{(312)} = \alpha_{(321)} \Rightarrow \beta_{123}=\beta_{132}=\beta_{213}=\beta_{231}=\beta_{312}=\beta_{321} = x$ (см. пример 4)

$\beta_{112} = \underset{j_1j_2j_3}{\alpha_{(112)}} = \frac{1}{6}(\underset{(123)}{\alpha_{112}}+\underset{(132)}{\alpha_{121}}+\underset{(213)}{\alpha_{112}}+\underset{(231)}{\alpha_{121}}+\underset{(312)}{\alpha_{211}}+\underset{(321)}{\alpha_{211}})$

$\alpha_{(121)} = \alpha_{(211)} \Rightarrow \beta_{112} = \beta_{121} = \beta_{211} = y$ (см. пример 4) и т.д. $\Rightarrow$ $\boxed{\beta \text{ – симметр. тензор.}}$

2) $\boxed{\gamma = \mathrm{Alt}\,\alpha} = \frac{1}{3!}\sum\limits_{\sigma\in S_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(\alpha)$ $\qquad \gamma = \alpha_{[ijk]} \rightsquigarrow \gamma_{j_1j_2j_3} = \frac{1}{6!}\sum\limits_{\sigma\in S_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha_{j_{\sigma_1}j_{\sigma_2}j_{\sigma_3}}$

альтернир. по всем индексам

$\boxed{\gamma_{123}} = \alpha_{[123]} = \frac{1}{6}(\alpha_{123}-\alpha_{132}-\alpha_{213}+\alpha_{231}+\alpha_{312}-\alpha_{321})$ $\qquad \varepsilon(\sigma) \in \left\{ \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \end{matrix} \right\}$

$-\alpha_{[132]} = \alpha_{[312]} = -\alpha_{[321]} = \alpha_{[231]} = -\alpha_{[213]} \Rightarrow \gamma_{j_1j_2j_3} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\gamma_{123}$ $\qquad \sigma = (j_1j_2j_3)$ перестановка (123)

$\gamma_{112} = \underset{j_1j_2j_3}{\alpha_{[112]}} = \frac{1}{6}(\underset{(123)}{\cancel{\alpha_{112}}} - \underset{(132)}{\cancel{\alpha_{121}}} - \underset{(213)}{\cancel{\alpha_{112}}} + \underset{(231)}{\cancel{\alpha_{121}}} + \underset{(312)}{\cancel{\alpha_{211}}} - \underset{(321)}{\cancel{\alpha_{211}}}) = 0$

$= -\alpha_{[121]} = \alpha_{[211]}$ $\Rightarrow \gamma_{112} = \gamma_{121} = \gamma_{211} = 0 \Rightarrow$ все компоненты γ, у которых совпадают хотя бы 2 индекса равны нулю (см. пример 3)

$\Rightarrow$ $\boxed{\gamma \text{ – кососимм. тензор.}}$

3) $\boxed{\tilde\beta = \alpha_{(i|j|k)}}$ $\rightsquigarrow \tilde\beta_{j_1jj_2} = \frac{1}{2!}\sum\limits_{\sigma\in S_2}\alpha_{j_{\sigma_1}jj_{\sigma_2}} = \frac{1}{2}(\alpha_{j_1jj_2}+\alpha_{j_2jj_1}) = \alpha_{(j_1|j|j_2)}$

симметрир. по 1 и 3 индексам

$\sigma \in \{(12)\ (21)\} = S_2 \qquad \sigma = (\sigma_1,\sigma_2)$

$\tilde\beta_{112} = \alpha_{(1|1|2)} = \frac{1}{2}(\underset{(12)}{\alpha_{112}} + \underset{(21)}{\alpha_{211}}) \Rightarrow \tilde\beta_{112} = \tilde\beta_{211}$

$\alpha_{(1|1|2)} = \alpha_{(2|1|1)}$

$\tilde\beta_{121} = \alpha_{(1|2|1)} = \frac{1}{2}(\underset{(12)}{\alpha_{121}} + \underset{(21)}{\alpha_{121}}) = \alpha_{121} \Rightarrow \boxed{\tilde\beta_{iji} = \alpha_{(i|j|i)} = \alpha_{iji}} \quad \forall i,j$

$\tilde\beta_{123} = \alpha_{(1|2|3)} = \frac{1}{2}(\alpha_{123}+\alpha_{321}) \Rightarrow \tilde\beta_{123} = \tilde\beta_{321}$ и т.д. $\Rightarrow \boxed{\tilde\beta_{ijk} = \tilde\beta_{kji}} \quad \forall i,j,k$

$\alpha_{(1|2|3)} = \alpha_{(3|2|1)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde\beta \text{ симметр. по 1 и 3 индексам}}$

4) $\boxed{\tilde\gamma = \alpha_{[i|j|k]}}$ $\rightsquigarrow \tilde\gamma_{j_1jj_2} = \frac{1}{2!}\sum\limits_{\sigma\in S_2}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha_{j_{\sigma_1}jj_{\sigma_2}} = \frac{1}{2}(\alpha_{j_1jj_2}-\alpha_{j_2jj_1}) = \alpha_{[j_1|j|j_2]}$

$\varepsilon(\sigma) \in \{+\ -\}$

$\tilde\gamma_{112} = \alpha_{[1|1|2]} = \frac{1}{2}(\alpha_{112}-\alpha_{211}) \Rightarrow \tilde\gamma_{112} = -\tilde\gamma_{211}$

$\alpha_{[1|1|2]} = -\alpha_{[2|1|1]}$

$\tilde\gamma_{121} = \alpha_{[1|2|1]} = \frac{1}{2}(\alpha_{121}-\alpha_{121}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde\gamma_{iji} = \alpha_{[i|j|i]} = 0 \quad \forall i,j}$

$\tilde\gamma_{123} = \alpha_{[1|2|3]} = \frac{1}{2}(\alpha_{123}-\alpha_{321}) \Rightarrow \tilde\gamma_{123} = -\tilde\gamma_{321}$ и т.д. $\Rightarrow \boxed{\tilde\gamma_{ijk} = -\tilde\gamma_{kji} \quad \forall i,j,k}$

$\alpha_{[1|2|3]} = -\alpha_{[3|2|1]}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde\gamma \text{ кососимм. по 1 и 3 индексам}}$

Упр: $\alpha \in T_{(2,0)} \leftrightarrow A = (a_{ij})$ $\quad$ 1) $\mathrm{Sim}\,A = \frac{A+A^T}{2}$, $\mathrm{Alt}\,A = \frac{A+A^T}{2}$ $\quad$ 2) $\mathrm{Sim}\,A$ – симм. м-ца? $\mathrm{Alt}\,A$ – кососимм. м-ца?

9 Евклидовы и унитарные пространства

9.1 Скалярное, псевдоскалярное произведение в Евкл. и унитарном провах. Норма в Евклидовом и унитарном пространствах.

Определение 1. *V – линейное пространство над $\mathbb{R}$ (вещ. пр-во)*

$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

Скалярное произведение, если удовлетворяет 4м ***аксиомам:***

$\begin{matrix} \forall x, y \in V \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix} :$

1. *$(x, y) = (y, x)$ (симметр.)*
2. *$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (Аддитивность по первому аргументу)*
3. *$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ (Однородность по первому аргументу)*
4. *$\forall x \neq 0\ (x, x) > 0$ (Положительная определенность)*

Из этих свойств можно понять, что скал. произведение – билинейная функция.
Из 3 $\Rightarrow \forall x \in V\ \ (x, \mathbb{0}) = (\mathbb{0}, x) = 0$
Из 4 $\Rightarrow \forall x \in V\ \ (x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

Определение 2. *V конечномерное, линейное пространство над $\mathbb{R}$*
$(V, (\cdot,\cdot))$ – ***Евклидово пространство***

Замечание. V бесконечномерное $(X, (\cdot,\cdot))$ **предгильбертово**
Если полное метрическое пространство, то оно называется **гильбертовым**
(Полное – любая фундаментальная последовательность сходится, из матанализа)

Определение 3. *V – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ (комплексн. линейное пространство)*
$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$
Псевдоскалярное произведение:
$\begin{matrix} \forall x, y, z \in V \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \end{matrix} :$

1. *$(x, y) = \overline{(y, x)}$*
2. *$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (Аддитивность)*
3. *$(\lambda x, z) = \lambda(x, z)$ (Однородность по 1му аргументу) Из 2 и 3 $\Rightarrow$ линейность по 1 аргументу*
4. *$\forall x \neq 0\ \ (x, x) > 0$ (Положительная определенность)*

1, 2, 3 $\quad (x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$
$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}\overline{(y, x)}$ *Псевдооднородность по 2 арг.*

$\underset{\leftrightarrow}{(x, x)} = \overline{(x, x)} \leftrightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$

$\forall x \in V\ \ (x, x) \geq 0$, *причем* $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение 4. *Конечномерное V над полем $\mathbb{C}$*
$(X, (\cdot,\cdot))$ называется ***унитарными*** *(псевдоевклидовым, эрмитовым)*

Определение 5. *$(V, (\cdot,\cdot))$ Евклидово (унит.) пространство*

$\underbrace{||\cdot||}_{\textit{норма}} : V \to \mathbb{R}_+ \;\; \forall x \in V \; ||x|| = \sqrt{(x,x)}$ ***Евклидова норма***

Аксиомы нормы:

1. $||x|| = 0 \Rightarrow x = \mathbb{0}$ *(невырожденность)*

2. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ *(однородность)*

3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(неравенство треугольника)*

$||x|| = \sqrt{(x,x)}$

Ввели такую норму, удостоверимся, что все аксиомы выполнены:

1. Очевидно из 4
2. $\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{|\lambda|^2}(x,x)} = |\lambda|\sqrt{(x,x)} = |\lambda|||x||$
3. ?

Давайте докажем неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$\forall x, y \in (V, (\cdot,\cdot)) \;\; |(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$

2) Причем $= \Leftrightarrow$ x и y линейно зависимы

Доказательство. (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;\; \forall x, y \in V$

$$0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) + \alpha\overline{\beta}(x,y) + \beta\overline{\alpha}(y,x) + \beta\overline{\beta}(y,y)$$

$$\sqsupset \begin{matrix} \alpha := (y,y) \\ \beta = -(x,y) \Rightarrow \overline{\beta} = -(y,x) \end{matrix}$$

Подставим это в равенство, получим $= \underbrace{(y,y)}_{\geq 0}(||x||^2 \cdot ||y||^2 - \overline{\beta}\beta - \cancel{\beta\overline{\beta}} + \cancel{\beta\overline{\beta}}) \Rightarrow ||x||^2 \cdot ||y||^2 -$

$|(x,y)|^2 \geq 0$

(b) $= \Leftrightarrow$ x и y линейно завис.

Если $x = \mathbb{0}$ или $y = \mathbb{0} \Rightarrow$ очевидно выполняется

$\Rightarrow \sqsupset x \neq \mathbb{0}$ и $y \neq \mathbb{0}$

$(\Rightarrow) \;\; \sqsupset |(x,y)| = ||x|| \cdot ||y||$

Из доказательства 1 $\begin{matrix} \exists \alpha (y,y) > 0 (\text{т.к. } y \neq \mathbb{0}) \\ \exists \beta = -(x,y) \end{matrix}$ $\;0 = ||x||^2||y||^2 = |(x,y)| = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y)$

$\Leftrightarrow \alpha x + \beta y = \mathbb{0} \quad \alpha, \beta$ не все нули $\Rightarrow$ линейно завис. x, y

$(\Leftarrow) \;\; x, y$ линейно зав. $\Rightarrow \exists \alpha, \beta \begin{matrix} \text{не все нули} \\ \alpha x + \beta y = \mathbb{0} \end{matrix}$

$\sqsupset \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow y = 0$ противор. $\Rightarrow \alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$

$$\begin{cases} (\alpha x + \beta y, x) = 0 \\ (\alpha x + \beta y, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x,x) + \beta(y,x) = 0 \Rightarrow \alpha||x||^2 = -\beta(y,x) \\ \alpha(x,y) + \beta(y,y) = 0 \Rightarrow \beta||y||^2 = -\alpha(x,y) \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta||x||^2||y||^2 = \alpha\beta\underbrace{(x,y)(y,x)}_{|(x,y)|^2}$$

$\Rightarrow ||x||^2||y||^2 = |(x,y)|^2$

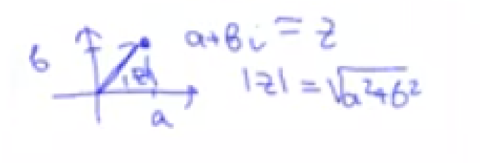
$\square$

Вернемся к 3 аксиоме $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = \overset{=||x||^2}{(x,x)} + \underbrace{(x,y) + \overset{=\overline{(x,y)}}{(y,x)}}_{2Re(x,y) \leq 2|(x,y)| \leq 2||x||||y||} + \overset{=||y||^2}{(y,y)} \leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 =$

$(||x|| + ||y||)^2$

$\Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$



Определение 6. $\forall x \in V$
Длина вектора $||x|| = \sqrt{(x,x)}$
Нормировать вектор $\frac{x}{||x||} = x_0$ *орт вектора,* $||x_0|| = 1$
$\forall x, y \neq \mathbb{0} \;\; x, y \in V$
ϕ *– угол между* x *и* $y : \cos\phi = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ *(КБШ:* $\frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|} \leq 1$*)*

Примеры.

1. V_3 геом. вект. $\underset{\text{скал}}{(x,y)} = |\overline{x}| \cdot |\overline{y}| \cdot \cos\phi$
2. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ $\quad (x,y) \quad \underset{(\text{Евкл. } \sum x_i y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i}$ выполнены 1-4

   $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

   $(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i \;\; \overset{\geq 0}{\sum_{i}^{n} |x_i|^2} = 0 \Leftrightarrow \forall i \; x_i = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

   $||x|| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ евкл. норма
   КБШ: $|\sum_{i}^{n} \overline{x_i y_i}| \leq (\sum_{i}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i}^{n} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
   Нер-во треугольника:
   $(\sum_{i}^{n} |x_i + y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i}^{n} |x_i|^2)\frac{1}{2} + (\sum_{i}^{n} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
3. $f : [a,b] \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad u, v \in \underset{\text{интегр.}}{R[a,b]} \;\; \int_a^b u(x)dx \;\; \int_a^b v(x)dx$

   $f = u + iv$

   $\int_a^b f dx = \int_a^b u dx + i \int_a^b v dx$

   $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C} \quad \forall f, g \;\; (f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$

   Все аксиомы очевидно выполнены, есть проблемы с 4ой аксиомой.

   $(f,f) = \int_a^b |f|^2 dx \geq 0$

   $= 0? \Leftrightarrow f \equiv 0$ почти везде на $[a,b]$
   Возникает евклидова норма.

   $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx} \quad L^2([a,b])$ – пространство

   КБШ: $|\int_a^b f\overline{g}dx| \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ (Неравенство Буняковского)

   Неравенство треугольника: $(\int_a^b |f+g|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

(Неравенство Минковского)

9.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис (о.н.б.) Ортогональные системы векторов.

$(V, (\cdot,\cdot))$ евклидово (унит.) пространство

Определение 1. $\forall x, y \in V$ *ортогональные, если* $(x,y) = 0$
(Очевидно, $\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \rightsquigarrow$ *<u>перпендикулярны</u>)*

$\mathbb{0}$ ортогонален $\forall x \in V, \mathbb{0}$ ортогонален V

$y \in V : \forall x \in V \;\; (y,x) = 0$ т.к. $\underset{x:=y}{(y,y)} = 0 \Rightarrow y = \mathbb{0}$

Определение 2. $v_1 \dots v_m$ *<u>попарно-ортогональны</u>, если* $\forall i \neq j : (v_i, v_j) = 0$

Система $v_1 \dots v_m$ *<u>Ортонормированна</u>, если* $\forall (i,j) \boxed{(v_i, v_j) = \delta_{ij}} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

δ_{ij} – символ Кронекера

Утверждение. $\underset{\text{ненулевые}}{v_1 \dots v_m}$ *<u>попарно-ортог.</u>* $\Rightarrow$ *линейно незав.*

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \mathbb{0} \;\; \alpha_i \in K \;\; 0 = (\mathbb{0}, v_i) = (\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, v_j) = \sum\limits_{i}^{m} \alpha_i (\overset{\neq 0}{v_i}, \overset{i=j}{v_j}) = \alpha_j (v_j, v_j) \neq 0$

$\Rightarrow \forall j \;\; \alpha_j = 0 \Rightarrow$ Линейно независ. □

<u>Существует ли такая система?</u>
$\exists$? о.н.с. в V ?

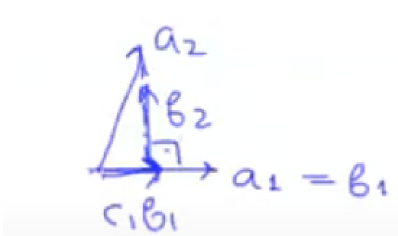
Теорема 1 (Процесс ортогон. Грама-Шмидта)**.**
$\forall$ система векторов $a_1 \dots a_m$ может быть заменена попарно-ортог. системой векторов $b_1 \dots b_k$, с сохранением лин. оболочки

$span(a_1 \dots a_m) = span(b_1 \dots b_k) \;\; k \leq m$

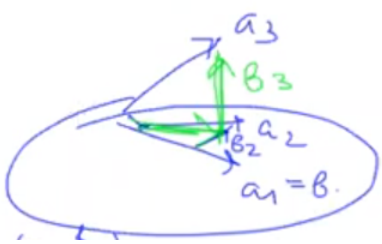
Доказательство.

1. $a_1 \dots a_m$ лин. незав.
   М.М.И.
   (a) База индукции $m = 1 \;\; a_1 = b_1$
   (b) $\sqsupset$ верно для $k - 1$ вектора — инд. предположение
   (c) Инд. переход. Докажем для k векторов.

$a_1 \; a_2 \; a_3$



$b_2 = a_2 - c_1 b_1$
$b_2 \perp b_1$
$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) - c_1(b_1, b_1) \Rightarrow c_1 = \frac{(a_1, b_1)}{(b_1, b_1)}$



$b_3 = a_3 - \tilde{c}_1 b_1 - \tilde{c}_2 b_2$

$(b_3, b_1) = 0 \ \ (b_3, b_2) = 0$

$0 = (a_3, b_1) - \tilde{c}_1(b_1, b_1) \Rightarrow \tilde{c}_1 = \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}$

$0 = (a_3, b_2) - \tilde{c}_2(b_2, b_2) \Rightarrow \tilde{c}_2 = \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}$

Теперь для k-мерного случая.

$a_1 \dots a_{k-1} \rightsquigarrow b_1 \dots b_{k-1}$ попарно ортог.

$$\boxed{b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i} \qquad \begin{array}{c} c_i = ? \\ (b_k, b_i) = 0 \ i = 1 \dots k-1 \end{array}$$

$$(b_k, b_j) = (a_k, b_j) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i (b_i, b_j) = (a_k, b_j) - c_j (b_j, b_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{c_j = \frac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)}} \ \ j = 1 \dots k-1$$

$$\Rightarrow span(a_1 \dots a_k) = span(\underbrace{b_1 \dots b_k}_{\text{попарно-ортог.}})$$

2. $a_1 \dots a_m$ линейно зав. $\rightsquigarrow$ Г-Ш на каком-то этапе $b_j = \mathbb{0}$

$$\rightsquigarrow \text{проредить } a_1 \dots a_m \rightsquigarrow \underbrace{a_{i_1} \dots a_{i_k}}_{\text{лин. независ.}} \rightsquigarrow \text{Г-Ш.}$$

$\square$

Следствие 1. *В $\forall$ евкл. (унит.) пространстве $\exists$ О.Н.Б.(орто-нормир. базис)*

Доказательство. Упр. $\square$

Следствие 2. *$\forall$ лин. независ. систему векторов евкл. (унит.) про-ва можно дополнить до о.н.б.*

Доказательство. Упр. $\square$

Примеры.

1. $f : [a, 2\pi] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

   f – 2π период.

   $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$

   (a) $\mathbb{R}$

   $$\underbrace{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots}_{\text{попарно-ортог.}} \quad \underbrace{([0, 2\pi])}_{\text{вещ.}}$$

   $$(\cos kx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin(m+k)x + \sin(m-kx))dx = 0$$

   $$(\sin kx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos(m+k)x - \cos(m-kx))dx = 0$$

   И т.д.

   $$\underbrace{\|\cos kx\|}_{k \neq 0 \ = \|\sin kx\|} = \sqrt{(\cos kx, \cos kx)} = (\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$\|1\| = \sqrt{(1,1)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} 1dx} = \sqrt{2\pi}$$

(b) $\mathbb{C}$ $\underset{\text{попарно-ортог.}}{\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}}$ $\quad (e^{ikx}, e^{imx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-imx}dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x}dx =$

$$\underset{k\neq m}{=} \frac{1}{i(k-m)}e^{i(k-m)x}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\underset{k=m}{=} \|e^{ikx}\|^2 = \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$$

$$\|e^{ikx}\| = \sqrt{2\pi}$$

2. P_n многочлены $deg \le n \subset L^2([-1,1])$

$\forall p, q \in P_n \quad (p,q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx \qquad P_n = span\underset{\text{канон. базис}}{1, x, x^2, \dots, x^n}$

$$\underset{k\neq m}{(x^k, x^m)} = \int_{-1}^1 x^{k+m}dx \begin{cases} \neq 0 & k+m - \text{четн} \\ = 0 & k+m - \text{нечетн.} \end{cases}$$

$1, x, x^2, \dots, x^n$ Ортогонализуем Г-Ш

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ b_2 &= a_2 - c_1b_1 \end{aligned} \quad c_1 = \frac{(a_2.b_1)}{(b_1,b_1)} \quad \begin{aligned} (b_1,b_1) &= \int_{-1}^1 1\cdot 1dx = 2 \\ (a_2,b_1) &= \int_{-1}^1 x\cdot 1dx = 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{c_1} = \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} \quad (b_1,b_2) = \int_{-1}^1 x^2dx = 2\int_0^1 x^2dx = \tfrac{2}{3}$$

$$b_3 = a_3 - \tilde{c_1}b_1 - \tilde{c_2}b_2 \qquad (a_3,b_1) = \int_{-1}^1 x^2\cdot 1dx = \tfrac{2}{3}$$

$$\tilde{c_2} = \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} \qquad (a_3,b_2) = \int_{-1}^1 x^2\cdot x^dx = 0$$

$b_3 = x^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$

$b_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$

$P_n = span(1, x, \dots, x^n) \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{попарно-ортог.}}{l_0(x) = 1 \;\; l_1(x) = x \;\; l_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}} \qquad l_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x\dots$

Полиномы Лежандра

$\boxed{\text{н.у.о.} \to \quad l_k(x) = \lambda_k((x^2-1)^k)^{(k)} \text{ Общая ормула полиномов Лежандра с точностью до const}}$

Доказательство. $q_k(x) = ((x^2-1)^k)^{(k)} \quad deg\ q_k = k$

$\forall m = 0, \dots, k-1 \quad (q_k, x^m) = \int_{-1}^1 ((x^2-1)^k)^{(k)}x^mdx = \int_{-1}^1 x^m d((x^2-1)^k)^{(k-1)}$

$\boxed{f'dx = df}$

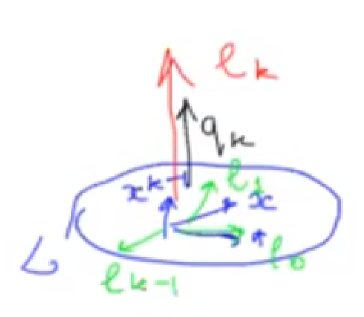
$$= x^m(\underset{\substack{= (x-1)^k(x+1)^k \\ \text{2 корня: } \pm 1 \text{ кр-ти } k}}{(x^2-1)^k})^{(k-1)}\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((x^2-1)^k)^{(k-1)} \underbrace{dx^m}_{mx^{m-1}dx} = -m\int_{-1}^1 x^{m-1}d((x^2-1)^k)^{(k-2)} = \dots$$

$$= \pm m! \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k-m)} dx = \pm m! ((x^2-1)^k)^{(k-m-1)} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$L = span(1, \ldots, x^{k-1})$

$q_k \perp L$

$deg\ q_k = k \quad span(q_0, q_1, \ldots, q_k) = span(1, x, \ldots, x^k)$



$\Rightarrow \lambda_k q_k = l_k(x)$ $\square$

$$q_k(1) = (\underbrace{(x^2-1)^k}_{=(x-1)^k(x+1)^k})^{(k)} \Big|_{x=1} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m ((x+1)^k)^{(m)} (\underbrace{(x-1)^k)^{(k-m)}}_{=0\ m\neq 0} \Big|_{x=1} =$$

Применили формулу Лейбница для взятия производной

$$= (x+1)^k((x-1)^k)^{(k)} \Big|_{x=1} = 2^k k!$$

$$\boxed{\begin{array}{c} l_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!}((x^2-1)^k)^{(k)} \\ l_k(1) = 1 \end{array}}$$

Формула Родрига для полиномов Лежандра

$$\|l_k\|^2 = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\frac{1}{2^k k!})^2}_{A} ((x^2-1)^k)^{(k)} \underbrace{((x^2-1)^k)^{(k)} dx}_{d((x^2-1)^k)^{(k-1)}} =$$

$$A((x^2-1)^k)^{(k)}((x^2-1)^k)^{(k-1)} \Big|_{-1}^{1} - A \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k-1)} \underbrace{d((x^2-1)^k)^{(k)}}_{((x^2-1)^k)^{(k+1)} dx} =$$

$$= (-1)^k A \int_{-1}^{1} \underbrace{((x^2-1)^k)^{(2k)}}_{(2k)!} (x^2-1)^k dx = (-1)^k A (2k)!\ \ 2\int_0^1 \underbrace{(x^2-1)^k}_{=(-1)^k(1-x^2)^k} dx =$$

$$\underset{\substack{x=\sin t \\ dx = \cos t dt}}{=} \quad \tfrac{(2k)!}{2^{2k-1}(k!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt = \tfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \tfrac{2^k k!}{(2k+1)!!}$$

$$= \frac{(2k)!2^k \cdot k!}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+1)!!} = \frac{(2k)!2}{\underbrace{\underbrace{2^k k!}_{(2k)!!}(2k+1)!!}_{(2k+1)!}} = \frac{2}{2k+1}$$

$$\|l_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\frac{1}{k!2^k}((x^2-1)^k)^{(k)} \text{ Нормиров. система полиномов Лежандра}}$$

3. $L^2([-1,1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Скалярное произведение с весом

   $(f,g) = \int_{-1}^{1} f \cdot g \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

   <u>Многочлены Чебышёва</u> $\underbrace{T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)}_{\text{ортогон. система}}$ $k = 0, 1, 2 \dots$

   $T_0(x) = 1 \;\; T_1(x) = x \;\; T_2 = 2x^2 - 1$

   $\underset{k \neq 0}{(T_k, T_m)} = 0$

   $degT_k = k$

4. $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$

   <u>Многочлены Эрмита</u> $\underbrace{H_k(x) = e^{x^2}(e^{-x^2})^{(k)}}_{\text{ортог. система}}$ $k = 0, 1, 2 \dots$

   $degH_k = k$

   $\underset{k \neq m}{(H_k, H_m)} = 0$

   $H_0 = 1 \;\; H_1 = -2x \;\; H_2 = 4x^2 - 2 \dots$

9.3 Матрица Грама. Объем к-мерного паралл-да. Ортогональная и унитарная матрица

$(V, (\cdot,\cdot))$ евклид. (унит.)

$e_1 \dots e_n$ базис

$$\forall x \in V \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x = \sum_i^n x_i e_i$$

$$\forall y \in V \leftrightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad y = \sum_i^n y_i e_i$$

$(x,y) = (\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y}_j (e_i, e_j)$

Определение 1. $\Gamma = (g_{ij})_{n \times n}$ $\quad g_{ij} = (e_i, e_j)$

<u>*Матрица Грама*</u> $\boxed{(x,y) = x^T \Gamma \overline{y}}$

Замечание.

1. евкл. $y = \overline{y}$
2. $e_1 \dots e_n$ попарно-ортог. $\Gamma = diag(\|e_1\|^2 \dots \|e_n\|^2)$
$(e_i, e_j) = 0 \;\; i \neq j \quad (e_i, e_i) = \|e_i\|^2$
3. $e_1 \dots e_n$ о.н.б. $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \Gamma = E \rightsquigarrow (x, y) = x^T \overline{y} (\overset{\mathbb{R}}{\underset{\downarrow}{}} x^T y)$

$(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$

Определение 2. $a_1 \dots a_k \quad ; \quad \underset{\text{матрица Грама системы векторов } a_1 \dots a_n}{G(a_1 \dots a_k)} = ((a_i, a_j))_{k \times k} \quad (\Gamma = G(e_1 \dots e_n))$

$g(a_1 \dots a_k) = det \; G(a_1 \dots a_k)$

Определение 3. $A_{k\times k}$ A^* *называется* <u>*сопряженной*</u> *к* A : $\boxed{A^* = \overline{A^T}}$

A называется <u>*самосопряж.*</u>*, если* $A^* = A$

$\mathbb{R}: A^T = A$ *(A симметр.)*

$\mathbb{C}: \overline{A^T} = A$ *(A эрмитова)*

$G^* = G \quad ((a_i, a_j) = \overline{(a_j, a_i)}$

Матрица Грама самосопряженна.

Теорема 1 (об $det\ G$)**.**

$a_1 \dots a_k \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{попарно-ортог.}}{b_1 \dots b_k}$

$\Rightarrow \boxed{g(a_1 \dots a_k) = g(b_1 \dots b_k) = \|b_1\|^2 \|b_2\|^2 \dots \|b_k\|^2}$

Доказательство.

$$g(a_1 \dots a_k) = det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, a_3) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, a_3) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & & & & \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{из 2 стр. вычтем 1 стр., умноженн. на} \\ \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \\ a_1 = b_1 \end{matrix}$$

$b_1 = a_1$

$b_m = a_m - \sum\limits_{i=1}^{m-1} c_i b_i \qquad c_i = \dfrac{(a_m, b_i)}{(b_i, b_i)}$

$(b_m, a_j) = (a_m, a_j) - \sum\limits_{i=1}^{m-1} c_i (b_i, a_j)$

$(a_j, b_m) = (a_j, b_m) - \sum\limits_{i=1}^{m-1} c_i (a_j, b_i)$

$(b_m, b_m) = (a_m, b_m) = (b_m, a_m)$

$$= det \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, a_2) & (b_1, a_3) & \dots & (b_1, a_k) \\ (b_2, b_1) & (b_2, a_2) & (b_2, a_2) & \dots & (b_2, a_k) \\ (a_3, b_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) & \dots & \\ \dots & & & & \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{То же для столбцов} \\ \text{вычтем из 2 столбц. 1 стол., умнож. на} \\ \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & \overset{=0}{(b_1, b_2)} & \dots & (b_1, a_k) \\ \underset{=0}{(b_2, b_1)} & (b_2, b_2) & \dots & (b_2, a_k) \\ \vdots & \vdots & \Bigg| & \\ (a_k, b_1) & (a_k, b_2) & & \dots \end{pmatrix} = \dots = det \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (b_k, b_k) \end{pmatrix}$$ □

Следствие 1. $a_1 \dots a_k$ *линейно независима* $\Leftrightarrow f(a_1 \dots a_k) > 0$

Доказательство. $a_1 \dots a_k$ лин. завис. $\Leftrightarrow$ среди b_i есть нулевой $\Rightarrow \|b_{i_0}\| = 0 \Rightarrow g(a_1 \dots a_k) = 0$

$$\begin{pmatrix} g(a_1 \dots a_k) \geq 0 \\ \forall a_1 \dots a_k \end{pmatrix}$$ □

Следствие 2. $a_1 \dots a_{k-1}$ *лин. незав.* $\quad a_1 \dots a_k \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} b_1 \dots b_k$

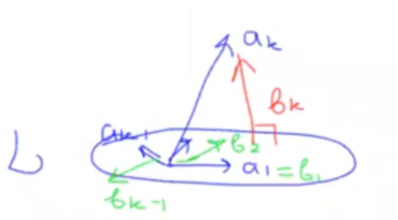
$$\|b_k\|^2 = \frac{g(a_1 \dots a_k)}{g(a_1 \dots a_{k-1})}$$

Доказательство. $a_1 \dots a_{k-1} \overset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} b_1 \dots b_{k-1}$

$$g(a_1 \dots a_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} \|b_i\|^2 > 0$$

$$g(a_1 \dots a_k) = \prod_{i=1}^{k} \|b_i\|^2$$ □

Замечание. $L = span\underset{\text{лин. незав.}}{(a_1 \dots a_{k-1})} = span(b_1 \dots b_{k-1})$



$$b_k = a_k - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i}_{y \in L}$$

$a_k = y + b_k \leftarrow$ ортогон. составляющая a_k относительно L

$$\underset{i=1 \dots k-1}{b_k \perp n_i} \Rightarrow \boxed{b_k \perp L}$$