

Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

18 апреля 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения	2
7.1 Основные определения	2
7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.	5
7.3 Инварианты линейного отображения	10
7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.	16
7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.) Проекторы. Спектральное разложение о.п.с. Функция от матрицы.	20
7.6 Комплексификация линейноговещ.пространства. Продолжениевещ.линейного оператора.	29
7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона	32
7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.	37
7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана	42
7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис	46
7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме	64
8 Тензоры	68
8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования.	68
8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.	75
8.3 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.	79
8.4 Транспонирование тензора. Симметрические икососимметрические тензоры.	82
8.5 Операции альтернирования исимметрирования тензоров	86
9 Евклидовы и унитарные пространства	88
9.1 Скалярное, псевдоскалярное произведение в Евкл. и унитарном про-вах. Норма в Евклидовом и унитарном пространствах.	88
9.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис (о.н.б.) Ортогональные системы векторов.	91
9.3 Это 9.4 Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Теорема Пифагора. Теорема о наилучшем приближении. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя.	94

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением \mathcal{A} называется $\mathcal{A} : U \rightarrow V$, обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}0_U = 0_V$

Примеры.

1. 0 – нулевое отображение $U \rightarrow V$

$$\forall u \in U : 0u = 0_v$$

2. \mathcal{E} – тождественное отображение: $V \rightarrow V$

$$\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$$

3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

$$\mathcal{A}p = p'(t) \text{ – дифференциальный оператор}$$

$$\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p'_1 + \lambda p'_2 = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$$

$$\text{Линейное отображение } \mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

4. $U = \mathbb{R}^n V = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$$

$$x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$$

5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K$ $\mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

Определение 3. Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$ называется $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad [\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}]$$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ – отображение противоположное \mathcal{A}

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

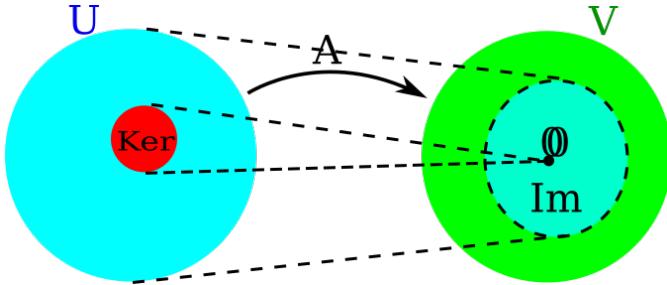
Значит $[L(U, V) \text{ – линейное пространство}]$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_v\}$ – ядро линейного отображения.

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \mid \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$ – образ линейного отображения.



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ – это подпространства соответственно пространств U и V . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U , то

$\dim Ker\mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$ – дефект линейного отображения.

Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V , то

$\dim Im\mathcal{A} = rg\mathcal{A}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. \mathcal{A} изоморфно между U и $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $Im\mathcal{A} = V$
3. $Ker\mathcal{A} = \{0\}$ trivialно

Доказательство. \mathcal{A} изоморфно \Leftrightarrow взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$0_u \leftrightarrow 0_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{0\}$

Пусть $Ker\mathcal{A} = \{0\}$

Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$v_1 = \mathcal{A}u_1$ $v_2 = \mathcal{A}u_2$

$0 = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = 0$ т. к. ядро trivialно.

Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. \square

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

–инъективно, если $Ker\mathcal{A} = \{0\}$

–сюръективно, если $Im\mathcal{A} = V$

–биективно \equiv изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

–эндоморфизм \equiv линейный оператор, если $U \equiv V$

$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$

–автоморфизм \equiv эндоморфизм + изоморфизм.

$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. Произведением линейных отображений \mathcal{A}, \mathcal{B}

$\mathcal{A} \in L(W, V)$ $\mathcal{B} \in L(U, W)$ $U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$

называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, которое является композицией функций, определяющих отображения \mathcal{A} и \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно, \mathcal{C} – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

1. \mathcal{A}, \mathcal{B} изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм

2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность

3. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ – ассоциативность

4. $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

\mathcal{E} – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ изоморфно.

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$$

$$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$$

Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения \mathcal{A} на линейное подпространство U_0 называется

$$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$$

Утверждение. \mathcal{A} изоморфизм $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ – изоморфизм

Примеры.

1. $\emptyset : U \rightarrow U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.

2. $\mathcal{E} : U \rightarrow U$ – автоморфизм

3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : P_n \rightarrow P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.

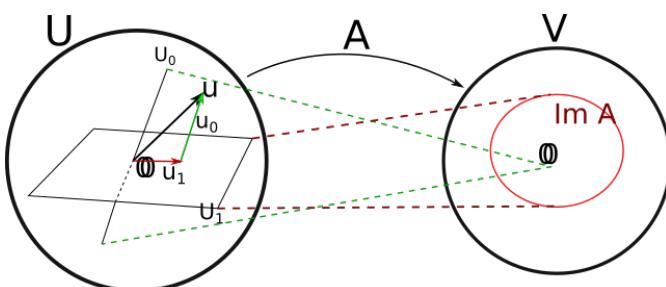
4. $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.

Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.

То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$$



Доказательство. $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U :

$$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{0\}$$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad \text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

\mathcal{A}_1 – изоморфизм? $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{A}$ – сюръекция

$$\left. \begin{array}{l} \forall w \in \text{Ker } \mathcal{A}_1 \in U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong \text{Im } \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim U_1 = \dim(\text{Im } \mathcal{A})$ – инъекция.

$$\text{T. к. } U = U_0 \oplus U_1, \text{ то } \dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \dim_{\text{def } \mathcal{A}} \text{Ker } \mathcal{A} + \dim_{\text{rg } \mathcal{A}} \text{Im } \mathcal{A}$$

□

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{A} изоморфно
 2. $\dim U = \dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
 3. $\dim U = \dim V$
- $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$
2. $\dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$ матрица линейного отображения \mathcal{A} относительно базисов (ξ, η)

Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$
 $A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора
 $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$

Примеры.

$$1. \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

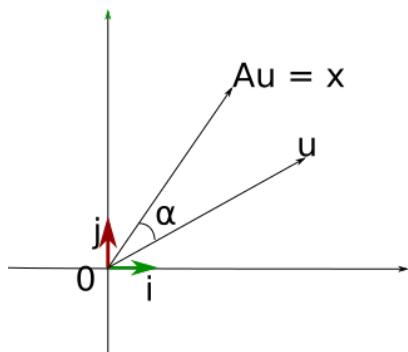
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji}e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

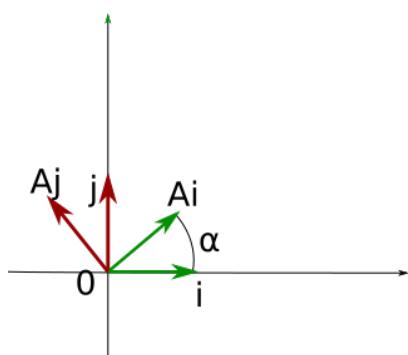


$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол α .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \mathcal{A} : p_2^{1,t,t^2} \rightarrow p_2^{1,t,t^2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}1 = 1' = 0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}t = t' = 1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : p_2_{1,t,t^2} \rightarrow p_1_{1,t}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с веш. (компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм \equiv биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$$U \xi_1 \dots \xi_n \text{ базис}$$

$$\mathcal{A} : U \rightarrow V$$

$$V \eta_1 \dots \eta_m \text{ базис}$$

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$Au = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xrightarrow{?} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} n_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность \Rightarrow изоморфизм. □

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$A, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V\eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \underset{\xi, \eta}{\leftrightarrow} A$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n u_i a_{ji}) \eta_j$$

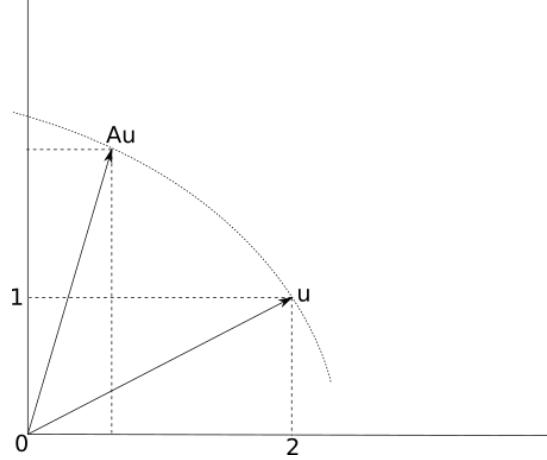
Так как координаты определяются единственным образом:

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \quad \leftrightarrow \quad [v = \mathcal{A}u] \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

Примеры.

1. \mathcal{A} поворот на угол α

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



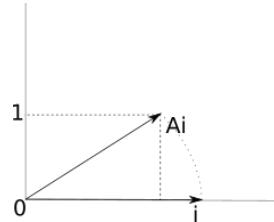
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$2. \quad \mathcal{A} = \frac{d}{dt} : p_2 \underset{1,t,t^2}{\rightarrow} \underset{1,t,t^2}{\rightarrow} p_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(3t^3 + 6t + 4)}_{u(t)}' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$$

$T_{\eta \rightarrow \eta'}$ – матрица перехода

$$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi', \eta')} A'$$

$$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \cdot A \cdot T_{\xi \rightarrow \xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi_1 \dots \xi_n & \sqsupseteq & \eta_1 \dots \eta_m \\ \mathcal{E}_u \uparrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \mathcal{E}_v \\ U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi'_1 \dots \xi'_n & \sqsupseteq & \eta'_1 \dots \eta'_m \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

$$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \text{ Смотри пример 2}$$

□

Следствие 1.

$$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$e_1 \dots e_n$ базис $V \leftrightarrow A$

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис} \leftrightarrow A'$$

$$\mathcal{A} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{A' = T^{-1} A T}$$

Замечание. В условиях теоремы $v = \mathcal{A}u \xrightleftharpoons{(\xi, \eta)} v = Au$

$$\xrightleftharpoons{(\xi', \eta')} v' = A'u$$

$$V = T_{\eta \rightarrow \eta'} V'$$

$$U = T_{\xi \rightarrow \xi'} U'$$

$$T_{\eta \rightarrow \eta'} v' = A T_{\xi \rightarrow \xi'} u'$$

$$v' = \boxed{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}} u'$$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au$$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.
 $v' = A'u'$

Определение 1. $A_{m \times n}$

$$ImA = span(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} =$$

$$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \mid x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$rgA = dim ImA - \text{ранг матрицы}$$

$$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\} - \text{ядро матрицы}$$

$$dimKerA = n - rgA = defA - \text{дефект матрицы}$$

$$\boxed{rgA + defA = n} - \text{аналогично теореме о ранге и дефекте}$$

Теорема 1. $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{\begin{aligned} rg\mathcal{A} &= rgA \\ def\mathcal{A} &= defA \end{aligned}},$$

где матрица A – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств U и V .

$rg\mathcal{A}, def\mathcal{A}$ инвариантны относительно выбора базиса.

Доказательство. $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi, \eta)}{A} \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V

$$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \overset{\leftrightarrow}{\cong} A_i$$

Координатный изоморфизм.

Пусть $rgA = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, что из $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$ k линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dim Im\mathcal{A} = k$

$$dimU = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ n & & rgA \\ & \| & \\ & & k \end{array}$$

$$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim \text{ пространства решений } Ax = 0 = defA$$

□

Следствие 1. A изоморфизм $\Leftrightarrow A$ невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \frac{\text{def } A = 0}{\dim U = \dim V} \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow A$ невырожденная. \square

Теорема 2. $\det \mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $\det \mathcal{A} = \det A$, где A – матрица оператора \mathcal{A} в некотором базисе.

Доказательство. $V e_1 \dots e_n$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_k &= \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\text{det } n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \dots \sum_{i_n=n}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow \det = 0) \\ &= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \underbrace{\det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}_{\substack{\text{все разные} \\ (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \det(e_1 \dots e_n) = 1}} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\det \mathcal{A} = \det A' \stackrel{?}{=} \det A$$

$$A' = T^{-1}AT$$

$$\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$

\square

Определение 2. A, B называются подобными, если

$$\exists \text{ невырожденная } C : B = C^{-1}AC$$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$$A' = T^{-1}AT$$

$$A, B \text{ подобны} \Rightarrow \det A = \det B$$

Следствие 1. f – n -форма на V

$$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow [f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1 \dots \xi_n)]$$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$$g(\xi_1 \dots \xi_n) = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$$

$$\det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\substack{\text{смотри док-во теоремы}}} = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{\det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{\det A}_{\det \mathcal{A}}$$

\square

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n \times n}$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1 \ \dots \ AB_n) =$$

$$= \det A \cdot \det(B_1 \ \dots \ B_n) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$$

Доказательство. $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$

□

Следствие 3. $\mathcal{A} \in Aut(V)$

$$\Leftrightarrow \det\mathcal{A} \neq 0$$

$$Причем \det\det\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{A}}$$

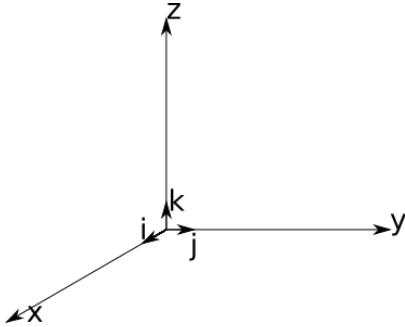
Доказательство. Из следствия 2

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{A}^{-1} = \det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$$

□

Примеры. V_3



$$V_{abc\text{-правая тройка}} = \underset{\text{смешанное произведение}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f(\underset{3\text{-форма}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\mathcal{A} \in End(V_3) \ u \in V_3 \rightarrow v = \mathcal{A}u \in V_3$$

Как изменится объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$$\mathcal{A}(V_{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}) = f(\mathcal{A}\bar{a}, \mathcal{A}\bar{b}, \mathcal{A}\bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot V(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| \quad \text{Объем увеличится в } \lambda \text{ раз.}$$

$$1. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

Оператор подобия

$$\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\bar{i} = \mu\bar{i} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{j} = \mu\bar{j} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{k} = \mu\bar{k} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| = |\det A| = |\mu^3|$$

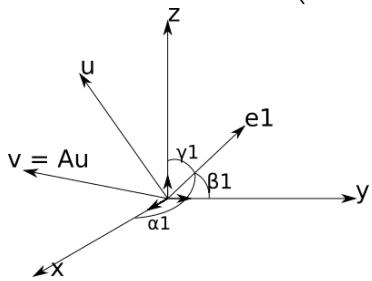
2. $\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

Оператор поворота

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \bar{i} \rightarrow e_1 \nearrow \\ \bar{j} \rightarrow e_2 \rightarrow \\ \bar{k} \rightarrow e_3 \searrow \end{array} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} |e_i| &= 1 \\ (e_i, e_j) &= 0 \\ i &\neq j \end{aligned}$$

$${}^n\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}) = \det \mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |\dots| \underset{\text{Смешанное произведение}}{e_1 e_2 e_3} = 1$$

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \det E = 1$$

$$|\det A| = 1$$

Утверждение. A, B подобные матрицы $\Rightarrow \text{tr}A = \text{tr}B$

$\text{trace} = \text{след}$

Доказательство. A, B подобные \Rightarrow

$\exists C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$\text{tr}B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C''^{-1}''(AC)ji = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C''^{-1}'' a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{ki} C''^{-1}''}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \text{tr}A$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}} \quad CC^{-1} = E$$

□

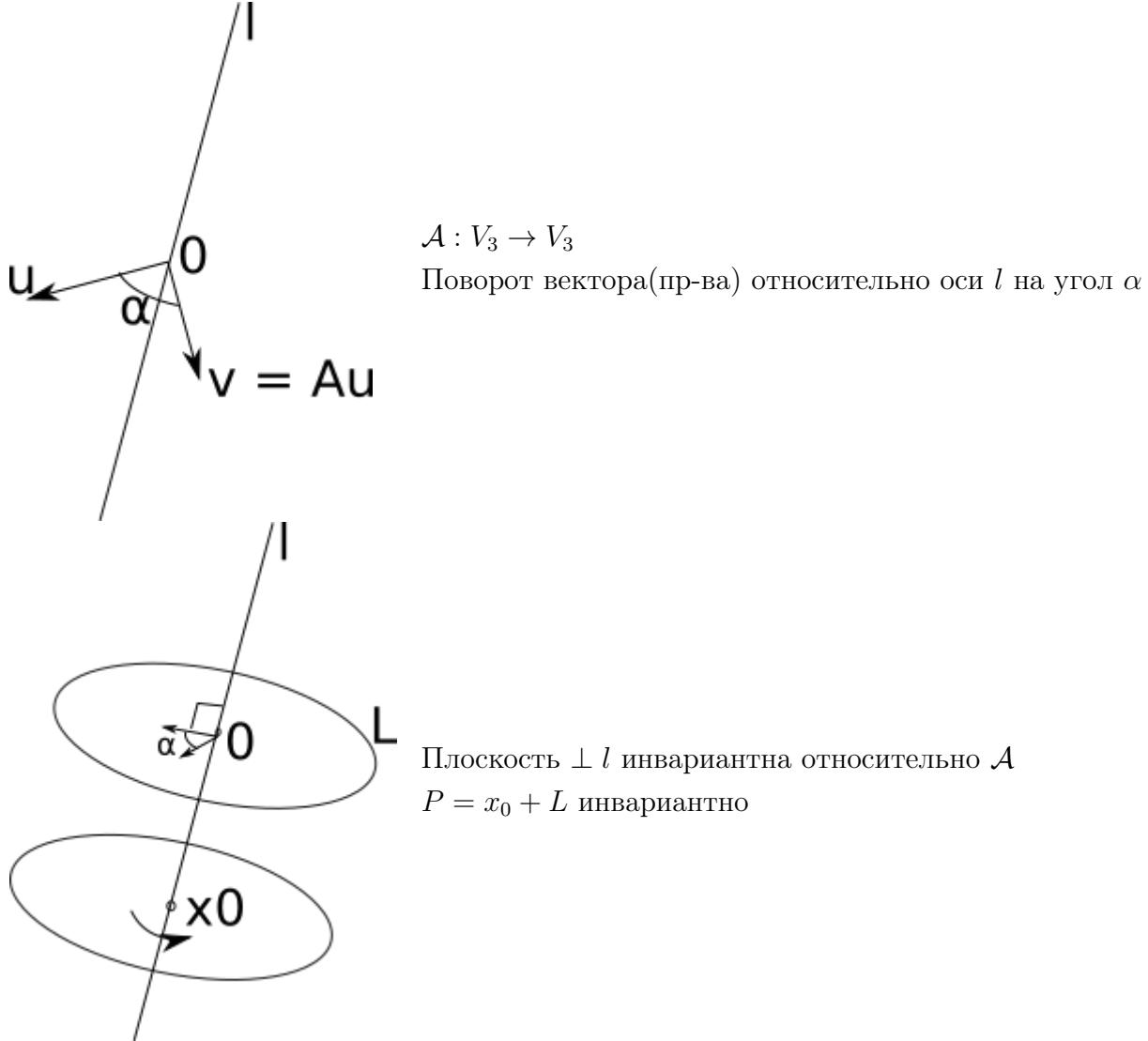
Определение 3. $\text{tr}A = \text{tr}A$, где A – матрица оператора в некотором базисе.

$\text{tr}A = \text{tr}A'$ – не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

Определение 4. $L \subset V$ L инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$ если $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

Примеры.

1. \emptyset, V инвариантны относительно \mathcal{A}
2. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ инвариантны относительно \mathcal{A}



Теорема 3. $L \subset B$ $\mathcal{A} \in End(V)$. Линейное пространство инвариантно относительно \mathcal{A}

$\Rightarrow \exists$ базис пространства V , т.ч. матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе

будет иметь вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \emptyset & A_3 \end{array} \right)$

$A_1 k \times k$ где $k = \dim L$

Доказательство. $L = \underset{\text{базис}}{span}(e_1 \dots e_k)$

Дополним до базиса V : $e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i \in L = \sum_{1 \leq i \leq k}^k a_{mi} e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 \cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{k+1 \leq i \leq n}^n a_{ij} e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1i}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ki} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Следствие 1. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно \mathcal{A}

$\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V , в котором матрица оператора \mathcal{A} будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A^2} & \\ & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} A^i \\ \text{размерность матрицы} \end{array} \right) = \dim L_i$$

Доказательство. $L_1 = \text{span}(e_1^1 \dots e_i^{i_k})$
базис

т.к. \bigoplus , то базис V – объединение базисов L_i

$$V = \text{span}(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \frac{L_1}{1 \dots i_1} & & & \frac{L_2}{i_1+1 \dots i_2} & & & \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

отвечает позиции базисных элементов пр-ва L_i в базисе V

Следствие 2. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Доказательство. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall u \in V \exists! u = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i$

$$Im\mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

Верно и " \supset "

Пусть $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^m u_i \in V\right) \in Im\mathcal{A}$$

$$Im\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

\oplus прямая?

$$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \emptyset \leftarrow$$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнктны $\nwarrow \Rightarrow \forall i : v_i = \emptyset$

$$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i} \text{ дизъюнктны} \Rightarrow \oplus$$

□

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(v)$ V линейное пространство над K

Определение 1. $\lambda \in K$ – *собственное число* (с.ч.) линейного оператора \mathcal{A} , если

$\exists [v \in V \neq \emptyset]$, который называется *собственным вектором* (с.в.), такой что $[\mathcal{A}v = \lambda v]$

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$

Определение 2. $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \{c.v. v \neq \emptyset\}$ называется *собственным подпространством*.

$[\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda]$ – геометрическая кратность с.ч.

$$\gamma \geq 1$$

V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$$v \in V_\lambda \quad \mathcal{A}v = \lambda v \stackrel{?}{\in} V_\lambda$$

$$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$$

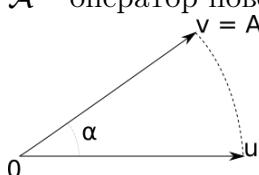
Примеры.

1. \mathcal{A} – оператор подобия:

$$\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$$

$$\mu \text{ с.ч.} \quad V_\lambda = V$$

2. \mathcal{A} – оператор поворота на плоскости на угол α



$$\alpha \neq \pi k \Rightarrow \text{нет с.в.}$$

3. Пусть λ с.ч. $= 0$ $\mathcal{A}v = 0$ с.в. $\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A}$ нетривиально $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ не автоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ необратимо $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$

4. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$v_1 \dots v_n \text{ базис, т.ч. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$$

Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ – с.ч. v с.в. $\neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$ нетривиально $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$ базис $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(A - tE)$ т.к. \det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \underset{\text{tr } A = \text{tr } \mathcal{A}}{\det A}$$

По теореме Виета: $\det \mathcal{A} = \prod_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)} \lambda_1 \dots \lambda_n$

$\lambda \in K$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ ($\lambda \in K$)

λ корень характеристического многочлена.

$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни $\chi_{\mathcal{A}}$ будут с.ч.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$$

$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется *спектром линейного оператора*. $(\lambda, \alpha(\lambda))$

Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.

$$\alpha(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$$

Немножко про алгебраическую кратность

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod_{a-\text{корень}} (t - a)^{m_a}$$

a -корень $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \mid (t - a)$

a – корень f **кратности** $m \Leftrightarrow \begin{cases} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(t) = (t - a)^m g(t)$$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a$ a –корень с учетом кратности

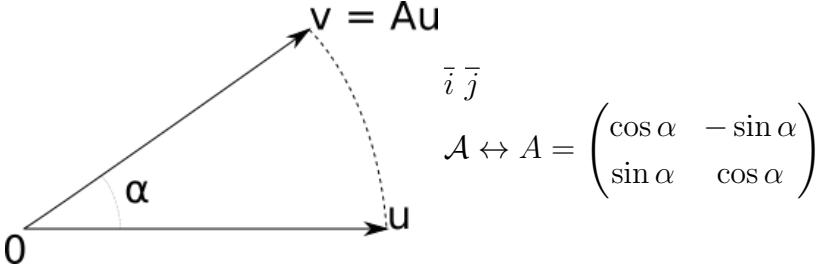
$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$(-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_n)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ с.ч.}$$

Примеры. \mathcal{A} – поворот на угол α



$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - t & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - t \end{pmatrix} =$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha t + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1$$

$$D = 4 \cos^2 \alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$$

нетвещ. корней \Rightarrow нет с.ч.

$$K = \mathbb{R}$$

Теорема 1. λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow [1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)]$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = \dim V_{\lambda} = \text{span}(v_1 \dots v_k)$ базис

V_{λ} инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda & \\ \hline 0 & & A^3 \end{array} \right) \quad A_{k \times k}^1$$

$$\text{Базис} = v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$$

$$\mathcal{A}_{i=1 \dots k} v_i \in V_{\lambda} = \lambda v_i \Leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda - t & \\ \hline 0 & & A^3 - tE_{n-k} \end{array} \right) \underset{\text{св-ва}}{=} \det \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{A^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$

□

Теорема 2. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ – различные с.ч. \mathcal{A}

$v_1 \dots v_m$ соответствующие им с.в. \Rightarrow

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1$ $\lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq 0$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m - 1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. \mathcal{A} ,

а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

$$\text{Пусть } v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

$$\mathcal{A}_{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

||

$$\lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = 0 \quad v_i \text{ линейно независим по инд. предположению}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m - 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_m = 0$ — Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть 0

□

Следствие 1. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ дизъюнктны. $\left(\bigoplus_{c.\lambda.} V_\lambda \right)$

Доказательство. $v_1 + \dots + v_m = 0 \quad v_i \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq 0 \Rightarrow$ это слагаемое с.в. \Rightarrow противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall i : v_i = 0 \Rightarrow$ дизъюнктны. □

Теорема 3. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \rightarrow L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \quad A_{k_i \times k_i}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства det}}{=} |A^1 - tE_{k_1}| |A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\chi_{A^1}(t) \quad \chi_{A^2}(t) \quad \dots \quad \chi_{A^m}(t)$$

$$\begin{array}{ccc} || & || & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}^m \end{array}$$

□

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n \times n}$ λ с.ч. $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

$$y = \begin{array}{c} Ax \\ \uparrow \\ \text{линейный оператор} \end{array}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$$\chi_A(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$$

$$t_1 = 0 \quad \alpha(0) = 2$$

$$t_2 = 1 \quad \alpha(1) = 1$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) \quad \alpha \in]R$$

$$V_{\lambda_1} = 0 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$$

$$\lambda_2 \quad 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = 1$$

7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)

Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.

Функция от матрицы.

Определение 1. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

\mathcal{A} называется о.п.с., если \exists базис пространства V , т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$ базис V из с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} V_\lambda$

$$V = \text{span}(v_1 \dots v_n)$$

Теорема 1. Пусть $\sum_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

\Leftrightarrow все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. \mathcal{A}

\mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \forall c. \forall \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$
--

Доказательство. \mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \dim V = \sum_{\lambda \in \text{ч.}} \gamma(\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{ч.}} \alpha(\lambda)$$

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \quad \nearrow$$

$$\sum_{\lambda \in \text{ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \rightarrow \quad \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$$

1

Следствие 1. $\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

Ао.н.с. \Leftarrow спектр – простой.

(*n* попарно различных с.ч. $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$)

Определение 2. $A_{n \times m}$ называется диагонализируемой, если \exists невырожденная $T_{n \times n}$, т.ч.

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

(“ A подобна диагональной матрице”)

Следствие 2. Если матрица $A_{n \times n}$ – матрица некоторого о.п.с. \mathcal{A} , то она **диагонализируема**. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.

Доказательство.

$$\begin{array}{lll}
 \mathcal{A} \text{ о.п.с.} & \Leftrightarrow & \exists \text{ базис } v_1 \dots v_n \\
 \uparrow & (e_1 \dots e_n)V & \lambda_1 \dots \lambda_n \\
 A & \text{базис} & \text{с.ч.} \\
 & & \downarrow \\
 & & \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$T = T_{e \rightarrow v}$ невырожденная.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$A = T \Lambda T^{-1}$$

1

A диагонализируема $\Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n$

$$\forall \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$$

Определение 3.

$$\begin{array}{ccc} \text{Предложение 3.} & & \\ V = \bigoplus_{i=1}^m L_i & & p_i : V \rightarrow L_i \subset V \\ \nwarrow \Leftarrow & \Leftrightarrow & \Rightarrow \searrow \\ L_i \subset V & & \forall v \in V \ \exists! : v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i \\ \text{линейное подпр.} & & \\ \boxed{\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i v \stackrel{\text{def}}{=} v_i} & & i = 1 \dots m \end{array}$$

Оператор проектирования (проектор)

$$\mathcal{P}_i \stackrel{?}{\in} End(V)$$

$$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_i \text{ линейный оператор.}$$

$$u + \lambda V = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i + \lambda \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \sum_{i=1}^m \underbrace{(u_i + \lambda v_i)}_{\in L_i}.$$

$$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$$

Свойства проекторов:

- $\forall i \neq j \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = \emptyset$
 - $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \emptyset_i^k = \mathcal{P}_i)$
 - $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
 - $Ker \mathcal{P}_i = \sum_{j \neq i} L_j \quad \forall i = 1 \dots m$
 - $Im \mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

- $$1. \forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij}(v) = \mathcal{P}_i v_j \in L_j = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij} = \emptyset$$

Т.к. L_i дизъюнктны

$$v = v_1 + v_i + \underset{\text{Ед. образом}}{v_j} + \dots + v_n$$

- $$2. \forall v \in V \quad \underline{\mathcal{P}_i} \mathcal{P}_i(v) = v_i = \mathcal{P}_i v$$

$v_i \in L_i$

Т.к. верно $\forall v \in V$, то верно и для базиса \Rightarrow операторы совпадают. $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$

- $$3. \forall v \in V(\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i)v = \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i v = \sum_{i=1}^m v_i = v = \mathcal{E}v \Rightarrow \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^m = \mathcal{E}$$

- $$4. \quad \mathcal{P}_i(v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_m) + \underbrace{\sum_{j \neq i} \mathcal{P}_i v_j}_{0}$$

$$\sum_{j \neq i} L_j \subset \text{Ker } \mathcal{P}_i$$

T.K. $v = \bigoplus_{j \neq i} L_j \oplus L_i$

$$\Rightarrow \text{Ker } \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$$

Im $\mathcal{P}_i = L_i$ no def " \subset "

Верно " \supset " $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P}v_i = v_i$

1

Утверждение. $\mathcal{P}_i \in End(V) : V \rightarrow V$ и выполнены свойства 1, 3 \Rightarrow

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m Im\mathcal{P}_i \text{ (m.e. } \mathcal{P}_i \text{ проекторы на } L_i = Im\mathcal{P}_i)$$

Логика доказательства.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i &\stackrel{?}{=} \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \mathcal{E} &= p_i \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_i^2 \\ &\quad \parallel \\ &\quad \emptyset \\ &\quad i \neq j \end{aligned}$$

- $$2. \ v_1 + v_2 + \dots + v_m = \emptyset$$

$v_i \in Im\mathcal{P}_i$ дизъюнктно?

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \quad w_i \in V$$

$$\begin{aligned}
v_i = \mathcal{P}_i w_i &= \mathcal{P}_i \left(\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j} \right) = 0 \\
\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j w_j)}_{=0 \ i \neq j} &= \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i \\
\forall v \in V \quad \mathcal{E}v = v &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j v}_{v_j \in Im \mathcal{P}_j} \quad \Rightarrow v = \sum_{j=1}^m Im \mathcal{P}_j
\end{aligned}$$

□

Теорема 2 (О спектральном разложении о.п.с.). $v = \bigoplus_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \quad \mathcal{P}_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$
 \mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$ ←спектральные проекторы

Доказательство.

$$\begin{aligned}
1. \quad &\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = 0 \\
2. \quad &\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda \\
3. \quad &\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E} \\
\forall v \in V \quad &\mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum_{\lambda} v_\lambda \in V_\lambda) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{=\lambda v_\lambda} = \\
&\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda v
\end{aligned}$$

Доказательство верно \forall векторного про-ва V . В частности для базиса \Rightarrow

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda}$$

□

Следствие 1. $A_{n \times n}$ диагонализируема $\Leftrightarrow \exists \mathcal{P}_\lambda \underset{\text{проекторы}}{n \times n} \quad 1^\circ \ 2^\circ \ 3^\circ$
 $A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{span } V_3$$

$$\Rightarrow \text{o.п.с. } V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = \text{span}(V_1, V_2, V_3)$$

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad [AT = T\Lambda]$$

$$\mathcal{P}_1 : V \rightarrow V_{\lambda_1} \subset V$$

$$\mathcal{P}_2 : V \rightarrow V_{\lambda_2} \subset V$$

$$\mathcal{P}'_1 \text{ матрица } \mathcal{P}_1 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ – матрицы проекторов в базисе e (канонич.)

$$\mathcal{P}_1 v_i = \begin{cases} v_i, i = 1, 2 \\ \emptyset, i = 3 \end{cases}$$

$1^\circ 2^\circ 3^\circ$

$$\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 = E$$

$$\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2 = \emptyset \dots$$

$$\mathcal{P}'_2 \text{ матрица } \mathcal{P}_2 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}'_i = T^{-1} \mathcal{P}_i T \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}'_i T^{-1} \quad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \emptyset$$

$$\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$$

Определение 4. $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$ – последовательность матриц,

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall i, j \ \exists a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{m=1}^N A_m}_{\substack{S_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad R = \infty \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad \text{либо } x = 1$$

Определение 5. Функция от матрицы.

$A_{n \times n}$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m, \text{ где } \boxed{\begin{array}{lcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{array}}$$

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

$$\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A^{2m}$$

Теорема 3. f аналитическая в $|x| < R$

$A_{n \times n}$ все с.ч. $|\lambda| < R$

A диагонализируемая То есть:

$$\exists \underset{\text{невырожд.}}{T} : \Lambda = T^{-1}AT$$

$$\exists \mathcal{P}_\lambda : A = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

↓

$$1. \underset{f(A)}{\exists} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$2. \underset{f(A)}{\exists} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Доказательство.

$$1. \quad \begin{aligned} f(A) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \\ A^m &= (T \Lambda T^{-1})^m = \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x| < R \end{array}}$$

$$= T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} =$$

$$= T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m \right) T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$|\lambda_i| < R$$

$$2. A^m = \left(\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda \right)^m \underset{\mathcal{P}_\lambda \neq \mu \in \emptyset}{=} \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda \right) = \sum_{\lambda} \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m = f(\lambda) \right) \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\lambda} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

□

Замечание. A диагон. $\Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$$

$$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$t^m A^m = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Примеры. e^{At}

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_1} : \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\forall \lambda : \left. \begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \gamma(\lambda) \\ \sum_{\lambda} \alpha(\lambda) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ диагонализируемая}$$

$$T_{e \rightarrow v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \xrightarrow[i=1,2]{} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{n \times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x} - \text{производная}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \quad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности

$$(e^{At})' = Ae^{At}$$

$$e^{A \cdot 0} = E$$

$$e^{At} = \left(\sum_{\lambda \text{ c.ч.}} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda \right)' = \sum_{\lambda \text{ c.ч.}} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_{\lambda} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\mu=\lambda} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

Замечание. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \neq 0$
 (все корни хар. многочлена)

$\square A$ диагонализируема. Все с.ч. $\lambda \neq 0$

$$A^{-1} = T \Lambda^{-1} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\Lambda \Lambda^{-1} = E$$

$$AA^{-1} = T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda^{-1} T^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$$

($AA^{-1} = E$ упр.)

$$\sqrt[m]{A} = T \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

\square все $\lambda_i \geq 0$

(m нечет $\Rightarrow \lambda$ любого знака)

$$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$$

$$(\sqrt[m]{A})^m = T \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} \dots T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.: $(\sqrt[m]{A})^m = A$)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

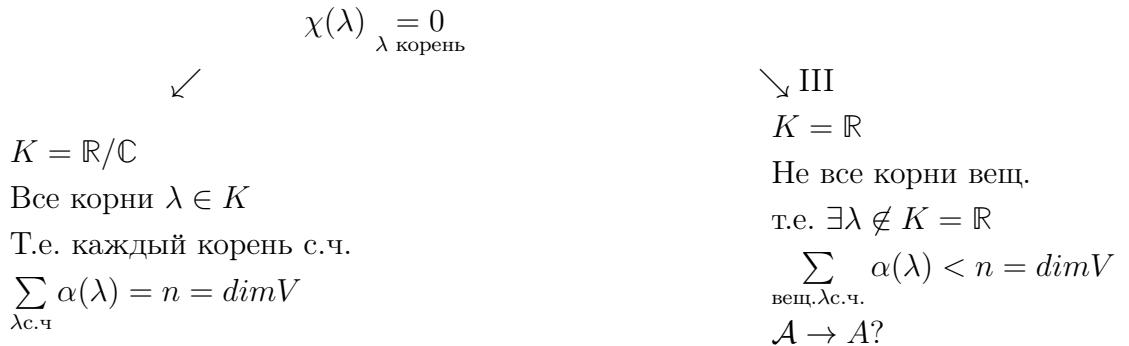
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & A^{-1} &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \mathcal{P}_1 + \frac{1}{(-1)} \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$$

$$A^2 = E$$

7.6 Комплексификация линейного веш. пространства. Продолжение веш. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$ V над полем K



$$\begin{array}{ccc}
 \text{I} \swarrow & & \searrow \text{II} \\
 \forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) & & \exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \\
 \mathcal{A} - \text{o.p.c.} \rightarrow A \text{ диагонализир.} & & \mathcal{A} \text{ не о.п.с.} \\
 & & \rightarrow A \text{ приводится к Жордановой форме}
 \end{array}$$

Определение 1. V – линейное пространство над \mathbb{R}

$$\forall x, y \in V \quad v := x + iy \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \quad \begin{aligned} x &= Re v \\ y &= Im v \end{aligned}$$

Определим

1. $v = v' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \in V \\ y = y' \end{cases}$
 2. $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{cases}$
 3. $\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\alpha x - \beta y}_{\in V_{\mathbb{C}}} + i \underbrace{\beta x + \alpha y}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

$$4. \forall x \in V \Leftrightarrow x + i0 \in V_{\mathbb{C}}$$

$$V \subset V_{\mathbb{C}}$$

$$0 \leftrightarrow 0 + i0$$

Упр.: $V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство над \mathbb{C}

$V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация линейного вещественного пространства V

Утверждение. $e_1 \dots e_n$ базис $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

T.e. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$ структуры над разными полями.

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$?

- порождающая?
- линейно независимая?

1. $\forall v \in V_{\mathbb{C}} \quad v = x \in V + iy \in V = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j =$
 $\sum_{j=1}^n \underbrace{[x_j + iy_j]}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n$ порождающая.
2. $\sum_{j=1}^n \gamma_j e_j = \emptyset \quad \gamma_j \in \mathbb{C}$
 $\left\| \sum_{j=1}^n \underbrace{\alpha_j e_j}_{x} + i \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_j e_j}_{y} = \emptyset \right.$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \emptyset = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \\ y = \emptyset = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 \dots e_n \text{ линейно независимы} \\ \forall j \alpha_j = 0 \quad \Leftrightarrow \forall j \gamma_j = 0 \\ \forall j \beta_j = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow \underbrace{e_1 \dots e_n}_{\text{лин. незав.}} \text{ в } V_{\mathbb{C}}$

□

Определение 2. $z = x + iy \quad x, y \in V$

вектор сопряженный к z:

$$\bar{z} = x - iy$$

$$(\bar{z} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \bar{\lambda} \bar{z})$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

Утверждение. $v_1 \dots v_m$ линейно незав. в $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ линейно независимы в $V_{\mathbb{C}}$

Очевидно, $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы $\Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{v}_j = \bar{0} = 0 \\ \left\| \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^m \gamma'_j v_j \text{ линейно незав.} \right. \end{array} \right| \Leftrightarrow \forall j \gamma'_j = 0 = \bar{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

\Rightarrow линейно независим.

□

$$rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$

$$V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i \underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$$

Линейность?

1. Аддитивность. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1 + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

Очевидно, из аддитивности \mathcal{A}

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Однородность

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v) &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(x + iy)) = \\ &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)) = \\ &= \mathcal{A}(\alpha x - \beta y) + i\mathcal{A}(\alpha y + \beta x) = \\ &= \alpha \mathcal{A}x - \beta \mathcal{A}y + i\alpha \mathcal{A}y + i\beta \mathcal{A}x = \\ &= (\alpha + i\beta)\mathcal{A}x + i(\alpha + i\beta)\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{A}x + i\lambda \mathcal{A}y = \\ &= \lambda(\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y) = \lambda \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ – продолжение линейного вещ. оператора \mathcal{A}

с пространства V на его комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V(V_{\mathbb{C}}) \\ \text{веществ.} \\ \mathcal{A} \leftrightarrow A \\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Т.е. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр. \mathcal{A}

$$2. \forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z}$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \overline{\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y = \\ &= \mathcal{A}x + i\mathcal{A}(-y) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x - iy) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z} \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} \chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \\ \parallel & & \parallel \end{array} \quad \exists e_1 \dots e_n \text{ базис } V$$

$$\det(A - tE) \quad \det(A_{\mathbb{C}} - tE) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ являются собственными числами $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

$$4. \quad \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda) = 0$$

Т.к. многочлен с вещ. коэф. $\Rightarrow \bar{\lambda}$ тоже корень.

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \quad \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\bar{\lambda}) = 0$$

v соотв. с.в.

$$\Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:	$\dim V_{\lambda} = \dim V_{\bar{\lambda}}$ (из утв. 2)
	$\gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{v} \underset{\text{св-во 2}}{=} \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{с.в. для } \lambda}}{v}} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda}$$

"III": $\mathcal{A} \in End(V)$

V над \mathbb{R}

$$\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = \dim V$$

Т.е. не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещ.

\rightarrow строим $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$ $A_{\mathbb{C}} = A$

Все корни с.ч. \Rightarrow матрица для $A_{\mathbb{C}}$ будет сведена либо к I, либо к II

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$$

$$D = -36 < 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ с.ч. } \alpha(\lambda_1) = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3 \quad \alpha(2, 3) = 1$$

$$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 \quad V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 + 3i \quad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$$

Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещественных чисел.

Только теперь арифметические операции с комплексными.

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 + 3i \\ 5 + 3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$$

$\forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$ диагонализирован.

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 - 3i & 3 + 3i \\ 2 & 5 - 3i & 5 + 3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix} T^{-1} = \dots$$

7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение 1. Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен $\psi(t)$ называется аннулятором элемента $v \in V$, если $\psi(\mathcal{A})v = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$$

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$$

$$\psi(t) = \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$$

Т.е. перестановочны.

Определение 2. $\psi(t)$ аннулятор элемента $v \in V$ наименьший возможной степени называется **минимальным аннулятором элемента** v

Теорема 1 (О минимальном аннуляторе элемента).

$\mathcal{A} \in End(V)$

1. $\forall v \in V \exists! \text{ минимальный аннулятор } v$
2. $\forall \text{ аннулятор элемента делится на его минимальный.}$

Доказательство.

1. (a) $\square v = 0 \quad \psi(t) = 1 \quad \text{Очевидно, минимальный аннулятор.}$

$$\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = 0$$

- (b) $\square v \neq 0$

$$(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \dots, \mathcal{A}^{m-1}v, \mathcal{A}^m v$$

линейно независимая система

линейно зависимая система

$$\dim V = n$$

$$m \leq n + 1$$

$$\mathcal{A}^m v = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$$

$$0 = \mathcal{A}^m v - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow \text{Алгоритм}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$$

Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента v

2. ψ_1 – аннулятор v

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$$

$$\deg r(t) < \deg \psi(t)$$

$$0 = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})v + r(\mathcal{A})v \Rightarrow$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(t) \text{ аннулятор } v \\ \deg r < \deg \psi \end{cases} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdash \psi$$

□

Определение 3. Нормализованный многочлен $\phi(t)$ называется аннулятором \mathcal{A} ,

если $\phi(\mathcal{A}) = 0$

$$(\Leftrightarrow \forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = 0)$$

Аннулятор \mathcal{A} минимальной степени называется **минимальным многочленом**

Теорема 2 (о минимальном многочлене). $\mathcal{A} \in End(V)$

1. $\forall \mathcal{A} \exists! \text{ минимальный многочлен}$
2. $\forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} \text{ делится на минимальный многочлен}$

Доказательство.

$e_1 \dots e_n$ базис V

\Rightarrow по Теореме 1 для $\forall e_j \exists! \psi_j$ минимальный аннулятор e_j

$$\begin{aligned}\psi_j(\mathcal{A})e_j &= \emptyset \\ \psi(t) &= \text{H.O.K. } (\psi_1 \dots \psi_n) \\ \forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v &= \phi(\mathcal{A}) \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n v_i \phi(\mathcal{A})e_i = \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=0} = \emptyset \\ \phi : \psi_j &\Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = \emptyset \Rightarrow \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A}$$

Давайте покажем, что у ϕ степень минимальная.

От противного.

$$\exists \phi_1 \text{ аннулятор } \mathcal{A} \quad \square \deg \phi_1 < \deg \phi$$

$$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = \emptyset \Rightarrow \phi_1 \text{ аннулятор элемента } e_j \xrightarrow{\text{по Теореме 1}}$$

$$\Rightarrow \phi_1 \vdots \psi_j \xrightarrow{\substack{\text{аннулятор } e_j \text{ минимальный} \\ \text{аннулятор } e_j}} \Rightarrow \phi_1 : \phi \Rightarrow \deg \phi_1 \geq \deg \phi. \text{ Противоречие} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \deg \phi \text{ минимальный} \Rightarrow \text{п.2 доказан, т.к. } \forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} : \phi$$

Единственность?

$$\square \quad \phi_1, \phi \quad \text{минимальные аннуляторы одной степени.}$$

нормализов. \Rightarrow ст. коэф. 1

$$\deg(\phi_1 - \phi) < \deg(\phi) = \deg(\phi_1)$$

$$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \phi_1(\mathcal{A})v - \phi(\mathcal{A})v = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_1 - \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A} \text{ меньшей степени} \Rightarrow \text{противоречие} \underline{\text{минимальн.}}$$

□

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \phi = ? \text{ минимальный многочлен}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_1 ?$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^2 e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

линейно завис.

$$\mathcal{A}^2 e_1 = -4e_1 + 4\mathcal{A}e_1$$

$$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^2 e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

линейно завис.

$$\mathcal{A}^2 e_2 = 4\mathcal{A}e_2 - 4e_2$$

$$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

линейн. нез.

$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$

$$\psi_3(t) = t - 2$$

$$\phi(t) = \text{H.O.K. } ((t - 2)^2, (t - 2)) = (t - 2)^2$$

Теорема 3 (Кэли-Гамильтона). $\mathcal{A} \in End(V)$

$$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) \text{ — аннулятор } \mathcal{A}$$

характерист. многочлен

Доказательство. $\chi(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A} - \mathcal{A}) = 0$

□

Я так и не понял это норм доказательство или нет. В любом случае далее идет длинное док-во.

Доказательство. μ — не корень $\chi(t)$

$$\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$$

$e_1 \dots e_n$ базис в. $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B \leftarrow \text{соузная матрица (прис-ная)}$$

$$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow \text{определитель } (n-1)\text{-го порядка } A - \mu E$$

Т.е. мн-н степени $n-1$ относительно μ

$$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \dots + B_1\mu + B_0$$

$$\det(A - \mu E) \cdot E = (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + B_1\mu + B_0)$$

||

$$\chi(\mu) \cdot E$$

||

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k \cdot E$$

$$\begin{array}{ll} \mu^0 : \alpha_0 E = AB_0 & | A^0 \\ \mu^1 : \alpha_1 E = AB_1 - B_0 & | A^1 \\ \mu^2 : \alpha_2 E = AB_2 - B_1 & | A^2 \\ \dots & \\ \mu^{n-1} : \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2} & | A^{n-1} \\ \mu^n : \alpha_n E = -B_{n-1} & | A^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{A}) = \chi(A) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1} \\ &- A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

χ — аннулятор \mathcal{A}

□

Теорема 4. $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корней характеристического многочлена \mathcal{A} совпадает с множеством корней минимального многочлена \mathcal{A} (без учета кратности)

Доказательство. $\chi(t)$ – характерист., $\phi(t)$ – минимальный многочлен.

” \Leftarrow ” $\exists \phi(\lambda) = 0 \Rightarrow$ т.к. χ аннулятор \mathcal{A} , то по Т-ме 2 $\chi \dot{\mid} \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

” \Rightarrow ” $\exists \chi(\lambda) = 0$

1. $\exists \lambda \in K \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \quad \exists v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0 \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$ минимальный аннулятор v

Т.к. $\phi \dot{\mid} \psi \Rightarrow \lambda$ корень ϕ

$\phi(\lambda) = 0$

2. $\lambda \notin K$ т.е. III случай: $K = \mathbb{R}$

\exists комплексные корни характерист. многочлена.

$V \rightarrow V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$ базис $V \rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j + i\mathcal{A}\mathbb{0} = \mathcal{A}e_j$

$e_j = e_j + i\mathbb{0}$

$\Rightarrow \forall k \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$

\Rightarrow Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).

Получим, что минимальные многочлены $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и \mathcal{A} совпадают.

Т.е. ϕ мин. мн-н для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}}$ \Rightarrow Применим случай а) для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
 $\Rightarrow \lambda$ с.ч. λ корень ϕ

□

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни $\chi : 2$

Корни $\phi : 2$

\rightsquigarrow еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

Следствие 1.

1. $\psi \vdots \phi$
характер. (аннулятор) минимальный (аннулятор мин.)
2. $\deg \phi = n = \dim V \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \\ \phi(t) &= \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \end{aligned}$$

7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad \sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$$\dim P_{m-1} = m$$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(t) \quad \begin{array}{l} \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \\ \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \mu \neq \lambda \end{array}$$

вз. прости

Определение 1. $I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p \dot{\cdot} \phi_\lambda\}$

Главный идеал, порожденный многочленом ϕ_λ =

$$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda \phi_\lambda\}$$

I_λ – линейное подпространство P_{m-1}

$$p_{1,2} \dot{\cdot} \phi_\lambda \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \dot{\cdot} \phi_\lambda$$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$0 = \sum_{\lambda} \underbrace{f_\lambda \phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda \cdot \phi_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\substack{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}$$

$$\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\Rightarrow f_\lambda \cdot \phi_\lambda \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \underbrace{f_\lambda}_{\substack{\text{вз. прости} \\ \deg f_\lambda = m(\lambda)-1}} \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow f_\lambda \phi_\lambda \equiv 0 \Rightarrow \text{Дизъюнктны}$$

2. $\dim P_{m-1} = m$

$$\begin{aligned} &|| \\ &\sum_{\lambda} \dim I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \end{aligned}$$

$$I_\lambda \subset P_{m-1}$$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

□

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1} \exists! p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$

$$p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$ – полиномиальное разложение единицы

Замечание.

$$1. \lambda \neq \mu$$

$$\begin{array}{ccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu \\ || & & || \\ f_\lambda \phi_\lambda & f_\mu \phi_\lambda & = \eta \cdot \phi \\ \uparrow & & \\ (t - \lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

$$2. \forall \lambda m(\lambda) = 1$$

Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

$$f_\lambda = \text{const} \quad (\text{def } f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$$

Теорема 2 (Лагранжа).

$$\forall \lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

Доказательство.

$$\begin{array}{ll} \text{корень } \phi \rightarrow \mu \neq \lambda & \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ & \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \\ p(t) \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\mu} & \boxed{f_{\mu}} \cdot \phi_{\mu}(t) \\ & \uparrow \\ & \text{const, т.к.} \end{array}$$

корни взаимно

просты

$$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu)$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (t - \lambda) = \underbrace{\sum_{\mu} \phi_{\mu}(t)}_{\phi_{\mu}(t)}$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = \phi_{\lambda}(\lambda) \Rightarrow f_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$0 \mu \neq \lambda$

□

Следствие 1. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow \boxed{t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}}$$

Доказательство. По теореме: $1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_{\lambda}(t)$

$$\text{По теореме: } t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

□

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

ϕ минимальный многочлен, все корни $\in K$ (\Rightarrow все корни $\chi \in K$

\Rightarrow т.е. все с.ч. $\in K - I, II$ случаи)

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} := p_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \in End(V)$$

\mathcal{P}_{λ} – проекторы ? ↑ это уже есть

Достаточно проверить $\mathcal{P}_{\lambda} \cdot \mathcal{P}_{\mu} = \mathbb{0}$

$$\mathcal{P}_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = f_{\mu}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

перестановочны, т.к. многочлены от \mathcal{A}

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

↑
содержит

$$(p_{\lambda} \cdot p_{\mu} : \phi \text{ см. замеч. 1}) \quad \eta(\mathcal{A})(t - \mu)^{m(\mu)} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{\lambda}$ проекторы – **спектральные проекторы** \mathcal{A}

$Im \mathcal{P}_{\lambda}$ **спектральное подпространство**

$$7.5 \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_{\lambda}}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{array}$$

$$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow \text{не о.п.с.}$$

$$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$$

$$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$$

$$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$$

$$\text{Прав. дробь } \frac{1}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda}}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda}}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}} \quad \begin{array}{l} \text{Правильн.} \\ \text{Правильн. дробь} \end{array}$$

$$\deg f_{\lambda} < m(\lambda)$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{\left(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}\right)}_{p_{\lambda_1}} \underbrace{(t-3)}_{\phi_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}}_{p_{\lambda_2}} \underbrace{(t+1)^2}_{\phi_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}} \nearrow \quad 1 = \sum p_{\lambda} \quad \text{спектральное разложение о.п.с.}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1} \quad \text{Доказательство позже}$$

Определение 2. $K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$

называется **корневым подпространством** \mathcal{A}

Теорема 3.

1. K_{λ} инвариантно относительно \mathcal{A}
 2. $\text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}$
 3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен $\mathcal{A}|_{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$
- $\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}}$

Доказательство.

$$1. x \in K_{\lambda} \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_{\lambda}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{A}x = \mathcal{A} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{перестановочны} \\ \Rightarrow = 0}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$2. (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{P}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) =$$

$$= f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = 0$$

$$\forall x \in V$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_{\lambda} x}_{\in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}} = 0 \Rightarrow \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$$

$$\text{Обратно: } K_{\lambda} \stackrel{?}{\subseteq} \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$x \in K_{\lambda}$$

$$\mu \neq \lambda \quad \mathcal{P}_{\mu} x = f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A}) x = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{содержит} \\ \uparrow \\ \eta(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$x = \mathcal{E}x = \sum_{\substack{\mu \\ 0 \\ \mu \neq \lambda}} \mathcal{P}_{\mu} x = \mathcal{P}_{\lambda} x \in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \Rightarrow K_{\lambda} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$$

3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$?

$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

Минимальный?

\square не минимальный

$\psi_1 = (t - \lambda)^{m(\lambda)-1} \quad \square$ это минимальный многочлен

$\phi_1 := (t - \lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$ аннулятор \mathcal{A} ?

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$$

$$= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A}) \cdot \phi(\mathcal{A}) = \emptyset$$

$$\forall x \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$$

$$= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda} = \emptyset$$

$$\underbrace{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x}_{\text{мин. многочлен по предположению}}$$

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \emptyset$$

$$\phi_1(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \phi_1(\mathcal{A}) \sum_{\mu} \mathcal{P}_\mu = \emptyset$$

$$\underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}$$

$\Rightarrow \phi_1$ аннулятор \mathcal{A} , но степени $< \phi$

$\deg \phi_1 = m - 1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

□

Следствие 1. A о.п.с. $\Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. (\Rightarrow) \mathcal{A} о.п.с.

$\phi(t) \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ покажем что это минимальный многочлен \mathcal{A}

$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$ – собственные подпространства \mathcal{A}

$\forall v \in V \exists! v = \sum_{\lambda} v_{\lambda}, v_{\lambda} \in V_{\lambda}$

$$\phi(\mathcal{A})v = \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \sum_{\mu} v_{\mu} =$$

$$= \sum_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) v_{\mu} = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})v_{\mu}}_{\emptyset} = \emptyset$$

$$v_{\mu} \in V_{\mu} = Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \nearrow$$

$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень \Rightarrow минимальный многочлен.

(\Leftarrow) $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$K_{\lambda} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^1 = V_{\lambda}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с.}$$

□

Примеры.

$$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A - \lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$$

$$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A - \lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2} \quad \text{— упр.}$$

7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. $\mathcal{B} \in End(V)$ называется **нильпотентным**, если $\phi(t) = t^\nu$

Минимальный многочлен \mathcal{B} , т.е. $\mathcal{B}^\nu = \emptyset$

ν – индекс нильпотентности (мин. степень $\mathcal{B}^\nu = \emptyset$)

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

Идемпотентность

Степень минимального многочлена $\rightarrow \nu \leq \dim V = \underset{\text{степень } \chi}{\uparrow} n$

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \leq \dim V_\lambda$

Доказательство. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = \emptyset$$

$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_\lambda \in End(K_\lambda)$

$$m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$$

□

Замечание. $\sum_{\lambda} m(\lambda) \leq \sum_{\substack{\parallel \\ \deg \chi}} \dim K_\lambda = n$

$$\bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана).

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ можно представить в виде:

$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где \mathcal{D} о.п.с.

\mathcal{B} нильпотентный, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ перестановочны

Доказательство. ϕ – минимальный многочлен \mathcal{A}

$\mathcal{E} = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$ операторн. разложение единицы

$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$ \mathcal{D} о.п.с.?

$V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$

$\exists v_\lambda \neq 0 \in Im \mathcal{P}_\lambda$

$$0 \neq \lambda$$

||

$$\underline{\underline{Dv_\lambda}} = (\sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}) v_\lambda = \sum_{\mu} \mu (\mathcal{P}_{\mu} v_\lambda) = \lambda \mathcal{P}_\lambda v_\lambda = \underline{\underline{\lambda \cdot v_\lambda}}$$

$$\mathcal{P}_{\mu} \mathcal{P}_\lambda = \emptyset$$

$$\lambda \neq \mu$$

$\Rightarrow \lambda$ с.ч. \mathcal{D}, v_λ соотв. с.в. \mathcal{D}

\Rightarrow $Im \mathcal{P}_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathcal{D}}$ собств. подпр-во \mathcal{D} , отвечающ. с.ч. λ $\Rightarrow Im \mathcal{P}_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$ дизъюнктны

Объединение базисов $Im \mathcal{P}_\lambda$ – базис V

Каждый вектор из $Im \mathcal{P}_\lambda$ – это с.в. \mathcal{D}

\Rightarrow у V есть базис из с.в. $\Leftrightarrow \mathcal{D}$ о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \mathcal{A} \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\nu = \max_{\lambda} m(\lambda) \frac{\phi(t)}{\min_{\text{мин. мн-н}} \mathcal{A}} = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda})^{\nu} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \mathcal{P}_{\lambda} =$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = 0$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\lambda}^2 = \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \underbrace{f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_{\lambda}} =$$

все операторы перестановочны

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu-m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})=0} = 0$$

\mathcal{B} нильпотент

$$\mathcal{B} = \sum_{\lambda} \underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}}$$

$$D = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$

□

Замечание.

$$1. \mathcal{B} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}$$

$$\mathcal{B}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{Im \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}}$$

2. $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ все три оператора взаимно-перестановочны

$$\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$$B^2 \stackrel{?}{=} \mathbb{0} \quad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Разложение Жордана}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Диагонализ.

Нильпотент.

Теорема 2 (Единственность разложения Жордана).

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)



Рис. 1

Доказательство. $\square \mathcal{A} = \frac{\mathcal{D}'}{\text{о.п.с.}} + \frac{\mathcal{C}}{\text{Нильпотент}} \quad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

T.K. \mathcal{D}' o.p.c., to $\mathcal{D}' = \sum_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

M – множество с.ч. \mathcal{D}'

Q_μ спектральные проекторы

$$Q_\mu : V \rightarrow V_\mu^\nu$$

$$\sum_{\mu} Q_{\mu} = \mathcal{E}$$

Достаточно доказать: $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

1. Множество M совпадает с множеством корней ϕ – минимальн. мн-н A

$$\{\mu\} = \{\lambda\}$$

2. $ImQ_\mu = K_\mu \leftarrow$ корневое подпространство \mathcal{A} , отвч. с.ч. μ ($Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$)

$$1. \quad (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})Q_\mu = (\sum_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

$$Q_\nu Q_\mu = 0 \quad \text{for } \nu \neq \mu \quad Q_\mu^2 = Q$$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

↑

Верно, если $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

\Rightarrow докажем: $CQ_\mu = Q_\mu C$

$$\square \lambda \neq \mu \ (\lambda - \mu) Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = (\lambda Q_\lambda) \mathcal{C} Q_\mu - Q_\lambda \mathcal{C} \underbrace{(\mu Q_\mu)}_{\mathcal{D}' Q_\mu} =$$

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \sum_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu \mathcal{D}'$$

$$Q_\lambda(\mathcal{D}'\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{D}')Q_\mu = \emptyset$$

$$\lambda \neq \mu \quad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \emptyset = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$$

$$\underbrace{\sum_{\lambda} Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu}_{\mathcal{E}} = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \frac{\boxed{\sum_{\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}{\boxed{\mathcal{E}}}$$

$$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

$$k(\mu) = \min K, \text{ такой что } \mathcal{C}^k Q_\mu = \emptyset$$

Такое $K(\mu)$ обязательно найдется, т.к. \mathcal{C} – нильпотент.

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

$(t - \mu)^{k(\mu)}$ – минимальный аннулятор элементов $\text{im} Q_\mu$

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)}$$

ϕ минимальный многочлен $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулирует любые элементы V ,

в частности элементы $\text{Im} Q_\mu$

Т.е. $\phi(t)$ аннулятор элементов $\text{Im} Q_\mu \Rightarrow \phi(t) \cdot (t - \mu)^{k(\mu)} \leftarrow$ минимальный аннулятор для $\text{Im} Q_\mu$

\Rightarrow верно $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t - \mu)^{k(\mu)}$$

$$\Rightarrow \phi \cdot \psi$$

Покажем, что ψ аннулятор \mathcal{A}

$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)}} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)} \underbrace{(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}_{\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow \psi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \cdot \phi$ минимальный аннулятор

$$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda - \text{корни } \phi\}$$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$

$$\mu = \lambda$$

$$2. \quad (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

||

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

μ корень ϕ

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = \text{Im} \mathcal{P}_\mu$$

$$\left. \begin{array}{l} \bigoplus_{\mu} K_\mu = V \\ \bigoplus_{\mu} \text{Im} Q_\mu = V \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im} Q_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

□

Теорема 3. $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$$

Доказательство. $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$$\mathcal{B}^\nu = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \mu - \text{не корень} & \quad (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\parallel \emptyset}) = \\ & = \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E} - t\mathcal{B}) \cdot \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1}) \end{aligned}$$

μ – не корень

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu &= \det \underbrace{[\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}]}_0 \underbrace{[-\mathcal{B}]}_{\mathcal{D}} \cdot \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} = \\ &= \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}} \end{aligned}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

□

Следствие 1. Если $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана

$$\text{To } \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$$

Доказательство. Очевидно, $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$

□

Следствие 2. $\boxed{\dim K_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \stackrel{\text{o.p.c.}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = \dim \mathcal{P}_\lambda = \dim K_\lambda$
 $\forall \lambda$ корня χ с.ч. (I, II)

□

7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda \text{ корневые} \quad \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$\chi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \quad \lambda \in K \text{ все корни с.ч.}$$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \quad \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$$

\bigcap

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$\forall \lambda K_\lambda \rightsquigarrow$ строим базис \rightsquigarrow матрица оператора будет иметь
 \bigcup_λ Жорданов базис блочно-диагональную структуру
– Жорданова форма матрицы

$$\square K_\lambda = K \quad \gamma(\lambda) = \gamma$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha \quad m(\lambda) = m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \quad \dim = \gamma$$

$$K_1 = V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$$

\cap

$$K_2 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^2$$

\vdots

\cap

$$K_m = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad \dim = \alpha$$

Пример.

$$\alpha = \dim K_\lambda = \dim K_5 = 24$$

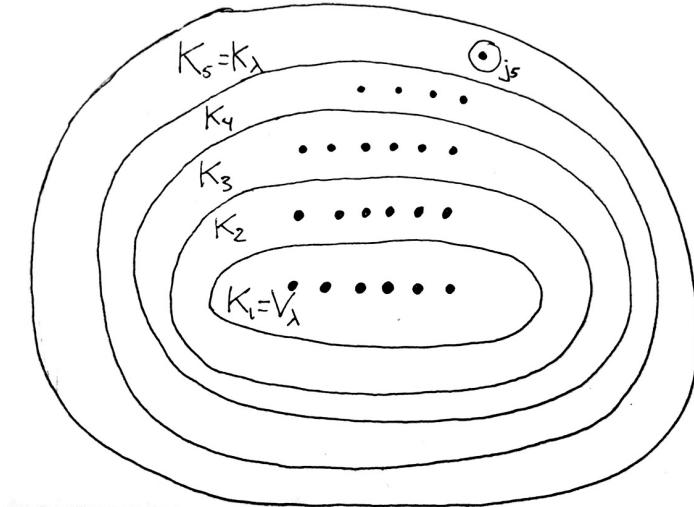
$$m = 5$$

$$\gamma = 7$$

j ₅	$\in K_5 \setminus K_4$
j ₄	$= \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_5 \in K_4$
j ₃	$= \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_4 \in K_3$
j ₂	$= \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_3 \in K_2$
j ₁	$= \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda$

Циклический базис

$$j_1, j_2, j_3, j_4 - \text{присоединенные вектора.}$$



$$\mathcal{A}|_L$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

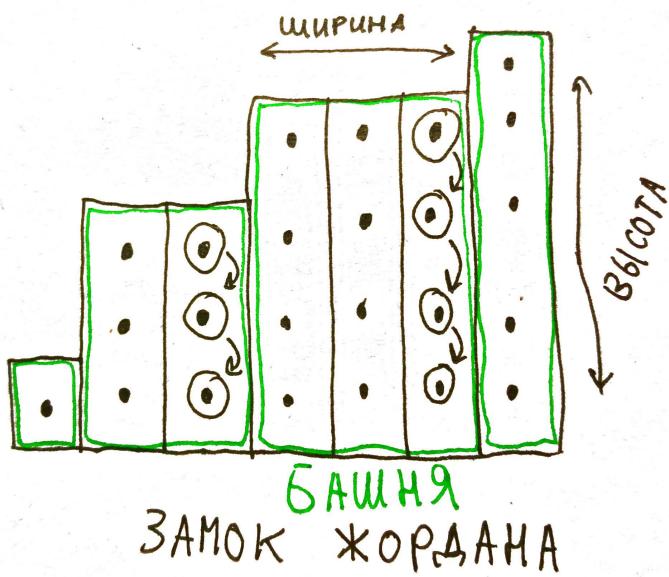
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 \quad \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 \quad \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 \quad \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 \quad \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5$$

Матрица $\mathcal{A}|_L$ в базисе $j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Клетка Жордана 5×5
(блок нижнего уровня)

$$(j_5 \ j_4 \ j_3 \ j_2 \ j_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



Башня – циклическое объединение базисов одной длины.

Высота башни – количество векторов в базисе.

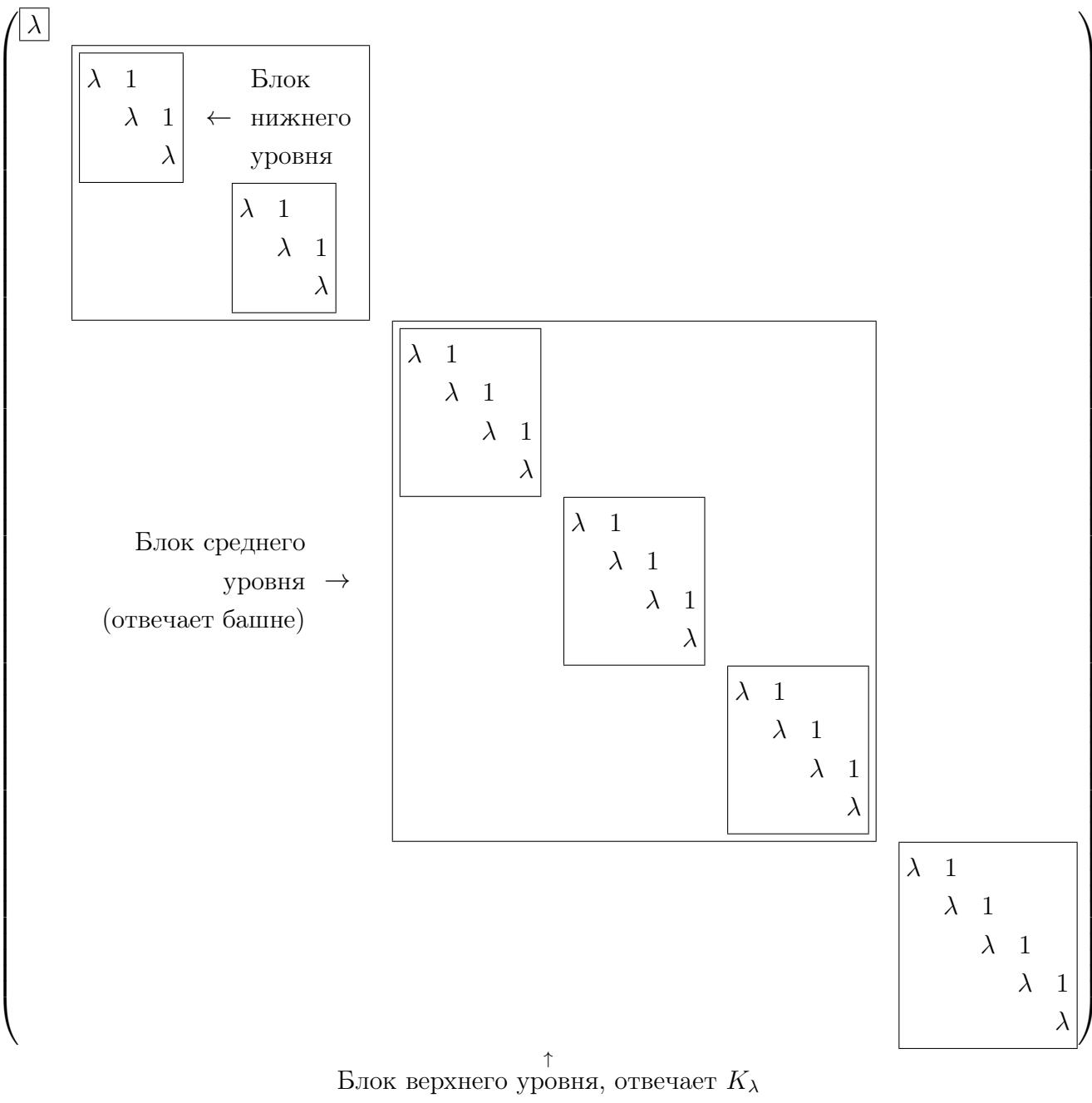
Ширина башни – число циклических базисов одной размерности

Основания каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов = γ

||

Число Жордановых клеток



γ = Число блоков нижнего уровня

α = Число λ на диагонали

\mathcal{A} о.п.с. $\forall \alpha = \gamma$

V_λ $\boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$

"Деревня Жордана"

Примеры. $\lambda \alpha(\lambda) = 4$

$$1. \gamma(\lambda) = 3 \begin{pmatrix} \boxed{\lambda & 1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$2. \gamma(\lambda) = 2 \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ или } ? \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$3. \gamma(\lambda) = 1 \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} \quad T = (\dots j_1 \dots j_5 \dots)$$

Объединение цикл. базисов для всех λ

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \mathcal{J} \\ & & \text{В Жорд. базисе} \\ \uparrow & & \\ A & & \\ & \text{В исходном} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{J} = T^{-1}AT}$$

$$\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}} \rightarrow T\mathcal{J} = AT$$

1, 3

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы $T \rightsquigarrow T$

\rightsquigarrow построить Жорданов базис.

2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \underset{\dim K = \alpha}{K}$
- $K_r = \text{Ker}(A - \lambda E)^2$
- $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$$\forall \lambda \quad K = K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$$m(\lambda) = m$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha$$

$$K_r = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^r \quad r = 1 \dots m$$

$$V_\lambda = K_1$$

$$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$$

Все включения будут строгие:

$$\square K_{r+1} = K_r \quad \text{Ker} \mathcal{B}^{r+1} = \text{Ker} \mathcal{B}^r$$

По Теореме о rg и def: $\dim K = \text{rg} \mathcal{B}^{r+1} + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^{r+1}} = \text{rg} \mathcal{B}^r + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^r} \quad (\text{def} \mathcal{B}^{r+1} = \text{def} \mathcal{B}^r)$

II

1. Найдем $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = \text{Ker}(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$
 $\Rightarrow \dim K_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

$$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} = Im\mathcal{B}^r \rightarrow 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие}$$

$$\parallel$$

$$Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) = Im\mathcal{B}^r \xrightarrow{\text{либо}} \mathcal{B}^r = \emptyset - \text{противоречие мин. } m$$

$$Im\mathcal{B}|_K =: BK$$

$$Z_0 = BK$$

$$Z_r = BK + K_r$$

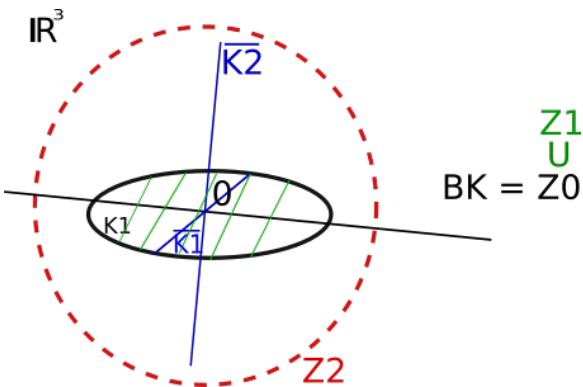
$$r = 1, \dots, m \quad (K_m = K) \quad B : K \rightarrow K$$

$$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_m = K$$

$$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$$

$$\overline{K_r} \subset K_r$$

$$K = \underbrace{BK \oplus \overline{K_1}}_{Z_1} \oplus \underbrace{\overline{K_2}}_{Z_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m}$$



$$\underset{dim 2}{\parallel} \quad \underset{dim 3}{\parallel} \quad K_1 \subset K_3$$

$$\underset{def\mathcal{B}}{\parallel} + \underset{dim Im\mathcal{B}}{\parallel} dimK_1 + dimBK = 3$$

$$Z_1 = BK + K_1 \supseteq Z_0$$

∩

$$Z_2 = BK + K_2$$

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

Теорема 1. $0 \leq r \leq m - 1$

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

Доказательство.

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

$$\forall x \in K \quad x = \underset{\in \overline{K_1}}{x_1} + \underset{\in \overline{K_2}}{x_2} + \dots + \underset{\in \overline{K_m}}{x_m} + \underset{\in BK}{Bx^*}$$

$$1 \leq r \leq m - 1$$

$$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \dots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* [=]$$

$$B^r x_j = B^{r-j} B^j x_j = \underset{\emptyset}{\parallel}$$

$$1 \leq j \leq r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = \text{Ker } B^j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$$\boxed{B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^*}$$

Дизъюнктность?

$$* B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = 0$$

$$B^r (\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^*}_{y}) = 0$$

$$y \in \text{Ker } B^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r \oplus BK$$

$$\Rightarrow y = x_1 + x_2 + \dots + x_r + \underbrace{B}_{x_i \in \overline{K}_i} x^{**}$$

Однозначно представим

$$\begin{aligned} & \| \\ x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^* & \Rightarrow \boxed{x_i = 0} * \\ x_{r+i} \in \overline{K}_{r+i} & \quad \forall i = 1 \dots m \end{aligned}$$

↓ подставим

$$0 + 0 + \dots + 0 + B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow \text{дизъюнктн.}$$

□

Следствие 1.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus$$

$$\underbrace{\oplus B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^{m-2} \overline{K}_{m-1}}_{\text{---}} \oplus B^{m-2} \overline{K}_m \oplus B^{m-1} \overline{K}_m$$

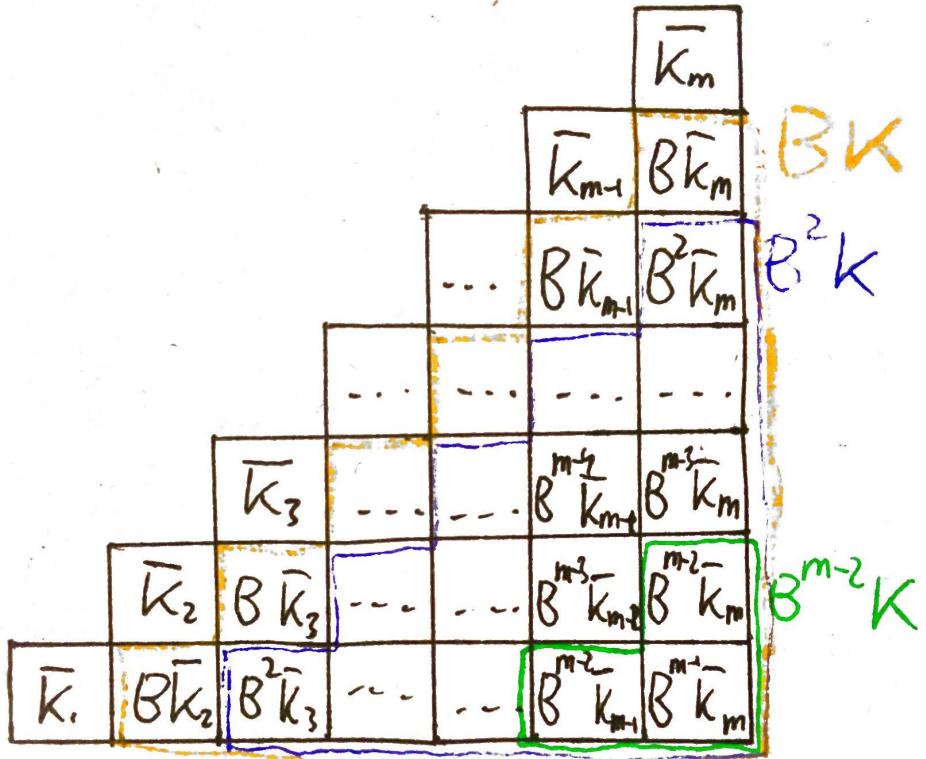
Доказательство.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus BK$$

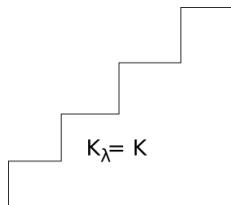
$$BK = \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^2 K$$

$$\underbrace{B^2 K = B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^2 \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^3 K$$

□



\overline{K}_j – Опорные подпространства



$$1 \leq r \leq m$$

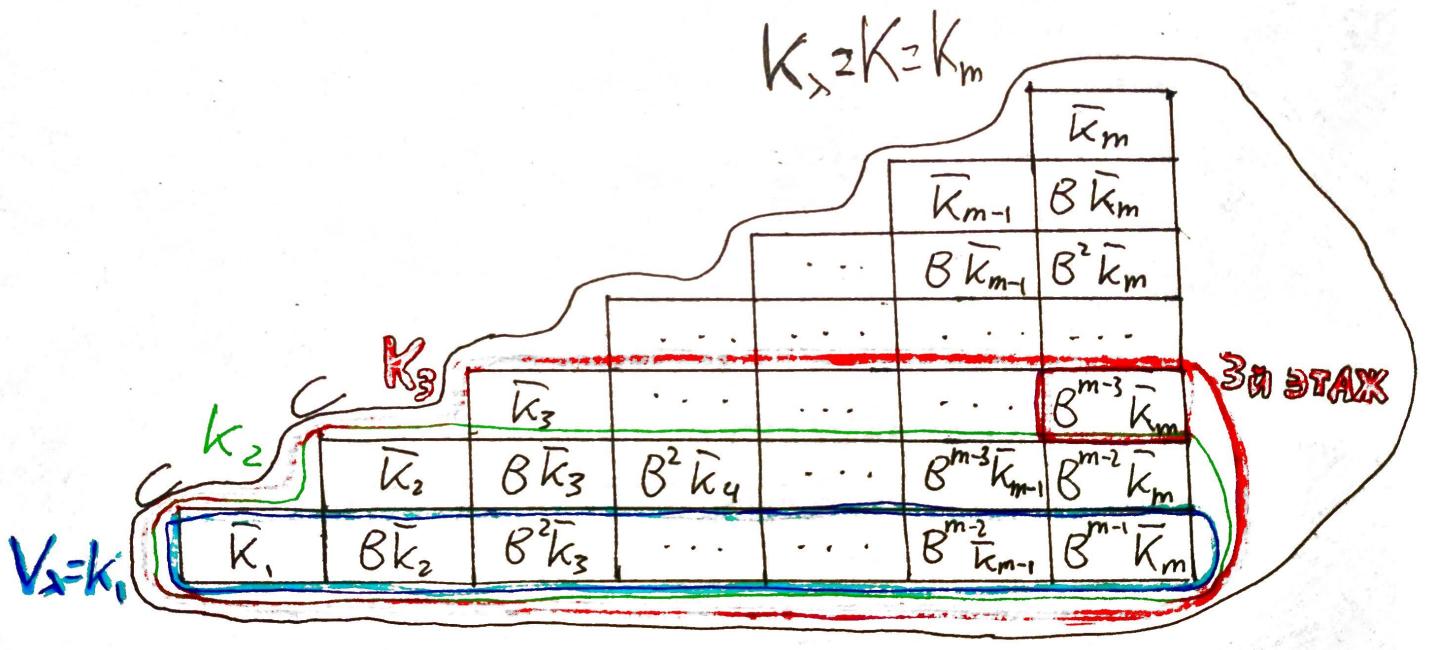
$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset \rightarrow \tau_r = \overline{K}_r \oplus B\overline{K}_r \oplus B^2\overline{K}_r \oplus \dots \oplus B^{r-1}\overline{K}_r$$

Башня высоты r . "Башня растет вниз"

"Основание" башни \equiv опорное подпространство \overline{K}_r

"Крыша" башни $\equiv B^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$

$$x \in B^{r-1}\overline{K}_r \quad \begin{array}{l} x = B^{r-1}y \\ y \in \overline{K}_r \subseteq K_r \end{array} \quad \frac{Bx = B^r y = 0}{x \in \text{Ker } B = V_\lambda}$$



Если $K_r = \{\emptyset\}$, то башня высоты r отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$$1 \leq l \leq m$$

$$\bar{K}_l, B\bar{K}_{l+1}, B^2\bar{K}_{l+2}, \dots, B^{m-1}\bar{K}_m \subset K_l = \text{Ker } B^l$$

— l -ые этажи соотв. башен

Покажем: $B^j\bar{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\bar{K}_{l+j}) = (B^{l+j})_{\subset K_{l+j} = \text{Ker } B^{l+j}} = 0 \Rightarrow B^j\bar{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^m \tau_r$$

Теорема 2 (О размерности башни).

$\forall \tau_r$ любой этаж башни имеет одну и ту же размерность $d_r = \dim \bar{K}_r$ = ширина башни.

\downarrow r высота τ_r	\bar{K}_r $B\bar{K}_r$ $B^2\bar{K}_r$ \dots $B^{r-1}\bar{K}_r$	$d_r = \dim \bar{K}_r$ = ширина башни
--	--	---------------------------------------

Доказательство.

$$B^j|_{\bar{K}_r} : \bar{K}_r \rightarrow B^j\bar{K}_r$$

$B^j_{\bar{K}_r}$ изоморфизм "?"

$$\text{Ker } B^j|_{\bar{K}_r} = \{\emptyset\}$$
 тривиально "?"

$$\begin{array}{ccccccc}
 x \in \overline{K}_r \subset K_r \subset Z_r & = & Z_{r-1} & \oplus \overline{K}_r & \xrightarrow{\exists x} & \boxed{x = \emptyset} & \boxed{Z_{r-1} = BK + K_{r-1}} \\
 x \in \text{Ker } B^j = K_j \rightarrow & & \nearrow & \cup & & & \\
 j=1 \dots r-1 & & K_{r-1} & & & & \\
 & & \cup & & & & \\
 & & \vdots & & & & \\
 & & \cup & & & & \\
 & & K_1 & & & &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Изоморфизм} \Rightarrow \dim(\overline{K_r}) = \dim(B^j \overline{K_r}) = d_r$$

1

Следствие 1. $\sum_{r=1}^m d_r = \dim V_\lambda = \gamma(\lambda)$

$$\sum_{r=1}^m \underbrace{r \cdot d_r}_{\dim \tau_r} = \dim K_\lambda = \dim K = \alpha(\lambda)$$

Следствие 2 (Теорема Фробениуса).

$$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$$

$$(d_m = rgB^{r-1})$$

Доказательство.

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

$$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

$$d_2 + \dots + d_m = \rho_1 - \rho_2$$

—

$$d_3 + \dots + d_m = \rho_2 - \rho_3$$

—

$$d_{m-2} + d_{m-1} + d_m \equiv \rho_{m-3} - \rho_{m-2}$$

—

$$d_{m-1} + d_m \equiv \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

—

$$d_m \equiv \rho_{m-1}$$

1

$$\theta_m \equiv 0$$

$$d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$$

1

$$\begin{array}{c}
 \leftarrow d \rightarrow \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline
 g_1 & g_2 & \dots & g_d \\ \hline
 Bg_1 & Bg_2 & \dots & Bg_d \\ \hline
 B^2 g_1 & B^2 g_2 & \dots & B^2 g_d \\ \hline
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
 B^{r-1} g_1 & B^{r-1} g_2 & \dots & B^{r-1} g_d \\ \hline
 \end{array} \\
 \mathcal{E}_n = \text{span}(g_1, \dots, g_d) \\
 B\mathcal{E}_n \\
 \mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \quad \text{изоморфизм} \\
 \text{базис } \xrightarrow{B} \text{базис} \\
 \text{span}(g_1, \dots, g_d, Bg_1, B^2 g_1, B^3 g_1, \dots, B^{r-1} g_1, B^{r-1} g_2, \dots, B^{r-1} g_d) \\
 = \mathcal{E}_n \\
 i=1, \dots, d \quad f: Bg_1, B^2 g_1, \dots, B^{r-1} g_1 \\
 \text{множественные} \\
 \text{вектора} \\
 \text{назад к исходному} \\
 \text{базису, породенному} \\
 \text{вектором } g_i
 \end{array}$$

$S_i = \text{span}(g_i, Bg_i, \dots, B^{r-1}g_i)$ циклическое подпр-во

$$T_r = \bigoplus_{i=1}^d S_i$$

$A|_{S_i}$ \leftrightarrow м-на б $g_i, Bg_i, \dots, B^{r-1}g_i$?
связь

$$A|_{S_i} = (B + \lambda C)|_{S_i}$$

члены
связь:

$$\overline{B^{r-1}g_i, B^{r-2}g_i, \dots, Bg_i, g_i}$$

$$Ag_i = Bg_i + \lambda g_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ABg_i = B^2g_i + \lambda Bg_i$$

$$AB^{r-2}g_i = B^{r-1}g_i + \lambda B^{r-2}g_i$$

$$AB^{r-1}g_i = B^rg_i + \lambda B^{r-1}g_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_i \in \bar{K}_r \subset K_r = \text{Ker } B^r$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

диагональная матрица γ_{xx} (блок-матрица)
уровень

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n} = \lambda E_n + I_n$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_n = \bigoplus_{i=1}^d \zeta_i$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} J_n(\lambda) \\ J_{n-1}(\lambda) \\ \vdots \\ J_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

d krok
(следует
последовательно)
относительно

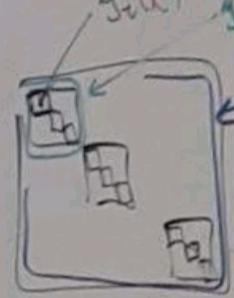
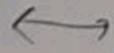
$$k_n = k = \bigoplus_{i=1}^n \zeta_i$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} J_n(\lambda) & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} J_{n-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & J_1(\lambda) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

δια
діагональ
у рядку
(ком-м
занесен
векторі)

δια
у рядку
(ком-м
користую
нагорі)

$$A = A / V = \oplus_{\lambda} K_{\lambda}$$



j_{k_1}

j_{k_2}

S_{k_3}

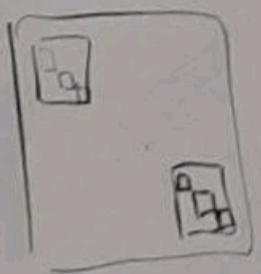
j_{k_1}

j_{k_2}

j_{k_3}

$= y$

нормирована
ориентированная
матрица



отображение всех циклических базисов для всех

базисов для всех корневых подпр-й = нормированные
базисы

$$j = (j_1 \dots j_k \dots j_n) \quad T = T_{e-i}$$

$$Y = T^{-1} A T$$

если базис V

$$A \hookrightarrow A$$

в базисе e .

$$T Y = A T$$

\Rightarrow можно найти T , решив матрич. систему
уравнений

3-й алгоритм построения
диаг. и бл. для матрицы.

$$\lambda! \quad K_\lambda = K = \underbrace{K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m}_{E} \oplus BK$$

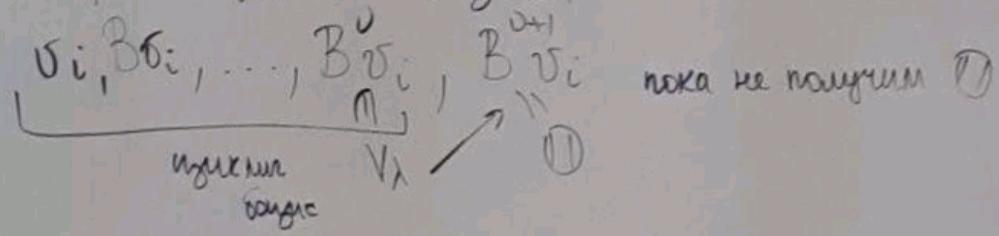
1. найдем $K = K_\lambda$

$$2. \text{ найдем } BK = \text{Im } B / \ker B \quad B = A - \lambda E$$

3. дополним BK до K

$$\text{т.е. найдем базисные векторы } \tilde{K} = \overline{K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m} = \text{Span}(v_1, \dots, v_t)$$

4. Ъзгем орнандың күкнөрү. Гаузас!



Түмнөр:

күнкә → де. оп

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (t-5)(t-4)^3$$

$$\lambda_1 = 5 \quad d(\lambda_1) = 1 \Rightarrow p(\lambda_1) = 1$$

$$\lambda_2 = 4 \quad d(\lambda_2) = 3$$

$$p(\lambda_2) = ?$$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_2 E) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3$$

$$p(\lambda_2) = 1 \rightarrow 1 \text{ күнкә} \\ (\text{1 күнкә, 8 мүнис})$$

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$K = K_3 = \ker(A - \lambda_2 E)^3 =$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} v = k_1$$

$$BK = \text{span}(Bv_1, Bv_2, Bv_3) =$$

$$= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$K = BK \oplus \overline{k}_1 \oplus \overline{k}_2 \oplus \overline{k}_3$$

$$= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3-20 \\ 4-21 \\ 3-10 \\ 1-11 \end{pmatrix} \right) = 3$$

$$K = \text{span}(\mathcal{V}_3) \rightarrow 1 \text{ ungen. Space}$$

*argue
now*

$$\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^2\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$j = (\mathcal{V}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 1, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме

7.11 опр. я от м-цил, привод. к ж.ф.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad |x| < R$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$$

$$A = T J T^{-1}$$

$$f(J_r(\lambda)) = ?$$

$$J_r(\lambda) = \lambda E_r + I_r$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda_r) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{r \times r}$$

$$I_r = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{r \times r}$$

$$f(\mathcal{J}_r(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathcal{J}_r^m(\lambda)$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2!}\lambda^{m-2} & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3} & \dots \\ 0 & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \ddots \\ & & & & \lambda^m & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \boxed{I^4 = 0} \quad \boxed{I^r = 0}$$

$m = \frac{m(m-1)}{2!}$

7.11 CP-я ом м-ура, нульог. к м.п.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad |x| < R$$

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m x^{m-1}$$

$$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^{m-2}$$

$$f(t\ln(x)) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m (\ln x)^m \right) t^m = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m (\ln x)^{m-1} t^m = \frac{t}{1!} \sum_{m=1}^{\infty} c_m m(m-1) (\ln x)^{m-2} t^{m-1} = \frac{t^2}{2!} \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2) (\ln x)^{m-3} t^{m-2} = \frac{t^3}{3!} \sum_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2)(m-3) (\ln x)^{m-4} t^{m-3}$$

$$f(Ax) = T f(\lambda x) T^{-1}$$

$$f(t\ln(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m(\lambda) t^m$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

$$f(\lambda x) + \frac{f'(\lambda x)}{1!} + \frac{f''(\lambda x)}{2!} + \frac{f'''(\lambda x)}{3!}$$

$$f^{(k)}(xt) = \left(f^{(k)}(x) \right) \Big|_{x=xt}$$

$$f(x)$$

Humped:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$A = T \tilde{e}^{-T - 1}$$

$$f(A) = T f(T) T^{-1}$$

8 Тензоры

8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования.

Часть VIII Тензоры

8.1. Линейные формы (линейные функционалы).
Сопряженное пр-во. Ковариантное и
контравариантное преобразования.

V над полем $K (R, C)$

def: $f: V \rightarrow K$

отображение, наз. ся линейной формой (линей. ф-м), если

$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in V$ $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$

однор+домн = НН-НО

Примеры:

$$1. \quad V = \{ g \mid g \in C(\mathbb{R}) \}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{\delta(g) = g(0)}$$

дельта-ср-я Дурака

мин. фрмца.

$$2. \quad V_3 \quad \bar{a} - \text{сопоставл.}$$

$$\forall v \in V_3 \quad f: V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(v) = (\hat{a}, \bar{v})$$

склн. нр. е.

мин. фрмца

3. P_n ~~нек-хм~~ симметрическим \leq_n

$m \in \mathbb{N}$

$t_0 \in \mathbb{R}$

такое

$f_m: P_n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall p \in P_n \quad f_m(p) = \frac{p^{(m)}(t_0)}{m!}$$

нек-форма.

4. $A_{n \times n} \quad M_{n \times n}$ np-бо $n \times n$

$f: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A \quad \text{нек. форма.}$$

$$f(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \text{tr } A + \text{tr } B = f(A) + f(B)$$

V координаты.

$e = (e_1, \dots, e_n)$ базис V

$$\forall x \in V : x = x^i e_i \left(= \sum_{i=1}^n x^i e_i \right)$$

np-коэффициенты

$$\longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{коэффициенты} \\ \text{относительно } e \end{array}$$

$f: V \rightarrow \mathbb{R}$

нек. форма

$$\text{def: } \bigcirc: V \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall v \in V \quad \bigcirc(v) = 0$$

$f_1 + f_2$
 $x f_1$

$$-f: V \rightarrow \mathbb{R}$$

f противоположная нек. форма

$$\forall v \in V \quad -f(v) = -(f(v))$$

$$V^* = \left\{ f : V \rightarrow K \mid \text{линейные} \right\}$$

базис-риман 1° - 8° аксиомы. = лин. нр-бо

$$\underline{V^* \text{ компактное (дualное)}}$$

нр-бо KV

$$f \in V^* \quad \forall x \in V$$

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K} = x^i a_i$$

$$\longleftrightarrow (a_1 \dots a_n) = a \in K, \text{ нр-бо } n\text{-мерных строк}$$

отображает cb вом
нр-бо.

a_i корр. к f отн-но базиса e

$$\begin{aligned} f &\leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \\ g &\leftrightarrow b = (b_1 \dots b_n) \end{aligned} \quad f + \lambda g \rightarrow a + \lambda b$$

$$V^* \cong K^n \quad (\text{изоморфизм не единичен, т.е.})$$

зависит от

(базиса)

$$\Rightarrow \dim V^* = n = \dim V$$

Напоминание: $V^* = \{ f: V \rightarrow K \}$ сопряженное (дualное)пр-бо K V

$V^* \cong K^n$ - пр-бо n -мерных строк. (не естественный)

$$\text{т.е. в базис } V \quad \forall x \in V \quad x = x^i e_i \quad f(x) = x^i f(e_i) = x^i a_i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \in K^n$$

$$\forall f \in V^* \quad \downarrow \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n \text{ пр-бо } n\text{-мерных строк базиса.}$$

$$\dim V^* = n = \dim V$$

Определение: $w^i : V \rightarrow K$ $\forall x \in V \quad w^i(x) = x^i$ эти коор-ты x относительно базиса $e_1 \dots e_n$

однозначно, w^i уни-отобр. $\Rightarrow w^i \in V^*$

$$\text{однозначно, } \forall i=1 \dots n \quad w^i(e_j) = \delta_{ij}^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

символ Кронекера

Теорема 1: w^1, \dots, w^n базис V^*

Док-во! т.к. $\dim V^* = n$, то достаточно проверить лин. незав. w^1, \dots, w^n .

$$\exists d_i w^i = 0, d_i \in K$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad d_i w^i(x) = 0 \Rightarrow \text{в частности, где } \forall j=1 \dots n \quad \underbrace{d_i w^i(e_j)}_{e_j} = 0 \Leftrightarrow d_j = 0 \quad \forall j=1 \dots n$$

$\Leftrightarrow w^1, \dots, w^n$ лин. незав. \Rightarrow базис V^*

Следствие: $\forall f \in V^*$ коор-ты $a_i = f(e_i)$ одна-ая коор-ны формы f в пр-ве V^* относительно базиса w^1, \dots, w^n

т.о. $V^* \cong K^n$ - коорд. изоморфизм. относительно базиса w^1, \dots, w^n

док-во! $\forall f \in V^* \quad \forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i$, где $a_i = f(e_i)$

$$\text{т.к. } x^i = w^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i w^i(x) \quad \forall x \in V \Rightarrow f = a_i w^i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n)$$

коорд-ны f
относительно базиса w^1, \dots, w^n

def: коорд. ор-ши $w^1 \dots w^n$, порожденные базисом $e_1 \dots e_n$ пр-ва V
т.е. сопряженный (дualный) базис пр-ва V^* к базису $e_1 \dots e_n$ пр-ва V

[?] Важней ли базис V^* будет сопряженным к некоторому базису пр-ва V ?

Теорема 2! $\exists w''_1, w''_2, \dots, w''_n$ базис $V^* \Rightarrow \exists$ базис e'_1, e'_2, \dots, e'_n пр-ва V , м.р.
базис w' будет сопряженным к базису e'

Док-во! $\exists e_1, \dots, e_n$ базис V , а w^1, \dots, w^n базис V^* , сопряжен. к e .

т.к. w и w' базисы пр-ва V^* , то $(w''_1 \dots w''_n) = (w^1 \dots w^n) T_{w \rightarrow w'}$

т.к. в коорд. представлении в-та V^* соотв-т строки, T и-за перехода.

то наилегчее равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} w''_1 \\ w''_2 \\ \vdots \\ w''_n \end{pmatrix} = T_{w \rightarrow w'}^\top \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

обозначим $S := T_{w \rightarrow w'}^\top$

и-за S , очевидно, невырожденная $\Rightarrow \exists S^{-1} = T$

Определение "новый" базис в пр-ве V следующим равенством:

$$(e'_1 \dots e'_n) = (e_1 \dots e_n) T, \text{ т.о. } T = T_{e \rightarrow e'}$$

т.каким, что w' будет сопряженным к построенному e' .

$$S = \left(S_{ij}^k \right)_{n \times n} \text{ номер стр } \begin{cases} i \\ j \end{cases}, \text{ аналогично } T = \left(t_{ij}^k \right)_{n \times n} \Rightarrow w'^i = S_k^i w^k$$

$w^i(x) = S_k^i w^k(x) = \underbrace{S_k^i x^k}_{(\bar{S}x)_i}$ — в базисе e' $\Rightarrow w'^i$ — координаты
в базисе e' , т.к. $T = T_{e \rightarrow e'}$, т.о. $x' = T^{-1}x = Sx$

т.е. w' сопоставлена базису e' .

Следствие: e, e' базисы V , $T = T_{e \rightarrow e'}$, $S = T^{-1}$
 w, w' сопоставлены к e и e' , соответственно, базисы V^*

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \forall x \in V \quad x' = Sx = T^{-1}x \\ \forall f \in V^* \quad f' = fT \end{array}}, \text{ причем } T_{w \rightarrow w'} = S^T = (T^{-1})^T$$

док-во: $T_{w \rightarrow w'} = S$, очевидно, из док-ва T -ли.

такое, очевидно, что $x' = T^{-1}x$.

остается показать, что $\forall f \in V^* \quad f' = fT$

т.к. $(w^1 \dots w^n) = (w^1 \dots w^n) T_{w \rightarrow w'}$, то $(f')^T = T_{w \rightarrow w'} f^T \Rightarrow f' = f \underbrace{(T_{w \rightarrow w'})^T}_{S} = fT$

Замечание: очевидно, значение мин-формы f на элементе x не зависит от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (t_{ik}^i x^k) \cdot (a_m^m S_l^m) = \underbrace{(S_l^m t_{ik}^i)}_{(ST)_k^i} x^k a_m^m = x^k a'_k \quad - \text{инвариантность} \\ \text{формы} \quad \text{от выбора базиса}$$

$x = T x' \quad \uparrow \quad a = a' S'$

def: Векторы, координаты которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с формулой замены e на e' , т.е. с матрицей $T = T_{e \rightarrow e'}$, наз-ая координатными векторами или ковекторами \equiv элементы пр-ва V^*

Векторы, координаты которых, при замене базиса e на e' , меняются по закону, противоположному т.е. замене e на e' , т.е. с матрицей $T^{-1} = S$, наз-ая координатными векторами или просто векторами \equiv элементы пр-ва V

Помимо, мин-формы, также называются просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во $(V^*)^* = V^{**}$ — сопоставление сопоставленное к V

очевидно, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ (все тут пр-ва изоморфные)

Построение изоморфизма между V и V^{**} следующим образом:

$$\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**} : \quad \forall f \in V^* \quad \boxed{"x"(f) = f(x)}$$

составим.

проверим мин-то $"x"$: $\forall \lambda \in K \quad \forall f_1, f_2 \in V^*$

$$"x"(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = "x"(f_1) + \lambda "x"(f_2)$$

\Rightarrow мин-то $\Rightarrow "x" \in (V^*)^*$

Теорема 3: соответствие $x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$
 явн-ая вз-одн. и мин-ти, т.е. изоморфизм. ($V \cong V^{**}$)

док-во: так, $\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$

показать, что это отображение обладает св-вом ин-ти: $\forall \lambda \in K, \forall x_1, x_2 \in V$

$$(\lambda x_1 + x_2) \rightarrow " \lambda x_1 + x_2" \in V^{**} \quad \forall f \in V^* \quad " \lambda x_1 + x_2" (f) = f(\lambda x_1 + x_2) =$$

$$= \lambda f(x_1) + f(x_2) = "\lambda x_1" (f) + "x_2" (f) \Rightarrow "\lambda x_1 + x_2" =$$

$$= \lambda "x_1" + "x_2",$$

+ е. ин-ти.

т.о. мы получаем вложение пр-ва V в пр-во V^{**} ,
 однозначное св-во ин-ти.

В частности, $\exists e_1, \dots, e_n$ базис $V \rightarrow "e_1", \dots, "e_n" \in V^{**}$

$\Rightarrow \forall j=1 \dots, n \quad \forall f \in V^* \quad "e_j" (f) = f(e_j) = a_j$ — коор-та f в пр-ве V^* относительно базиса w^j пр-ва V^*

$\Rightarrow "e_j"$ коордн. ф-я и сопоставлен. базис к базису $w^j \Rightarrow$ по т-му $"e_1", \dots, "e_n"$ базис V^{**}

\Rightarrow т.о. такое вложение пр-ва на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис.

Замечание! 1. изоморфизм, построенный в т.ч. с помощью степеней изоморфизмов пр-в V и V^{**} , т.к. его построение не зависит от выбора базиса.

2. Применим отображение для пр-ва V и "х" пр-ва V^{**} ,
помимо пишут $x(f) := f(x)$ без кавыек.

$$\forall x \in V \quad \forall f \in V^* : \quad f(x) = x^i f(e_i) = w^i(x) a_i \quad f(e_i) = e_i(f) = a_i \\ x = x^i e_i \quad f = a_i w^i \quad \| \quad x(f) = a_i x / w^i = e_i(f) x^i \quad x(w^i) = w^i(x) = x^i$$

т.е. T-изом показывает, что на самом деле пр-ва V и V^* "равноправные"
 V^* сопрот. к V , а V сопрот. к V^* . Базис w сопрот. к e , т.к. как и базис e сопрот. к базису w .

$$3. \quad \forall x \in V \quad \forall f \in V^* \\ \uparrow \quad \downarrow \\ x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad a = (a_1 \dots a_n) \quad f(x) = x^i a_i = a \cdot x \stackrel{\text{"пр-в сопрот."}}{\Rightarrow} \text{т.к. } w^i(e_j) = \delta_j^i$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E$$

Пример! 1) \mathbb{R}^3 : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \therefore$ линейн. сопрот. базис w^1, w^2, w^3

$$w^i \leftrightarrow (a_1^i a_2^i a_3^i) = a^i$$

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} (e_1 e_2 e_3) = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^1 a_2^1 a_3^1 \\ a_1^2 a_2^2 a_3^2 \\ a_1^3 a_2^3 a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\Rightarrow A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = w^1 \\ = w^2 \\ = w^3$$

2)

$$V = \bigoplus V_\lambda$$

$P_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$
нестандарт.

$$\sum_\lambda P_\lambda = E$$

$$P_\lambda P_\mu = 0$$

$$P_{\lambda^2} = P_\lambda$$

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n) \rightarrow \text{построение } w^1, \dots, w^n \text{ сопрот. к } v_1, \dots, v_n$$

$$\Rightarrow \forall x \in V : x = \sum_\lambda x_\lambda = x^i v_i = w^i(x) v_i$$

$$\Rightarrow P_\lambda x = x_\lambda = \sum_{v_k \in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k \in V_\lambda} w^k(x) v_k$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1 \quad \alpha(\lambda_1) = -1 = f(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -3 \quad \alpha(\lambda_2) = 2 = f(\lambda_2)$$

построение сопрот. базис:
(см. пример 1)

$$w^1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ w^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ w^3 = (0, 0, 1)$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = v_2$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = v_1, v_2, v_3$$

$$w^i(x) = (a_1^i a_2^i a_3^i) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad i=1,2,3.$$

$$P_{\lambda_1}(x) = w^1(x) \cdot v_2 = \left(-\frac{x^1 + x^2}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ \frac{x^1 + x^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda_2}(x) = w^2(x) \cdot v_1 + w^3(x) \cdot v_3 = \frac{x^1 + x^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1 + x^2}{2} \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица линейное пр-во тензоров

V лин.пр-во над полем $K (R, C)$

V^* сопряженное пр-во; $\dim V = \dim V^* = n$

def: (1^{oe} def тензора) тензором α типа (p, q) (p -раз ковариантными, q -раз контравариантными) наз-ся линейная функция f : $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$

$$V^p = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз.}}$$

$$(V^*)^q = \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз}}$$

тензор $\equiv f$ линейн. ф-ция.

линейная \equiv линейная по каждому аргументу.

p и q - балансности тензора

$r = (p+q)$ - ранг или полная балансность тензора.

def: Тензор 2 типа $(p, 0)$, т.е. $f: V^p \rightarrow K$ наз-т ковариантные тензоры балансности p полином.

Тензор 2 типа $(0, q)$, т.е. $f: (V^*)^q \rightarrow K$ наз-т контравариантные тензоры балансности q полином.

Если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то говорят о тензоре смешанного типа.

Если $r = 0$, то тензор типа $(0, 0) \equiv$ скаляр $\in K$

Далее, определены операции "+" и " $\cdot \lambda$ " для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на аргументах и臺灣 надежде аргументов.

Определение \mathbb{O} : $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$, т.е. $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = 0$

и $-\mathbb{O}$, т.е. $-\mathbb{O}: V^p \times V^q \rightarrow K$, т.е. $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad -\mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = -1 \cdot \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$

$$\Rightarrow -\mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O} = \mathbb{O} + (-\mathbb{O})$$

Т.о. Выс-вие $1^{\circ} - 8^{\circ}$ аксиомы или. пр-ва (урп.)

def: $T_{(p,q)}$ — или. пр-во тензоров типа (p,q)

если в базисе V

w^1, \dots, w^q базис V^* , сопротивляющей e

$\xi_k \in V, k=1, \dots, p$
вектор (координатный)

$\xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}$ — коорд. вектор ξ_k относ. базиса e

$\eta^m \in V^*, m=1, \dots, q$
ковектор (ковариантный)

$\eta^m = \eta_{i_m}^m w^{i_m} \Leftrightarrow (\eta_1^m \dots \eta_q^m)$ — коорд. вектор η^m относ. базиса w

$d \equiv f$ помимо ф-ции \Rightarrow

$$\text{тензор } T_{(p,q)} \quad \boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})} \quad (1)$$

$$d \in T_{(p,q)} \quad \boxed{d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})} \quad (2) \quad \text{координаты (коэффициенты) тензора } d \text{ относ. базисов } e \text{ и } w$$

Т.о. очевидно, значение помимо ф-ии f (а значит и тензора d), полностью определяется значениями на базисных p -наборах базисных векторов e_j и q -наборах базисных ковекторов w^i .

$$\boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q}} \quad (1')$$

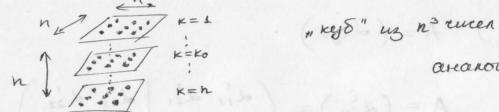
def: $S = (p+q)$ — шерох матрицы порядка n наз-са ши-бо элементов, записываемых двумя типа индексов: верхних i_1, \dots, i_q и нижних j_1, \dots, j_p , при этом все индексы пробегают значения от 1 до n .

$$\boxed{A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q})} \quad S = (p+q) \text{-мерная ш-ча порядка } n \text{ содержит } \boxed{n^{p+q} = n^S \text{ элементов.}}$$

Пример: 1) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $A = (a_j^i)_{n \times n}$ $A = (a^{ij})_{n \times n}$
двумерные ш-чи порядка n (n^2 элементов)

2) $A = (a_{j_k}^i)_{n \times n}$ 3-мерная ш-ча порядка n

фиксируем $k = k_0 \rightsquigarrow$ получаем $(a_{j_{k_0}}^i)$ — общая двумерная ш-ча.



"куб" из n^3 ячеек.

аналогично, 4-мерная ш-ча — упорядоч. набор из n 3-мерных ш-чи.

Т.о. $\forall d \in T_{(p,q)} \rightarrow A \text{ (p+q)-мерная ш-ча компонент } d$

Верно и обратное $\forall A \text{ (p+q)-мерной ш-чи } A \rightarrow$ помимо ф-ии f по формуле (1)(2), где e_1, \dots, e_p некоторый фиксир. базис V , а w^1, \dots, w^q базис V^* , сопротивл. e .

Т.о. получаем $\boxed{d \in T_{(p,q)} \Leftrightarrow A \text{ (p+q)-мерн. ш-ча.}}_{\text{вздох. порядка } n}$

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующих компонент их матриц, т.е. наше быв-ще. соответствие обладает св-вом лин-ти, т.е. действует изоморфизмом

$$\boxed{T_{(p,q)} \cong A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}) \cong K^{n^{p+q}}} \Rightarrow \boxed{\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}}$$

Сопоставление о порядке записи эл-тов многомерной матрицы (т.е. матрицы тензора)

общее правило:

первый индекс всегда верхний первий индекс, далее по верхней строке, а затем по низней.

$$\exists n = 2$$

$x=2$ возможное базисное значение: $A = (d_{ij}^i)$ $A = (d_{ij}^{ij})$ $A = (d_{ij})$ $\begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$

1^й индекс — всегда строка
 2^{ой} индекс — всегда столбец.

$$A = (d_{ij}^i) = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_2^1 & d_2^2 \end{pmatrix} \quad A = (d_{ij}^{ij}) = \begin{pmatrix} d_1^{11} & d_1^{12} \\ d_2^{21} & d_2^{22} \end{pmatrix}$$

$$x = 3 \quad A = (\alpha^{ijk}) \quad A = (\alpha_x^{ij}) \quad A = (\alpha_{jk}^i) \quad A = (\alpha_{ijk})$$

1^й шаг - одна строка

2nd index - Beerga syndrome.

3^{ий} индекс - бърза „слой“

$$A = \left(\begin{matrix} a_{jk}^i \end{matrix} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}^1 & a_{21}^1 & a_{12}^1 & a_{22}^1 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{12}^2 & a_{22}^2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$A = (\alpha_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{121} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \alpha_{212} & \alpha_{222} \end{array} \right)$$

$$= \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline d_{11}^{11} & d_{11}^{12} \\ d_{11}^{21} & d_{11}^{22} \\ \hline d_{12}^{11} & d_{12}^{12} \\ d_{12}^{21} & d_{12}^{22} \\ \hline d_{21}^{11} & d_{21}^{12} \\ d_{21}^{21} & d_{21}^{22} \\ \hline d_{22}^{11} & d_{22}^{12} \\ d_{22}^{21} & d_{22}^{22} \end{array} \xrightarrow{\text{1 сокр}} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\text{2 сокр}} A_{22}$$

$\gamma = 4$ и \bar{n} индекс - номера строк

2^{ой} индекс - всегда отрицателен

3rd week = forma sólida

4 и шарк - бензин "секущий"

Тримеров

$$1) \quad f \in V^* \quad f - (1,0) \text{ мензүр. (1 ның көбәрәкшүйи)}$$

$$f: V \rightarrow K$$

with.

$$\forall \xi \in V \quad \xi = \xi^c e_i \quad f(\xi) = \xi^c \frac{f(e_i)}{d_i} \quad \Leftrightarrow \quad A = (d_1 \dots d_n) \quad \text{tunenach } u = \xi$$

$$2) \quad V_3 - 3\text{-мерн. гом. вектора}. \quad f: V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3 \quad f(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi \quad \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$$

Очевидно, f - билinearная ф-я - монор. типа $(2,0)$, $f \in T_{(2,0)}$

$$2. e_1 = \bar{i}, e_2 = \bar{j}, e_3 = \bar{k}$$

$$f(\bar{a}, \bar{b}) = d_{ij} a^i b^j \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = a^i e_i, \quad \bar{b} = b^j e_j, \quad d_{ij} = f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow f \Leftrightarrow A = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\Leftrightarrow f \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

→ $f(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}^T A \bar{b}$ ⇒ в нашем случае $f(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}^T B = \sum_{i=1}^3 \bar{a}^i B^i$ (тк. оба индекса на верху пишем, зкаков Σ)

? Как изменится вид тензора, если обрасти други - "новый" базис в про-ве V?

$$e_1 \dots e_n \text{ базис в } V \quad T = T_{\text{пер}}, \quad S = T^{-1} = T^T_{w \rightarrow w'}, \quad \forall x \in V \quad x = \sum_i x_i e_i \quad Sx = x^c e_i = x'^c e'_i$$

w^1, \dots, w^n бажуться нр ба V^* , соразмеж. к едн', w_1, \dots, w_m

$$\Leftrightarrow \forall \xi_k \in V \quad \xi_k^{j_k} = t_{r_k}^{j_k} \xi_k^{r_k} \quad j_k = 1, \dots, n \\ r_k = 1, \dots, p$$

$$\forall \gamma^m \in V^* \quad \gamma_{i_m}^m = S_{i_m}^{u_m} \gamma_{u_m}^m \quad i_m = 1, \dots, n \\ m = 1, \dots, q$$

\Rightarrow
nogmaar een
 $f_1(1')$

$$f(g_1, \dots, g_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \left[d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_p}^{j_p} S_{i_1}^{i_1} \dots S_{i_q}^{i_q} \right] \sum_{j_1} \dots \sum_{j_p} \eta_{i_1}^{j_1} \dots \eta_{i_q}^{j_q}$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенным
вверху и внизу, происходит суммирование ($\sum_{l_1}^{i_m}, \sum_{j_k}^{k_l}$)
=) в результате просуммирован, получим
новую компоненту со штрафованными индексами.

$$= \boxed{d'_{\mu_1 \dots \mu_q} \eta^{\nu_1 \nu_p}_{\nu_2 \dots \nu_p}} S^{\nu_2 \dots \nu_p} \eta^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \nu_q}, \text{ m.o. получаем снова метроп тензор тензора } (p,q)$$

Т.о., при замене базиса тензор типа (p,q) останется тензором того же типа, а его координаты менются по следующему закону:

$$d'^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

коор-тные индексы
в "новых" базисах

коор-тные индексы
в "старых" базисах
 e, w

(3)

верхние индексы $i_1 \dots i_q$
преобразуются с и-ицей S , т.е.
по контравариантному закону,
постоину наз-ва контравариантными
индексами, а тензор
 q -раз контравариантный

След-но, нижние индексы $j_1 \dots j_p$ преобразуются с матрицей T , т.е.
по ковариантному закону, постину наз-ва ковариантными индексами, а
тензор P раз ковариантным.

Пример: 1) тензор типа $(0,0) \equiv \lambda \in K$, очевидно, не меняться при замене базиса,
м.е. инвариант.

2). $A = (a^i_j)_{n \times n}$ и-ца тензора $d \in T_{(1,1)}$

$$a^i_m = a^i_j t^j_m S^k_i \Leftrightarrow A' = SAT = T^{-1}AT \quad \text{получаем форму записи и-ца
или опр. при замене базиса.}$$

3) $\forall f \in V^*$ тензор типа $(1,0) \Leftrightarrow A = (a_i)_{n \times 1} = a \in K_n$

$$\forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i = x^i a'_j = a_i \left[\begin{smallmatrix} t^i_j & x^j \end{smallmatrix} \right] = a_i x^i$$

$V \cong V^{**}$ $x(f) \quad x: V^* \rightarrow K \quad$ тензор типа $(0,1)$

$$a_i x^i = a'_j x^j = x^i \left[\begin{smallmatrix} S^j_i & a'_j \end{smallmatrix} \right] = x^i a_i$$

4) $d \in T_{(1,2)} \Rightarrow A = (d^i_j)$

$$\text{Найти } d'^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{К примеру: } d^i_j S^j_i S^i_k \Leftrightarrow S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow (S^2 A_k (S^1)^T) t^k_2 = (2 - 17 - 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -19 \\ d'^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \in A_k \end{array}}$$

Вернемся к def тензора. Тензор был определен нами, как полилинейная ф-ция и
наше def не зависело от выбора базиса. В пр-ве V . Но, при этом, тензор оказался
согласован с записью базиса, т.е. после замены базиса тензор остается тензором,
причем того же типа. Для такого рода объектов иск-ва термин геометрический
объект. Поэтому сущ-т другой подход к def. тензора.

def: (2^{oe} def тензора) Тензором d типа (p,q) наз-ва геометрический объект на пр-ве V ,
который описывается A $(p+q)$ мерной матрицей элементов поля K размерности $n=dimV$.
При этом, каковы бы не были базисы e и e' в пр-ве V и соответствующие им
сопряженные базисы V^* и w , соответствующие компоненты матриц A и A'
должны быть связаны формулой (3).

Операции $"+"$ и $".\lambda"$ между двумя тензорами одного типа, очевидно, опр-ся в этом
случае как операции $"+"$ и $".\lambda"$ соответствующих континентных тензоров.

При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут
уд-ть пр-ле (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр ставка будет получать
тензор того же типа, что и исходные.

Действительно, $\forall \lambda \in K, d, \beta \in T_{(p,q)}$

$$(\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} := \lambda \cdot d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

$$(\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}) t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p}$$

$$d, \beta \in T_{(p,q)} \quad d^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p}$$

Т.о. мат. операциям на пр-ве поимен. ф-и соответствуют и-и опр. на матрических
и-цах с сохранением сб-ва (3). Намечены def 1 \Leftrightarrow def 2.

В зависимости от поставленной задачи, она будет иск-м как 1^{oe}, так и 2^{oe} def.

8.3 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

83 Произведение танцоров. Былие пр-ва танцоров. Операция сверхки.

def: $\alpha \in T_{(p_1, q_1)}, \beta \in T_{(p_2, q_2)}$

Фундаментальная моногород $\alpha \cup \beta$ наз-ся моногородом $f_1 = \alpha \otimes \beta \in T_{\text{sp}, p_1, q_1, q_2}$, компонентом которого она со связанным расположением:

конструкции для размещения

корректность def: надо проверить выполнение (3) для всех

Корректность def: надо проверить

Выполнение сб-ва (3) при новой
алгоритмической сущ. р.

Zámeranie: $\forall \lambda \in K$ - menzsa funkcia $(0,0) \Rightarrow \lambda x = \lambda \otimes x = x \otimes \lambda$

Тензорное произведение, очевидно, ассоциативно, но не коммутативно!

$$\text{Пример: } \alpha, \beta \in T_{(1,0)} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \beta^{\otimes 2} = (\alpha \otimes \beta) = (\alpha_i \beta_j) & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_4 \\ \beta^{\otimes 2} \in T_{(2,0)} & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \beta^{\otimes 2} = \beta \otimes \alpha = (\beta_i \alpha_j) & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2 \\ \beta^{\otimes 2} \in T_{(2,0)} & & \end{array}$$

$$g_1 \neq g_2 \quad A_2 = A_2^{-T}$$

$$\text{Imp. } \rightarrow \alpha \in T(p, q), \beta \in T(q, p) \Rightarrow \alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$$

2) дистрибутивно

Введем 1-ю def тензора произведения тензоров будем соотн-ть произведение функций, определяющих эти тензоры.

$$\alpha \leftrightarrow f: V^{P_1} \times (V^*)^{q_2} \rightarrow K$$

$$\beta \leftrightarrow g: V^{P_2} \times (V^*)^{q_2} \rightarrow K$$

$$\Rightarrow f \otimes g: V^{P_1+P_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \rightarrow K$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \xi_2, \dots, \xi_{P_2} \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$$

$$f \cdot g (\xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \xi_2, \dots, \xi_{P_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2}) = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_{P_1}} \delta_{j_2 \dots j_{P_2}}}_{\text{подстановка выражения компонент } f \text{ в } g} \underbrace{\xi_1^{i_1 \dots i_{q_1} k_{11} \dots k_{1q_1}} \xi_2^{i_2 \dots i_{q_2} k_{21} \dots k_{2q_2}} \dots \xi_{P_1}^{i_{P_1} \dots i_{q_1} k_{P_11} \dots k_{P_1q_1}} \xi_{P_2}^{i_{P_2} \dots i_{q_2} k_{P_21} \dots k_{P_2q_2}}}_{\text{подстановка выражения компонент } g \text{ в } f} \theta_{i_1}^1 \dots \theta_{i_{q_2}}^{q_2}$$

$$f(\xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}) \quad g(\xi_2, \dots, \xi_{P_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$$

Вещественность, $\forall f^j \in T_{(1,0)}, j=1, \dots, p \quad f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p \in T_{(p,0)}$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad [f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = f^1(\xi_1) \cdot f^2(\xi_2) \dots f^p(\xi_p)]$$

$$\forall g_j \in T_{(0,1)}, j=1, \dots, q \quad g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q \in T_{(0,q)}$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad [g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_q (\eta^1, \dots, \eta^q) = g_1(\eta^1) \cdot g_2(\eta^2) \dots g_q(\eta^q)]$$

$$\Rightarrow [f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \dots f^p(\xi_p) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_q(\eta^q)] \quad (4)$$

Проверка: (о биjectivite p-r-ba $T_{(p,q)}$)

e_1, \dots, e_n базис V , w^1, \dots, w^n базис V^* , согласован.

Совокупность тензоров α вида $w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$ по всем возможным наборам индексов $(i_1, \dots, i_p, i_1, \dots, i_q)$, где $i_k = 1, \dots, n$, $i_m = 1, \dots, n$

Dok. 60: очевидно, $w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \in T_{(p,q)}$, т.к. $w^{i_1}: V \rightarrow K$, а $e_{i_1}: V^* \rightarrow K$ согласовано! $\forall \alpha \in T_{(p,q)} \Leftrightarrow \alpha$ по определению.

$w^{i_1} \in T_{(1,0)}$, а $e_{i_1} \in T_{(0,1)}$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad \alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество тензоров}} \underbrace{\xi_1^{i_1 \dots i_q} \xi_2^{i_2 \dots i_q} \dots \xi_p^{i_p \dots i_q}}_{w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}} = cb. 60(4) = \\ = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество тензоров}} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) \\ \Rightarrow \boxed{\alpha = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество тензоров}} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}} \Rightarrow \text{проверка.}$$

Чин. независимость!

$$\boxed{\alpha} = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество тензоров}} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$$

применение нулевой тензор к набору векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, w^{k_1}, \dots, w^{k_q}$

$$0 = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество тензоров}} w^{i_1}(e_{i_1}) \dots w^{i_p}(e_{i_p}) \cdot e_{i_1}(w^{k_1}) \dots e_{i_q}(w^{k_q}) = \underbrace{\delta_{j_1 \dots j_p}}_{\text{множество тензоров}} \underbrace{\delta_{m_1 \dots m_p}^{i_1 \dots i_p}}_{\text{символы произведения}} \underbrace{\delta_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_q}}_{\text{символы произведения}} = \underbrace{\delta_{m_1 \dots m_p}^{k_1 \dots k_q}}_{\text{символы произведения}}$$

верно для любого набора индексов $m_1, \dots, m_p, k_1, \dots, k_q \Rightarrow$ нулевая комбинация тригонометрических \Rightarrow

$$\text{Пример: } \alpha = (w^1 - 2w^2 + w^3) \otimes (3w^1 + w^2) \otimes e_2 + (w^2 + 2w^3) \otimes w^1 \otimes e_3$$

Чин. независимость

- 1) линейное выражение α на векторах $\xi_1 = 2e_1 - e_2, \xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3, \eta = w^2 - w^3$
- 2) записать матрицу тензора.

$$1) \quad \alpha(\xi_1, \xi_2, \eta) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2) \cdot \eta_2 + (\xi_2^1 + 2\xi_2^2 - \xi_2^3) \cdot \xi_2^1 \cdot \eta_2 = (2+2+0)(3 \cdot 1 + 2) \cdot 1 + (-1+2 \cdot 0)1 \cdot (-1) = 21$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \alpha \in T_{(2,1)} \Rightarrow \alpha = (\alpha_{ik}^j)$$

$$\alpha_{11}^1 = 3 \quad \alpha_{21}^1 = -6 \quad \alpha_{31}^1 = 3$$

$$\alpha_{12}^1 = 1 \quad \alpha_{22}^1 = -2 \quad \alpha_{32}^1 = 1$$

$$\alpha_{21}^2 = 1 \quad \alpha_{31}^2 = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$K=1$$

$$K=2$$

$$K=3$$

def: $\exists p, q \geq 1 \quad \Delta T(p,q)$. Триады из один верхней и две нижней. Тогда, по правилу единичной, мы должны будем просуммировать соответствующие коэффициенты. В результате, получим систему элементов, у которых число верхних и низших будет на единицу меньше.

i_1	i_2	i_3	$\Delta T(p,q)$
i_1	i_2	i_3	количество

- эта операция наз-ся

$\text{P}_i \text{z} \cdot \text{d}^2 \cdot \text{d}m \cdot \text{d}p = \text{d} \cdot \text{d} \cdot \text{d} \cdot \text{d}p$

← emzymolyse
← emzymolyse

- име операций назыв
сверткой менюра

$$\alpha \in T(p,q) \rightsquigarrow \beta \in T(p-s, q-s)$$

корректность определено! надо проверить выполнение с. 6а (3)

$$\begin{aligned} & \beta^{i_1 \dots i_m \dots i_q} = \alpha^{i_1 \dots i_m \dots i_q} = \alpha^{i_1 \dots i_m \dots i_q} t_{d_1}^{j_1} \dots t_{d_m}^{j_m} S_{i_1}^{j_1} \dots S_{i_q}^{j_q} = \\ & = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_m \dots i_q}}_{\substack{j_1 \dots j_m \dots j_p}} \underbrace{t_{d_1}^{j_1} \dots t_{d_m}^{j_m}}_{\substack{j_1 \dots j_p}} \underbrace{S_{i_1}^{j_1} \dots S_{i_q}^{j_q}}_{\substack{j_1 \dots j_p}} = \text{Basis-No (3)} \\ & \Rightarrow \beta \text{ ist op. Triv. } (p+q-1) \end{aligned}$$

Задачи №1

- 1) Сборка может проводиться по некоторым индексам
 - 2) Если в результате сборки получается тензор типа $(0,0)$ (то есть скаляр), то такая сборка называется полной.

Hyrcanopis

1) $a \in T_{(L,1)} \iff A = (a_i^j)_{n \times n} \quad \beta = (a_i^j) = t \circ A \in K \Rightarrow$ линейное отображение; $\beta \in T_{(K,0)}$ и обратимо
если-но замкнута базиса

2) $f \in T_{(L,0)}$ - кобекмоп $\iff a = (a_1 \dots a_n)$
 $x \in T_{(0,L)}$ - бекмоп $\iff x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$a = f \otimes x = (a_j x^i) = (a_j^i) \Rightarrow \beta = (a_i^j) = a_i x^i = f(x) = x(f)$
 обозначение
 или дробь f
 на единице x .

$$3) \quad \alpha \in T_{(i,1)} \Leftrightarrow A = (\alpha_j^i) \\ x \in T_{(0,1)} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\beta} = \left(\begin{smallmatrix} y_j^j \\ \vdots \\ y_j^k \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} d_j^j x^k \\ \vdots \\ d_j^k x^k \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{\beta}^k \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^k \end{smallmatrix} \right) \Leftrightarrow \tilde{\beta} = (t_L A) \cdot x$$

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

$$d \in T(i,i) \quad d_{j,j}^{(i)} = d_j^i t_{j,j}^i S_i^{(i)} = \text{обратка по 2-му индексу} \quad \text{тогда } d \otimes T \otimes S = f = \left(d_j^i t_m^k S_\ell^{(k)} \right) = \left(f_{j,m,\ell}^{(ik)} \right)$$

$\Rightarrow d_{j,j}^{(i)} = f_{j,j,j}^{(i)} \text{ обратка.}$

8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.

8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры

def: $\exists p \geq 2, d \in T(p,p) \quad \exists \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ перестановка индексов от 1 до p .

$$\left(\begin{array}{l} \text{Напоминание!} \\ \varphi: \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\} - \text{перестановка} \\ \text{бз. опозн. отвр.} \quad \sigma_k = \varphi(k), \quad k = 1, \dots, p \\ \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(p)) - \text{перестановка} \end{array} \right)$$

$\beta = \sigma(d)$ — наз. тензором, полученным транспонированием тензора d по перестановке σ
по нижним индексам, если $\beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = d_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(p)}}^{i_1 \dots i_p}$

Аналогично опр.-ся транспонирование по верхним индексам.

Замечание: для тензоров операция транспонирования опр.-ся только по одному типу индексов: либо по нижним, либо по верхним, в отличии от производной многомерной м-зы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

Корректность def: как и раньше надо проверить выполнение сб-ва (3), т.е. что $\beta \in T(p,p)$

Как известно, общая перестановка может быть получена комбинацией циклических транспозиций. Постараемся показать, что сб-во (3) выполняется при транспонировании тензора по паре индексов.

$$\begin{aligned} & \exists \beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \Rightarrow \beta_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_p} = d_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_p} = \\ & = \boxed{\begin{array}{c} d_{i_1 \dots i_p} \\ \hline i_1 \dots i_p \end{array}} \left(t_{j_1}^{i_1} \dots t_{j_m}^{i_m} \dots t_{j_p}^{i_p} S_{i_1 \dots i_p}^{i'_1 \dots i'_p} \right) = \beta_{i_1 \dots i_p}^{i'_1 \dots i'_p} \left(t_{j'_1}^{i_1} \dots t_{j'_m}^{i_m} \dots t_{j'_p}^{i_p} S_{i_1 \dots i_p}^{i'_1 \dots i'_p} \right) \Rightarrow (3) \text{ выполнено.} \end{aligned}$$

Как будем вынуждены транспонировать тензора, если обратно за определение тензора def?

$$\begin{aligned} d \in T_{(p,q)} &\iff d \text{ полином. отобр.} \quad \boxed{d[\beta = \sigma(\alpha)]} \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \\ \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* & \quad \boxed{\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta_1^{j_1} \dots \eta_q^{j_q}} = \\ &= d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \eta_1^{j_1} \dots \eta_q^{j_q} = \boxed{d(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)} \end{aligned}$$

Замечание: при транспонировании по нижним индексам, неявно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспонирования по верхним индексам будет обладать теми же свойствами, что и операция транспонирования по нижним. Поэтому все результаты, которые мы получим для нижних индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

Пример: $d = (w^1 - 2w^2) \otimes w^3 \otimes (w^4 - w^5) + w^5 \otimes w^4 \otimes w^3 \quad (\Rightarrow d \in T_{(3,0)} \Rightarrow (d_{ijk}))$

1) найти $\beta = \sigma(\alpha)$ $\sigma = (3, 1, 2)$, вспомогательную.

2) найти значение β на векторах $\xi_1 = e_1 + e_2, \xi_2 = -e_2 - e_3, \xi_3 = e_1 + 2e_2$

$$d = (d_{ijk}) \Rightarrow \beta = (d_{kij})$$

$$\sigma = (3, 1, 2) \quad \begin{matrix} \text{||} \\ \beta_{ijk} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} i \leftrightarrow j_1 \\ j \leftrightarrow j_2 \\ k \leftrightarrow j_3 \end{matrix}$$

$$\boxed{d_{ijk} \neq \beta_{kij}} \quad \begin{matrix} \text{неверно!} \\ \text{зато } \sigma = (2, 3, 1) \end{matrix}$$

$$\beta_{ijk} = \beta_{j_1 j_2 j_3} = d_{j_3 j_1 j_2} = d_{kij}$$

1 cn вычислим и-и-и d : $d_{121} = 1, d_{123} = -1, d_{213} = 1$
 $d_{232} = -2, d_{233} = 2$ остаточные члены

$$\Rightarrow \begin{matrix} \beta_{311} = 1 & \beta_{331} = -1 & \beta_{132} = 1 \\ \beta_{312} = -2 & \beta_{332} = 2 & \text{остаточные члены} \end{matrix} \Rightarrow \beta = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2 cn итоговая перестановка \equiv конечное число транспозиций (т.е. транспонирование индексов по паре индексов)

транспонирование многомерной и-и-и по паре индексов $(i, j) \equiv$ транспонирование двумерных слоёв и-и-и, получающихся фиксированием различных состояний всех индексов, кроме индексов (i, j) .

$$\beta_{ijk} = d_{kij}$$

$$d_{kij} \rightsquigarrow \tilde{d}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{d}_{ijk} = \beta_{ijk}$$

эта 2 транспозиции эти-и, стоящие в матрице на позиции (k, i, j) , должны переноситься на позицию (i, j, k)

$$d_{kij} \rightsquigarrow \tilde{d}_{ikj}$$

же имеется, потому будем фиксировать различные значения $j = 1, 2, 3$, т.е. извлекать из и-и-и тензора двумерное и-и-и, которое после обычной операции транспонирования и-и-и будет поменяться обратно в тензор.

$$d = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

фиксируем $j = 2 \rightsquigarrow$ фиксируем слой \rightsquigarrow конец слоёйного транспонирования

$$\tilde{d} = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\tilde{d}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{d}_{ijk}$ не меняется $i \rightarrow$ фиксируем $i = 1, 2, 3 \Rightarrow$ извлекаем двумерное и-и-и \Rightarrow транспонируем \Rightarrow поменяем обратно.

$$i = 1 \quad (1 \text{-я стр})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

поменяли обратно, но исходное положение

$$i = 2 \quad (2 \text{-я стр})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i = 3 \quad (3 \text{-я стр}) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{d} = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2) 1 cn. $\beta = \sigma(\alpha)$ $\sigma = (3, 1, 2)$

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = (\omega^1(\xi_3) - 2\omega^2(\xi_2)) \cdot \omega^3(\xi_1) + \omega^2(\xi_3) \omega^1(\xi_1) \omega^3(\xi_2) = \\ = -2$$

2 cn $\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \beta_{ijk} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k = \frac{\beta_{311}}{1} \cdot \frac{\beta_{212}}{2} \cdot \frac{\beta_{322}}{0} + \frac{\beta_{322}}{2} \cdot \frac{\beta_{232}}{1} \cdot \frac{\beta_{132}}{-1} = -2$

By def транспонирования \Rightarrow линейное отображение. $\forall \lambda \in K \quad \forall d_{1,2} \in T(p,q) \quad \sigma(d_1 + \lambda d_2) = \sigma(d_1) + \lambda \sigma(d_2)$

Кроме того, любая перестановка - это бз-одн. отображение \Rightarrow линейное транспонирование. Вз-одн.
 \Rightarrow транспонирование - это линейное отображение на $T(p,q)$

Транспонирование ассоциативно, но не коммутативно (!) (невидимо, определяется из свойств перестановок)

$$\sigma, \tau, \theta \text{ перестановки } d \in T(p,q) \Rightarrow \begin{cases} (\sigma(\tau(\theta))(d) = ((\sigma \tau) \theta)(d)) \\ \sigma \tau(d) \neq \tau \sigma(d) \end{cases}$$

Упр: док-ть: $d \otimes \beta = \sigma(p \otimes d)$

def: тензор $d \in T(p,q)$ наз-ся симметрическим (по низшим индексам), если
 \forall перестановки (нижних индексов) $\sigma: \sigma(d) = d$

и наз-ся кососимметрическим (антисимметрическим, альтернирующим)

(по низшим индексам), если \forall перестановки (нижних индексов) $\sigma: \sigma(d) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} d$, где $\epsilon(\sigma)$ - четность перестановки.

By def двумерические
 получаются cb-во где компоненты
 симм. и кососимм. Тензоров.
 $\forall \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$$d \text{ симм.} \Leftrightarrow d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} = d^{i_2 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p}$$

$$d \text{ кососимм.} \Leftrightarrow d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} d^{i_2 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p}$$

T.k. \forall перестановка \equiv конечное число транспозиций (\equiv транспонирование по паре индексов)

$$d \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad d^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = d^{i_1 \dots i_q}_{j_m \dots j_k}$$

$$d \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad d^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = -d^{i_1 \dots i_q}_{j_m \dots j_k}$$

Чтобы доказать def кососимметрического тензора вспомогательный def:

$$d \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots)$$

$$d \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots)$$

Упр: $d \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0$

зап-бо! (\Rightarrow) $d \text{ кососимм.} \Rightarrow \forall (k, m) \quad d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \Rightarrow d(\dots, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots) = 0$

(\Leftarrow) $\forall (k, m) \quad d(\dots, (\xi_k + \xi_m), \dots, (\xi_k + \xi_m), \dots) = 0$

$$d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_k, \dots) + d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) + d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) + d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_m, \dots) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -d(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \Rightarrow$$

$$d \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad d^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = 0$$

def: $d \in T(p, 0)$ наз-ся помиминейной формой. Если d не имеет one, кососимметрическ., то
 d наз-ся антисимметрической формой или p-формой или внешней p-формой
 или внешней формой степени p

$\alpha \in T_{(1, q)}$ наз. половином. Если α не имеет ненулевых коэффициентов, то α наз. q-биквадратом

Упр.: Вспомнимо, что \det из прошлого семестра. и сравним с \det в данном.

$$\alpha \in T_{(p, q)} \text{ кососимметрический (по ненулевым элементам)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &1) \text{ если } p > n \Rightarrow \alpha \equiv 0 \\ &2) \text{ если } p = n \Rightarrow \alpha \underset{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_n}}{=} (-1)^{\sum_{i < j} i(j-i)} \underset{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_n}}{\alpha} \\ &\alpha = (j_1, \dots, j_n) \text{ неперестановка} \\ &\text{какая } (12 \dots n) \end{aligned}$$

Пример: 1) $V_3 - np$ -бо 3-мерн. пол. векторов.

$$\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}) \text{ квадр. } \alpha \in T_{(2, 0)}, \text{ симметрический}$$

$$\beta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \text{ квадр. } \beta \in T_{(3, 0)}, \text{ кососимметрический.}$$

$$2) A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \alpha \in T_{(2, 0)} \quad \text{если } a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Rightarrow A \text{ симметрическая.}$$

$$\text{а кососимметрический } \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Rightarrow A \text{ кососимметрическая.}$$

$$3) \alpha \in T_{(3, 0)} \quad \alpha \equiv 0 \quad n > 3$$

$$\text{кососимметрический (3-форма).} \quad \exists n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\sum_{i < j} i(j-i)} \alpha_{123}, \quad \alpha = (j_1, j_2, j_3) \text{ неперестановка } (123)$$

$$\text{т.к. } (123) \oplus (213) \oplus (312) \oplus (132) \oplus (231) \oplus (321)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Упр.: как будем выражать
многогранник (кососимметрический) $\in T_{(3, 0)}$,
если $n=2$? $n=4$?

$$4) \alpha \in T_{(2, 0)} \quad \exists n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_1 j_2} \alpha_{j_3 j_1} \alpha_{j_2 j_3} \quad \forall \alpha = (0_1, 0_2, 0_3) \text{ неперестановка } (123)$$

Случайно.

$$\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} = x$$

$$\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211} = y$$

$$\alpha_{113} = \alpha_{131} = \alpha_{311} = z$$

$$\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122} = t$$

... и т.д. загадка

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} x & y & z & y & t & x & z & x & 0 \\ y & + & x & t & + & \alpha_{222} & x & - & * \\ z & x & - & x & + & * & * & = & \alpha_{233} \end{array} \right)$$

Упр.: —||—
1) если $n=2$?
2) если $n=4$?

8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров

def: Альтернированием (антисимметризацией) и симметрированием тензора $\alpha \in T_{(p,q)}$ (по нижним индексам) называется операции:

$$\text{Alt}\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma(\alpha)$$

$$\text{Sim}\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$$

S_p - мн-во всех перестановок чисел от 0 до p .

Замечание:

1) очевидно, если d симм. $\Rightarrow \text{Sim}d = d$,
если d косимм. $\Rightarrow \text{Alt}d = d$

$$(\text{Sim}d = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} d = \frac{p!}{p!} d, \text{ т.к. } \sigma(d) = d \forall \sigma)$$

$$(\text{Alt}d = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} d = \frac{p!}{p!} d, \text{ т.к. } \sigma(d) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} d \forall \sigma)$$

2) очевидно, Alt и Sim - линейные операции на $T_{(p,q)}$, т.к. σ -линейные операции на $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (нижних) индексов.

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым проводят альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказалось индексов, по которым альтернирование (симметрирование) не проводится, то эти индексы, выделены вертикальными чертами.

Например, $\alpha^{(i_1 i_2 | i_3 | i_4 | i_5)}_{[j_1 j_2 j_3]}$

- по верхним индексам проводится симметрирование по индексам $i_1 i_2 i_5$
- по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример: $\alpha \in T_{(2,0)}$ $n=3$ $\alpha = (\alpha_{ijk}) = (\alpha_{j_1 j_2 j_3})$ $\sigma \in \left\{ \begin{matrix} (123) & (213) & (312) \\ (132) & (231) & (321) \end{matrix} \right\} = S_3$

$$1) \quad \boxed{\beta = \text{Sum} \alpha} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha^{\sigma}$$

$$\beta = \alpha_{(i_1 i_2 i_3)} \rightsquigarrow \beta_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)}}$$

$$\boxed{\beta_{123}} = d_{(123)} = \frac{1}{6} (d_{123} + d_{132} + d_{213} + d_{231} + d_{312} + d_{321})$$

$$d_{(132)} = d_{(213)} = d_{(231)} = d_{(312)} = d_{(321)} \Rightarrow \beta_{123} = \beta_{132} = \beta_{213} = \beta_{231} = \beta_{312} = \beta_{321} = x \quad (\text{см. пример 4})$$

$$\boxed{\beta_{112}} = d_{(112)} = \frac{1}{6} (d_{112} + d_{121} + d_{121} + d_{121} + d_{211} + d_{211})$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$(j_1 j_2 j_3) \quad (123) \quad (132) \quad (213) \quad (231) \quad (312) \quad (321)$$

$$2) \quad \boxed{f^1 = A \cdot \alpha} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{c(\sigma)} \alpha^{\sigma}$$

$$f^1 = \alpha_{(i_1 i_2 i_3)} \rightsquigarrow f^1_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6!} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{c(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)}}$$

$$\boxed{f^1_{123}} = d_{[123]} = \frac{1}{6} (d_{123} - d_{132} - d_{213} + d_{231} + d_{312} - d_{321})$$

$$c(\sigma) \in \{ +, -, +, - \}$$

$$-d_{[132]} = d_{[312]} = d_{[321]} = d_{[231]} = -d_{[213]} \Rightarrow f^1_{132} = (-1)^{c(\sigma)} f^1_{123}$$

$$\sigma = (j_1 j_2 j_3) \quad \text{перестановка } (123)$$

$$\boxed{f^1_{112}} = d_{[112]} = \frac{1}{6} (d_{112} - d_{121} - d_{121} + d_{121} + d_{211} - d_{211}) = 0$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$(j_1 j_2 j_3) \quad (123) \quad (132) \quad (213) \quad (231) \quad (312) \quad (321)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$d_{[211]}$$

$$\Rightarrow f^1_{112} = f^1_{121} = f^1_{211} = 0 \Rightarrow$$

бес константные f^1 , у которых обнаружено
хотя бы 2 индекса равных между
(см. пример 3)

$$\Rightarrow \boxed{f^1 \text{ - кососимм. тензор.}}$$

$$3) \quad \boxed{\tilde{\beta} = \alpha_{(ij|k)}} \rightsquigarrow \tilde{\beta}_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} d_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)}} = \frac{1}{2} (d_{j_1 j_2 j_3} + d_{j_2 j_1 j_3}) = \alpha_{(i_1 j_1 j_2)}$$

$$\sigma \in \{ (12) (21) \} = S_2 \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\tilde{\beta}_{112} = d_{(1112)} = \frac{1}{2} (d_{112} + d_{211}) \Rightarrow \tilde{\beta}_{112} = \tilde{\beta}_{211}$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$(12) \quad (21)$$

$$\tilde{\beta}_{121} = d_{(1121)} = \frac{1}{2} (d_{121} + d_{121}) = d_{121} \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta}_{i_1 j_1 i} = d_{(i_1 j_1 i)} = \alpha_{i_1 j_1 i}} \quad \forall i_1, j_1, i$$

$$\tilde{\beta}_{123} = d_{(1123)} = \frac{1}{2} (d_{123} + d_{321}) \Rightarrow \tilde{\beta}_{123} = \tilde{\beta}_{321} \quad u.m.g. \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta}_{i_1 j_1 k} = \tilde{\beta}_{k j_1 i}} \quad \forall i_1, j_1, k$$

$$4) \quad \boxed{f^1 = \alpha_{[i_1 j_1 k]}} \rightsquigarrow \tilde{f}^1_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^{c(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)}} = \frac{1}{2} (d_{j_1 j_2 j_3} - d_{j_2 j_1 j_3}) = \alpha_{[i_1 j_1 j_2]}$$

$$c(\sigma) \in \{ +, - \}$$

$$\tilde{f}^1_{112} = d_{[1112]} = \frac{1}{2} (d_{112} - d_{211}) \Rightarrow \tilde{f}^1_{112} = -\tilde{f}^1_{211}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$(2111)$$

$$\tilde{f}^1_{121} = d_{[1121]} = \frac{1}{2} (d_{121} - d_{121}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{f}^1_{i_1 j_1 i} = d_{[i_1 j_1 i]} = 0} \quad \forall i_1, j_1, i$$

$$\tilde{f}^1_{123} = d_{[1123]} = \frac{1}{2} (d_{123} - d_{321}) \Rightarrow \tilde{f}^1_{123} = -\tilde{f}^1_{321} \quad u.m.g. \Rightarrow \boxed{\tilde{f}^1_{i_1 j_1 k} = -\tilde{f}^1_{k j_1 i}} \quad \forall i_1, j_1, k$$

$$\Rightarrow \boxed{f^1 \text{ кососимм. по } 1 \times 3 \text{ индексам.}}$$

Упр. $\alpha \in T_{(2,0)} \Leftrightarrow A = (\alpha_{ij})$ 1) $\text{Sum} A = \frac{A+A^T}{2}$, $A \cdot \alpha = \frac{A+A^T}{2}$ 2) $\text{Sum} A$ -симм. или нет?
 $A \cdot \alpha$ - кососимм. или нет?

9 Евклидовы и унитарные пространства

9.1 Скалярное, псевдоскалярное произведение в Евкл. и унитарном пространствах. Норма в Евклидовом и унитарном пространствах.

Определение 1. V – линейное пространство над \mathbb{R} (вещ. пр-во)

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Скалярное произведение, если удовлетворяет 4м аксиомам:

$$\forall x, y \in V :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

1. $(x, y) = (y, x)$ (симметр.)
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (Аддитивность по первому аргументу)
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ (Однородность по первому аргументу)
4. $\forall x \neq 0 (x, x) > 0$ (Положительная определенность)

Из этих свойств можно понять, что скал. произведение – билинейная функция.

Из 3 $\Rightarrow \forall x \in V (x, \emptyset) = (\emptyset, x) = 0$

Из 4 $\Rightarrow \forall x \in V (x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = \emptyset$

Определение 2. V конечномерное, линейное пространство над \mathbb{R}

$(V, (\cdot, \cdot))$ – Евклидово пространство

Замечание. V бесконечномерное $(X, (\cdot, \cdot))$ предгильбертово

Если полное метрическое пространство, то оно называется гильбертовым

(Полное – любая фундаментальная последовательность сходится, из матанализа)

Определение 3. V – линейное пространство над полем \mathbb{C} (комплексн. линейное пространство)

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

Псевдоскалярное произведение:

$$\forall x, y, z \in V :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}$$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (Аддитивность)
3. $(\lambda x, z) = \lambda(x, z)$ (Однородность по 1му аргументу) Из 2 и 3 \Rightarrow линейность по 1 аргументу
4. $\forall x \neq 0 (x, x) > 0$ (Положительная определенность)

1, 2, 3 $(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$

$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)}$ Псевдооднородность по 2 арг.

$$(x, x) = \overline{(x, x)} \leftrightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$$

$\forall x \in V (x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение 4. Конечномерное V над полем \mathbb{C}

$(X, (\cdot, \cdot))$ называется **унитарными** (псевдоевклидовыми, эрмитовыми)

Определение 5. $(V, (\cdot, \cdot))$ Евклидово (унит.) пространство

$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\forall x \in V \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}$ Евклидова норма

Аксиомы нормы:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (невырожденность)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Ввели такую норму, удостоверимся, что все аксиомы выполнены:

1. Очевидно из 4
2. $\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\frac{\lambda \bar{\lambda}(x, x)}{|\lambda|^2}} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$
3. ?

Давайте докажем неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$$\forall x, y \in (V, (\cdot, \cdot)) \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

2) Причем $\Leftrightarrow x$ и y линейно зависимы

Доказательство. (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in V$

$$0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \bar{\alpha}(x, x) + \alpha \bar{\beta}(x, y) + \beta \bar{\alpha}(y, x) + \beta \bar{\beta}(y, y)$$

$$\begin{aligned} & \alpha := (y, y) \\ \square \quad & \beta = -(x, y) \Rightarrow \bar{\beta} = -(y, x) \end{aligned}$$

Подставим это в равенство, получим $= \underbrace{(y, y)(\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \bar{\beta}\beta - \bar{\beta}\beta + \beta\bar{\beta})}_{\geq 0} \Rightarrow \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |(x, y)|^2 \geq 0$

(b) $\Leftrightarrow x$ и y линейно завис.

Если $x = 0$ или $y = 0 \Rightarrow$ очевидно выполняется

$$\Rightarrow \square x \neq 0 \text{ и } y \neq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \square |(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$$

Из доказательства 1 $\exists \alpha(y, y) > 0$ (т.к. $y \neq 0$) $0 = \|x\|^2 \|y\|^2 = |(x, y)| = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y)$

$\Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0 \quad \alpha, \beta$ не все нули \Rightarrow линейно завис. x, y

$(\Leftarrow) \quad x, y$ линейно зав. $\Rightarrow \exists \alpha, \beta$ не все нули $\alpha x + \beta y = 0$

$\square \frac{\alpha = 0}{\beta \neq 0} \Rightarrow y = 0$ противор. $\Rightarrow \alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$

$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha x + \beta y, x) = 0 \\ (\alpha x + \beta y, y) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x, x) + \beta(y, x) = 0 \Rightarrow \alpha\|x\|^2 = -\beta(y, x) \\ \alpha(x, y) + \beta(y, y) = 0 \Rightarrow \beta\|y\|^2 = -\alpha(x, y) \end{array} \right. \Rightarrow \alpha\beta\|x\|^2\|y\|^2 = \alpha\beta(x, y)(y, x)$

$$\Rightarrow \|x\|^2\|y\|^2 = |(x, y)|^2$$

□

Вернемся к 3 аксиоме $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + \underbrace{(x, y) + (y, x)}_{2Re(x,y) \leq 2|(x,y)| \leq 2\|x\|\|y\|} + (y, y) \stackrel{=||x||^2}{=} \stackrel{=(x,y)}{+} \stackrel{=||y||^2}{+} \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 =$$

$$(\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$a + b = z$
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Определение 6. $\forall x \in V$

Длина вектора $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Нормировать вектор $\frac{x}{\|x\|} = x_0$ орт вектора, $\|x_0\| = 1$

$\forall x, y \neq 0 \quad x, y \in V$

ϕ – угол между x и y : $\cos \phi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$ (КБШ: $\frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|} \leq 1$)

Примеры.

1. V_3 геом. вект. $(x, y) = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos \phi$
скал

2. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ выполнены 1-4
 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$
 (Евкл. $\sum x_i y_i$)

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_i^n |x_i|^2 \geq 0$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$$
 евкл. норма

$$\text{КБШ: } |\sum_i \bar{x}_i y_i| \leq (\sum_i^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_i^n |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Нер-во треугольника:

$$(\sum_i^n |x_i + y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_i^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_i^n |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad u, v \in R[a, b]$ $\int_a^b u(x) dx \quad \int_a^b v(x) dx$
интегр.

$$f = u + iv$$

$$\int_a^b f dx = \int_a^b u dx + i \int_a^b v dx$$

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall f, g \quad (f, g) = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx$$

Все аксиомы очевидно выполнены, есть проблемы с 4ой аксиомой.

$$(f, f) = \int_a^b |f|^2 dx \geq 0$$

$= 0? \Leftrightarrow f \equiv 0$ почти везде на $[a, b]$

Возникает евклидова норма.

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx} \quad L^2([a, b]) - пространство$$

$$\text{КБШ: } |\int_a^b f \bar{g} dx| \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$
 (Неравенство Буняковского)

$$\text{Неравенство треугольника: } (\int_a^b |f + g|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

(Неравенство Минковского)

9.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис (о.н.б.) Ортогональные системы векторов.

$(V, (\cdot, \cdot))$ евклидово (унит.) пространство

Определение 1. $\forall x, y \in V$ ортогональные, если $(x, y) = 0$

(Очевидно, $\cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \rightsquigarrow$ перпендикулярны)

0 ортогонален $\forall x \in V, 0$ ортогонален V

$y \in V : \forall x \in V \quad (y, x) = 0$ т.к. $(y, y) = 0 \Rightarrow y = 0$

Определение 2. $v_1 \dots v_m$ парно-ортогональны, если $\forall i \neq j : (v_i, v_j) = 0$

Система $v_1 \dots v_m$ ортонормированна, если $\forall (i, j) \boxed{(v_i, v_j) = \delta_{ij}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

δ_{ij} – символ Кронекера

Утверждение. $v_1 \dots v_m$ парно-ортог. \Rightarrow линейно незав.

Доказательство. $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \quad \alpha_i \in K \quad 0 = (\emptyset, v_i) = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, v_j \right) = \sum_i^m \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j (v_j, v_j) = \alpha_j (v_j, v_j) \neq 0$

$\Rightarrow \forall j \alpha_j = 0 \Rightarrow$ Линейно независ.

□

Существует ли такая система?

\exists о.н.с. в V ?

Теорема 1 (Процесс ортогон. Грама-Шмидта).

\forall система векторов $a_1 \dots a_m$ может быть заменена парно-ортог. системой векторов $b_1 \dots b_k$, с сохранением лин. оболочки

$\text{span}(a_1 \dots a_m) = \text{span}(b_1 \dots b_k) \quad k \leq m$

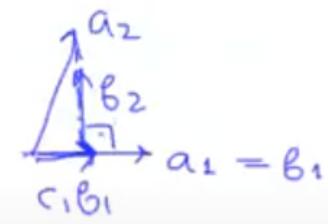
Доказательство.

1. $a_1 \dots a_m$ лин. незав.

М.М.И.

- (a) База индукции $m = 1 \quad a_1 = b_1$
- (b) \square верно для $k - 1$ вектора — инд. предположение
- (c) Инд. переход. Докажем для k векторов.

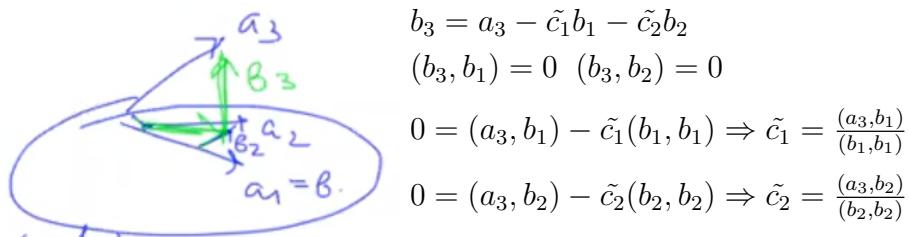
$a_1 \ a_2 \ a_3$



$$b_2 = a_2 - c_1 b_1$$

$$b_2 \perp b_1$$

$$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) - c_1 (b_1, b_1) \Rightarrow c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$$



Теперь для k -мерного случая.

$a_1 \dots a_{k-1} \rightsquigarrow b_1 \dots b_{k-1}$ попарно ортог.

$$\boxed{b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i} \quad c_i = ?$$

$$(b_k, b_i) = 0 \quad i = 1 \dots k-1$$

$$(b_k, b_j) = (a_k, b_j) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i (b_i, b_j) = (a_k, b_j) - c_j (b_j, b_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{c_j = \frac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)}} \quad j = 1 \dots k-1$$

$$\Rightarrow \text{span}(a_1 \dots a_k) = \text{span}(\underset{\text{попарно-ортог.}}{b_1 \dots b_k})$$

2. $a_1 \dots a_m$ линейно зав. $\rightsquigarrow \Gamma\text{-III}$ на каком-то этапе $b_j = 0$

\rightsquigarrow проредить $a_1 \dots a_m \rightsquigarrow \underset{\text{лин. независ.}}{a_{i_1} \dots a_{i_k}} \rightsquigarrow \Gamma\text{-III.}$

□

Следствие 1. В \forall евкл. (унит.) пространстве \exists О.Н.Б. (ортого-нормир. базис)

Доказательство. Упр.

□

Следствие 2. \forall лин. независ. систему векторов евкл. (унит.) про-ва можно дополнить до о.н.б.

Доказательство. Упр.

□