Напоминание: $\mathcal{A}$ нормальный оператор $\qquad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$$\forall x, y \in V \qquad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$$

Теорема 1 (Канонический вид матрицы нормального оператора в унитарном пространстве)**.**

$\mathcal{A} \in End(V), (V(\cdot,\cdot))$ *<u>унитарное пространство</u>*
$\mathcal{A}$ нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ <u>о.н.б.</u> V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь диагональный вид.

$$\Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}, \text{ при этом}$$

матрица оператора $\mathcal{A}^*$, очевидно, также будет иметь диагональный вид

$$\overline{\Lambda} = diag(\overline{\lambda_1}, \ldots \overline{\lambda_n}) = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Замечание.

1. Очевидно, что о.н.б. состоит из с.в. (попарно-ортог. и нрмиров.)
   λ соотв. с.ч.
2. $\forall$ нормальный оператор в унитарном пр-ве является о.п.с. Обратное, вообще говоря, неверно. Не всякий о.п.с. имеет именно <u>о.н.б.</u>, в котором матрица опер. диагона.

Доказательство.

($\Leftarrow$) очевидно, в о.н.б. $\quad A^{*} = A^* = \overline{A^T} = \overline{\Lambda^T} = diag(\overline{\lambda}_1 \ldots \overline{\lambda}_n)$
$A^{*} = AA^{*} \Rightarrow \mathcal{A}$ нормальный оператор

($\Rightarrow$) $\qquad v_1$ с.в. $\mathcal{A}$ соотв. с.ч. $\lambda_1 \Rightarrow v_1$ с.в. $\mathcal{A}^*$ с.ч. $\overline{\lambda}_1$

$L := span(v_1)$ инвариант. отн-но $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^* \Rightarrow L^\perp$ инвар. отн-но $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$

$\Rightarrow \mathcal{A}|_{L^\perp}$ и $\mathcal{A}^*|_{L^\perp}$ останутся взаимно-сопряж. и нормальн.

Докажем м.м.и.: (по $dimV = n$)

1. <u>база:</u> $n = 1$ утв. очев.
2. <u>инд. предпол.</u> $\sqsupset$ верно для $n = k$
3. <u>инд. переход</u> докаэем что тогда верно $n = k + 1$?

   $L = span(v_1) \qquad V = L \oplus L^\perp \qquad dimL^\perp = k \Rightarrow$ по инд. предпол.

   ($\mathcal{A}|_{L^\perp}$ и $\mathcal{A}^*|_{L^\perp}$ тоже нормальные) $\qquad \exists$ о.н.б. $v_2, v_3, \ldots, v_{k+1}$ т.ч.

   матрица $\mathcal{A}$ будет иметь вид $diag(\lambda_1 \ldots \lambda_{k+1})$,
   а матрица $\mathcal{A}^*$ – $diag(\overline{\lambda}_2 \ldots \overline{\lambda}_{k+1})$

   $L \oplus L^\perp = V = span(\underbrace{v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}}_{\text{попарно ортог. и нормир.}}) \qquad \mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1$

   $\Rightarrow$ матрица будет иметь блочно-диагональный вид

$$\begin{array}{c} L \\ L^{\perp} \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_{k+1} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \Lambda = diag(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1})$$

$$A^{*} = \overline{A^T} = \overline{\Lambda}$$

∎

Следствие 1.
$\mathcal{A}$ нормальный оператор в <u>унитарном</u> пр-ве $V \Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ с.ч.}} V_\lambda$ собств. подпр. $\quad \underset{\lambda \neq \mu}{V_\lambda \perp V_\mu}$

Доказательство. Очевидно из теоремы. ∎

Следствие 2. $A_{n \times n}$ $a_{ij} \in \mathbb{C}$ $\quad A^* = \overline{A^T}$

$\forall$ <u>норм.</u> матрицы A $(AA^* = A^*A)$ $\exists$ <u>унитарн.</u> матрица T $(T^* = T^{-1})$,

т.ч. $\boxed{T^{-1}AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)}$, *где λ_i с.ч. матрицы A*

Доказательство. A в канонич. базисе $\overset{e}{\mathbb{C}^n}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$

$$A^{*} = A^* = \overline{A^T}$$

матрица соотв. $\mathcal{A}^*$

$A^*A = AA^* \Rightarrow \mathcal{A}$ нормальн. $\Rightarrow$ применяем теорему

$\exists$ о.н.б. $v_1 \dots v_n \rightsquigarrow T = T_{e \to v}$
т.к. о.н.б. $\overline{T^T} = T^* = T^{-1}$, т.е. T <u>унитарн.</u> $\Rightarrow$ по формуле преобр. матрицы в новом базисе

$$A' = T^{-1}AT = \underbrace{\overline{T^T}}_{T^*}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$ ∎

$\sqsupset V(\cdot, \cdot)$ <u>евклидово про-во</u>

не все корни хар. мн-на вещ. $\Rightarrow$ не все корни это с.ч. оператора

(<u>см. 7.6</u>) $\quad V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация V $\quad \forall x, y \in V \leftrightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}}$

$e_1 \dots e_n$ базис $V \to e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$v_1 \dots v_k$ лин. нез. $\Leftrightarrow \overline{v}_1 \dots \overline{v}_k$ лин. нез.

$\overline{z} = x - iy$

Определение 1. *Определим скалярное (псевдоскал.) пр-ве на $V_{\mathbb{C}}$:*

$$\begin{array}{ll} \forall x, y \in V & (\leftrightarrow z = x + iy) \\ \forall u, v \in V & (\leftrightarrow \omega = u + iv) \end{array} \quad (z, \omega) = (x + iy, u + iv) \overset{def}{=} (x, u) + (y, v) + i((y, u) - (x, v))$$

<u>Упр.</u>: удовлетворить 1-4 свойства псевдоскал. пр-я $(V_{\mathbb{C}}, (\cdot, \cdot))$ <u>унит. пр-во</u>

<u>Упр.</u>: $\overline{(z_1, z_2)} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2) \quad \forall z_1, z_2 \in V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \in End(V)$ $\quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V)$ $\quad$ <u>продолжение вещ. опер.</u> $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$
$\forall x + iy \in V_{\mathbb{C}}$ $\quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

$x, y \in V$ $\quad e_1 \dots e_n$ базис $V \rightsquigarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A_{\text{вещ.}}$ $\quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\text{вещ.}}$

Утверждение. $\boxed{(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}}$

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$(e_k, e_j)_{\mathbb{C}} = (e_k + i \cdot \mathbb{0}, e_j + i \cdot \mathbb{0}) = (e_k, e_j) = \delta_{kj} \Rightarrow$ о.н.б. в $V_{\mathbb{C}}$

в V :	в $V_{\mathbb{C}}$:
$\mathcal{A} \leftrightarrow A$	$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A$
$\mathcal{A}^* \leftrightarrow A^T = A^*$	$(\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A^* = A^T$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A$ в о.н.б. $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* \leftrightarrow \underset{\text{вещ.}}{\overline{A^T}} = A^T = A^*$

$\Rightarrow$ матрицы операторов $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^*$ и $(\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$ совпадают в о.н.б. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ совпадают в любом базисе $\Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$ ■

Следствие: $\mathcal{A}$ норм. опер. в евклид. $V \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ норм. опер. в $V_{\mathbb{C}}$ (очевидно).

Теорема 2 (<u>Канонический</u> вид матрицы <u>нормального</u> оператора в <u>евклидовом</u> пр-ве)**.**
$\mathcal{A} \in End(V), (V, (\cdot,\cdot))$ <u>*евкл. пр-во*</u>

$\mathcal{A}$ норм. опер. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & & 0 \\ & \begin{pmatrix} \Phi_1 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{pmatrix} \Phi_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \text{ где } \quad \lambda_s \in \mathbb{R} \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$$

При этом матрица оператора $\mathcal{A}^*$, очевидно, также будет иметь блочно-диаг. вид: Λ^T

Замечание. Очевидно, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ собств. ч. $\mathcal{A}$ и первые k векторов базиса – это о. н. с. в.

Доказательство. $(\Leftarrow)$

$$\begin{matrix} \Lambda\Lambda^T = \Lambda^T\Lambda \text{ (упр.)} \\ \Updownarrow \\ AA^* = A^*A \end{matrix} \qquad \text{о.н.б. } A^{*} = A^* = A^T \text{ т.к. евкл.} \qquad \Rightarrow \mathcal{A} \text{ норм. опер.}$$

$(\Rightarrow)$ $\quad \mathcal{A}$ норм. опер. $\rightarrow \underset{\text{норм. опер.}}{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ продолж. $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}} \underset{\text{сле-вие 1}}{\Leftrightarrow} V_{\mathbb{C}} = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \text{т.е. все корни} \\ \chi_{A_{\mathbb{C}}}}} V_\lambda \qquad \underset{\lambda \neq \mu}{V_\lambda \perp V_\mu}$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \qquad$ (см. 7.6)

1. $\underset{\lambda \text{ с.ч.} \mathcal{A}}{\lambda \in \mathbb{R}}$ корень $\underset{u \text{ – с.в.}}{\chi_{\mathcal{A}}}$ $\quad (\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0) \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ с.в. $\omega = \underset{u, v \text{ с.в. для } \mathcal{A}\ (u, v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}))}{u + iv}$?

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\omega = \mathcal{A}u + i\mathcal{A}v = \lambda u + i\lambda v = \lambda(u+iv) = \lambda\omega$$

$$\underset{\text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}}{V_\lambda} = (Ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}))_{\mathbb{C}} \qquad V_\lambda = \underset{\mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{span}}(v_1 \dots v_k) \qquad v_j \text{ попарно-орт. и норм.}$$

$$Ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{span}}(v_1 \dots v_k)$$

2. $\underset{\text{корень } \chi_{\mathcal{A}}}{\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\beta \neq 0)$ $\quad \underset{\text{мн-н с вещ. коэф.}}{\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = 0} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\overline{\mu}) = 0$ $\quad \overline{\mu}$ тоже корень, причем той же кр-ти

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \alpha \pm i\beta \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \alpha + i\beta \text{ с.ч. } z \text{ с.в. } \Rightarrow \alpha - i\beta \;\; \overline{z} \text{ с.в.} \end{array}} \quad (7.6)$$

$$u, v \in V \qquad \begin{array}{l} z = u + iv \\ \overline{z} = u - iv \end{array} \underset{\text{св-ва норм. опер.}}{\Rightarrow} (z, \overline{z})_{\mathbb{C}} = 0 \qquad \text{т.к. с.в. различных с.ч.}$$

$$(z, \overline{z})_{\mathbb{C}} = (u+iv, u-iv) = (u,u) - (v,v) + i(\overbrace{(u,v) + \underset{\substack{\text{т.к. евкл.} \\ =(u,v)}}{(v,u)}}^{2(u,v)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u,u) = (v,v) \\ (u,v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \|u\| = \|v\| \\ u \perp v \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = Re\ z \\ v = Im\ z \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ v = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \end{array}}$$

$$L = \underset{\text{в } V,\ \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{span}}(\underset{\text{вещ. базис}}{u, v}) \rightsquigarrow L_{\mathbb{C}} = \underset{\text{в } V_{\mathbb{C}},\ \mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{span}}(\underset{\text{вещ. базис}}{u, v}) = \underset{\mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{span}}(z, \overline{z})$$

$$L_{\mathbb{C}} = (\underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{span}}(u,v))_{\mathbb{C}} = \underset{\mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{span}}(z, \overline{z})$$

Т.к. z и $\overline{z}$ с. в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, то $L_{\mathbb{C}}$ и $L_{\mathbb{C}}^{\perp}$ инвар. отн-но $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$

3. $V_{\mathbb{C}} = \underset{\substack{\lambda \text{ вещ.} \\ \text{корни } \chi_{\mathcal{A}}}}{\bigoplus} V_\lambda \quad \underset{\substack{(\mu_j, \overline{\mu}_j) \\ \text{пара сопряж.} \\ \text{компл. корней } \chi_{\mathcal{A}}}}{\bigoplus} L_{\mathbb{C}}^j$, $\quad \underset{\text{с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}}{\mu_j = \alpha_j + i\beta_j} \rightsquigarrow \underset{\text{с.в. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}}{z_j = u_j + iv_j}$ $\quad \begin{array}{l} u_j = Re\ z_j \\ v_j = Im\ z_j \end{array}$

$$L_{\mathbb{C}}^j = \underset{\mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{span}}(u_j, v_j)$$

$$\Rightarrow V_{\mathbb{C}} = \underset{\mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{span}} \left(\begin{array}{c} \text{попарно ортог. } V_\lambda \perp V_\mu \;\; \lambda \neq \mu \\ \dots \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{св-ва вещ. } \mathcal{A} \\ \text{для } \lambda \text{ вещ.}}}{v_\lambda} \quad \dots, \dots u_j, v_j, \dots \\ \text{попарно-ортог. } (u_j \perp v_j) \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в этом базисе имеет блочно-диагон. вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 & \\ & \boxed{\Phi_1} & & \\ 0 & & \boxed{} & \\ & & & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix} \qquad \Phi_j : \mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_{L^j_{\mathbb{C}}} \overset{\text{н.у.о. } \mu_j=\mu}{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(u) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)$$

$$= 1/2\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\ z + 1/2\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\ \overline{z} = 1/2\mu\ z + 1/2\overline{\mu}\ \overline{z} = Re(\mu z) = Re((\alpha+i\beta)(u+iv)) = \alpha u - \beta v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) = \frac{\mu z - \overline{\mu z}}{2i} = Im\ \mu z = \beta u + \alpha v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Phi$

$$\rightsquigarrow \Phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \left(\text{н.у.о.} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \ z \leftrightsquigarrow \overline{z} \right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_{L_{\mathbb{C}}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Базис у нас получился ортогональный, теперь осталось его отнормировать.

$\|u\| = \|v\|$

$1 = \|z\|^2 = (z,z) = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = \|v\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$z \text{ и } \overline{z} \rightsquigarrow \sqrt{2}z \text{ и } \sqrt{2}\overline{z} \rightsquigarrow \begin{matrix} u \rightsquigarrow \sqrt{2}u \\ v \rightsquigarrow \sqrt{2}v \end{matrix} \to \begin{matrix} \|u\| = 1 \\ \|v\| = 1 \end{matrix}$$

Матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в этом базисе вез. $\Rightarrow$ то и у $\mathcal{A}$ такая же матрица

■

Следствие 1. $A_{n\times n}\ \ a_{ij} \in \mathbb{R} \quad A^* = A^T$

$\forall$ *норм.* *матрицы* A $(AA^T = A^TA)$ $\exists$ *ортог.* *матрица* T $(T^T = T^* = T^{-1})$

т.ч. $$T^{-1}AT = T^TAT = \Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 & \\ & \boxed{\Phi_1} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix},$$

где $$\lambda_s \text{ с.ч. } \mathcal{A}$$ $$\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

$\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ *компл. сопряж.*

$\overline{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$ *корни хар. мн-на* A

Доказательство. См. док-во следствия 2 к т-ме о кан. виде в унит. пр-ве

$T = T_{e \to v}$ v о.н.б. в евкл. пр-ве T – ортогон. $T^{-1} = T^T$ ∎