

# Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

9 мая 2020 г.

# Содержание

<b>7 Линейные отображения</b>	<b>3</b>
7.1 Основные определения . . . . .	3
7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса. . . . .	6
7.3 Инварианты линейного отображения . . . . .	11
7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора. . . . .	17
7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.) Проекторы. Спектральное разложение о.п.с. Функция от матрицы. . . . .	21
7.6 Комплексификация линейноговещ.пространства. Продолжениевещ.линейного оператора. . . . .	30
7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона . . . . .	33
7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства. . . . .	38
7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана . . . . .	43
7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис . . . . .	47
7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме . . . . .	65
<b>8 Тензоры</b>	<b>69</b>
8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования. . . . .	69
8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров. . . . .	76
8.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Операция свертки. . . . .	80
8.4 Транспонирование тензора. Симметрические икососимметрические тензоры. . . . .	83
8.5 Операции альтернирования исимметрирования тензоров . . . . .	87
8.6 $p$ -формы. Внешнее произведение $p$ -формы. . . . .	90
<b>9 Евклидовы и унитарные пространства</b>	<b>94</b>
9.1 Скалярное, псевдоскалярное произведение в Евкл. и унитарном про-вах. Норма в Евклидовом и унитарном пространствах. . . . .	94
9.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис (о.н.б.) Ортогональные системы векторов. . . . .	97
9.3 Матрица Грама. Объем к-мерного паралл-да. Ортогональная и унитарная матрица . .	101
9.4 Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Теорема Пифагора. Теорема о наилучшем приближении. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя. . . . .	106
9.5 Изометрия унитарных (евклидовых) пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидового пространства и сопряженного к нему. . . . .	112
9.6 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический тензор. Взаимные базисы. Операции поднятия и опускания индексов. . . . .	113
<b>10 Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах</b>	<b>120</b>
10.1 Сопряженный оператор в унитарном и евклидовом пространствах . . . . .	120

10.2 Нормальные операторы в евклидов. и унит. пространствах . . . . .	123
10.3 Самосопряженные операторы. Изометрические операторы . . . . .	129
10.4 Разложения матриц: $LU$ , Холецкого, $QR$ и полярное . . . . .	134

# 7 Линейные отображения

## 7.1 Основные определения

**Определение 1.**  $U, V$  – линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением  $\mathcal{A}$  называется  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ , обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не  $\mathcal{A}(u)$ , а  $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3.  $\mathcal{A}\emptyset_U = \emptyset_V$

**Примеры.**

1.  $\emptyset$  – нулевое отображение  $U \rightarrow V$

$$\forall u \in U : \emptyset u = \emptyset_v$$

2.  $\mathcal{E}$  – тождественное отображение:  $V \rightarrow V$

$$\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$$

3.  $U = V = P_n$  – многочлены степени до  $n$

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

$$\mathcal{A}p = p'(t) \text{ – дифференциальный оператор}$$

$$\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p'_1 + \lambda p'_2 = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$$

$$\text{Линейное отображение } \mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

4.  $U = \mathbb{R}^n V = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$$

$$x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$$

5.  $U \cong V$ . То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

**Определение 2.**  $\lambda \in K \mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

**Определение 3.** Суммой линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$  называется  $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad [\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}]$$

**Определение 4.**  $-\mathcal{A}$  – отображение противоположное  $\mathcal{A}$

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$  – множество всех линейных отображений из  $U$  в  $V$ .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями  $\lambda \mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

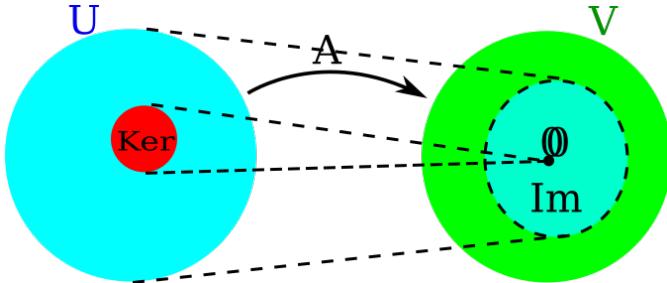
Значит  $[L(U, V) \text{ – линейное пространство}]$

**Определение 5.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_v\}$  – ядро линейного отображения.

**Определение 6.**  $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \mid \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$  – образ линейного отображения.



Упр:  $Ker\mathcal{A}$  и  $Im\mathcal{A}$  – это подпространства соответственно пространств  $U$  и  $V$ . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если  $Ker\mathcal{A}$  конечномерное подпространство  $U$ , то

$\dim Ker\mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$  – дефект линейного отображения.

Если  $Im\mathcal{A}$  конечномерное подпространство  $V$ , то

$\dim Im\mathcal{A} = rg\mathcal{A}$  – ранг линейного отображения.

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфно между  $U$  и  $V \Leftrightarrow$

1.  $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2.  $Im\mathcal{A} = V$
3.  $Ker\mathcal{A} = \{0\}$  trivialно

*Доказательство.*  $\mathcal{A}$  изоморфно  $\Leftrightarrow$  взаимнооднозначное соответствие + линейность –  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$0_u \leftrightarrow 0_v$ , т. к. изоморфизм  $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{0\}$

Пусть  $Ker\mathcal{A} = \{0\}$

Докажем инъективность  $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$v_1 = \mathcal{A}u_1$   $v_2 = \mathcal{A}u_2$

$0 = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = 0$  т. к. ядро trivialно.

Сюръективность.  $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$ . Последнее и означает сюръекцию. ■

**Определение 7.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

–инъективно, если  $Ker\mathcal{A} = \{0\}$

–сюръективно, если  $Im\mathcal{A} = V$

–биективно  $\equiv$  изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

–эндоморфизм  $\equiv$  линейный оператор, если  $U \equiv V$

$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$

–автоморфизм  $\equiv$  эндоморфизм + изоморфизм.

$Aut_k(V) = Aut(V)$

**Определение 8.** Произведением линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$\mathcal{A} \in L(W, V)$   $\mathcal{B} \in L(U, W)$   $U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$

называется  $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ , которое является композицией функций, определяющих отображения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно,  $\mathcal{C}$  – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

1.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  изоморфизмы  $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  изоморфизм

2.  $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$  – дистрибутивность

3.  $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$  – ассоциативность

4.  $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$  – единица  $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

**Определение 9.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  изоморфно.

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$$

$$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$$

Упр:  $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$$

$\mathcal{A} \in End(U)$  – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$  – обратный оператор

**Определение 10.**  $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения  $\mathcal{A}$  на линейное подпространство  $U_0$  называется

$$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$$

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфизм  $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$  – изоморфизм

**Примеры.**

1.  $\emptyset : U \rightarrow U$  – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.

2.  $\mathcal{E} : U \rightarrow U$  – автоморфизм

3.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : P_n \rightarrow P_n$  – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.

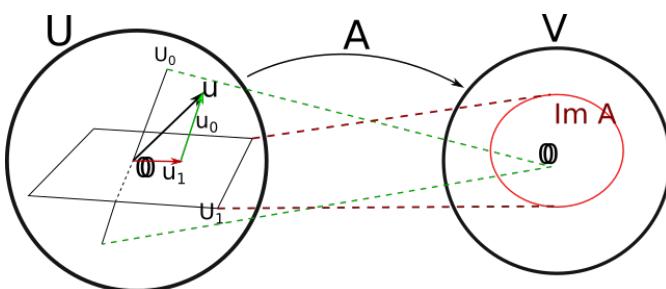
4.  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$  – эндоморфизм.

Сюръекция  $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$  инъекция.

То есть автоморфизм.

**Теорема 1** (о  $rg$  и  $def$  линейного отображения).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = \dim U}$$



*Доказательство.*  $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A}$

Дополним линейное пространство  $U_1$  до пр-ва  $U$ :

$$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{0\}$$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$  (единственным образом)

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad \text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}_1$  – изоморфизм?  $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{A}$  – сюръекция

$$\left. \begin{array}{l} \forall w \in \text{Ker } \mathcal{A}_1 \in U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong \text{Im } \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim U_1 = \dim(\text{Im } \mathcal{A})$  – инъекция.

$$\text{T. к. } U = U_0 \oplus U_1, \text{ то } \dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \dim_{\text{def } \mathcal{A}} \text{Ker } \mathcal{A} + \dim_{\text{rg } \mathcal{A}} \text{Im } \mathcal{A}$$

■

**Следствие 1** (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A}$  изоморфно
  2.  $\dim U = \dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
  3.  $\dim U = \dim V$
- $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$
2.  $\dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3.  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

## 7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$  базис  $U$

$\eta_1 \dots \eta_m$  базис  $V$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$  матрица линейного отображения  $\mathcal{A}$  относительно базисов  $(\xi, \eta)$

Частный случай:  $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$   
 $A = (a_{ji})_{n \times n}$  – матрица линейного оператора  
 $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$

Примеры.

$$1. \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

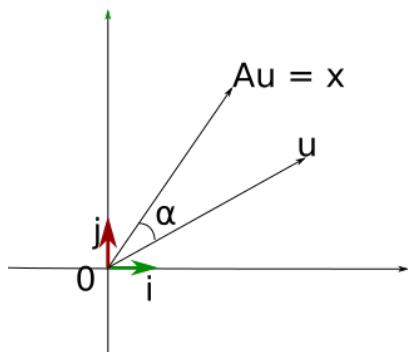
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji}e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

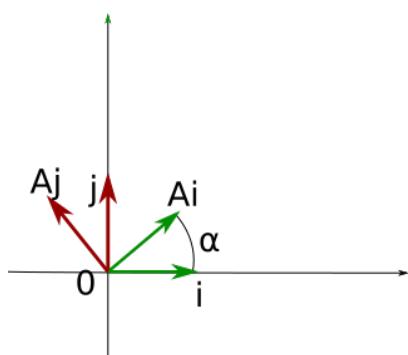


$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол  $\alpha$ .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \mathcal{A} : p_2^{1,t,t^2} \rightarrow p_2^{1,t,t^2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}1 = 1' = 0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}t = t' = 1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : p_2_{1,t,t^2} \rightarrow p_1_{1,t}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Утверждение.**  $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с веш. (компл.) элементами размерности  $m \times n$ .

*Доказательство.* Изоморфизм  $\equiv$  биекция + линейность.

Биекция.  $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$  – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть  $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$$U \xi_1 \dots \xi_n \text{ базис}$$

$$\mathcal{A} : U \rightarrow V$$

$$V \eta_1 \dots \eta_m \text{ базис}$$

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xrightarrow{?} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность  $\Rightarrow$  изоморфизм. ■

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$A, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$  – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V\eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \underset{\xi, \eta}{\leftrightarrow} A$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n u_i a_{ji}) \eta_j$$

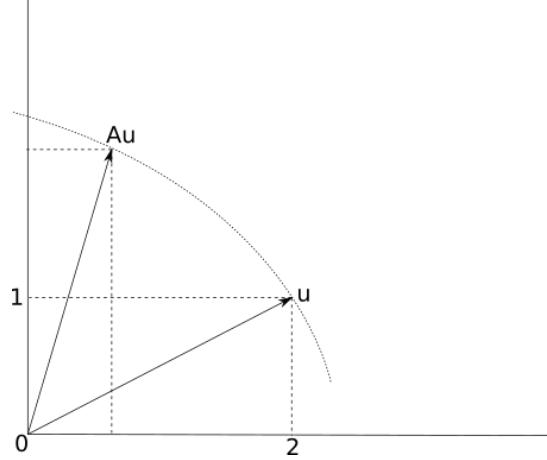
Так как координаты определяются единственным образом:

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \quad \leftrightarrow \quad [v = \mathcal{A}u] \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

### Примеры.

1.  $\mathcal{A}$  поворот на угол  $\alpha$

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



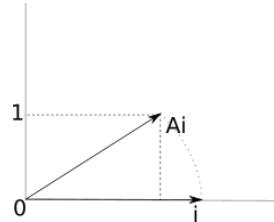
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$2. \quad \mathcal{A} = \frac{d}{dt} : p_2 \underset{1,t,t^2}{\rightarrow} \underset{1,t,t^2}{\rightarrow} p_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(3t^3 + 6t + 4)}_{u(t)}' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

**Теорема 1** (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$$

$T_{\eta \rightarrow \eta'}$  – матрица перехода

$$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi', \eta')} A'$$

$$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \cdot A \cdot T_{\xi \rightarrow \xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi_1 \dots \xi_n & \sqsupseteq & \eta_1 \dots \eta_m \\ \mathcal{E}_u \uparrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \mathcal{E}_v \\ U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi'_1 \dots \xi'_n & \sqsupseteq & \eta'_1 \dots \eta'_m \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

$$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \text{ Смотри пример 2}$$

■

**Следствие 1.**

$$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$e_1 \dots e_n$  базис  $V \leftrightarrow A$

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис} \leftrightarrow A'$$

$$\mathcal{A} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{A' = T^{-1} A T}$$

*Замечание.* В условиях теоремы  $v = \mathcal{A}u \xrightleftharpoons{(\xi, \eta)} v = Au$

$$\xrightleftharpoons{(\xi', \eta')} v' = A'u$$

$$V = T_{\eta \rightarrow \eta'} V'$$

$$U = T_{\xi \rightarrow \xi'} U'$$

$$T_{\eta \rightarrow \eta'} v' = A T_{\xi \rightarrow \xi'} u'$$

$$v' = \boxed{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}} u'$$

### 7.3 Инварианты линейного отображения

**Инвариант** - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au$$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.  
 $v' = A'u'$

**Определение 1.**  $A_{m \times n}$

$$ImA = span(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} =$$

$$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \mid x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$rgA = dim ImA - \text{ранг матрицы}$$

$$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\} - \text{ядро матрицы}$$

$$dimKerA = n - rgA = defA - \text{дефект матрицы}$$

$$\boxed{rgA + defA = n} - \text{аналогично теореме о ранге и дефекте}$$

**Теорема 1.**  $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{\begin{aligned} rg\mathcal{A} &= rgA \\ def\mathcal{A} &= defA \end{aligned}},$$

где матрица  $A$  – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств  $U$  и  $V$ .

$rg\mathcal{A}$ ,  $def\mathcal{A}$  инвариантны относительно выбора базиса.

*Доказательство.*  $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi, \eta)}{A} \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$  базис  $U$

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$  базис  $V$

$$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \overset{\leftrightarrow}{\cong} A_i$$

Координатный изоморфизм.

Пусть  $rgA = k \Rightarrow k$  столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, что из  $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$   $k$  линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация  $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dim Im\mathcal{A} = k$

$$dimU = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ n & & rgA \\ & \| & \\ & & k \end{array}$$

$$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim \text{ пространства решений } Ax = 0 = defA$$

■

**Следствие 1.**  $A$  изоморфизм  $\Leftrightarrow A$  невырожденная ( $\exists A^{-1}$ ), где  $A$  матрица в некотором базисе.

*Доказательство.* Изоморфизм  $\Leftrightarrow \frac{\text{def } A = 0}{\dim U = \dim V} \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow A$  невырожденная. ■

**Теорема 2.**  $\det \mathcal{A}$  не зависит от выбора базиса пространства  $V$  (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом  $\det \mathcal{A} = \det A$ , где  $A$  – матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе.

*Доказательство.*  $V e_1 \dots e_n$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_k &= \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\text{det } n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \dots \sum_{i_n=n}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow \det = 0) \\ &= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \underbrace{\det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}_{\substack{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \\ \text{все разные}}} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

$e'_1 \dots e'_n$  базис  $V$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\det \mathcal{A} = \det A' \stackrel{?}{=} \det A$$

$$A' = T^{-1}AT$$

$$\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$
 ■

**Определение 2.**  $A, B$  называются подобными, если

$$\exists \text{ невырожденная } C : B = C^{-1}AC$$

**Примеры.** Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$$A' = T^{-1}AT$$

$$A, B \text{ подобны} \Rightarrow \det A = \det B$$

**Следствие 1.**  $f$  –  $n$ -форма на  $V$

$$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow [f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1 \dots \xi_n)]$$

*Доказательство.*  $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$$g(\xi_1 \dots \xi_n) = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$$

$$\det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\substack{\text{смотри док-во теоремы}}} = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{\det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{\det A}_{\det \mathcal{A}}$$
 ■

*Замечание.*  $A$  – линейный оператор,  $B_{n \times n}$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1 \ \dots \ AB_n) =$$

$$= \det A \cdot \det(B_1 \ \dots \ B_n) = \det A \cdot \det B$$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$$

*Доказательство.*  $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{B}$  ■

**Следствие 3.**  $\mathcal{A} \in Aut(V)$

$$\Leftrightarrow \det\mathcal{A} \neq 0$$

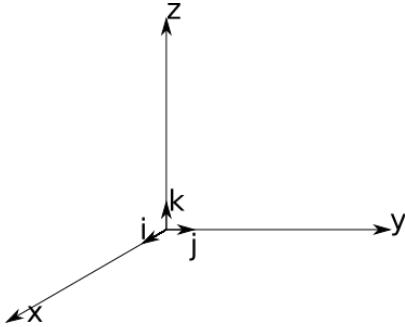
$$Причем \det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{A}}$$

*Доказательство.* Из следствия 2

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\det\mathcal{A} \cdot \det\mathcal{A}^{-1} = \det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$$
 ■

**Примеры.**  $V_3$



$$V_{abc\text{-правая тройка}} = \underset{\text{смешанное произведение}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f(\underset{3\text{-форма}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\mathcal{A} \in End(V_3) \ u \in V_3 \rightarrow v = \mathcal{A}u \in V_3$$

Как изменится объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$$\mathcal{A}(V_{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}) = f(\mathcal{A}\bar{a}, \mathcal{A}\bar{b}, \mathcal{A}\bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det\mathcal{A} \cdot V(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| \quad \text{Объем увеличится в } \lambda \text{ раз.}$$

$$1. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

Оператор подобия

$$\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\bar{i} = \mu\bar{i} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{j} = \mu\bar{j} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\bar{k} = \mu\bar{k} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = |\det\mathcal{A}| = |\det A| = |\mu^3|$$

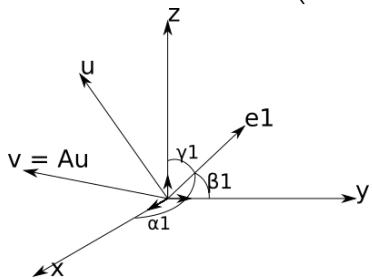
2.  $\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

### Оператор поворота

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \bar{i} \rightarrow e_1 \nearrow \\ \bar{j} \rightarrow e_2 \rightarrow \\ \bar{k} \rightarrow e_3 \searrow \end{array} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} |e_i| &= 1 \\ (e_i, e_j) &= 0 \\ i &\neq j \end{aligned}$$

$${}^n\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}) = \det \mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |\dots| \underset{\text{Смешанное произведение}}{e_1 e_2 e_3} = 1$$

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \det E = 1$$

$$|\det A| = 1$$

**Утверждение.**  $A, B$  подобные матрицы  $\Rightarrow \text{tr}A = \text{tr}B$

$\text{trace} = \text{след}$

*Доказательство.*  $A, B$  подобные  $\Rightarrow$

$\exists C$  невырожденная:  $C^{-1}(AC) = B$

$$\text{tr}B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C''^{-1}''(AC)ji = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C''^{-1}'' a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{ki} C''^{-1}''}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \text{tr}A$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}} \quad CC^{-1} = E$$

■

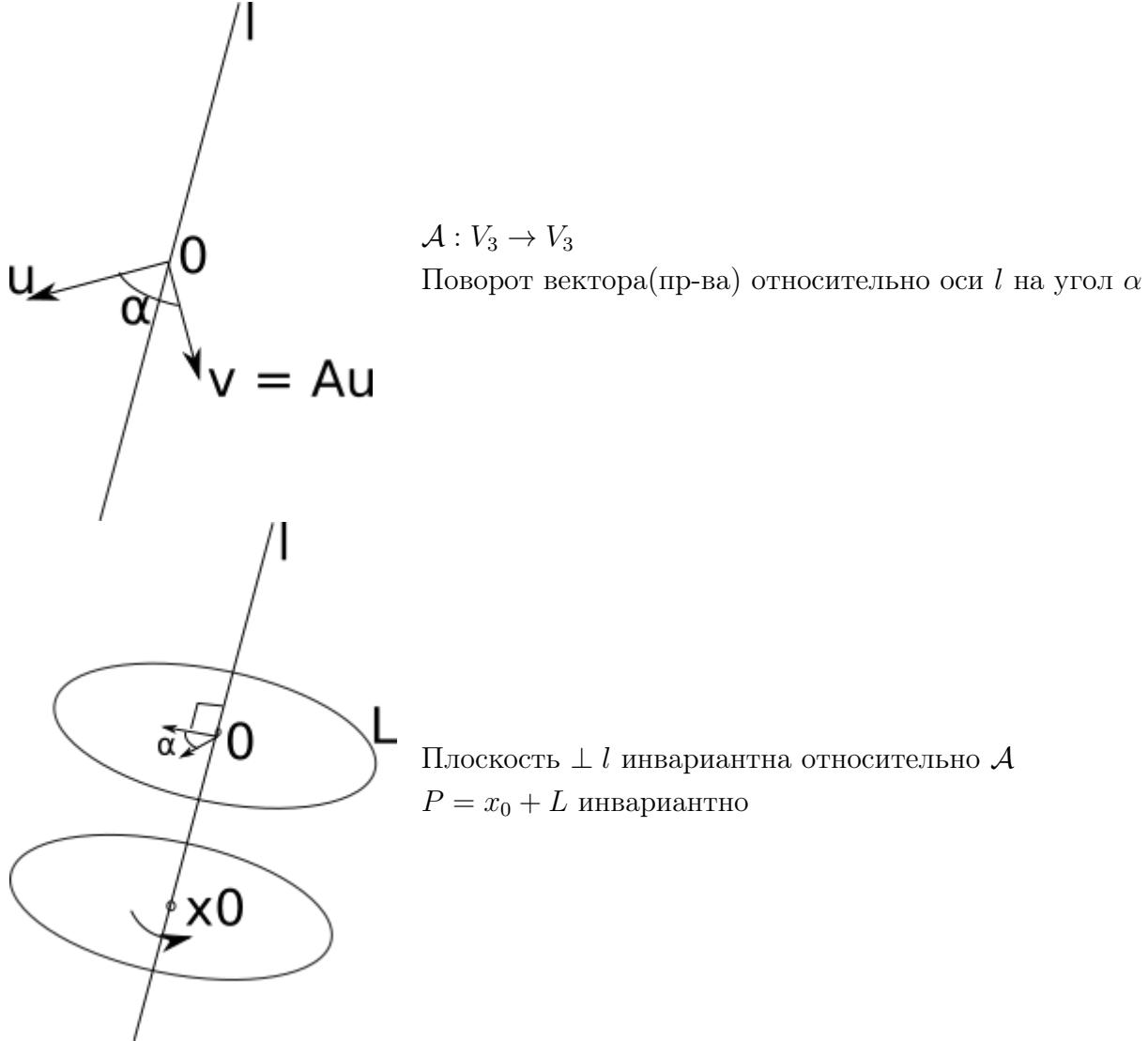
**Определение 3.**  $\text{tr}A = \text{tr}A$ , где  $A$  – матрица оператора в некотором базисе.

$\text{tr}A = \text{tr}A'$  – не зависит от выбора базиса, т.к.  $A$  и  $A'$  подобны.

**Определение 4.**  $L \subset V$   $L$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \in End(V)$  если  $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

**Примеры.**

1.  $\emptyset, V$  инвариантны относительно  $\mathcal{A}$
2.  $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$  инвариантны относительно  $\mathcal{A}$



**Теорема 3.**  $L \subset B$   $\mathcal{A} \in End(V)$ . Линейное пространство инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$  базис пространства  $V$ , т.ч. матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе

будет иметь вид:  $A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \emptyset & A_3 \end{array} \right)$

$A_1 k \times k$  где  $k = \dim L$

*Доказательство.*  $L = \underset{\text{базис}}{span}(e_1 \dots e_k)$

Дополним до базиса  $V$ :  $e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i \in L = \sum_{1 \leq i \leq k}^k a_{mi} e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 \cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{k+1 \leq i \leq n}^n a_{ij} e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1i}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ki} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

**Следствие 1.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно  $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$  базис пр-ва  $V$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A^2} & \\ & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{c} A^i \\ \text{размерность матрицы} \end{array} \right) = \dim L_i$$

Доказательство.  $L_1 = \text{span}(e_1^1 \dots e_i^{i_k})$

т.к.  $\bigoplus$ , то базис  $V$  – объединение базисов  $L_i$

$$V = \text{span}(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$  раскладываем по базису  $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} \frac{L_1}{1 \dots i_1} & & & \frac{L_2}{i_1+1 \dots i_2} & & & \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

отвечает позиции базисных элементов пр-ва  $L_i$  в базисе  $V$

**Следствие 2.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

*Доказательство.*  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall u \in V \exists! u = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i$

$$Im\mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

**Верно и " $\supset$ "**

Пусть  $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^m u_i \in V\right) \in Im\mathcal{A}$$

$$Im\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$\oplus$  прямая?

$$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \emptyset \leftarrow$$

Т.к.  $L_i$  инвариантна  $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$ , но  $L_i$  дизъюнктны  $\nwarrow \Rightarrow \forall i : v_i = \emptyset$

$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i}$  дизъюнктны  $\Rightarrow \oplus$

■

## 7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(v)$   $V$  линейное пространство над  $K$

**Определение 1.**  $\lambda \in K$  – *собственное число* (с.ч.) линейного оператора  $\mathcal{A}$ , если

$\exists [v \in V \neq \emptyset]$ , который называется *собственным вектором* (с.в.), такой что  $[\mathcal{A}v = \lambda v]$

Пусть  $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$

**Определение 2.**  $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \{c.v. v \neq \emptyset\}$  называется *собственным подпространством*.

$[\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda]$  – геометрическая кратность с.ч.

$$\gamma \geq 1$$

$V_\lambda$  и  $\gamma(\lambda)$  – инварианты относительно выбора базиса.

$$v \in V_\lambda \quad \mathcal{A}v = \lambda v \stackrel{?}{\in} V_\lambda$$

$$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$$

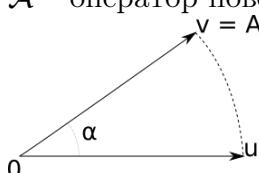
**Примеры.**

1.  $\mathcal{A}$  – оператор подобия:

$$\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$$

$$\mu \text{ с.ч.} \quad V_\lambda = V$$

2.  $\mathcal{A}$  – оператор поворота на плоскости на угол  $\alpha$



$$\alpha \neq \pi k \Rightarrow \text{нет с.в.}$$

3. Пусть  $\lambda$  с.ч.  $= 0$   $\mathcal{A}v = 0$  с.в.  $\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A}$  нетривиально  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  не автоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  необратимо  $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$

4.  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$v_1 \dots v_n \text{ базис, т.ч. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$$

Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч.  $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda$  – с.ч.  $v$  с.в.  $\neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$  нетривиально  $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0$

**Определение 3.**  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$  – характеристический многочлен оператора  $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$  базис  $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(A - tE)$  т.к.  $\det$  оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \det_{\mathcal{A}}$$

По теореме Виета:  $\det \mathcal{A} = \prod_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)} \lambda_1 \dots \lambda_n$

$\lambda \in K$  с.ч.  $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$  ( $\lambda \in K$ )

$\lambda$  корень характеристического многочлена.

$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$  с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow$  только вещественные корни  $\chi_{\mathcal{A}}$  будут с.ч.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$$

$\alpha(\lambda)$  называется алгебраической кратностью с.ч.  $\lambda$  (если  $\lambda \in K$ )

**Определение 4.** Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется *спектром линейного оператора*.  $(\lambda, \alpha(\lambda))$

Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.

$$\alpha(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$$

**Немножко про алгебраическую кратность**

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod_{a-\text{корень}} (t - a)^{m_a}$$

$a$ -корень  $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \mid (t - a)$

$a$  – корень  $f$  **кратности**  $m \Leftrightarrow \begin{cases} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(t) = (t - a)^m g(t)$$

$a_0$  – произведение всех корней с учетом кратности  $= (-1)^n \prod a$        $a$  – корень с учетом кратности

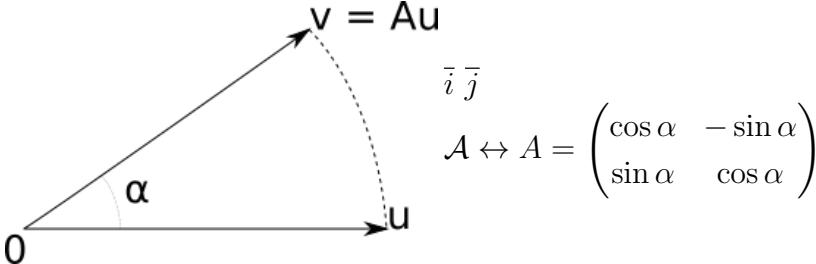
$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$(-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_n)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ с.ч.}$$

**Примеры.**  $\mathcal{A}$  – поворот на угол  $\alpha$



$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - t & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - t \end{pmatrix} =$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha t + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1$$

$$D = 4 \cos^2 \alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$$

нет веществ. корней  $\Rightarrow$  нет с.ч.

$$K = \mathbb{R}$$

**Теорема 1.**  $\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow [1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)]$

*Доказательство.* Пусть  $\gamma(\lambda) = k = \dim V_{\lambda} = \text{span}(v_1 \dots v_k)$  базис

$V_{\lambda}$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$  базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda & \\ \hline 0 & & A^3 \end{array} \right) \quad A_{k \times k}^1$$

$$\text{Базис} = v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$$

$$\mathcal{A}_{i=1 \dots k} v_i \in V_{\lambda} = \lambda v_i \Leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \left( \begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda - t & \\ \hline 0 & & A^3 - tE_{n-k} \end{array} \right) \underset{\text{св-ва}}{=} \det \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{A^3}(t)$$

Очевидно,  $\lambda$  корень  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  кратности не меньше, чем  $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$  ■

**Теорема 2.**  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  – различные с.ч.  $\mathcal{A}$

$v_1 \dots v_m$  соответствующие им с.в.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$  линейно независимы.

*Доказательство.* Метод математической индукции

1. База.  $m = 1$   $\lambda_1 v_1$  с.в. – линейно независимы, т.к.  $v_1 \neq 0$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для  $m - 1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для  $m$

От противного. Пусть  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  попарно различные с.ч.  $\mathcal{A}$ ,

а  $v_1 \dots v_m$  линейно зависимы.

$$\text{Пусть } v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

$$\mathcal{A}_{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

||

$$\lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = 0 \quad v_i \text{ линейно независим по инд. предположению}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m - 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_m = 0$  — Противоречие, т.к.  $v_m$  с.в. и значит не может быть 0

■

**Следствие 1.**  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  различные с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$  дизъюнктны.  $\left( \bigoplus_{c.\chi.} V_\lambda \right)$

*Доказательство.*  $v_1 + \dots + v_m = 0 \quad v_i \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое  $\neq 0 \Rightarrow$  это слагаемое с.в.  $\Rightarrow$  противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч.  $\Rightarrow \forall i : v_i = 0 \Rightarrow$  дизъюнктны.

■

**Теорема 3.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \rightarrow L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

*Доказательство.* см. теорему - следствие п. 7.3

Базис  $V$  – объединение базисов  $L_i$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \quad A_{k_i \times k_i}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства det}}{=} |A^1 - tE_{k_1}| |A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\chi_{A^1}(t) \quad \chi_{A^2}(t) \quad \dots \quad \chi_{A^m}(t)$$

$$\begin{array}{ccc} || & || & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}^m \end{array}$$

■

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств  $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$ .

$A_{n \times n}$   $\lambda$  с.ч.  $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

$$y = \begin{array}{c} Ax \\ \uparrow \\ \text{линейный оператор} \end{array}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

с.ч., с.в.?  $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$ ?

$$\chi_A(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$$

$$t_1 = 0 \quad \alpha(0) = 2$$

$$t_2 = 1 \quad \alpha(1) = 1$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) \quad \alpha \in ]R$$

$$V_{\lambda_1} = 0 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$$

$$\lambda_2 \quad 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \alpha \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = 1$$

## 7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)

**Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.**

**Функция от матрицы.**

**Определение 1.**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$\mathcal{A}$  называется о.п.с., если  $\exists$  базис пространства  $V$ , т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$  базис  $V$  из с.ч.  $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} V_\lambda$

$$V = \text{span}(v_1 \dots v_n)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\sum_{\lambda \in \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

$\Leftrightarrow$  все корни  $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$  все корни  $\chi(t)$  являются с.ч.  $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow \forall c. \forall \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$\begin{aligned}
& \text{Доказательство. } \mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow n = \dim V = \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) \\
& 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \quad \nearrow \\
& \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \rightarrow \quad \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}
\end{aligned}$$

■

**Следствие 1.**  $\sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

$\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftrightarrow$  спектр — простой.

( $n$  попарно различных с.ч.  $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$ )

**Определение 2.**  $A_{n \times m}$  называется **диагонализируемой**, если  $\exists$  невырожденная  $T_{n \times n}$ , т.ч.

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

(" $A$  подобна диагональной матрице")

**Следствие 2.** Если матрица  $A_{n \times n}$  — матрица некоторого о.п.с.  $\mathcal{A}$ , то она **диагонализируема**. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \exists \text{ базис} \quad v_1 \dots v_n \\
& \Downarrow (e_1 \dots e_n)V \quad \lambda_1 \dots \lambda_n \\
& A \quad \uparrow \quad \uparrow \\
& \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$T = T_{e \rightarrow v}$  невырожденная.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

$$\boxed{A \text{ диагонализируема} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \\
\forall \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$$

**Определение 3.**

$$\begin{aligned}
& V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \quad p_i : V \rightarrow L_i \subset V \\
& \nwarrow \Leftarrow \quad \Rightarrow \searrow \\
& L_i \subset V \quad \forall v \in V \ \exists! : v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i \\
& \text{линейное подпр.} \\
& \boxed{\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i v \stackrel{\text{def}}{=} v_i} \quad i = 1 \dots m
\end{aligned}$$

**Оператор проектирования (проектор)**

$$\mathcal{P}_i \stackrel{?}{\in} \text{End}(V)$$

$$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \Rightarrow \mathcal{P}_i \text{ линейный оператор.}$$

$$u + \lambda V = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i + \lambda \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \sum_{i=1}^m (\underbrace{u_i + \lambda v_i}_{\in L_i})$$

$$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$$

### Свойства проекторов:

1.  $\forall i \neq j \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij} = \emptyset$
2.  $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \emptyset_i^k = \mathcal{P}_i)$
3.  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
4.  $Ker \mathcal{P}_i = \sum_{j \neq i} L_j \quad \forall i = 1 \dots m$   
 $Im \mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

$$1. \quad \forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij}(v) = \mathcal{P}_i v_j \in L_j = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}_i \mathcal{P}_{ij} = \emptyset$$

Т.к.  $L_i$  дизъюнктны

$$v = v_1 + v_i + \underbrace{v_j}_{\text{Ед. образом}} + \dots + v_n \\ v_j = v_j + \emptyset$$

$$2. \quad \forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \underbrace{\mathcal{P}_i(v)}_{v_i \in L_i} = v_i = \mathcal{P}_i v$$

Т.к. верно  $\forall v \in V$ , то верно и для базиса  $\Rightarrow$  операторы совпадают.  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$

$$3. \quad \forall v \in V \left( \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i \right) v = \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i v = \sum_{i=1}^m v_i = v = \mathcal{E}v \Rightarrow \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^m = \mathcal{E}$$

$$4. \quad \mathcal{P}_i(v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_m) + \emptyset \\ = \sum_{j \neq i} \underbrace{\mathcal{P}_i v_j}_{\emptyset}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{j \neq i} L_j \subset Ker \mathcal{P}_i \\ \text{т.к. } v = \bigoplus_{j \neq i} L_j \oplus L_i \end{array}} \Rightarrow Ker \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$$

$Im \mathcal{P}_i = L_i$  по def "  $\subset$  "

Верно " $\supset$ "  $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P}v_i = v_i$

■

**Утверждение.**  $\mathcal{P}_i \in End(V) : V \rightarrow V$  и выполнены свойства 1, 3  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m Im \mathcal{P}_i \quad (m.e. \quad \mathcal{P}_i \text{ проекторы на } L_i = Im \mathcal{P}_i)$$

Доказательство.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i \stackrel{?}{=} \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \mathcal{E} = p_i \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_i^2 \\ \quad \quad \quad \parallel \\ \quad \quad \quad i \neq j$$

2.  $v_1 + v_2 + \dots + v_m = \emptyset$

$v_i \in Im \mathcal{P}_i$  дизъюнктно?

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \quad w_i \in V$$

$$\begin{aligned}
v_i = \mathcal{P}_i w_i &= \mathcal{P}_i \left( \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j} \right) = 0 \\
\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j w_j)}_{=0 \ i \neq j} &= \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i \\
\forall v \in V \quad \mathcal{E}v = v &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j v}_{v_j \in Im \mathcal{P}_j} \quad \Rightarrow v = \sum_{j=1}^m Im \mathcal{P}_j
\end{aligned}$$

■

**Теорема 2** (О спектральном разложении о.п.с.).  $v = \bigoplus_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \quad \mathcal{P}_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$

$\mathcal{A}$  o.n.c.  $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda \leftarrow \text{спектральные проекторы}$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
1. \quad &\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = 0 \\
2. \quad &\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda \\
3. \quad &\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E} \\
\forall v \in V \quad &\mathcal{A}v = \mathcal{A} \left( \sum_{\lambda} v_\lambda \in V_\lambda \right) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{= \lambda v_\lambda} = \\
&\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda v
\end{aligned}$$

Доказательство верно  $\forall$  векторного про-ва  $V$ . В частности для базиса  $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda}$$

■

**Следствие 1.**  $A_{n \times n}$  диагонализируема  $\Leftrightarrow \exists \mathcal{P}_\lambda \underset{\text{проекторы}}{n \times n} \quad 1^\circ \ 2^\circ \ 3^\circ$

$$A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{span } V_3$$

$$\Rightarrow \text{o.p.c. } V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = \text{span}(V_1, V_2, V_3)$$

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad \boxed{AT = T\Lambda}$$

$$\mathcal{P}_1 : V \rightarrow V_{\lambda_1} \subset V$$

$$\mathcal{P}_2 : V \rightarrow V_{\lambda_2} \subset V$$

$$\mathcal{P}'_1 \text{ матрица } \mathcal{P}_1 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  – матрицы проекторов в базисе  $e$  (канонич.)

$$\mathcal{P}_1 v_i = \begin{cases} v_i, i = 1, 2 \\ \emptyset, i = 3 \end{cases}$$

$1^\circ 2^\circ 3^\circ$

$$\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 = E$$

$$\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2 = \emptyset \dots$$

$$\mathcal{P}'_2 \text{ матрица } \mathcal{P}_2 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Примеры.**

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}'_i = T^{-1} \mathcal{P}_i T \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}'_i T^{-1} \quad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \emptyset$$

$$\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$$

**Определение 4.**  $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$  – последовательность матриц,

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall i, j \ \exists a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{m=1}^N A_m}_{\substack{S_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad R = \infty \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad \text{либо } x = 1$$

**Определение 5.** Функция от матрицы.

$A_{n \times n}$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m, \text{ где } \boxed{\begin{array}{lcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{array}}$$

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

$$\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A^{2m}$$

**Теорема 3.**  $f$  аналитическая в  $|x| < R$

$A_{n \times n}$  все с.ч.  $|\lambda| < R$

$A$  диагонализируемая То есть:

$$\exists \underset{\text{невырожд.}}{T} : \Lambda = T^{-1}AT$$

$$\exists \mathcal{P}_\lambda : A = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

↓

$$1. \underset{f(A)}{\exists} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$2. \underset{f(A)}{\exists} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Доказательство.

$$1. \quad \begin{aligned} f(A) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \\ A^m &= (T \Lambda T^{-1})^m = \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x| < R \end{array}}$$

$$= T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} =$$

$$= T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m \right) T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$|\lambda_i| < R$$

$$2. A^m = \left( \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda \right)^m \underset{\mathcal{P}_\lambda \neq \mu \neq 0}{=} \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left( \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda \right) = \sum_{\lambda} \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m = f(\lambda) \right) \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\lambda} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

■

*Замечание.*  $A$  диагон.  $\Leftrightarrow A = T \Lambda T^{-1}$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$$

$$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$t^m A^m = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

**Примеры.**  $e^{At}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_1} : \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_2} : \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\forall \lambda : \left. \begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \gamma(\lambda) \\ \sum_{\lambda} \alpha(\lambda) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ диагонализируемая}$$

$$T_{e \rightarrow v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \xrightarrow[i=1,2]{} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{n \times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x} - \text{производная}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \quad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности

$$(e^{At})' = Ae^{At}$$

$$e^{A \cdot 0} = E$$

$$e^{At} = \left( \sum_{\lambda \text{ c.ч.}} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda \right)' = \sum_{\lambda \text{ c.ч.}} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_{\lambda} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\mu=\lambda} \underline{\lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda}$$

*Замечание.*  $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$  все с.ч.  $\lambda \neq 0$   
 (все корни хар. многочлена)

$\square A$  диагонализируема. Все с.ч.  $\lambda \neq 0$

$$A^{-1} = T \Lambda^{-1} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\Lambda \Lambda^{-1} = E$$

$$AA^{-1} = T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda^{-1} T^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$$

( $AA^{-1} = E$  упр.)

$$\sqrt[m]{A} = T \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\square$  все  $\lambda_i \geq 0$

( $m$  нечет  $\Rightarrow \lambda$  любого знака)

$$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$$

$$(\sqrt[m]{A})^m = T \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} \underbrace{T^{-1} \dots T}_{E} \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.:  $(\sqrt[m]{A})^m = A$ )

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

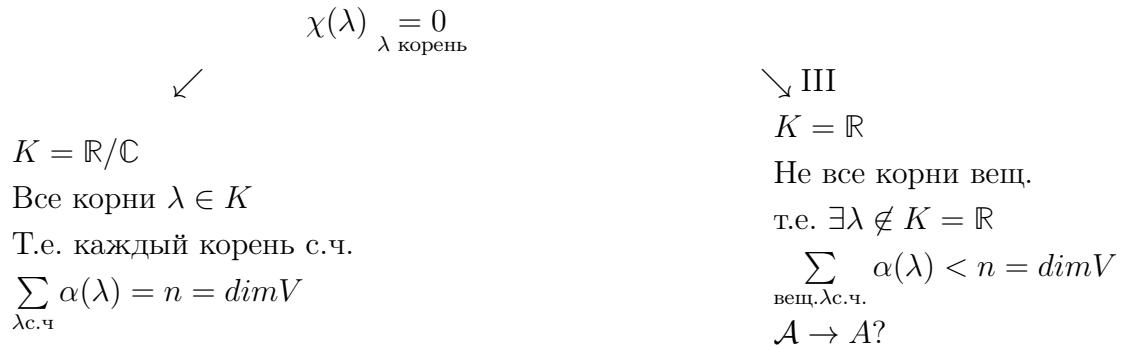
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & A^{-1} &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \mathcal{P}_1 + \frac{1}{(-1)} \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$$

$$A^2 = E$$

## 7.6 Комплексификация линейного веш. пространства. Продолжение веш. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$   $V$  над полем  $K$



$$\begin{array}{ccc} \text{I} \swarrow & & \searrow \text{II} \\ \forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) & & \exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \\ \mathcal{A} - \text{o.p.c.} \rightarrow A \text{ диагонализир.} & & \mathcal{A} \text{ не о.п.с.} \\ & & \rightarrow A \text{ приводится к Жордановой форме} \end{array}$$

**Определение 1.**  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in V \quad v := x + iy \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} \forall v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \quad x &= Re v \\ &\quad y = Im v \end{aligned}$$

Определим

1.  $v = v' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \in V \\ y = y' \end{cases}$
  2.  $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{cases}$
  3.  $\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\alpha x - \beta y}_{\in V_{\mathbb{C}}} + i \underbrace{\beta x + \alpha y}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

$$4. \forall x \in V \Leftrightarrow x + i0 \in V_{\mathbb{C}}$$

$$V \subset V_{\mathbb{C}}$$

$$0 \leftrightarrow 0 + i0$$

Упр.:  $V_{\mathbb{C}}$  – линейное пространство над  $\mathbb{C}$

$V_{\mathbb{C}}$  – комплексификация линейного вещественного пространства  $V$

**Утверждение.**  $e_1 \dots e_n$  базис  $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$  базис  $V_{\mathbb{C}}$

T.e.  $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$  структуры над разными полями.

Доказательство.  $e_1 \dots e_n$  базис  $V_{\mathbb{C}}$ ?

- порождающая?
- линейно независимая?

1.  $\forall v \in V_{\mathbb{C}} \quad v = x \in V + iy \in V = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j =$   
 $\sum_{j=1}^n \underbrace{[x_j + iy_j]}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n$  порождающая.
2.  $\sum_{j=1}^n \gamma_j e_j = \emptyset \quad \gamma_j \in \mathbb{C}$   
 $\left\| \sum_{j=1}^n \underbrace{\alpha_j e_j}_{x} + i \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_j e_j}_{y} = \emptyset \right.$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \emptyset = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \\ y = \emptyset = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 \dots e_n \text{ линейно независимы} \\ \forall j \alpha_j = 0 \quad \Leftrightarrow \forall j \gamma_j = 0 \\ \forall j \beta_j = 0 \end{cases}$   
 $\Rightarrow \underbrace{e_1 \dots e_n}_{\text{лин. незав.}} \text{ в } V_{\mathbb{C}}$

■

**Определение 2.**  $z = x + iy \quad x, y \in V$

вектор сопряженный к  $z$ :

$$\bar{z} = x - iy$$

$$(\bar{z} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \bar{\lambda} \bar{z})$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

**Утверждение.**  $v_1 \dots v_m$  линейно незав. в  $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$  линейно независимы в  $V_{\mathbb{C}}$

Очевидно,  $v_1 \dots v_m$  линейно зависимы  $\Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$  линейно зависимы.

*Доказательство.*

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{v}_j = \bar{0} = 0 \\ \left\| \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^m \gamma'_j v_j \text{ линейно незав.} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \forall j \gamma'_j = 0 = \bar{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow$  линейно независим.

■

$$rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$$

**Определение 3.**  $\mathcal{A} \in End(V)$

$$V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i \underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$$

Линейность?

1. Аддитивность.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1 + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

Очевидно, из аддитивности  $\mathcal{A}$

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Однородность

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v) &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(x + iy)) = \\ &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)) = \\ &= \mathcal{A}(\alpha x - \beta y) + i\mathcal{A}(\alpha y + \beta x) = \\ &= \alpha \mathcal{A}x - \beta \mathcal{A}y + i\alpha \mathcal{A}y + i\beta \mathcal{A}x = \\ &= (\alpha + i\beta)\mathcal{A}x + i(\alpha + i\beta)\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{A}x + i\lambda \mathcal{A}y = \\ &= \lambda(\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y) = \lambda \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  – продолжение линейного вещ. оператора  $\mathcal{A}$

с пространства  $V$  на его комплексификацию  $V_{\mathbb{C}}$

Свойства  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V(V_{\mathbb{C}}) \\ \text{веществ.} \\ \mathcal{A} \leftrightarrow A \\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Т.е.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр.  $\mathcal{A}$

$$2. \forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z}$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \overline{\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y = \\ &= \mathcal{A}x + i\mathcal{A}(-y) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x - iy) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z} \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} \chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \\ \parallel & & \parallel \end{array} \quad \exists e_1 \dots e_n \text{ базис } V$$

$$\det(A - tE) \quad \det(A_{\mathbb{C}} - tE) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Все корни характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}$  являются собственными числами  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

$$4. \quad \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda) = 0$$

Т.к. многочлен с вещ. коэф.  $\Rightarrow \bar{\lambda}$  тоже корень.

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \quad \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\bar{\lambda}) = 0$$

$v$  соотв. с.в.

$$\Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ :	$\dim V_{\lambda} = \dim V_{\bar{\lambda}}$ (из утв. 2)
	$\gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{v} \underset{\text{св-во 2}}{=} \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{с.в. для } \lambda}}{v}} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda}$$

"III":  $\mathcal{A} \in End(V)$

$V$  над  $\mathbb{R}$

$$\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = \dim V$$

Т.е. не все корни  $\chi_{\mathcal{A}}$  вещ.

$\rightarrow$  строим  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$   $A_{\mathbb{C}} = A$

Все корни с.ч.  $\Rightarrow$  матрица для  $A_{\mathbb{C}}$  будет сведена либо к I, либо к II

**Примеры.**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$$

$$D = -36 < 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ с.ч. } \alpha(\lambda_1) = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3 \quad \alpha(2, 3) = 1$$

$$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 \quad V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 + 3i \quad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$$

Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещественных чисел.

Только теперь арифметические операции с комплексными.

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 + 3i \\ 5 + 3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$$

$\forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$  диагонализирован.

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 - 3i & 3 + 3i \\ 2 & 5 - 3i & 5 + 3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix} T^{-1} = \dots$$

## 7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

**Определение 1.** Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен  $\psi(t)$  называется аннулятором элемента  $v \in V$ , если  $\psi(\mathcal{A})v = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$$

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$$

$$\psi(t) = \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$$

Т.е. перестановочны.

**Определение 2.**  $\psi(t)$  аннулятор элемента  $v \in V$  наименьший возможной степени называется **минимальным аннулятором элемента**  $v$

**Теорема 1** (О минимальном аннуляторе элемента).

$\mathcal{A} \in End(V)$

1.  $\forall v \in V \exists! \text{ минимальный аннулятор } v$
2.  $\forall \text{ аннулятор элемента делится на его минимальный.}$

*Доказательство.*

1. (a)  $\square v = 0 \quad \psi(t) = 1 \quad \text{Очевидно, минимальный аннулятор.}$

$$\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = 0$$

- (b)  $\square v \neq 0$

$$(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \dots, \mathcal{A}^{m-1}v, \mathcal{A}^m v$$

линейно независимая система

линейно зависимая система

$$\dim V = n$$

$$m \leq n + 1$$

$$\mathcal{A}^m v = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$$

$$0 = \mathcal{A}^m v - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow \text{Алгоритм}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$$

Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента  $v$

2.  $\psi_1$  – аннулятор  $v$

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$$

$$\deg r(t) < \deg \psi(t)$$

$$0 = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})v + r(\mathcal{A})v \xrightarrow{=0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(t) \text{ аннулятор } v \\ \deg r < \deg \psi \end{cases} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdash \psi$$

■

**Определение 3.** Нормализованный многочлен  $\phi(t)$  называется аннулятором  $\mathcal{A}$ ,

если  $\phi(\mathcal{A}) = 0$

$$(\Leftrightarrow \forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = 0)$$

Аннулятор  $\mathcal{A}$  минимальной степени называется **минимальным многочленом**

**Теорема 2** (о минимальном многочлене).  $\mathcal{A} \in End(V)$

1.  $\forall \mathcal{A} \exists! \text{ минимальный многочлен}$
2.  $\forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} \text{ делится на минимальный многочлен}$

*Доказательство.*

$e_1 \dots e_n$  базис  $V$

$\Rightarrow$  по Теореме 1 для  $\forall e_j \exists! \psi_j$  минимальный аннулятор  $e_j$

$$\psi_j(\mathcal{A})e_j = \emptyset$$

$$\psi(t) = \text{H.O.K. } (\psi_1 \dots \psi_n)$$

$$\forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n v_i \phi(\mathcal{A})e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=0} = 0$$

$$\phi : \psi_j \Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)$$

$$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A}$$

Давайте покажем, что у  $\phi$  степень минимальная.

От противного.

$$\exists \phi_1 \text{ аннулятор } \mathcal{A} \quad \exists \deg \phi_1 < \deg \phi$$

$$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = 0 \Rightarrow \phi_1 \text{ аннулятор элемента } e_j \xrightarrow{\text{по Теореме 1}}$$

$$\Rightarrow \phi_1 \vdots \psi_j \xrightarrow{\substack{\text{аннулятор } e_j \\ \text{минимальный аннулятор } e_j}} \Rightarrow \phi_1 : \phi \Rightarrow \deg \phi_1 \geq \deg \phi. \text{ Противоречие} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \deg \phi \text{ минимальный} \Rightarrow \text{п.2 доказан, т.к. } \forall \text{ аннулятор } \mathcal{A} : \phi$$

**Единственность?**

$$\exists \phi_1, \phi \xrightarrow{\substack{\nearrow \\ \searrow}} \text{минимальные аннуляторы одной степени.}$$

нормализов.  $\Rightarrow$  ст. коэф. 1

$$\deg(\phi_1 - \phi) < \deg(\phi) = \deg(\phi_1)$$

$$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \phi_1(\mathcal{A})v - \phi(\mathcal{A})v = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \phi_1 - \phi$  аннулятор  $\mathcal{A}$  меньшей степени  $\Rightarrow$  противоречие минимальн.

■

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \phi = ?$  минимальный многочлен

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_1 ?$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ae_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A^2e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

$$A^2e_1 = -4e_1 + 4Ae_1$$

$$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^2e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

$$A^2e_2 = 4Ae_2 - 4e_2$$

линейно завис.

$$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

линейно нез.

линейно завис.  
 $\mathcal{A}e_3 = 2e_3$

$$\psi_3(t) = t - 2$$

$$\phi(t) = \text{H.O.K. } ((t - 2)^2, (t - 2)) = (t - 2)^2$$

**Теорема 3** (Кэли-Гамильтона).  $\mathcal{A} \in End(V)$

$$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) \text{ — аннулятор } \mathcal{A}$$

*характерист. многочлен*

Доказательство.  $\mu$  — не корень  $\chi(t)$

$$\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$$

$e_1 \dots e_n$  базис в.  $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B \leftarrow \text{соузная матрица (прис-ная)}$$

$$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow \text{определитель } (n-1)\text{-го порядка } A - \mu E$$

Т.е. мн-н степени  $n-1$  относительно  $\mu$

$$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \dots + B_1\mu + B_0$$

$$\det(A - \mu E) \cdot E = (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + B_1\mu + B_0)$$

||

$$\chi(\mu) \cdot E$$

||

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k \cdot E$$

$\mu^0 : \alpha_0 E = AB_0$ $\mu^1 : \alpha_1 E = AB_1 - B_0$ $\mu^2 : \alpha_2 E = AB_2 - B_1$ $\dots$ $\mu^{n-1} : \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2}$ $\mu^n : \alpha_n E = -B_{n-1}$	$A^0$ $A^1$ $A^2$ $\vdots$ $A^{n-1}$ $A^n$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------

$$\chi(\mathcal{A}) = \chi(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1}$$

$$- A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = 0$$

$\chi$  — аннулятор  $\mathcal{A}$

■

**Теорема 4.**  $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корней характеристического многочлена  $\mathcal{A}$  совпадает с множеством корней минимального многочлена  $\mathcal{A}$  (без учета кратности)

Доказательство.  $\chi(t)$  – характерист.,  $\phi(t)$  – минимальный многочлен.

” $\Leftarrow$ “  $\exists \phi(\lambda) = 0 \Rightarrow$  т.к.  $\chi$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , то по Т-ме 2  $\chi \dot{\mid} \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

” $\Rightarrow$ “  $\exists \chi(\lambda) = 0$

1.  $\exists \lambda \in K \Rightarrow \lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \quad \exists v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0 \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$  минимальный аннулятор  $v$

Т.к.  $\phi \dot{\mid} \psi \Rightarrow \lambda$  корень  $\phi$

$\phi(\lambda) = 0$

2.  $\lambda \notin K$  т.е. III случай:  $K = \mathbb{R}$

$\exists$  комплексные корни характерист. многочлена.

$V \rightarrow V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$  базис  $V \rightarrow$  базис  $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}e_j = \mathcal{A}e_j + i\mathcal{A}\theta = \mathcal{A}e_j$

$e_j = e_j + i\theta$

$\Rightarrow \forall k \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$

$\Rightarrow$  Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).

Получим, что минимальные многочлены  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  и  $\mathcal{A}$  совпадают.

Т.е.  $\phi$  мин. мн-н для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}}$   $\Rightarrow$  Применим случай а) для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   
 $\Rightarrow \lambda$  с.ч.  $\lambda$  корень  $\phi$

■

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни  $\chi : 2$

Корни  $\phi : 2$

$\leadsto$  еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

**Следствие 1.**

1.  $\psi \vdots \phi$   
характер. (аннулятор) минимальный (аннулятор мин.)
2.  $\deg \phi = n = \dim V \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$\chi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$
$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

## 7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad \sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

$P_{m-1}$  – линейное пространство многочленов степени не выше  $m-1$

$$\dim P_{m-1} = m$$

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda}(t) &= \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)} \\ \phi(t) &= (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) \quad \phi_{\lambda}(\lambda) \neq 0 \\ &\text{вз. просты} \quad \phi_{\lambda}(\mu) = 0 \\ &\mu \neq \lambda \end{aligned}$$

**Определение 1.**  $I_{\lambda} = \{p \in P_{m-1} \mid p \dot{\colon} \phi_{\lambda}\}$

*Главный идеал*, порожденный многочленом  $\phi_{\lambda} =$

$$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} \mid p = f_{\lambda} \phi_{\lambda}\}$$

$I_{\lambda}$  – линейное подпространство  $P_{m-1}$

$$p_{1,2} \dot{\colon} \phi_{\lambda} \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \dot{\colon} \phi_{\lambda}$$

**Теорема 1.**  $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$

*Доказательство.*

1. Дизъюнктность.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\lambda} \underbrace{f_{\lambda} \phi_{\lambda}}_{\in I_{\lambda}} = f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} + \sum_{\mu \neq \lambda} f_{\mu} \underbrace{\phi_{\mu}}_{\substack{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}} \\ &\quad \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \underbrace{f_{\lambda}}_{\substack{\text{вз. просты} \\ \deg f_{\lambda} = m(\lambda)-1}} \vdots (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_{\lambda} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_{\lambda} \equiv 0 \Rightarrow f_{\lambda} \phi_{\lambda} \equiv 0 \Rightarrow \text{Дизъюнктны}$$

2.  $\dim P_{m-1} = m$

$$\begin{aligned} \parallel \\ \sum_{\lambda} \dim I_{\lambda} &= \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \end{aligned}$$

$$I_{\lambda} \subset P_{m-1}$$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

■

**Следствие 1.**  $\forall p \in P_{m-1} \exists! p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$

$$p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$  – полиномиальное разложение единицы

*Замечание.*

$$1. \lambda \neq \mu$$

$$\begin{array}{ccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu \\ || & & || \\ f_\lambda \phi_\lambda & f_\mu \phi_\lambda & = \eta \cdot \phi \\ \uparrow & & \\ (t - \lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

$$2. \forall \lambda m(\lambda) = 1$$

**Если.** Т. е. все корни  $\phi$  взаимно простые.

$$f_\lambda = \text{const} \quad (\text{def } f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$$

**Теорема 2** (Лагранжа).

$$\forall \lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ll} \text{корень } \phi \rightarrow \mu \neq \lambda & \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ & \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \\ p(t) \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\mu} & \boxed{f_{\mu}} \cdot \phi_{\mu}(t) \\ & \uparrow \\ & \text{const, т.к.} \end{array}$$

корни взаимно

просты

$$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu)$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (t - \lambda) = \underbrace{\sum_{\mu} \phi_{\mu}(t)}_{\phi_{\mu}(t)}$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = \phi_{\lambda}(\lambda) \Rightarrow f_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

■

**Следствие 1.**  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow \boxed{t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}}$$

*Доказательство.* По теореме:  $1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_{\lambda}(t)$

$$\text{По теореме: } t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

■

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$\phi$  минимальный многочлен, все корни  $\in K$  ( $\Rightarrow$  все корни  $\chi \in K$

$\Rightarrow$  т.е. все с.ч.  $\in K - \text{I, II случаи}$ )

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} := p_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \in End(V)$$

$\mathcal{P}_{\lambda}$  – проекторы ?      ↑ это уже есть

Достаточно проверить  $\mathcal{P}_{\lambda} \cdot \mathcal{P}_{\mu} = \mathbb{0}$

$$\mathcal{P}_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = f_{\mu}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

перестановочны, т.к. многочлены от  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

↑  
содержит

$$(p_{\lambda} \cdot p_{\mu} : \phi \text{ см. замеч. 1}) \quad \eta(\mathcal{A})(t - \mu)^{m(\mu)} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{\lambda}$  проекторы – **спектральные проекторы**  $\mathcal{A}$

$Im \mathcal{P}_{\lambda}$  **спектральное подпространство**

$$7.5 \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_{\lambda}}$$

$$\text{Примеры. } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{array}$$

$$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow \text{не о.п.с.}$$

$$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$$

$$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$$

$$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$$

$$\text{Прав. дробь } \frac{1}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda}}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda}}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}} \quad \begin{array}{l} \text{Правильн.} \\ \text{Правильн. дробь} \end{array}$$

$$\deg f_{\lambda} < m(\lambda)$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{\left(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}\right)}_{p_{\lambda_1}} \underbrace{(t-3)}_{\phi_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}}_{p_{\lambda_2}} \underbrace{(t+1)^2}_{\phi_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

*Замечание.*  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа  $t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}} \nearrow \quad 1 = \sum p_{\lambda} \quad \text{спектральное разложение о.п.с.}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1} \quad \text{Доказательство позже}$$

**Определение 2.**  $K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$

называется **корневым подпространством**  $\mathcal{A}$

**Теорема 3.**

1.  $K_{\lambda}$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$
  2.  $\text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}$
  3.  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный многочлен  $\mathcal{A}|_{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$
- $\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}}$

*Доказательство.*

$$1. x \in K_{\lambda} \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_{\lambda}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{A}x = \mathcal{A} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{перестановочны} \\ \Rightarrow = 0}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$2. (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{P}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) =$$

$$= f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = 0$$

$$\forall x \in V$$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_{\lambda} x}_{\in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}} = 0 \Rightarrow \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$$

$$\text{Обратно: } K_{\lambda} \stackrel{?}{\subseteq} \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$x \in K_{\lambda}$$

$$\mu \neq \lambda \quad \mathcal{P}_{\mu} x = f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A}) x = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{\substack{\text{содержит} \\ (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}}} \in K_{\lambda} = 0$$

$$x = \mathcal{E}x = \sum_{\substack{\mu \\ 0 \\ \mu \neq \lambda}} \mathcal{P}_{\mu} x = \mathcal{P}_{\lambda} x \in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \Rightarrow K_{\lambda} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$$

3.  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный многочлен для  $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$ ?

$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$  аннулятор  $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

Минимальный?

$\square$  не минимальный

$\psi_1 = (t - \lambda)^{m(\lambda)-1} \quad \square$  это минимальный многочлен

$\phi_1 := (t - \lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$  аннулятор  $\mathcal{A}$ ?

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$$

$$= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A}) \cdot \phi(\mathcal{A}) = \emptyset$$

$$\forall x \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$$

$$= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda} = \emptyset$$

$$\underbrace{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x}_{\text{мин. многочлен по предположению}}$$

$$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \emptyset$$

$$\phi_1(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \phi_1(\mathcal{A}) \sum_{\mu} \mathcal{P}_\mu = \emptyset$$

$$\underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu}$$

$\Rightarrow \phi_1$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , но степени  $< \phi$

$\deg \phi_1 = m - 1 \Rightarrow$  противоречие мин.  $\phi \Rightarrow (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный мн-н  $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

■

**Следствие 1.**  $A$  о.п.с.  $\Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ )  $\mathcal{A}$  о.п.с.

$\phi(t) \prod_{\lambda} (t - \lambda)$  покажем что это минимальный многочлен  $\mathcal{A}$

$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$  – собственные подпространства  $\mathcal{A}$

$\forall v \in V \exists! v = \sum_{\lambda} v_{\lambda}, v_{\lambda} \in V_{\lambda}$

$$\phi(\mathcal{A})v = \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \sum_{\mu} v_{\mu} =$$

$$= \sum_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) v_{\mu} = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})v_{\mu}}_{\emptyset} = \emptyset$$

$$v_{\mu} \in V_{\mu} = Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \nearrow$$

$\Rightarrow \phi$  аннулятор  $\mathcal{A} \Rightarrow$  очевидно минимальная степень  $\Rightarrow$  минимальный многочлен.

( $\Leftarrow$ )  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$K_{\lambda} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^1 = V_{\lambda}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с.}$$

■

**Примеры.**

$$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A - \lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$$

$$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A - \lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2} \quad \text{— упр.}$$

## 7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

**Определение 1.**  $\mathcal{B} \in End(V)$  называется **нильпотентным**, если  $\phi(t) = t^\nu$

Минимальный многочлен  $\mathcal{B}$ , т.е.  $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

$\nu$  – индекс нильпотентности (мин. степень  $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$ )

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

Идемпотентность

Степень минимального многочлена  $\rightarrow \nu \leq \dim V = n$

**Утверждение.**  $\forall \lambda : m(\lambda) \leq \dim V_\lambda$

*Доказательство.*  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный мн-н  $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow m(\lambda)$  индекс нильпотентности  $\mathcal{B}_\lambda \in End(K_\lambda)$

$$m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$$

*Замечание.*  $\sum_{\lambda} m(\lambda) \leq \sum_{\substack{\deg \chi \\ \deg \phi}} \dim K_\lambda = n$

$$\bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V$$

**Теорема 1** (Разложение Жордана).

$\forall \mathcal{A} \in End(V)$  можно представить в виде:

$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{D}$  о.п.с.

$\mathcal{B}$  нильпотентный, причем  $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$  перестановочны

*Доказательство.*  $\phi$  – минимальный многочлен  $\mathcal{A}$

$\mathcal{E} = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$  операторн. разложение единицы

$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$   $\mathcal{D}$  о.п.с.?

$V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$

$\exists v_\lambda \neq 0 \in Im \mathcal{P}_\lambda$

$$0 \neq \lambda$$

||

$$\underline{\underline{Dv_\lambda}} = (\sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}) v_\lambda = \sum_{\mu} \mu (\mathcal{P}_{\mu} v_\lambda) = \lambda \mathcal{P}_\lambda v_\lambda = \underline{\underline{\lambda \cdot v_\lambda}}$$

$$\mathcal{P}_{\mu} \mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0}$$

$$\lambda \neq \mu$$

$\Rightarrow \lambda$  с.ч.  $\mathcal{D}, v_\lambda$  соотв. с.в.  $\mathcal{D}$

$\Rightarrow$   $Im \mathcal{P}_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathcal{D}}$  собств. подпр-во  $\mathcal{D}$ , отвечающ. с.ч.  $\lambda$   
 $V = \bigoplus_{\lambda} Im \mathcal{P}_\lambda$  дизъюнктны  $\Rightarrow Im \mathcal{P}_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$

Объединение базисов  $Im \mathcal{P}_\lambda$  – базис  $V$

Каждый вектор из  $Im \mathcal{P}_\lambda$  – это с.в.  $\mathcal{D}$

$\Rightarrow$  у  $V$  есть базис из с.в.  $\Leftrightarrow \mathcal{D}$  о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \mathcal{A} \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\nu = \max_{\lambda} m(\lambda) \frac{\phi(t)}{\min_{\text{мин. мн-н}} \mathcal{A}} = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda})^{\nu} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \mathcal{P}_{\lambda} =$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = 0$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\lambda}^2 = \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \underbrace{f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_{\lambda}} =$$

все операторы перестановочны

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu - m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A}) = 0} = 0$$

$\mathcal{B}$  нильпотент

$$\mathcal{B} = \sum_{\lambda} \underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}}$$

$$D = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$

■

Замечание.

$$1. \mathcal{B} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}$$

$$\mathcal{B}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{Im \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}}$$

2.  $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$  все три оператора взаимно-перестановочны

$$\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$$B^2 \stackrel{?}{=} \emptyset \quad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Разложение Жордана} \\ \text{Диагонализ.}}}{=} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Теорема 2** (Единственность разложения Жордана).

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)



Рис. 1

Доказательство.  $\square \mathcal{A} = \sum_{\text{o.p.c.}} \mathcal{D}' + \sum_{\text{Нильпотент}} \mathcal{C} \quad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

Т.к.  $\mathcal{D}'$  о.п.с., то  $\mathcal{D}' = \sum_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

$M$  – множество с.ч.  $\mathcal{D}'$

$Q_\mu$  спектральные проекторы

$$Q_\mu : V \rightarrow V_\mu^\nu$$

$$\sum_\mu Q_\mu = \mathcal{E}$$

Достаточно доказать:  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

1. Множество  $M$  совпадает с множеством корней  $\phi$  – минимальн. мн-н  $\mathcal{A}$

$$\{\mu\} = \{\lambda\}$$

2.  $\text{Im } Q_\mu = K_\mu \leftarrow$  корневое подпространство  $\mathcal{A}$ , отвч. с.ч.  $\mu$  ( $\text{Im } \mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$ )

$$1. (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})Q_\mu = (\sum_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

$$\begin{aligned} Q_\nu Q_\mu &= 0 & Q_\mu^2 &= Q \\ \nu &\neq \mu \end{aligned}$$

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

↑

Верно, если  $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu \mathcal{C}$

$\Rightarrow$  докажем:  $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu \mathcal{C}$

$$\square \lambda \neq \mu \quad (\lambda - \mu)Q_\lambda \mathcal{C}Q_\mu = (\lambda Q_\lambda) \mathcal{C}Q_\mu - Q_\lambda \mathcal{C}(\mu Q_\mu) =$$

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \sum_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu \mathcal{D}'$$

$$Q_\lambda (\mathcal{D}'\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{D}')Q_\mu \underset{\parallel}{=} 0$$

$$\lambda \neq \mu \quad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \emptyset = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$$

$$\underbrace{\sum_{\lambda} Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu}_{\mathcal{E}} = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \frac{\boxed{\sum_{\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}{\boxed{\mathcal{E}}}$$

$$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

$$k(\mu) = \min K, \text{ такой что } \mathcal{C}^k Q_\mu = \emptyset$$

Такое  $K(\mu)$  обязательно найдется, т.к.  $\mathcal{C}$  – нильпотент.

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

$(t - \mu)^{k(\mu)}$  – минимальный аннулятор элементов  $\text{im} Q_\mu$

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)}$$

$\phi$  минимальный многочлен  $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$  аннулирует любые элементы  $V$ ,

в частности элементы  $\text{Im} Q_\mu$

Т.е.  $\phi(t)$  аннулятор элементов  $\text{Im} Q_\mu \Rightarrow \phi(t) \cdot (t - \mu)^{k(\mu)} \leftarrow$  минимальный аннулятор для  $\text{Im} Q_\mu$

$\Rightarrow$  верно  $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t - \mu)^{k(\mu)}$$

$$\Rightarrow \phi \cdot \psi$$

Покажем, что  $\psi$  аннулятор  $\mathcal{A}$

$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\text{перестановочны}}{( \mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)}} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)} \underbrace{(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}_{\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow \psi$  аннулятор  $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \cdot \phi$  минимальный аннулятор

$$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda - \text{корни } \phi\}$$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$

$$\mu = \lambda$$

$$2. \quad (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

||

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu = \emptyset$$

$\mu$  корень  $\phi$

$$\text{Im} Q_\mu \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = \text{Im} \mathcal{P}_\mu$$

$$\left. \begin{array}{l} \bigoplus_{\mu} K_\mu = V \\ \bigoplus_{\mu} \text{Im} Q_\mu = V \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im} Q_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

**Теорема 3.**  $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  разложение Жордана

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$$

Доказательство.  $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$$\mathcal{B}^\nu = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \mu - \text{не корень} & \quad (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\parallel \emptyset}) = \\ & = \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E} - t\mathcal{B}) \cdot \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1}) \end{aligned}$$

**μ – не корень**

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu &= \det \underbrace{[\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}]}_0 \underbrace{[-\mathcal{B}]}_{\mathcal{D}} \cdot \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} = \\ &= \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}} \end{aligned}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

**Следствие 1.** Если  $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  разложение Жордана

$$To \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$$

Доказательство. Очевидно,  $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$

**Следствие 2.**  $\boxed{\dim K_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство.  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \underset{\text{o.p.c.}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = \dim \mathcal{P}_\lambda = \dim K_\lambda$   
 $\forall \lambda$  корня  $\chi$  с.ч. (I, II)

## 7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda \text{ корневые} \quad \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$\chi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \quad \lambda \in K \text{ все корни с.ч.}$$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \quad \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$$

$\bigcap$

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$\forall \lambda K_\lambda \rightsquigarrow$  строим базис  $\rightsquigarrow$  матрица оператора будет иметь  
 $\bigcup_\lambda$  Жорданов базис блочно-диагональную структуру  
– Жорданова форма матрицы

$$\square K_\lambda = K \quad \gamma(\lambda) = \gamma$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha \quad m(\lambda) = m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \quad \dim = \gamma$$

$$K_1 = V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$$

$\cap$

$$K_2 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^2$$

$\vdots$

$\cap$

$$K_m = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad \dim = \alpha$$

**Пример.**

$$\alpha = \dim K_\lambda = \dim K_5 = 24$$

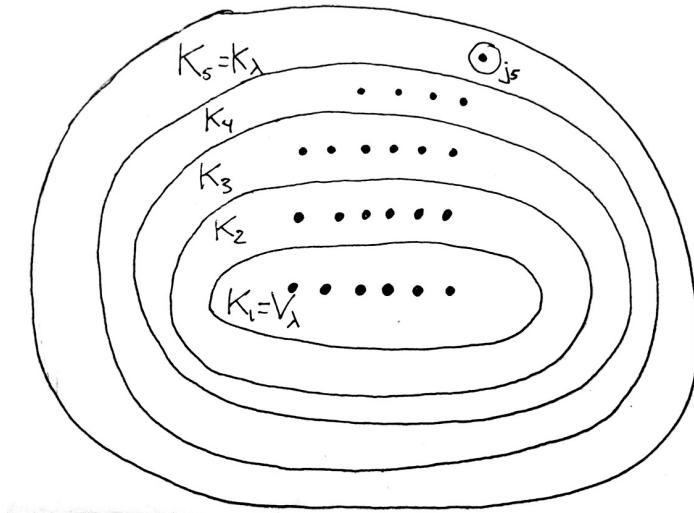
$$m = 5$$

$$\gamma = 7$$

j <sub>5</sub>	$\in K_5 \setminus K_4$
j <sub>4</sub>	$= \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_5 \in K_4$
j <sub>3</sub>	$= \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_4 \in K_3$
j <sub>2</sub>	$= \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_3 \in K_2$
j <sub>1</sub>	$= \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda$

Циклический базис

$$j_1, j_2, j_3, j_4 - \text{присоединенные вектора.}$$



$$\mathcal{A}|_L$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

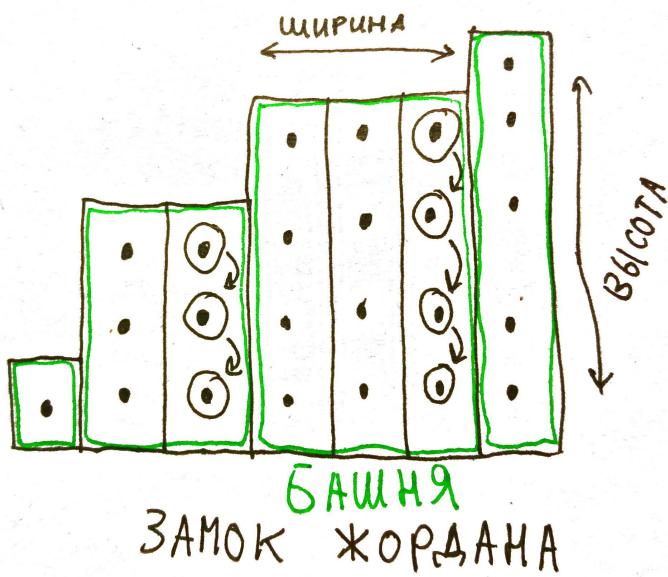
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 \quad \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 \quad \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 \quad \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 \quad \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5$$

$$\text{Матрица } \mathcal{A}|_L \text{ в базисе } j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Клетка Жордана  $5 \times 5$**   
(блок нижнего уровня)

$$(j_5 \ j_4 \ j_3 \ j_2 \ j_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



**Башня** – объединение циклических базисов одной длины.

**Высота башни** – количество векторов в базисе.

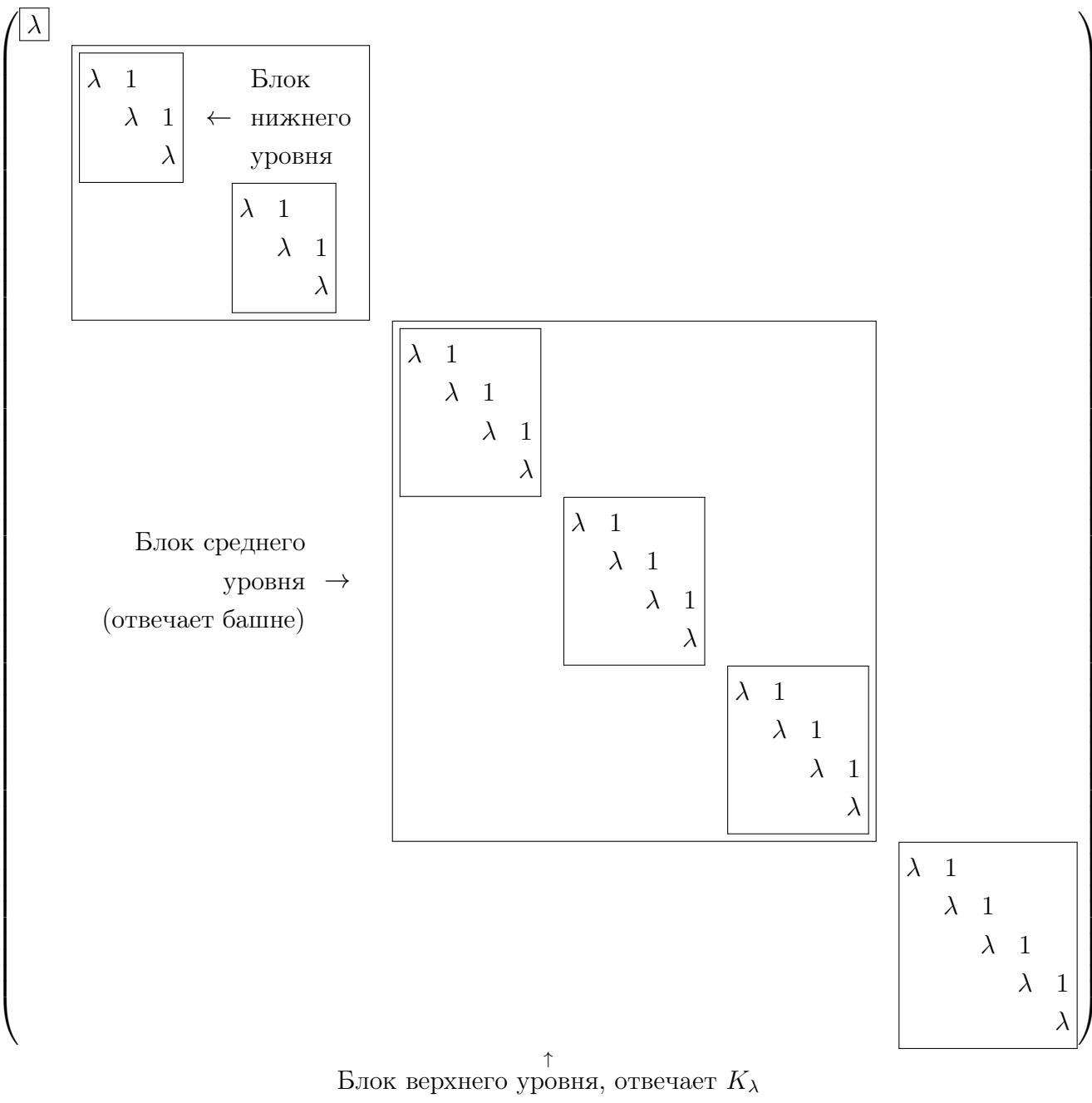
**Ширина башни** – число циклических базисов одной размерности

**Основания** каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов =  $\gamma$

||

Число Жордановых клеток



$\gamma$  = Число блоков нижнего уровня

$\alpha$  = Число  $\lambda$  на диагонали

$\mathcal{A}$  о.п.с.  $\forall \alpha = \gamma$

$V_\lambda$   $\boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$

"Деревня Жордана"

**Примеры.**  $\lambda \ \alpha(\lambda) = 4$

$$1. \ \gamma(\lambda) = 3 \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$2. \gamma(\lambda) = 2 \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ или } ? \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$3. \gamma(\lambda) = 1 \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} \quad T = (\dots j_1 \dots j_5 \dots)$$

Объединение цикл. базисов для всех  $\lambda$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \mathcal{J} \\ & & \text{В Жорд. базисе} \\ \uparrow & & \\ A & & \end{array}$$

В исходном

$$\boxed{\mathcal{J} = T^{-1}AT}$$

$$\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}} \rightarrow T\mathcal{J} = AT$$

1, 3

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы  $T \rightsquigarrow T$

$\rightsquigarrow$  построить Жорданов базис.

## 2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем  $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2.  $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \underset{\dim K = \alpha}{K}$
- $K_r = \text{Ker}(A - \lambda E)^2$
- $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$$\forall \lambda \quad K = K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$$m(\lambda) = m$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha$$

$$K_r = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^r \quad r = 1 \dots m$$

$$V_\lambda = K_1$$

$$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$$

Все включения будут строгие:

$$\square K_{r+1} = K_r \quad \text{Ker} \mathcal{B}^{r+1} = \text{Ker} \mathcal{B}^r$$

По Теореме о rg и def:  $\dim K = \text{rg} \mathcal{B}^{r+1} + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^{r+1}} = \text{rg} \mathcal{B}^r + \cancel{\text{def} \mathcal{B}^r} \quad (\text{def} \mathcal{B}^{r+1} = \text{def} \mathcal{B}^r)$

II

1. Найдем  $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2.  $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = \text{Ker}(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$   
 $\Rightarrow \dim K_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

$$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} = Im\mathcal{B}^r \rightarrow 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие}$$

$$\parallel$$

$$Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) = Im\mathcal{B}^r \xrightarrow{\text{либо}} \mathcal{B}^r = \emptyset - \text{противоречие мин. } m$$

$$Im\mathcal{B}|_K =: BK$$

$$Z_0 = BK$$

$$Z_r = BK + K_r$$

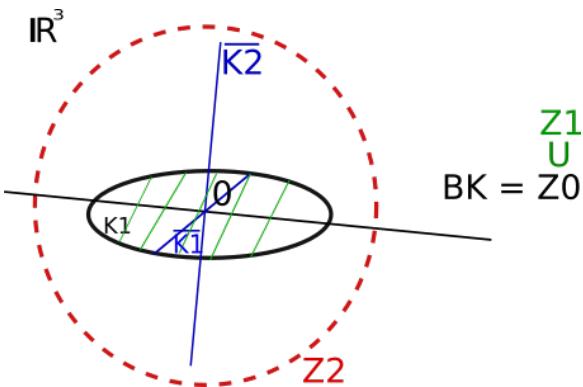
$$r = 1, \dots, m \quad (K_m = K) \quad B : K \rightarrow K$$

$$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_m = K$$

$$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$$

$$\overline{K_r} \subset K_r$$

$$K = \underbrace{BK \oplus \overline{K_1}}_{Z_1} \oplus \underbrace{\overline{K_2}}_{Z_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m}$$



$$\underset{dim 2}{\parallel} \quad \underset{dim 3}{\parallel} \quad K_1 \subset K_3$$

$$\underset{def\mathcal{B}}{\parallel} + \underset{dim Im\mathcal{B}}{\parallel} dimK_1 + dimBK = 3$$

$$Z_1 = BK + K_1 \supseteq Z_0$$

∩

$$Z_2 = BK + K_2$$

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

**Теорема 1.**  $0 \leq r \leq m - 1$

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

*Доказательство.*

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

$$\forall x \in K \quad x = \underset{\in \overline{K_1}}{x_1} + \underset{\in \overline{K_2}}{x_2} + \dots + \underset{\in \overline{K_m}}{x_m} + \underset{\in BK}{Bx^*}$$

$$1 \leq r \leq m - 1$$

$$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \dots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* [=]$$

$$B^r x_j = B^{r-j} B^j x_j = \underset{\emptyset}{\parallel}$$

$$1 \leq j \leq r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = \text{Ker } B^j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$$\boxed{B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^*}$$

Дизъюнктность?

$$* B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = 0$$

$$B^r (\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^*}_{y}) = 0$$

$$y \in \text{Ker } B^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r \oplus BK$$

$$\Rightarrow y = x_1 + x_2 + \dots + x_r + \underbrace{B}_{x_i \in \overline{K}_i} x^{**}$$

Однозначно представим

$$\begin{aligned} & \| \\ x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^* & \Rightarrow \boxed{x_i = 0} * \\ x_{r+i} \in \overline{K}_{r+i} & \quad \forall i = 1 \dots m \end{aligned}$$

↓ подставим

$$0 + 0 + \dots + 0 + B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow \text{дизъюнктн.}$$

■

**Следствие 1.**

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus$$

$$\underbrace{\oplus B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^{m-2} \overline{K}_{m-1}}_{\text{---}} \oplus B^{m-2} \overline{K}_m \oplus B^{m-1} \overline{K}_m$$

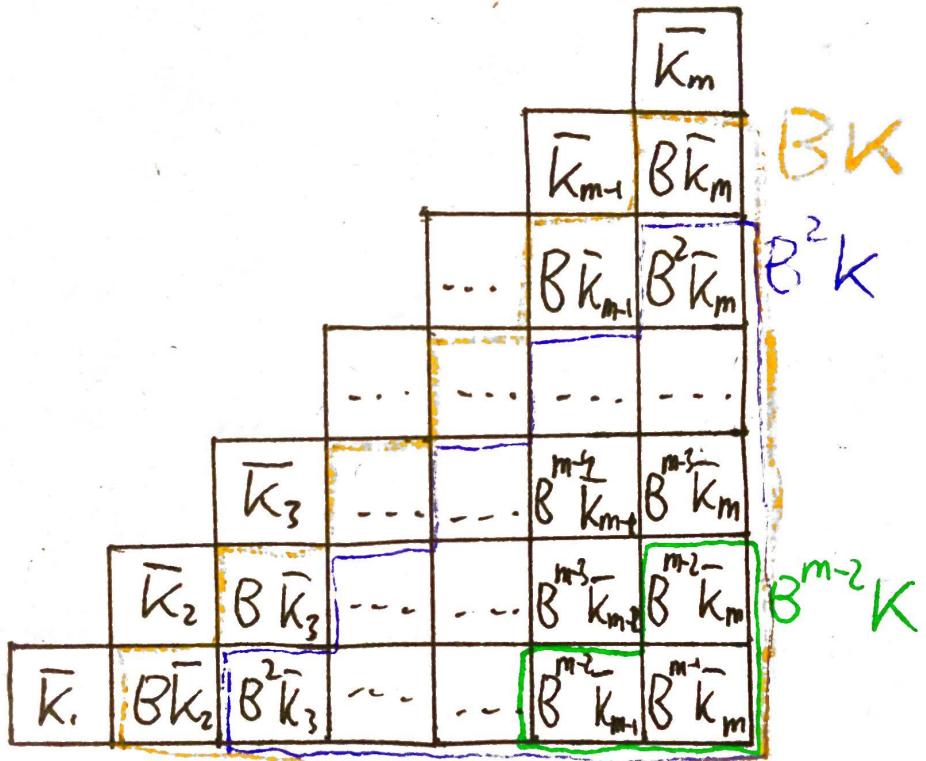
Доказательство.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus BK$$

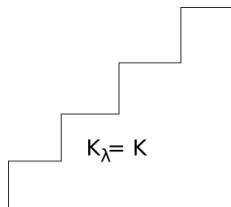
$$BK = \underbrace{B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^2 K$$

$$\underbrace{B^2 K = B^2 \overline{K}_3 \oplus B^2 \overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^2 \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus B^3 K$$

■



$\overline{K}_j$  – Опорные подпространства



$$1 \leq r \leq m$$

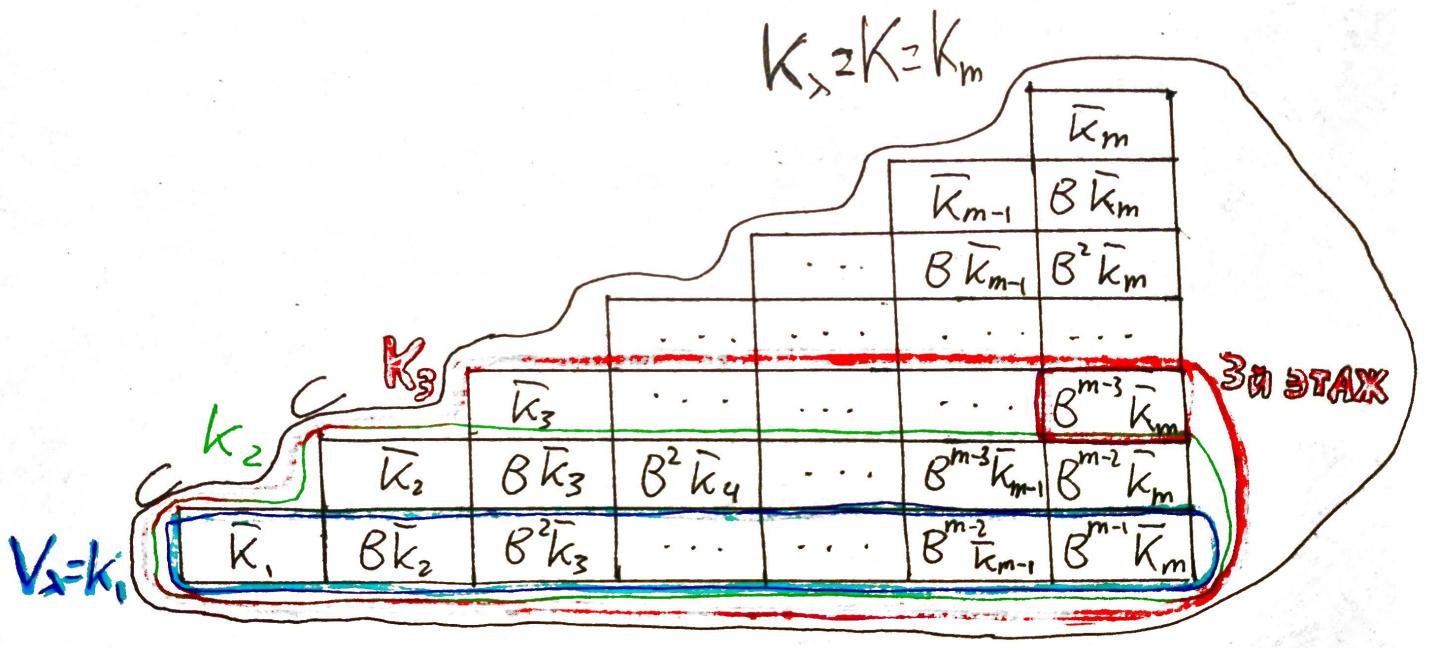
$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset \rightarrow \tau_r = \overline{K}_r \oplus B\overline{K}_r \oplus B^2\overline{K}_r \oplus \dots \oplus B^{r-1}\overline{K}_r$$

Башня высоты  $r$ . "Башня растет вниз"

"Основание" башни  $\equiv$  опорное подпространство  $\overline{K}_r$

"Крыша" башни  $\equiv B^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$

$$x \in B^{r-1}\overline{K}_r \quad \begin{array}{l} x = B^{r-1}y \\ y \in \overline{K}_r \subseteq K_r \end{array} \quad \frac{Bx = B^r y = 0}{x \in \text{Ker } B = V_\lambda}$$



Если  $\overline{K}_r = \{\emptyset\}$ , то башня высоты  $r$  отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$$1 \leq l \leq m$$

$$\overline{K}_l, B\overline{K}_{l+1}, B^2\overline{K}_{l+2}, \dots, B^{m-1}\overline{K}_m \subset K_l = \text{Ker } B^l$$

—  $l$ -ые этажи соотв. башен

Покажем:  $B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\overline{K}_{l+j}) = (B^{l+j})_{\subset K_{l+j} = \text{Ker } B^{l+j}} = \emptyset \Rightarrow B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^m \tau_r$$

**Теорема 2** (О размерности башни).

$\forall \tau_r$  любой этаж башни имеет одну и ту же размерность  $d_r = \dim \overline{K}_r$  = ширина башни.

$\overline{K}_r$ $B\overline{K}_r$ $B^2\overline{K}_r$ $\dots$ $B^{r-1}\overline{K}_r$	$d_r = \dim \overline{K}_r$ = ширина башни
$r$ высота $\downarrow$  $\tau_r$	

Доказательство.

$$B^j|_{\overline{K}_r} : \overline{K}_r \rightarrow B^j\overline{K}_r$$

$B^j_{\overline{K}_r}$  изоморфизм "?"

$$\text{Ker } B^j|_{\overline{K}_r} = \{\emptyset\}$$
 тривиально "?"

$$\begin{array}{c}
x \in \overline{K}_r \subset K_r \subset Z_r \quad \stackrel{\exists x}{=} \quad Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r \Rightarrow [x = 0] \quad [Z_{r-1} = BK + K_{r-1}] \\
x \in \bigcup_{j=1 \dots r-1} \text{Ker } B^j = K_j \rightarrow \bigcup_{K_{r-1}} \quad \downarrow \\
\vdots \\
\bigcup_{K_1}
\end{array}$$

$\Rightarrow$  Изоморфизм  $\Rightarrow \dim(\overline{K}_r) = \dim(B^j \overline{K}_r) = d_r$  ■

**Следствие 1.**  $\sum_{r=1}^m d_r = \dim V_\lambda = \gamma(\lambda)$

$$\sum_{r=1}^m \underbrace{r \cdot d_r}_{\dim \tau_r} = \dim K_\lambda = \dim K = \alpha(\lambda)$$

**Следствие 2** (Теорема Фробениуса).

$$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$$

$$(d_m = rgB^{r-1})$$

Доказательство.

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

$$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$$

$$\begin{aligned}
d_1 + d_2 + \dots + d_m &= \rho_0 - \rho_1 & \downarrow - \\
d_2 + \dots + d_m &= \rho_1 - \rho_2 & \downarrow - \\
d_3 + \dots + d_m &= \rho_2 - \rho_3 & \downarrow - \\
d_{m-2} + d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-3} - \rho_{m-2} & \downarrow - \\
d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-2} - \rho_{m-1} & \downarrow - \\
d_m &= \rho_{m-1} & \downarrow - \\
\rho_m &= 0
\end{aligned}$$

$$[d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}]$$

$$\begin{array}{c}
 \leftarrow d \rightarrow \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline
 g_1 & g_2 & \dots & g_d \\ \hline
 Bg_1 & Bg_2 & \dots & Bg_d \\ \hline
 B^2 g_1 & B^2 g_2 & \dots & B^2 g_d \\ \hline
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
 B^{r-1} g_1 & B^{r-1} g_2 & \dots & B^{r-1} g_d \\ \hline
 \end{array} \\
 \mathcal{E}_n = \text{span}(g_1, \dots, g_d) \\
 B\mathcal{E}_n \\
 \mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \mid_{\mathcal{E}_n} \text{изоморфизм} \\
 \text{базис } \mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \rightarrow \text{базис } \mathcal{E}_n \\
 \text{span}(g_1, \dots, g_d, Bg_1, B^2 g_1, B^3 g_1, \dots, B^{r-1} g_1, B^{r-1} g_2, \dots, B^{r-1} g_d) \\
 = \mathcal{E}_n \\
 i=1, \dots, d \quad f: Bg_1, B^2 g_1, \dots, B^{r-1} g_1 \\
 \text{направленные векторы}
 \end{array}$$

изоморфизм  
 базис  $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n}$   $\rightarrow$  базис  $\mathcal{E}_n$   
 $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \mid_{\mathcal{E}_n}$

$i=1, \dots, d$        $f: Bg_1, B^2 g_1, \dots, B^{r-1} g_1$   
 направленные  
 векторы  $g_i$

изоморфизм  
 базис  $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n}$   $\rightarrow$  базис  $\mathcal{E}_n$   
 $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \mid_{\mathcal{E}_n}$

$i=1, \dots, d$        $f: Bg_1, B^2 g_1, \dots, B^{r-1} g_1$   
 направленные  
 векторы  $g_i$

изоморфизм  
 базис  $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n}$   $\rightarrow$  базис  $\mathcal{E}_n$   
 $\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} \mid_{\mathcal{E}_n}$

$S_i = \text{span}(g_i, Bg_i, \dots, B^{r-1}g_i)$  циклическое подпр-во

$$T_r = \bigoplus_{i=1}^d S_i$$

$$A \Big|_{S_i} \leftrightarrow \begin{matrix} \text{н-на б} \\ \text{связь} \end{matrix} g_i, Bg_i, \dots, B^{r-1}g_i ?$$

$$A \Big|_{S_i} = (B + \lambda C) \Big|_{S_i}$$

чирнегорин  
связь:  
 $B^{r-1}g_i, B^{r-2}g_i, \dots, Bg_i, g_i$

$$Ag_i = Bg_i + \lambda g_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ABg_i = B^2g_i + \lambda Bg_i$$

$$AB^{r-2}g_i = B^{r-1}g_i + \lambda B^{r-2}g_i$$

$$AB^{r-1}g_i = B^rg_i + \lambda B^{r-1}g_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel \quad g_i \in K_r \subset \text{Ker } B^r$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

диаг. единица  $\gamma_{xy}$  (блок)  
номер строки

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n} = \lambda E_n + I_n$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_n = \bigoplus_{i=1}^d \zeta_i$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} J_n(\lambda) & & \\ & J_n(\lambda) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = J(0)$$

d krok  
(следует  
последовательно)  
столбца

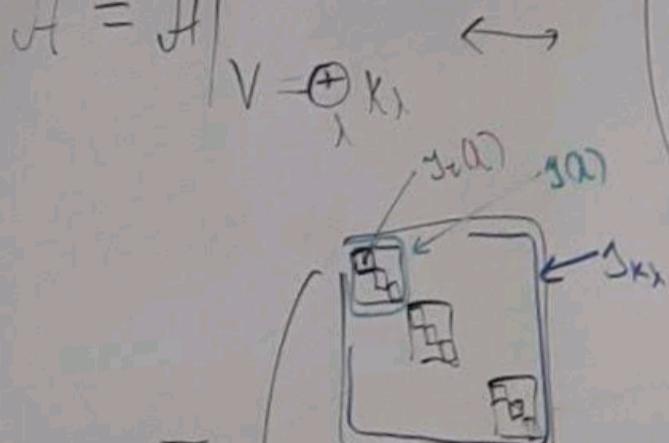
810к  
затраты  
уровня  
(ком-м  
записи  
символа)

$$k_2 = k = \bigoplus_{i=1}^n \tau_i$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} J_n(\lambda) & & & \\ & J_n(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

810к записей  
уровня  
(ком-м коррекции  
нагрузки)

$$A = A / V = \oplus_{\lambda} K_{\lambda}$$



$$\begin{matrix} J_{k_1} \\ J_{k_2} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ J_{k_3} \end{matrix}$$

$$= y$$

нормирована  
оромма  
матрица

выделение всех чистых базисов для всех  
базисов для всех корневых подпр-й = нормированный  
базис

$$j = (j_1, \dots, j_k, \dots, j_n) \quad T = T_{e+j}$$

$$Y = T^{-1} A T$$

если базис  $V$

$$A \hookrightarrow A$$

в базисе  $e$ .

$$T Y = A T$$

$\Rightarrow$  можно найти  $T$ , решив матрич. систему  
уравнений

3-й алгоритм построения  
диаг. и бл. для матрицы.

$$\lambda! \quad K_\lambda = K = \underbrace{K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m}_{E} \oplus BK$$

1. найдем  $K = K_\lambda$

$$2. \text{ найдем } BK = \text{Im } B / \lambda \quad B = A - \lambda E$$

$$3. \text{ дополним } BK \text{ до } K$$

$$\text{т.е. найдем базисные векторы } \tilde{K} = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m = \text{Span}(v_1, \dots, v_t)$$

4. Ъзгем орнандың күкнөрү. Гаузас!

$$v_i, B v_i, \dots, B^0 v_i, B^{n+1} v_i$$

иң жаңы

жаңы

неке же пайдалану  $\rightarrow$

Жүйе:

күнкә  $\rightarrow$  де. оп

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (t-5)(t-4)^3$$

$$\lambda_1 = 5 \quad d(\lambda_1) = 1 \Rightarrow p(\lambda_1) = 1$$

$$\lambda_2 = 4 \quad d(\lambda_2) = 3$$

$$p(\lambda_2) = ?$$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_2 E) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3$$

$$p(\lambda_2) = 1 \rightarrow 1 \text{ күнкә}$$

(1 ишкән, 8 жаңы)

$$J = \left( \begin{array}{c|cc} 5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$K = K_3 = \ker(A - \lambda_2 E)^3 =$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} v = k_1$$

$$BK = \text{span}(Bv_1, Bv_2, Bv_3) =$$

$$= \text{span} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$K = BK \oplus \overline{k}_1 \oplus \overline{k}_2 \oplus \overline{k}_3$$

$$= \text{span} \left( \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 3-2 & 0 \\ 4-2 & 1 \\ 3-1 & 0 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 3$$

$$K = \text{span}(\mathcal{V}_3) \rightarrow 1 \text{ ungen. Space}$$

*argue  
why*

$$\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^2\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$j = (\mathcal{V}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 1, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

## 7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме

7.11 опр. я от м-цил, привод. к ж.ф.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad |x| < R$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$$

$$A = T J T^{-1}$$

$$f(J_r(\lambda)) = ?$$

$$J_r(\lambda) = \lambda E_r + I_r$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{r \times r}$$

$$I_r = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{r \times r}$$

$$f(\mathcal{J}_\varepsilon(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathcal{J}_\varepsilon^m(\lambda)$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2!}\lambda^{m-2} & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3} & \dots \\ & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ & & & & \lambda^m \\ & & & & & \vdots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{I^4 = 0} \quad \boxed{I^r = 0}$$

$m = \frac{m(m-1)}{2!}$

7.11 CP-я ом м-уза, нульог. к м.з.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad |x| < R$$

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m x^{m-1}$$

$$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^{m-2}$$

$$f(t\ln(x)) = \left( \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\ln x)^m \right) t^m = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m (\ln x)^{m-1} t^m = \frac{t}{1!} \sum_{m=1}^{\infty} c_m m(m-1) (\ln x)^{m-2} t^{m-1} = \frac{t^2}{2!} \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2) (\ln x)^{m-3} t^{m-2} = \frac{t^3}{3!} \sum_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2)(m-3) (\ln x)^{m-4} t^{m-3}$$

$$f(Ax) = T f(\lambda x) T^{-1}$$

$$f(t\ln(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m(\lambda) t^m$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k I^k \lambda^{m-k} =$$

$$f(\lambda x) + \frac{f'(\lambda x)}{1!} + \frac{f''(\lambda x)}{2!} + \frac{f'''(\lambda x)}{3!}$$

$$f^{(k)}(xt) = \left( f^{(k)}(x) \right) \Big|_{x=xt}$$

$$f(x)$$

Hinweis:

$$\tau = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A = T \tau T^{-1}$$

$$f(A) = T f(\tau) T^{-1}$$

$$S\sin(\tau t) = \begin{pmatrix} S\sin(\lambda t) & t(\cos \lambda t) - \frac{t^2}{2!} S\sin \lambda t & -\frac{t^3}{3!} (\cos \lambda t) \\ 0 & S\sin \lambda t + t(\cos \lambda t) - \frac{t^2}{2!} S\sin \lambda t & 0 \\ 0 & 0 & S\sin \lambda t + t(\cos \lambda t) \\ 0 & 0 & S\sin \lambda t \end{pmatrix}$$

$$f(x) = S\sin x$$

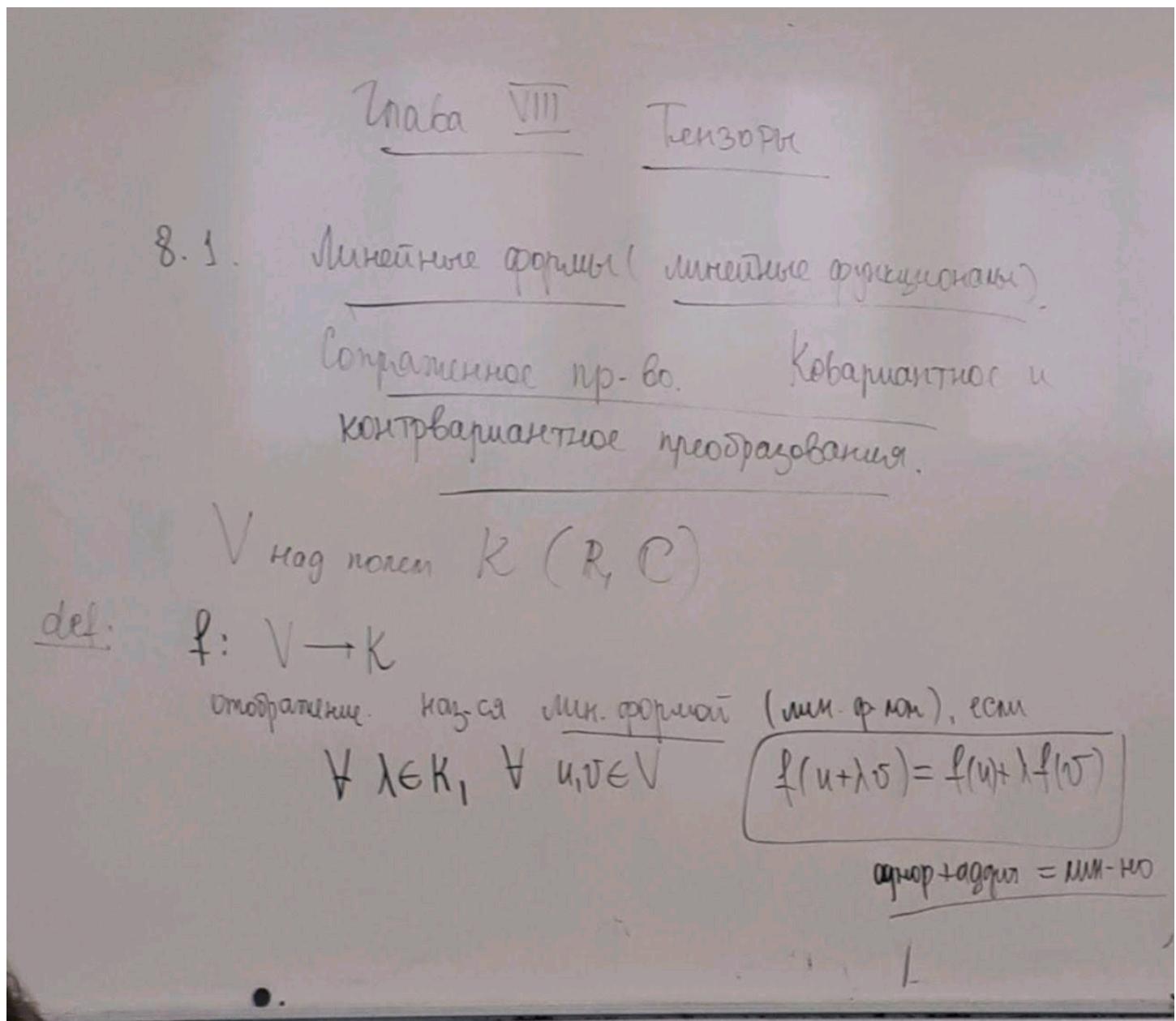
$$f'(x) = C\cos x$$

$$f''(x) = -S\sin x$$

$$f'''(x) = C\cos x$$

## 8 Тензоры

8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контравариантные преобразования.



## Примеры:

$$1. \quad V = \{ g \mid g \in C(\mathbb{R}) \}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{\delta(g) = g(0)}$$

дельта-ср-я Дурака

мин. фрмца.

$$2. \quad V_3 \quad \bar{a} - \text{сопоставл.}$$

$$\forall v \in V_3 \quad f: V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(v) = (\hat{a}, \bar{v})$$

скел. np. e. мин. фрмца

3.  $P_n$  ~~нек-хм~~ симметрическим  $\leq_n$

$m \in \mathbb{N}$

$t_0 \in \mathbb{R}$

такое

$f_m: P_n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall p \in P_n \quad f_m(p) = \frac{p^{(m)}(t_0)}{m!}$$

нек-форма.

4.  $A_{n \times n} \quad M_{n \times n}$  np-бо  $n \times n$

$f: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A \quad \text{нек. форма.}$$

$$f(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \text{tr } A + \text{tr } B = f(A) + f(B)$$

$V$  координаты.

$e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$

$$\forall x \in V : x = x^i e_i \left( = \sum_{i=1}^n x^i e_i \right)$$

np-коэффициенты

$$\longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{коэффициенты} \\ \text{относительно } e \end{array}$$

$f: V \rightarrow \mathbb{R}$

нек. форма

$$\text{def: } \bigcirc: V \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall v \in V \quad \bigcirc(v) = 0$$

$f_1 + f_2$   
 $x f_1$

$$-f: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  противоположная нек. форма

$$\forall v \in V \quad -f(v) = -(f(v))$$

$$V^* = \left\{ f : V \rightarrow K \mid \text{линейные} \right\}$$

беск-кои  $1^\circ - 8^\circ$  аксиомы.  $\equiv$  лин.пр-бо

$$\underline{V^* \text{ компактное (дualное)}}$$

пр-бо  $KV$

$$f \in V^* \quad \forall x \in V$$

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K} = x^i a_i$$

$$\longleftrightarrow (a_1 \dots a_n) = a \in K, \text{ пр-бо } n\text{-мерных строк}$$

$\leftrightarrow$    
  $\text{отображение в вом}$   
 $\text{линейн.}$

$a_i$  корп.  $f$  отн-но базиса  $e$

$$\begin{aligned} f &\leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \\ g &\leftrightarrow b = (b_1 \dots b_n) \\ f+g &\rightarrow a+b \\ \cdot & \end{aligned}$$

$$V^* \cong K^n \quad (\text{изоморфизм не единич., т.е.})$$

*зависит от*

*базиса)*

$$\Rightarrow \dim V^* = n = \dim V$$

Напоминание:  $V^* = \{ f: V \rightarrow K \}$  сопряженное (дualное) к  $V$

$V^* \cong K^n$  -пр-бо  $n$ -мерных строк. (не естественный)

$$\text{т.е. в базис } V \quad \forall x \in V \quad x = x^i e_i \quad f(x) = x^i f(e_i) = x^i a_i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \in K^n$$

$$\forall f \in V^* \quad \downarrow \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n \text{ нр-бо } n\text{-мерных строк базиса}$$

$$\dim V^* = n = \dim V$$

Определение:  $w^i : V \rightarrow K$   $\forall x \in V \quad w^i(x) = x^i$  эти коор-ты  $x$  относительно базиса  $e_1 \dots e_n$

однозначно,  $w^i$  уни-отобр.  $\Rightarrow w^i \in V^*$

однозначно,  $\forall i=1 \dots n \quad w^i(e_j) = \delta_{ij}^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$   
символ Кронекера

Теорема 1:  $w^1, \dots, w^n$  базис  $V^*$

Док-во! т.к.  $\dim V^* = n$ , то достаточно проверить лин-незав.  $w^1, \dots, w^n$ .

$$\exists d_i w^i = 0, d_i \in K$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad d_i w^i(x) = 0 \Rightarrow \text{в частности, где } \forall j=1 \dots n \quad d_i w^i(e_j) = 0 \Leftrightarrow d_j = 0 \quad \forall j=1 \dots n$$

$\Leftrightarrow w^1, \dots, w^n$  лин-незав.  $\Rightarrow$  базис  $V^*$

Следствие:  $\forall f \in V^*$  коор-ты  $a_i = f(e_i)$  ве-ся коор-ны формы  $f$  в нр-ве  $V^*$  относительно базиса  $w^1, \dots, w^n$

т.о.  $V^* \cong K^n$  -коорд. изоморфизм. относительно базиса  $w^1, \dots, w^n$

Док-во!  $\forall f \in V^* \quad \forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i$ , где  $a_i = f(e_i)$

$$\text{т.к. } x^i = w^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i w^i(x) \quad \forall x \in V \Rightarrow f = a_i w^i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n)$$

коорд-ны  $f$   
относительно базиса  $w^1, \dots, w^n$

Def: коорд. ор-ши  $w^1 \dots w^n$ , порожденные базисом  $e_1 \dots e_n$  нр-ва  $V$   
т.е. сопряженный (dualnyj) базисом нр-ва  $V^*$  к базису  $e_1 \dots e_n$  нр-ва  $V$

[?] Важней ли базис  $V^*$  будет сопряженным к некоторому базису нр-ва  $V$ ?

Теорема 2!  $\exists w''_1, w''_2, \dots, w''_n$  базис  $V^* \Rightarrow \exists$  базис  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  нр-ва  $V$ , м.р.  
базис  $w'$  будет сопряженным к базису  $e'$

Док-во:  $\exists e_1, \dots, e_n$  базис  $V$ , а  $w^1, \dots, w^n$  базис  $V^*$ , сопряжен. к  $e$ .

т.к.  $w$  и  $w'$  базисы нр-ва  $V^*$ , то  $(w''_1 \dots w''_n) = (w^1 \dots w^n) T_{w \rightarrow w'}$

т.к. в коорд. представлении в-та  $V^*$  соотв-т строки,  $T$  и-за перехода.

то наилегчее равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} w''_1 \\ w''_2 \\ \vdots \\ w''_n \end{pmatrix} = T_{w \rightarrow w'}^\top \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \quad \text{обозначим } S := T_{w \rightarrow w'}^\top$$

и-за  $S$ , очевидно, невырожденная  $\Rightarrow \exists S^{-1} = T$

Определение "новый" базис в нр-ве  $V$  следующим равенством:

$$(e'_1 \dots e'_n) = (e_1 \dots e_n) T, \text{ м.р. } T = T_{w \rightarrow e'}$$

т.к. оно  $w'$  будет сопряженным к построенному  $e'$ .

$$S = \left( S_{ij}^k \right)_{n \times n} \text{ номер стр } \begin{cases} i \\ j \end{cases}, \text{ аналогично } T = \left( t_{ij}^k \right)_{n \times n} \Rightarrow w'^i = S_k^i w^k$$

$w^i(x) = S_k^i w^k(x) = \underbrace{S_k^i x^k}_{(\bar{S}x)_i}$  — в базисе  $e'$   $\Rightarrow w'^i$  — координаты  
относительно базиса  $e'$ ,  
т.к.  $T = T_{e \rightarrow e'}$ , т.о.  $x' = T^{-1}x = Sx$  т.е.  $w'$  сопоставлена базису  $e'$

Следствие:  $e, e'$  базисы  $V$ ,  $T = T_{e \rightarrow e'}$ ,  $S = T^{-1}$   
 $w, w'$  сопоставлены к  $e$  и  $e'$ , соответственно, базисы  $V^*$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \forall x \in V \quad x' = Sx = T^{-1}x \\ \forall \alpha \in V^* \quad \alpha' = \alpha T \end{array}}, \text{ причем } T_{w \rightarrow w'} = S^T = (T^{-1})^T$$

док-во:  $T_{w \rightarrow w'} = S$ , очевидно, из док-ва  $T$ -ли.

такое, очевидно, что  $x' = T^{-1}x$ .

остается показать, что  $\forall \alpha \in V^* \quad \alpha' = \alpha T$

т.к.  $(w^1 \dots w^n) = (w^1 \dots w^n) T_{w \rightarrow w'}$ , то  $(\alpha')^T = T_{w \rightarrow w'} \alpha^T \Rightarrow \alpha' = \alpha \underbrace{(T_{w \rightarrow w'})^T}_{S} = \alpha T$

Замечание: очевидно, значение мин-формы  $f$  на элементе  $x$  не зависит от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (t_{ik}^i x^k) \cdot (a_m^m S_l^m) = \underbrace{(S_l^m t_{ik}^i)}_{(ST)_k^i} x^k a_m^m = x^k a'_k \quad - \text{инвариантность} \\ \text{формы} \quad \text{относительно} \quad \text{выбора} \quad \text{базиса}$$

$x = T x' \quad \uparrow \quad \alpha = \alpha' S$

def: Векторы, координаты которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с формулой замены  $e$  на  $e'$ , т.е. с матрицей  $T = T_{e \rightarrow e'}$ , наз-ая координатными векторами или ковекторами  $\equiv$  элементы пр-ва  $V^*$

Векторы, координаты которых, при замене базиса  $e$  на  $e'$ , меняются по закону, противоположному для замены  $e$  на  $e'$ , т.е. с матрицей  $T^{-1} = S$ , наз-ая ко-координатными векторами или просто векторами  $\equiv$  элементы пр-ва  $V$

Помимо, мин-формы, также называются просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во  $(V^*)^* = V^{**}$  — двойное сопоставление к  $V$

очевидно,  $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$  (все тут пр-ва изоморфные)

Построение изоморфизма между  $V$  и  $V^{**}$  следующим образом:

$$\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**} : \quad \forall f \in V^* \quad \boxed{"x"(f) = f(x)}$$

составим.

проверим ли-то  $"x"$ :  $\forall \lambda \in K \quad \forall f_1, f_2 \in V^*$

$$"x"(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = "x"(f_1) + \lambda "x"(f_2)$$

$\Rightarrow$  ли-то  $\Rightarrow "x" \in (V^*)^*$

Теорема 3:  $\text{соответствие } x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$   
 явн-ая вз-одн. и ли-ти, т.е. изоморфизм. ( $V \cong V^{**}$ )

док-во: так,  $\forall x \in V \rightarrow "x" \in V^{**}$

показать, что это отображение обладает св-вами ли-ти:  $\forall x_1, x_2 \in V$ .

$$(x_1 + x_2) \rightarrow "x_1 + x_2" \in V^{**} \quad \forall f \in V^* \quad "x_1 + x_2"(f) = f(x_1 + x_2) =$$

$$= f(x_1) + f(x_2) = "x_1"(f) + "x_2"(f) \Rightarrow "x_1 + x_2" =$$

$= "x_1" + "x_2"$ ,  
т.е. ли-ти.

т.о. мы получаем вложение пр-ва  $V$  в пр-во  $V^{**}$ ,

единственное св-во ли-ти.

В частности,  $\exists e_1, \dots, e_n$  базис  $V \rightarrow "e_1", \dots, "e_n" \in V^{**}$

$\Rightarrow \forall j=1 \dots, n \quad \forall f \in V^* \quad "e_j"(f) = f(e_j) = a_j$  — коор-та  $f$  в пр-ве  $V^*$  относительно базиса  $w^j$  пр-ва  $V^*$

$\Rightarrow "e_j"$  коордн. ф-я и сопоставлен. базис к базису  $w^j \Rightarrow$  по т-му  $"e_1", \dots, "e_n"$  базис  $V^{**}$

$\Rightarrow$  т.о. такое вложение пр-ва на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис.

Замечания!

1. изоморфизм, построенный в т.ч. с помощью степеней изоморфизмов пр-в  $V$  и  $V^{**}$ , т.к. это построение не зависит от выбора базиса.

2. Применим отображение для пр-ва  $V$  и "х" пр-ва  $V^{**}$ ,  
построенное письмом  $x(f) := f(x)$  без кавыек.

$$\forall x \in V \quad \forall f \in V^* : \quad f(x) = x^i f(e_i) = w^i(x) a_i \quad f(e_i) = e_i(f) = a_i \\ x = x^i e_i \quad f = a_i w^i \quad \| \quad x(f) = a_i x / w^i = e_i(f) x^i \quad x(w^i) = w^i(x) = x^i$$

т.е. T-изом показывает, что на самом деле пр-ва  $V$  и  $V^*$  "равноправные"  
 $V^*$  сопрот. к  $V$ , а  $V$  сопрот. к  $V^*$ . Базис  $w$  сопрот. к  $e$ , т.к. как и базис  $e$  сопротивен к базису  $w$ .

$$3. \quad \forall x \in V \quad \forall f \in V^* \\ \uparrow \quad \downarrow \\ x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad a = (a_1 \dots a_n) \quad f(x) = x^i a_i = a \cdot x \stackrel{\text{"стоки стоят"}}{\Rightarrow} \text{т.к. } w^i(e_j) = \delta_j^i$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E$$

Пример:

$$1) \quad \mathbb{R}^3 : \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{.. линейн. сопрот. базис } w^1, w^2, w^3 \\ w^i \leftrightarrow (a_1^i a_2^i a_3^i) = a^i \\ \Rightarrow A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = w^1 \\ \qquad \qquad \qquad = w^2 \\ \qquad \qquad \qquad = w^3 \\ \left( \begin{array}{c|cc} w^1 & 1 & 0 \\ \hline w^2 & 0 & 1 \\ w^3 & 0 & 0 \end{array} \right) (e_1 e_2 e_3) = E \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 a_2^1 a_3^1 \\ a_1^2 a_2^2 a_3^2 \\ a_1^3 a_2^3 a_3^3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_B = E$$

2)

$$V = \bigoplus V_\lambda$$

$P_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$   
нестандарт.

$$\sum_\lambda P_\lambda = E$$

$$P_\lambda P_\mu = 0$$

$$P_{\lambda^2} = P_\lambda$$

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n) \rightarrow \text{построение } w^1, \dots, w^n \text{ сопрот. к } v_1, \dots, v_n$$

$$\Rightarrow \forall x \in V : x = \sum_\lambda x_\lambda = x^i v_i = w^i(x) v_i$$

$$\Rightarrow P_\lambda x = x_\lambda = \sum_{v_k \in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k \in V_\lambda} w^k(x) v_k$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1 \quad \alpha(\lambda_1) = -1 = f(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -3 \quad \alpha(\lambda_2) = 2 = f(\lambda_2)$$

построение сопрот. базис:  
(см. пример 1)

$$w^1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$w^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$w^3 = (0, 0, 1)$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3$$

$$w^i(x) = (a_1^i a_2^i a_3^i) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad i=1,2,3.$$

$$P_{\lambda_1}(x) = w^1(x) \cdot v_2 = (-\frac{x^1+x^2}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ -\frac{x^1+x^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda_2}(x) = w^2(x) \cdot v_3 = \frac{x^1+x^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1+x^2}{2} \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица линейное пр-во тензоров

$V$  лин. пр-во над полем  $K (R, C)$

$V^*$  сопряженное пр-во;  $\dim V = \dim V^* = n$

def: (1<sup>oe</sup> def тензора) тензором  $\alpha$  типа  $(p, q)$  ( $p$ -раз ковариантными,  $q$ -раз контравариантными) наз-ся линейная функция  $f$ :  $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$

$$V^p = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз.}}$$

$$(V^*)^q = \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз.}}$$

тензор  $\equiv f$  линейн. ф-ция.

линейная  $\equiv$  линейная по каждому аргументу.

$p$  и  $q$  - балансности тензора

$r = (p+q)$  - ранг или полная балансность тензора.

def: Тензор 2 типа  $(p, 0)$ , т.е.  $f: V^p \rightarrow K$  наз-т ковариантные тензоры балансности  $p$  полином.

Тензор 2 типа  $(0, q)$ , т.е.  $f: (V^*)^q \rightarrow K$  наз-т контравариантные тензоры балансности  $q$  полином.

Если  $p \neq 0$  и  $q \neq 0$ , то говорят о тензоре смешанного типа.

Если  $r = 0$ , то тензор типа  $(0, 0) \equiv$  скаляр  $\in K$

Далее, определены операции "+" и " $\cdot \lambda$ " для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на аргументах и т.д. на аргументах.

Определение  $\mathbb{O}$ :  $V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$ , т.е.  $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = 0$

и  $-\mathbb{O}$ , т.е.  $-\mathbb{O}: V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$ , т.е.  $\forall \xi_k \in V \quad \forall \eta^m \in V^* \quad -\mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = -1 \cdot \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$

$$\Rightarrow -\mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O} = \mathbb{O} + (-\mathbb{O})$$

Т.о. Выс-вие  $1^{\circ} - 8^{\circ}$  аксиомы или. пр-ва (урп.)

def:  $T_{(p,q)}$  — или. пр-во тензоров типа  $(p,q)$

если в базисе  $V$

$w^1, \dots, w^q$  базис  $V^*$ , сопротивляющей  $e$

$\xi_k \in V, k=1, \dots, p$   
вектор (координатный)

$\xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}$  — коорд. вектор  $\xi_k$  относ. базиса  $e$

$\eta^m \in V^*, m=1, \dots, q$   
ковектор (координатный)

$\eta^m = \eta_{i_m}^m w^{i_m} \Leftrightarrow (\eta_1^m \dots \eta_q^m)$  — коорд. вектор  $\eta^m$  относ. базиса  $w$

$d \equiv f$  линейн. ф-ция  $\Rightarrow$

$$\text{тензор } T_{(p,q)} \quad \boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})} \quad (1)$$

$$d \in T_{(p,q)} \quad \boxed{d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})} \quad (2) \quad \text{координаты (коэффициенты) тензора } d \text{ относ. базисов } e \text{ и } w$$

Т.о. очевидно, значение линейн. ф-ии  $f$  (а значит и тензора  $d$ ), полностью определяется значениями на базисных  $p$ -кадрах базисных векторов  $e_j$  и  $q$ -кадрах базисных ковекторов  $w^i$ .

$$\boxed{f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = d_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q}} \quad (1')$$

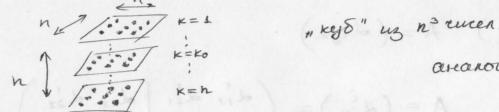
def:  $S = (p+q)$  — шерохий порядок  $n$  наз-са либо элем. векторов, запущенных векторами типами индексов: верхних  $i_1, \dots, i_q$  и нижних  $j_1, \dots, j_p$ , при этом все индексы предполагают значение от 1 до  $n$ .

$$\boxed{A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q})} \quad S = (p+q) — \text{шерохий либо порядок содержит } \begin{cases} n^{p+q} = n^S \\ \text{элементов.} \end{cases}$$

Пример: 1)  $A = (a_{ij})_{n \times n}$   $A = (a_j^i)_{n \times n}$   $A = (a^{ij})_{n \times n}$   
двумерные либо порядок  $n$  ( $n^2$  элементов)

2)  $A = (a_{j_k}^i)_{n \times n}$  3-мерная либо порядок  $n$

фиксируем  $k=k_0 \rightsquigarrow$  получаем  $(a_{j_{k_0}}^i)$  — общая двумерная лица.



"куб" из  $n^2$  лиц.

аналогично, 4-мерная лица — упоряд. набор из  $n$  3-мерных лиц.

Т.о.  $\forall d \in T_{(p,q)} \rightarrow A \text{ (p+q)-мерная лица компонент } d$

Верно и обратное  $\forall A \text{ (p+q)-мерной лице } A \rightarrow$  линейн. ф-ия  $f$  по формуле (1)(2), где есть в некоторой фиксир. базисе  $V$ , а  $w^1, \dots, w^q$  базис  $V^*$ , сопротивл.  $e$ .

Т.о. получаем  $\boxed{d \in T_{(p,q)} \Leftrightarrow A \text{ (p+q)-мерн. лица.}}_{\text{вздох. порядка } n}$

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующими компонентами их матриц, т.е. наше вы-сле. соответствие обладает св-вом лин-ти, т.е. действует изоморфизм

$$\boxed{T_{(p,q)} \cong A = (a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}) \cong K^{n^{p+q}}} \Rightarrow \boxed{\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}}$$

Сопротивление о порядке записи элем. многочленной матрической (т.е. матрицы тензора)

общее правило:

первый индекс всегда верхний первый индекс, далее по верхней строке, а затем по низней.

3)  $n=2$

$$x=2 \quad \text{всхожестные базисные матрицы: } A = (d_{ij}^i) \quad A = (d_{ij}^j) \quad A = (d_{ij}) \quad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

$1^{st}$  индекс - веңгә строка  
 $2^{nd}$  индекс - веңгә столбец.

$$A = (d_{ij}^i) = \begin{pmatrix} d_{11}^1 & d_{12}^1 \\ d_{21}^1 & d_{22}^1 \end{pmatrix} \quad A = (d_{ij}^j) = \begin{pmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$x=3 \quad A = (d_{ijk}^i) \quad A = (d_{jk}^i) \quad A = (d_{ijk}) \quad A = (d_{ijk})$$

$1^{st}$  индекс - веңгә строка  
 $2^{nd}$  индекс - веңгә столбец.  
 $3^{rd}$  индекс - веңгә "слой"

$$A = (d_{ijk}^i) = \left( \begin{array}{cc|cc} d_{111}^1 & d_{121}^1 & d_{112}^1 & d_{122}^1 \\ d_{211}^1 & d_{221}^1 & d_{121}^2 & d_{221}^2 \\ \hline 1 \text{ слой} & 2 \text{ слой} & & \end{array} \right)$$

$$A = (d_{ijk}) = \left( \begin{array}{cc|cc} d_{111} & d_{121} & d_{112} & d_{122} \\ d_{211} & d_{221} & d_{212} & d_{222} \\ \hline & & & \end{array} \right)$$

$x=4$   
 $1^{st}$  индекс - веңгә строка  
 $2^{nd}$  индекс - веңгә столбец.  
 $3^{rd}$  индекс - веңгә слой  
 $4^{th}$  индекс - веңгә "слойное"

$$A = (d_{kem}^i) = \left( \begin{array}{c|cc|cc} d_{111}^1 & d_{121}^1 & d_{112}^1 & d_{122}^1 & A_{11} \\ d_{211}^1 & d_{221}^1 & d_{212}^1 & d_{222}^1 & A_{12} \\ \hline d_{111}^2 & d_{121}^2 & d_{112}^2 & d_{122}^2 & A_{21} \\ d_{211}^2 & d_{221}^2 & d_{212}^2 & d_{222}^2 & A_{22} \\ \hline & & & & \end{array} \right) \quad \begin{matrix} 1 \text{ слой} = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \\ 2 \text{ слой} \\ 1 \text{ сечение} \\ 2 \text{ сечение} \end{matrix}$$

Пример:

- $f \in V^*$   
 $f: V \rightarrow K$   
или  
 $\forall \xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i \quad f(\xi) = \xi^i \frac{f(e_i)}{e_i} \leftrightarrow A = (d_{i...n})$  1-мерсек и-ца.  
 $e_1 \dots e_n$  базис  $V$
- $V_3 - 3^{rd}$  мерсек геом. вектора.  $f: V_2 \times V_3 \rightarrow K \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3 \quad f(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi \quad \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$   
Очевидно,  $f$  - линейная по-а - тензор типа  $(2,0)$ ,  $f \in T_{(2,0)}$   
 $\exists e_1 = \bar{i}, e_2 = \bar{j}, e_3 = \bar{k}$

$$\begin{aligned} f(\bar{a}, \bar{b}) &= d_{ij} a^i b^j & \bar{a} = a^i e_i, \bar{b} = b^j e_j, \quad d_{ij} = f(e_i, e_j) = \delta_{ij} \\ \Rightarrow f &\Leftrightarrow A = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \\ \Rightarrow f(\bar{a}, \bar{b}) &= \bar{a}^T A \bar{b} \quad \Rightarrow \text{в нашем случае } f(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}^T \bar{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i \quad (\text{тк. оба индекса каверху пишем знако} \Sigma) \end{aligned}$$

? Как изменится вид тензора, если выбрать другой - "новый" - базис в пр-ве  $V$ ?

$$e_1 \dots e_n \text{ базис пр-ва } V \quad T = T_{e \rightarrow e'}, S = T^{-1} = T_{e' \rightarrow e} \quad \forall x \in V \quad x = \overline{x}^i e_i \quad \text{если } x^i = t_j^i x'^j$$

$$w^1 \dots w^n \text{ базис пр-ва } V^*, \text{ сопоставл. к } e \text{ и } e', \text{ коорд-ко } \quad \forall \alpha \in V^* \quad \alpha = \alpha^i S \quad \alpha = \alpha_j w^j = \alpha'_j w'^j$$

$$\Rightarrow \forall \xi_k \in V \quad \xi_k^{j_k} = t_{i_k}^{j_k} \xi_{i_k}^{i_k} \quad \begin{matrix} j_k = 1, \dots, n \\ i_k = 1, \dots, p \end{matrix}$$

$$\forall \eta^m \in V^* \quad \eta^m = S_{im}^{i_m} \eta^{i_m} \quad \begin{matrix} i_m = 1, \dots, n \\ m = 1, \dots, q \end{matrix}$$

$$\stackrel{\text{помножив}}{\Rightarrow} f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \left[ \begin{matrix} d_{i_1 \dots i_q} & t_{i_1}^{j_1} & t_{i_2}^{j_2} & \dots & t_{i_p}^{j_p} & S_{i_1}^{i_1} & \dots & S_{i_q}^{i_q} \\ j_1 \dots j_p & & & & & & & \end{matrix} \right] \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} =$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенным  
твёрдко и винч., произходит суммирование ( $i_1 \dots i_p$ :  $j_1 \dots j_p$ )  
 $\Rightarrow$  в результате, просуммировав, получим  
новую компоненту со штрафованными индексами.

$$= \boxed{d^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q}}, \text{ т.о. получим снова тензор типа } (p, q)$$

Т.о., при замене базиса тензор типа  $(p, q)$  остаётся тензором того же типа, а  
его координаты меняются по следующему закону:

$$d'^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

коор-тные индексы  
в "новых" базисах

коор-тные индексы  
в "старых" базисах  
 $e, w$

(3)

верхние индексы  $i_1 \dots i_q$   
преобразуются с и-ицей  $S$ , т.е.  
по контравариантному закону,  
постоину наз-ва контравариантными  
индексами, а тензор  
 $q$ -раз контравариантный

След-но, нижние индексы  $j_1 \dots j_p$  преобразуются с матрицей  $T$ , т.е.  
по ковариантному закону, постину наз-ва ковариантными индексами, а  
тензор  $P$  раз ковариантным.

Пример: 1) тензор типа  $(0,0) \equiv \lambda \in K$ , очевидно, не меняться при замене базиса,  
м.е. инвариант.

2).  $A = (a^i_j)_{n \times n}$  и-ца тензора  $d \in T_{(1,1)}$

$$a^i_m = a^i_j t^j_m S^k_i \Leftrightarrow A' = SAT = T^{-1}AT \quad \text{получаем форму записи и-ца  
или опр. при замене базиса.}$$

3)  $\forall f \in V^*$  тензор типа  $(1,0) \Leftrightarrow A = (a_i)_{n \times 1} = a \in K_n$

$$\forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i = x^i a'_j = a_i \left[ \begin{smallmatrix} t^i_j & x^j \end{smallmatrix} \right] = a_i x^i$$

$V \cong V^{**}$   $x(f) \quad x: V^* \rightarrow K \quad$  тензор типа  $(0,1)$

$$a_i x^i = a'_j x^j = x^i \left[ \begin{smallmatrix} S^j_i & a'_j \end{smallmatrix} \right] = x^i a_i$$

4)  $d \in T_{(1,2)} \Rightarrow A = (d^i_j)$

Найти  $d'^{2,1}_2$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a'_j = a_i t^i_j \Leftrightarrow a' = aT \quad a_i = f(e_i)$$

$$x^i = S^j_i x^j \Leftrightarrow x' = Sx \quad x^i = x(e_i)$$

контравариант.

$\boxed{\text{К примеру. } d^i_k S^2_i S^1_j \Leftrightarrow S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow (S^2 A_k (S^1)^T) t^k_2 = (2 - 17 - 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -19}$

Вернемся к def тензора. Тензор был определен нами, как полилинейная ф-ция и  
наше def не зависит от выбора базиса. В пр-ве  $V$ . Но, при этом, тензор оказался  
связанным с базисом, т.е. после замены базиса тензор остается тензором,  
прим. того же типа. Для такого рода объектов исп-з термин геометрический  
объект. Поэтому сущ-т другой подход к def. тензора.

def: (2<sup>nd</sup> def тензора) Тензором  $d$  типа  $(p,q)$  наз-ва геометрический объект на пр-ве  $V$ ,  
который описывается  $A$   $(p+q)$  мерной матрицей элементов поля  $K$  размерности  $n=dim V$ .  
При этом, каковы бы не были базисы  $e$  и  $e'$  в пр-ве  $V$  и соответствующие  
им сопряженные базисы  $V^*$  и  $w^*$ , соответствующие компоненты матриц  $A$  и  $A'$   
должны быть связаны формулой (3).

Операции "+" и " $\cdot \lambda$ " между двумя тензорами одного типа, очевидно, опр-з в этом  
случае как операции "+" и " $\cdot \lambda$ " соответствующих контравариантных тензоров.

При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут  
уд-ть пр-е (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр скобка будет получать  
тензор того же типа, что и исходные.

Действительно,  $\forall \lambda \in K, d, \beta \in T_{(p,q)}$

$$(\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} := \lambda \cdot d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

$$(\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}) t^{j_1}_{r_1} \dots t^{j_p}_{r_p} S^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p}$$

$$d, \beta \in T_{(p,q)} \quad \lambda d^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} + \beta^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p} = (\lambda d + \beta)^{i_1 \dots i_q}_{r_1 \dots r_p}$$

Т.о. эти операции на пр-ве постини. ф-и соответствуют нашим опр. над многочленами  
и-ца с сохранением сл-ва (3). Нашему def 1  $\Leftrightarrow$  def 2.

В зависимости от поставленной задачи, мы будем исп-з как 1<sup>st</sup>, так и 2<sup>nd</sup> def.

### 8.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Операция свертки.

8.3. Произведение тензоров. Базис пр-ва тензоров. Операция свертки.

def:  $\alpha \in T(p_1, q_1)$ ,  $\beta \in T(p_2, q_2)$

Произведение тензоров  $\alpha$  и  $\beta$  нез-ся тензор  $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ , коинцидентное которого определяется следующими равенствами:

корректность def: надо проверить

выполнение св-ва (3) для новой аналогичной и-иже  $\gamma$ :

$$\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_2} m_1 \dots m_{p_2}} = \alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_2}} \beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}}$$

$$\begin{aligned} \gamma^{i'_1 \dots i'_{q'_1} k'_1 \dots k'_{q'_2}}_{j'_1 \dots j'_{p'_2} m'_1 \dots m'_{p'_2}} &= \alpha^{i'_1 \dots i'_{q'_1}}_{j'_1 \dots j'_{p'_2}} \beta^{k'_1 \dots k'_{q'_2}}_{m'_1 \dots m'_{p'_2}} \\ &= \gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_2} m_1 \dots m_{p_2}} + \alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_2}} \beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}} \Rightarrow \gamma \in T(p_1 + p_2, q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Замечание:  $\forall \lambda \in K$  - тензор типа  $(0,0)$   $\Rightarrow \lambda \cdot \alpha = \lambda \otimes \alpha = \alpha \otimes \lambda$

Текущее произведение, описано, ассоциативно, но не коммутативно!

Пример:  $\alpha, \beta \in T(1,0)$   $\alpha = (1 \ 0 \ -1)$   $\beta = (0 \ 3 \ 5)$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \alpha \otimes \beta &= (\alpha \beta_j) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_1 \\ \gamma_1 \in T(2,0) & \quad \quad \quad \gamma_2 = \beta \otimes \alpha = (\beta_i \alpha_j) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2 \end{aligned}$$

$$\gamma_1 \neq \gamma_2 \quad A_1 = A_2^T$$

Упр: 1)  $\alpha \in T(p,0)$ ,  $\beta \in T(0,q)$   $\Rightarrow \alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$

2)  $\otimes$  дистрибутивно

Введем 1<sup>ю</sup> def тензора произведения тензоров для коммутативного произведения функций, определяющих эти тензоры.

$$\begin{aligned} \alpha &\leftrightarrow f : V^{P_1} \times (V^*)^{Q_1} \rightarrow K \\ \beta &\leftrightarrow g : V^{P_2} \times (V^*)^{Q_2} \rightarrow K \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = \alpha(\beta) \Leftrightarrow f \cdot g : V^{P_1+P_2} \times (V^*)^{Q_1+Q_2} \rightarrow K \\ \forall \xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \xi_2, \dots, \xi_{P_2} \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^{Q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{Q_2} \in V^* \end{array}}$$

$$f \cdot g (\xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \xi_2, \dots, \xi_{P_2}, \eta^1, \dots, \eta^{Q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{Q_2}) = \underbrace{g^{i_1 \dots i_{Q_1} k_1 \dots k_{Q_2}}}_{\substack{i_1, \dots, i_{Q_1} \\ j_1, \dots, j_{P_2} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_{P_1}^{j_{P_1}} \xi_2^{m_1} \dots \xi_{P_2}^{m_{P_2}} \theta_1^{k_1} \dots \theta_{Q_2}^{k_{Q_2}}}_{\substack{j_1, \dots, j_{P_2} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} =$$

наглядное выражение ковариантной формулы  $f$  через композицию  $\alpha$  и  $\beta$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{Q_1}}}_{\substack{i_1, \dots, i_{Q_1} \\ j_1, \dots, j_{P_2} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_{P_1}^{j_{P_1}} \xi_2^{m_1} \dots \xi_{P_2}^{m_{P_2}}}_{\substack{j_1, \dots, j_{P_2} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \cdot \underbrace{P^{k_1 \dots k_{Q_2}}}_{\substack{k_1, \dots, k_{Q_2} \\ l_1, \dots, l_{Q_1} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} \underbrace{\xi_1^{l_1} \dots \xi_{P_2}^{l_{P_2}} \theta_1^{m_1} \dots \theta_{Q_2}^{m_{Q_2}}}_{\substack{l_1, \dots, l_{Q_1} \\ m_1, \dots, m_{P_2}}} =$$

$$f(\xi_1, \dots, \xi_{P_1}, \eta^1, \dots, \eta^{Q_1}) \quad g(\xi_2, \dots, \xi_{P_2}, \theta^1, \dots, \theta^{Q_2})$$

Важно помнить,  $\forall f^j \in T_{(1,0)}, j=1, \dots, P$   $f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^P \in T_{(P,0)}$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_P \in V \quad \boxed{f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^P (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_P) = f^1(\xi_1) \cdot f^2(\xi_2) \dots f^P(\xi_P)}$$

$$\forall g_j \in T_{(0,1)}, j=1, \dots, Q \quad g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_Q \in T_{(Q,1)}$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^Q \in V^* \quad \boxed{g_1(\eta^1) \cdot g_2(\eta^2) \dots g_Q(\eta^Q) = g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_Q (\eta^1, \dots, \eta^Q)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^1 \otimes \dots \otimes f^P \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_Q (\xi_1, \dots, \xi_P, \eta^1, \dots, \eta^Q) = f^1(\xi_1) \dots f^P(\xi_P) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_Q(\eta^Q)} \quad (4)$$

Теорема: (о базисе np-ва  $T_{(P,Q)}$ )

если  $e_1, \dots, e_n$  базис  $V$ ,  $w^1, \dots, w^n$  базис  $V^*$ , сопряжен. к

сопряженность тензоров буде

$w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q}$  по всем возможным наборам индексов  $(j_1, \dots, j_P, i_1, \dots, i_Q)$ , где

абстрактный базис np-ва  $T_{(P,Q)}$

Dok-60: очевидно,  $w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q} \in T_{(P,Q)}$ , т.к.  $w^{j_i} : V \rightarrow K$ , а  $e_i : V^* \rightarrow K$

помимо этого!  $\forall \alpha \in T_{(P,Q)} \Leftrightarrow \alpha$  помимо np-ва.

$w^{j_i} \in T_{(1,0)}$   
 $e_i \in T_{(0,1)}$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_P \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^Q \in V^* \quad \alpha(\xi_1, \dots, \xi_P, \eta^1, \dots, \eta^Q) =$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q}}_{(\xi_1, \dots, \xi_P, \eta^1, \dots, \eta^Q)} = \text{об.60(4)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q}}_{\text{непр.}}} \Rightarrow \text{непр.}$$

мат. независимость!

$$\boxed{\alpha = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_P} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_Q}}_{\text{непр.}}}$$

члены нулевой тензор к набору векторов  $e_{i_1}, \dots, e_{i_Q}, w^{j_1}, \dots, w^{j_P}$

$$\alpha = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} w^{j_1}(e_{i_1}) \dots w^{j_P}(e_{i_P}) \cdot e_{i_1}(w^{j_1}) \dots e_{i_Q}(w^{j_Q}) = \underbrace{\alpha^{i_1 \dots i_Q}}_{\substack{i_1, \dots, i_Q \\ j_1, \dots, j_P}} \underbrace{\delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_P}^{j_P} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_Q}^{k_Q}}_{\substack{\text{символы произв.} \\ \text{тензора}}} = \underbrace{\alpha^{k_1 \dots k_Q}}_{\substack{k_1, \dots, k_Q \\ m_1, \dots, m_Q}}$$

верно для любого набора индексов  $m_1, \dots, m_Q, k_1, \dots, k_Q \Rightarrow$  нулевая комбинация триединства  $\Rightarrow$

Пример:  $\alpha = (w^1 - 2w^2 + w^3) \otimes (3w^1 + w^2) \otimes e_2 + (w^2 + 2w^3) \otimes w^1 \otimes e_3$

- найти значение  $\alpha$  на векторах  $\xi_1 = 2e_1 - e_2, \xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3, \eta = w^2 - w^3$
- записать матрицу тензора.

$$1) \quad \alpha(\xi_1, \xi_2, \eta) = (\xi_1^1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^3)(3\xi_2^1 + \xi_2^2) \cdot \eta_2 + (\xi_2^1 + 2\xi_2^2) \cdot \xi_2^2 \cdot \eta_3 = (2+2+0)(3 \cdot 1 + 2) \cdot 1 + (-1+2 \cdot 0) \cdot 1 \cdot (-1) = 21$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \alpha \in T_{(2,1)} \Rightarrow \alpha = (\alpha^i_{jk})$$

$$\begin{array}{ll} \alpha^2_{11} = 3 & \alpha^2_{21} = -6 \\ \alpha^2_{12} = 1 & \alpha^2_{22} = -2 \\ \alpha^2_{21} = 1 & \alpha^2_{32} = 1 \\ \alpha^2_{22} = 1 & \alpha^2_{31} = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

def:  $\exists p, q \geq 1$   $\alpha \in T(p, q)$ . Приведение один верхний индекс одному нижнему. Тогда, по правилу Эйнштейна, мы должны будем просуммировать соответствующие компоненты. В результате, получим систему элементов, у которых число верхних и низких будет на единицу меньше.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{составляют} \\ \beta^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_q} = \alpha^{i_1 \dots j_1 \dots j_p} \\ \text{составляют} \end{array}}$$

- эта операция называется сверткой тензора  
 $\alpha \in T(p, q) \rightsquigarrow \beta \in T(p-1, q-1)$

корректность определения надо проверить выполнение обея (3)

$$\begin{aligned} \beta^{i_1' \dots \hat{i}_k' \dots i_q'} &= \alpha^{i_1' \dots j_1' \dots j_p'} = \alpha^{i_1 \dots j_1 \dots j_p} + t^{j_1 \dots j_m}_{j_1' \dots j_p'} S^{i_1' \dots i_q'}_{j_1 \dots j_m} \\ &= \underbrace{\alpha^{i_1 \dots j_1 \dots j_p}}_{\beta^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_q}} + \underbrace{t^{j_1 \dots j_m}_{j_1' \dots j_p'} S^{i_1' \dots i_q'}_{j_1 \dots j_m}}_{S^{i_1' \dots i_q'}_{i_k}} \Rightarrow \text{Будет (3)} \\ &\Rightarrow \beta \text{ - tensor типа } (p-1, q-1) \end{aligned}$$

$$(TS)^{j_m}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k} = \begin{cases} 0, & j_m \neq i_k \\ 1, & j_m = i_k = \alpha \end{cases}$$

Замечание!

- 1) Свртка может проводиться по нескольким индексам.
- 2) Если в результате свртки получается тензор типа  $(0, 0)$  (маска), то такая свртка называется помойкой.

Пример!

- 1)  $\alpha \in T(1, 1) \Leftrightarrow A = (\alpha^i_j)_{n \times n} \quad \beta = (\alpha^i_i) = t \cdot A \in K \Rightarrow$  помоя свртка;  $\beta \in T(0, 0)$  и свртка отрицательно заменила базиса.
- 2)  $f \in T(1, 0)$  - ковектор  $\Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n)$   
 $x \in T(0, 1)$  - вектор  $\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \alpha = f \otimes x = (a_j x^i) = (\alpha^i_j) \Rightarrow \beta = (\alpha^i_i) = a_i x^i = f(x) = x(f)$   
уточнение  
 или формула  $f$  на векторе  $x$ .

$$3) \quad \alpha \in T(1, 1) \Leftrightarrow A = (\alpha^i_j) \quad \alpha \in T(1, 1) \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$f^1 = \alpha \otimes x = (\alpha^i_j x^k) = (f^i_j) \in T(1, 2)$$

$$\beta = (f^i_j) = (\alpha^i_j x^j) = (\beta^i). \quad \Leftrightarrow \quad f = Ax$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \beta = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^n \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ (Ax)^{i-\text{коффи}} \end{matrix} \quad \beta \in T(1, 1)$$

$$\tilde{\beta} = (f^i_j) = (\alpha^i_j x^k) = (\tilde{\beta}^k) \Leftrightarrow \tilde{\beta} = (t \cdot A) \cdot x$$

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^n \end{pmatrix}$$

$$4) \quad \alpha \in T(1, 1) \quad \alpha^i_{j'} = \alpha^i_j t^j_{j'} S^{i'}_i = \text{свртка по 2-му индексам тензора } \alpha \otimes T \otimes S = f = (\alpha^i_j t^k_m S^l_n) = (f^{i' k' l' n'}_{j' m' l' n'})$$

$$\Rightarrow \alpha^i_{j'} = \delta^{i' j' l'}_{j' j' l'} \text{ свртка.}$$

## 8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.

8.4. Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры.

def:  $\exists p \geq 2, \alpha \in T(p, q) \quad \exists \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$  перестановка ряда от 1 до  $p$ .

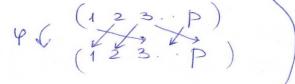
напоминание:

$\varphi: \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$  — перестановка

бз. одноз. отвр.

$\sigma_k = \varphi(k), k = 1, \dots, p$

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(p))$  — перестановка



$\beta = \sigma(\alpha)$  — наз. ся тензором, полученным транспонированием тензора  $\alpha$  по перестановкой  $\sigma$   
по нижним индексам, если  $\beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = \alpha_{i_1 \dots i_q}^{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(p)}}$

Аналогично опр.-ся транспонирование по верхним индексам.

Замечание: для тензоров определены транспонирования опр.-ся только по одному типу индексов; либо по нижним, либо по верхним, в отличии от производной многомерной матрицы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

Корректность def: как и раньше надо проверить выполнение сб-ва (3), т.е. что  $\beta \in T(p, q)$

Как известно, любая перестановка может быть получена конечным числом транспозиций. Поэтому, достаточно показать, что сб-во (3) выполнено при транспонировании тензора по паре индексов.

$$\begin{aligned} & \exists \beta_{j_1^1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = \alpha_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \Rightarrow \beta_{j_1' \dots j_p'}^{i_1' \dots i_q'} = \alpha_{i_1' \dots i_q'}^{j_1' \dots j_p'} = \\ & = \boxed{\alpha_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}} t_{j_1' \dots j_p'}^{i_1' \dots i_q'} = \alpha_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} t_{j_1' \dots j_p'}^{i_1' \dots i_q'} = \alpha_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} t_{j_1' \dots j_p'}^{i_1' \dots i_q'} \stackrel{\substack{\tau, k \in T(p, q) \\ \Rightarrow \text{бук-ко (3)}}}{=} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{бук-ко (3)}$

$\Rightarrow (3)$

бук-ко.

Как будем вынуждены транспонировать тензора, если брать за определение тензора def 1?

$$\alpha \in T(p,q) \iff \alpha \text{ полином. отобр.} \quad \boxed{\beta = \sigma(\alpha)} \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad \boxed{\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q}} = \\ = \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \cdot \eta_1^{i_1} \dots \eta_q^{i_q} = \boxed{\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)}$$

Замечание: при транспонировании по низшим индексам, очевидно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспонирования по верхним индексам будет обладать теми же свойствами, что и операция транспонирования по низшим. Поэтому все результаты, которые мы получим для низших индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

Пример:  $\alpha = (w^1 - 2w^2) \otimes w^3 \otimes (w^4 - w^5) + w^3 \otimes w^4 \otimes w^3 \quad (\Rightarrow \alpha \in T(3,0) \Rightarrow (\alpha_{ijk}))$

1) найти  $\beta = \sigma(\alpha) \quad \sigma = (3,1,2)$ , вычислить матрицу.

2) найти значение  $\beta$  на векторах  $\xi_1 = e_1 + e_2, \xi_2 = -e_2 - e_3, \xi_3 = e_1 + 2e_2$

$$i) \quad \alpha = (d_{ijk}) \Rightarrow \beta = (d_{kij}) \quad \begin{matrix} i \leftrightarrow j_1 \\ j \leftrightarrow j_2 \\ k \leftrightarrow j_3 \end{matrix}$$

$$\sigma = (3,1,2) \quad (\beta_{ijk})$$

~~$d_{ijk} = \beta_{kij}$~~  неверно!  
здесь  $\sigma = (2,3,1)$

$$\beta_{ijk} = \beta_{j_1 j_2 j_3} = d_{j_3 j_1 j_2} = d_{kij}$$

[1 сн.] Вычисление m-изу  $\alpha$ :  $\alpha_{131} = 1 \quad \alpha_{233} = -1 \quad \alpha_{213} = 1$   
 $\alpha_{231} = -2 \quad \alpha_{233} = 2 \quad \text{остальные нули}$

$$\Rightarrow \beta_{311} = 1 \quad \beta_{331} = -1 \quad \beta_{132} = 1 \quad \Rightarrow \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 сн.] итоговая перестановка  $\equiv$  конечное число транспозиций (т.е. транспонирование индексов по паре индексов)

транспонирование многомерной м-изу по паре индексов  $(i,j) \equiv$  транспонирование двумерных слоёв м-изу, получающихся фиксированием различных составляющих всех индексов, кроме индексов  $(i,j)$ .

$$\beta_{ijk} = d_{kij}$$

$$d_{kij} \rightarrow \tilde{d}_{ikj} \rightarrow \tilde{d}_{ijk} = \beta_{ijk}$$

за 2 транспозиции эта сточинка в матрице на позицию  $(k i j)$ , должна переместиться на позицию  $(i j k)$

$$d_{kij} \rightarrow \tilde{d}_{ikj}$$

же меняется, поэтому будем фиксировать различные значения  $j = 1, 2, 3$ , т.е. извлекать из м-изу тензора двумерные м-изу, которое после однократной операции транспонирования всегда будет состоять из обратно в тензор.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

фиксируем  $j = 2 \rightarrow$  фиксируем слой  $\rightarrow$  каждая слой надо транспонировать

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} (0 & 0 & 0) & (0 & 0 & 0) & (0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & 0) & (0 & 0 & 0) & (0 & 0 & 0) \\ (1 & -2 & 0) & (0 & 0 & 0) & (-1 & 2 & 0) \end{pmatrix}$$

$\tilde{d}_{ikj} \rightarrow \tilde{d}_{ijk}$  не меняется  $i \Rightarrow$  фиксируем  $i = 1, 2, 3 \Rightarrow$  извлекаем двумерную м-изу  $\Rightarrow$  транспонируем  $\Rightarrow$  поменяли обратно.

$$i = 1 \quad (1\text{-я стр})$$

$$\begin{pmatrix} (0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 0) \\ (0 & 1 & 0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 1) \\ (0 & 0 & 0) \end{pmatrix} \quad \text{поменяли обратно, на исходные позиции}$$

$$i = 2 \quad (2\text{-я стр})$$

$$\begin{pmatrix} (0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 0) \end{pmatrix}$$

$$i = 3 \quad (3\text{-я стр}) \quad \begin{pmatrix} (1 & -2 & 0) \\ (0 & 0 & 0) \\ (-1 & 2 & 0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (1 & -2 & 0) \\ (0 & 0 & 0) \\ (-1 & 2 & 0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} (0 & 0 & 0) & (0 & 0 & 0) & (0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 0) & (0 & 0 & 0) & (0 & 0 & 0) \\ (1 & -1 & 2) & (0 & 0 & 0) & (0 & 0 & 0) \end{pmatrix}$$

2) 1 cn.  $\beta = \sigma(\alpha)$   $\sigma = (3, 1, 2)$

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = (\omega^1(\xi_3) - 2\omega^2(\xi_3)) \cdot \omega^3(\xi_1) \cdot (\omega^4(\xi_2) - \omega^3(\xi_2)) + \omega^2(\xi_3) \omega^4(\xi_1) \omega^3(\xi_2) = \\ = -2$$

2 cn  $\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \beta_{ijk} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k = \frac{\beta_{311}}{1} \cdot \frac{\beta_{212}}{2} \cdot \frac{\beta_{331}}{0} + \frac{\beta_{332}}{1} \cdot \frac{\beta_{322}}{2} \cdot \frac{\beta_{232}}{-1} = -2$

из def. транспонирования  $\Rightarrow$  мин. операція:  $\forall \lambda \in K \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in T(p, q) \quad \sigma(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda \sigma(\alpha_2)$

Кроме того, любая перестановка — это вектор-одн. отобр.  $\Rightarrow$  операции транспон. вектор.

$\Rightarrow$  Транспонирование — это изоморфизм на  $T(p, q)$

Транспонирование ассоциат., но не коммутативно (!) (очевидно, следует из свойств перестановок)

$$\sigma, \tau, \theta \text{ перестановки } \alpha \in T(p, q) \Rightarrow \begin{cases} (\sigma(\tau(\theta))\alpha) = ((\sigma\tau)\theta)(\alpha) \\ \sigma\tau(\alpha) \neq \tau\sigma(\alpha) \end{cases}$$

Упр.: док-ть:  $\alpha \otimes \beta = \sigma(\beta \otimes \alpha)$

def: tensor  $\alpha \in T(p, q)$  наз-ся симметрическим (по низшим индексам), если  $\forall$  перестановки (нижних индексов)  $\sigma: \sigma(\alpha) = \alpha$

и наз-ся кососимметрическим (антисимметрическим, антиперевернутым) (по низшим индексам), если  $\forall$  перестановки (нижних индексов)  $\sigma: \sigma(\alpha) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha$ , где  $\epsilon(\sigma)$  — четность перестановки.

из def. автоморфический  
перестановка сб-во где компоненты  
симм. и кососимм. Тензоров.  
 $\forall \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$$\begin{aligned} \alpha \text{ симм.} &\Leftrightarrow \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} = \alpha^{i_2 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p} \\ \alpha \text{ кососимм.} &\Leftrightarrow \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha^{i_2 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p} \end{aligned}$$

T.k.  $\forall$  перестановка  $\equiv$  каскадное транспонирование ( $\equiv$  транспонирование по паре индексов)

$$\begin{aligned} \alpha \text{ симм.} &\Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_m \dots j_k} \\ \alpha \text{ кососимм.} &\Leftrightarrow \forall (j_k, j_m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = -\alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_m \dots j_k} \end{aligned}$$

или если  $\sigma$  <sup>def</sup> тензора  $\alpha$  вида  $\sigma$  def 1:

$$\begin{aligned} \alpha \text{ симм.} &\Leftrightarrow \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = \alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \\ \alpha \text{ кососимм.} &\Leftrightarrow \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -\alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \end{aligned}$$

Упр.:  $\alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0$

$$\begin{aligned} \text{док-то: } (\Rightarrow) \quad \alpha \text{ кососимм.} &\Rightarrow \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -\alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) \Rightarrow \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0 \\ (\Leftarrow) \quad \forall (k, m) \quad \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = 0 &\Rightarrow \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_k, \dots) + \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) + \alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) + \alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_m, \dots) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots) = -\alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) = 0 \Rightarrow \alpha \text{ кососимм.} \end{aligned}$$

$$\alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall (k, m) \quad \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_k \dots j_m} = 0$$

def:  $\alpha \in T(p, 0)$  наз-ся полиномиальной формой. Если  $\alpha$  имеет это, кососимметрическ., то  $\alpha$  наз-ся антисимм. полином. формой или  $p$ -формой или внешней  $p$ -формой

$\alpha \in T_{(0,q)}$  наз. поливектором. Если  $\alpha$  к тому же, кососимметрическ., то  $\alpha$  наз.  $q$ -вектором

Упр.: Вычислить  $\det \alpha$  из прямого семестра. И сравнивать с  $\det P$ -формой.

$$\alpha \in T_{(p,q)} \text{ кососимм. (по низшим индексам)} \Rightarrow \begin{cases} 1) \text{ если } p > n \Rightarrow \alpha = 0 \\ 2) \text{ если } p = n \Rightarrow \alpha = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\epsilon(j)} \alpha_{j_1 \dots j_n} \\ \sigma = (j_1, \dots, j_n) \text{ перестановка} \\ \text{цикла } (12 \dots n) \end{cases}$$

Примеры: 1)  $V_3$  - нр-бо  $3 \times$  мерн. геом. векторов.

$$\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}) \text{ скл. нр-е. } \alpha \in T_{(2,0)}, \text{ симм.} \quad \text{Упр.: 1) Вычислить и-часть } \alpha_{\beta}. \\ \beta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \text{ симм. нр-е. } \beta \in T_{(3,0)}, \text{ кососимм.} \quad 2) \text{ убедиться что: } \sigma(\alpha) = \alpha \\ \forall \sigma: \sigma(p) = (-1)^{\epsilon(p)} \beta$$

$$2) A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \alpha \in T_{(2,0)} \quad \alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow A \text{ симм. и-часть.} \\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Leftrightarrow A \text{ кососимм. и-часть.}$$

$$3) \alpha \in T_{(3,0)} \quad \alpha = 0 \quad n < 3$$

$$\text{кососимм.} \quad \exists n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\epsilon(j)} \alpha_{123}, \quad \sigma = (j_1, j_2, j_3) \text{ перестановка } (123) \\ (3-\text{форма}) \quad (123) \oplus (213) \oplus (312) \oplus (132) \oplus (231) \oplus (321)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Упр.: как будем выкладывать  
и-часть  $\alpha$  (кососимм.)  $\in T_{(3,0)}$ ,  
если  $n=4$ ?

$$4) \alpha \in T_{(2,0)} \quad \exists n=3 \quad \alpha_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_3 j_1 j_2} \quad \forall \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ перестановка } (123)$$

$$\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} = x$$

$$\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211} = y$$

$$\alpha_{113} = \alpha_{131} = \alpha_{311} = z$$

$$\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122} = t$$

... и т. д. запись

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_{111} & y & z & y & t & x & z & x & 0 \\ y & t & x & t & \alpha_{222} & 0 & x & \ddots & 0 \\ z & x & 0 & x & 0 & \alpha_{333} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Упр.: если  $n=2$ ?  
если  $n=1$ ?

## 8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

### 8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров.

def: Альтернирующие (антисимметризующие) и симметрирующие тензоры  $\alpha \in T_{(p,q)}$  (по ненулевым индексам) наз-ся операциями:

$$\text{Alt} \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma(\alpha)$$

$$\text{Sim} \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$$

$S_p$  - мн-во всех перестановок чисел от 1 до  $p$ .

Замечания:

1) очевидно, если  $\alpha$  симм.  $\Rightarrow \text{Sim} \alpha = \alpha$ ,  
если  $\alpha$  несимм.  $\Rightarrow \text{Alt} \alpha = \alpha$

$$(\text{Sim} \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha = \frac{p!}{p!} \alpha, \text{ т.к. } \sigma(\alpha) = \alpha \forall \sigma)$$

$$(\text{Alt} \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha = \frac{p!}{p!} \alpha, + \text{к. } \sigma \text{-нин. опр-ция на } T_{(p,p)})$$

2) очевидно, Alt и Sim - мн-чи. операции на  $T_{(p,q)}$ , + к.  $\sigma$ -нин. опр-ция на  $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (нижних) индексов.

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым происходит альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказались индексы, по которым симметрирование (альтернирование) не проводится, то эти индексы, выделяют вертикальными чертами.

Например,  $\alpha^{(i_1|i_2|i_3|i_4|i_5)}_{[j_1 j_2 j_3]}$

- по верхним индексам проводится симметрирование по индексам  $i_1 i_2 i_5$
- по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример!  $\alpha \in T_{(2,0)}$   $n=3$   $\alpha = (\alpha_{ijk}) = (\alpha_{j_1 j_2 j_3})$   $\sigma \in \{(123), (213), (312)\}$   $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = S_3$

$$1) \boxed{\beta = \text{Sum}_\alpha} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha^\sigma$$

$$\beta = \alpha_{(ijk)} \rightarrow \beta_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)}}$$

$$\boxed{\beta_{123}} = \alpha_{(123)} = \frac{1}{6} (\alpha_{123} + \alpha_{132} + \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{312} + \alpha_{321})$$

$$\alpha_{(132)} = \alpha_{(213)} = \alpha_{(231)} = \alpha_{(312)} = \alpha_{(321)} \Rightarrow \beta_{123} = \beta_{132} = \beta_{213} = \beta_{231} = \beta_{312} = \beta_{321} = x \quad (\text{см. пример 4})$$

$$\boxed{\beta_{112}} = \alpha_{(112)} = \frac{1}{6} (\alpha_{112} + \alpha_{122} + \alpha_{112} + \alpha_{121} + \alpha_{211} + \alpha_{211})$$

$$2) \boxed{f = Aet \alpha} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha^\sigma \quad f = \alpha_{[i_1 i_2 i_3]} \rightarrow f_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)}}$$

$$\boxed{f_{123}} = \alpha_{[123]} = \frac{1}{6} (\alpha_{123} - \alpha_{132} - \alpha_{213} + \alpha_{231} + \alpha_{312} - \alpha_{321}) \quad \epsilon(\sigma) \in \{+, -, +, -, +, -\}$$

$$-\alpha_{[132]} = \alpha_{[312]} = -\alpha_{[321]} = \alpha_{[231]} = -\alpha_{[213]} \Rightarrow \boxed{f_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} f_{i_1 i_2 i_3}} \quad \sigma = (j_1, j_2, j_3)$$

$$\boxed{\gamma_{112}} = \alpha_{[112]} = \frac{1}{6} (\alpha_{112} - \alpha_{121} - \alpha_{112} + \alpha_{121} + \alpha_{211} - \alpha_{211}) = 0$$

$$-\alpha_{[121]} = \alpha_{[211]} \Rightarrow \boxed{\gamma_{112} = \gamma_{121} = \gamma_{211} = 0} \Rightarrow \text{все компоненты } \gamma_i, \text{ у которых соблюдаются}\}$$

хочет ли 2 индекса равных между собой (см. пример 3)

$$3) \boxed{\tilde{\beta} = \alpha_{(ijlk)}} \rightarrow \tilde{\beta}_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)}} = \frac{1}{2} (\alpha_{j_1 j_2} + \alpha_{j_2 j_1}) = \alpha_{j_1 j_2}$$

$$\sigma \in \{(12), (21)\} = S_2 \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\tilde{\beta}_{112} = \alpha_{(1112)} = \frac{1}{2} (\alpha_{112} + \alpha_{211}) \Rightarrow \tilde{\beta}_{112} = \tilde{\beta}_{211}$$

$$\tilde{\beta}_{121} = \alpha_{(1121)} = \frac{1}{2} (\alpha_{121} + \alpha_{121}) = \alpha_{121} \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta}_{i_1 j_1} = \alpha_{(ij1l)} = \alpha_{i_1 l}} \quad \forall i_1, l$$

$$\tilde{\beta}_{123} = \alpha_{(1213)} = \frac{1}{2} (\alpha_{123} + \alpha_{321}) \Rightarrow \tilde{\beta}_{123} = \tilde{\beta}_{321} \quad \text{u.m.g.} \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta}_{i_1 j_1 k_1} = \tilde{\beta}_{k_1 j_1 i_1}} \quad \forall i_1, j_1, k_1$$

$$4) \boxed{f = \alpha_{[ijkl]}} \rightarrow f_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)}} = \frac{1}{2} (\alpha_{j_1 j_2} - \alpha_{j_2 j_1}) = \alpha_{j_1 j_2}$$

$$\epsilon(\sigma) \in \{+, -\}$$

$$\tilde{f}_{112} = \alpha_{(1112)} = \frac{1}{2} (\alpha_{112} - \alpha_{211}) \Rightarrow \tilde{f}_{112} = -\tilde{f}_{211}$$

$$\tilde{f}_{121} = \alpha_{(1121)} = \frac{1}{2} (\alpha_{121} - \alpha_{121}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{f}_{i_1 j_1} = \alpha_{[i_1 j_1 l]} = 0} \quad \forall i_1, l$$

$$\tilde{f}_{123} = \alpha_{(1123)} = \frac{1}{2} (\alpha_{123} - \alpha_{321}) \Rightarrow \tilde{f}_{123} = -\tilde{f}_{321} \quad \text{u.m.g.} \Rightarrow \boxed{\tilde{f}_{i_1 j_1 k_1} = -\tilde{f}_{k_1 j_1 i_1} \quad \forall i_1, j_1, k_1}$$

Упр.  $\alpha \in T_{(2,0)} \Leftrightarrow A = (\alpha_{ij})$  1)  $\text{Sum} A = \frac{A+A^T}{2}$ ,  $Aet A = \frac{A-A^T}{2}$  2)  $\text{Sum} A$ -симм. ли-ва?  
 $Aet A$ -косимм. ли-ва?

$$\text{Teorema! } \forall \text{ нестранные } \sigma \quad \text{Aet}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{Aet}\alpha) = (-1)^{\sigma(\alpha)} \text{Aet}\alpha$$

$$\text{Sum}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha$$

операции Aet и Sum  
нестранное значение с  
операцией транспонирования.

Dok-Bd: док-и доказ. Aet ( где sum аналогично: ynp)

$$\text{Aet}(\sigma(\alpha)) = \frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} \tau(\sigma(\alpha)) = \frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} (\tau\sigma)(\alpha) \quad \Theta$$

$\tau \in S_P$  - предобразование всех перестановок  $S_P \Rightarrow \tau\sigma \in S_P$  также предобразует все эти в  $S_P$

$$\exists P = \tau\sigma \Rightarrow (-1)^{\sigma(P)} = (-1)^{\sigma(\tau)} \cdot (-1)^{\sigma(\sigma)} \Rightarrow (-1)^{\sigma(\tau)} = (-1)^{\sigma(P)} \cdot (-1)^{\sigma(\sigma)}$$

$$\Theta \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} (-1)^{\sigma(\sigma)} P(\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} P(\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha \Rightarrow \boxed{\text{Aet}(\sigma(\alpha)) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha}$$

$$\sigma(\text{Aet}\alpha) = \sigma\left(\frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} \tau(\alpha)\right) = \frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} \sigma(\tau(\alpha)) = \frac{1}{P!} \sum_{\tau \in S_P} (-1)^{\sigma(\tau)} (\sigma\tau)(\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} P(\alpha) =$$

$$= (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha \Rightarrow \boxed{\sigma(\text{Aet}\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha}$$

Следствие: 1)  $\forall \alpha$   $\text{Aet}\alpha$  - кососимметрический  
 $\text{Sum}\alpha$  - симметрический

2)  $\alpha$  кососимметрический  $\Leftrightarrow \alpha = \text{Aet}\alpha$   
 $\alpha$  симметрический  $\Leftrightarrow \alpha = \text{Sum}\alpha$

3)  $\text{Aet}(\text{Aet}\alpha) = \text{Aet}\alpha \quad \text{Aet}(\text{Sum}\alpha) = 0$   
 $\text{Sum}(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha \quad \text{Sum}(\text{Aet}\alpha) = 0$

Dok-Bd: 1) очевидно,  $\sigma(\text{Aet}\alpha) = (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha$   
(def. кососимметрического)

очевидно,  $\sigma(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha$  (def. симметрического)

2) док-и доказ. (где симм. аналог. ynp)  
( $\Rightarrow$ ) очевидно, def. кососимметрического (см. def.)  
( $\Leftarrow$ )  $\exists \alpha = \text{Aet}\alpha \Rightarrow \forall \sigma: \sigma(\alpha) = \sigma(\text{Aet}\alpha) =$   
 $= (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}\alpha = (-1)^{\sigma(\sigma)} \alpha \stackrel{!}{=} \text{кососимметрический}$ .

$$3) \text{Aet}(\text{Aet}\alpha) = \text{Aet}\alpha \quad (\text{из 2}) + \text{k. Aet}\alpha \text{ кососимметрический.}$$

$$\text{Sum}(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha \quad (\text{из 1}) + \text{k. Sum}\alpha \text{ симметрический.}$$

$$\text{Aet}(\text{Sum}\alpha) = \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} \sigma(\text{Sum}\alpha) = \text{Sum}\alpha \cdot \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} = 0$$

$$\text{Sum}(\text{Aet}\alpha) = \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} \sigma(\text{Aet}\alpha) = \text{Aet}\alpha \cdot \frac{1}{P!} \sum_{P \in S_P} (-1)^{\sigma(P)} = 0.$$

Замечание: 1)  $T^{(\text{симметрический})}_{(p,q)}$  - инв-бо симметрических пар в верх. углеком.

$T^{(\text{кососимметрический})}_{(p,q)}$  - инв-бо кососимметрических пар в верх. углеком.

$\Rightarrow T^{(\text{симметрический})}_{(p,q)}, T^{(\text{кососимметрический})}_{(p,q)}$  или нагрп. па  $T^{(\text{кососимметрический})}_{(p,q)}$

очевидно, + k.  $\alpha = \text{Aet}\alpha \Rightarrow \forall \lambda \in K \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in T^{(\text{кососимметрический})}_{(p,q)} : (\alpha_1 + \alpha_2) = \text{Aet}(\alpha_1 + \alpha_2)$

доказательство:  $\text{Aet}(\alpha_1 + \alpha_2) = \underbrace{\text{Aet}\alpha_1}_{\alpha_1} + \lambda \underbrace{\text{Aet}\alpha_2}_{\alpha_2}$

аналогично доказывается симметрический.

2) если автоморфирование (симметрическое) проишходит не по всем индексам, то, очевидно, m-ия и n-ая строка будут первые, но только по отношению к индексам, но которые совершаются автоморф. (симметрия)

3)  $\exists (k,m)$  присоединительные пары углеком.  $\Rightarrow$

$$\forall \alpha: \begin{cases} \alpha = \text{Aet}\alpha + \text{Sum}\alpha \\ (k,m) \end{cases} \quad , + e \quad T^{(\text{симметрический})}_{(p,q)} = T^{(\text{симметрический})}_{(p,q)} \oplus T^{(\text{кососимметрический})}_{(p,q)}$$

$$\text{доказательство: } \text{Aet}\alpha = p \quad p^{i_1..i_q} = \frac{1}{2} (d^{i_1..i_q} + d^{i_2..i_q})$$

$$\oplus \quad \text{Sum}\alpha = f \quad f^{i_1..i_q} = \frac{1}{2} (d^{i_1..i_q} - d^{i_2..i_q}) = d^{i_1..i_q}$$

ynp:  $A = (a_{ij})$  проверено:  $A = \text{Aet}A + \text{Sum}A$ .

## 8.6 $p$ -формы. Внешнее произведение $p$ -форм.

8.6.  $p$ -формы. Внешнее произведение  $p$ -форм.

$p$ -форма это  $\alpha \in T_{(p,0)}$  (см. def. n. 8.4)  $p \leq n$ , иначе  $\alpha = 0$

или-бо  $T_{(p,0)}$  или подпр. бо  $T_{(p,q)}$ , т.е. симо обл-ся или пр. вом.

$f \in \Lambda^p V^*$  - или. пр. во  $p$ -форм.  $= \{ f \in T_{(p,0)} \mid \text{Alt}f = f \}$

$f: V^p \rightarrow K$   
помимо, альтерн. форма.  $\equiv$  кососимм. tensor (р-ковариантный)

В def кососимм. необходимо, чтобы  $p \geq 2$ , потому, формально, или форма (т.е. tensor  $T_{(1,0)}$ ) не могут подходить под def  $p$ -форм. Тем не менее, практико или форма называют 1-формами и  $\Lambda^1 V^* \equiv V^*$  очевидно

def:  $f \in \Lambda^{p_1} V^*, g \in \Lambda^{p_2} V^*$  внешнее произведение  $p_1$ -форма  $f$  и  $p_2$ -форма  $g$ , наз-ая  $(p_1+p_2)$ -форма  $f \wedge g$ , определенная следующим равенством:

$$f \wedge g = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \text{Alt}(f \otimes g) \quad f \wedge g \in \Lambda^{p_1+p_2} V^*, \text{ очевидно, т.к. } f \otimes g \in T_{(p_1+p_2,0)}, \text{ а } \text{Alt}(f \otimes g) \text{ кососимм.}$$

Свойства внешнего произведения:

$$1^\circ \quad f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$$

$$\text{док-во: } f \wedge g = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\alpha)} \sigma(f \otimes g)$$

$$g \wedge f = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\tau \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\tau(\alpha)} \tau(g \otimes f)$$

$$f = (\alpha_{i_1 \dots i_p}) \quad g = (\beta_{j_1 \dots j_p})$$

$$f = f \otimes g = (\alpha_{i_1 \dots i_p} \beta_{j_1 \dots j_p}) = (f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p})$$

$$\Theta = g \otimes f = (\beta_{j_1 \dots j_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}) = (\Theta_{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_p})$$

$\sigma$  и  $\tau$  пробегают одно и то же множество перестановок  $S_{p_1+p_2} \Rightarrow$  достаточно посмотреть каким знаком отмечается перестановка  $(i_1 \dots i_{p_1}, j_1 \dots j_{p_2})$  и  $(j_1 \dots j_{p_2}, i_1 \dots i_{p_1})$ . Переведем первую перестановку во вторую конеческое число транспозиций соседних элементов.

$$(i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_1 j_2 \dots j_{p_2}) \underset{p_1 \text{ раз}}{\sim} (j_1 i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_2 \dots j_{p_2}) \underset{p_2 \text{ раз}}{\sim} (j_2 j_1 i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_3 \dots j_{p_2}) \sim \dots \sim \sim$$

имея:  $p_2 \text{ раз по } p_1 \text{ раз} = p_1 p_2$   
транспозиций

$$\Rightarrow f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$$

В частности:  $p_1 = p_2 = 1$ , т.е.  $\forall f, g \in V^* \quad f \wedge g = -g \wedge f \quad \text{и} \quad f \wedge f = 0$

2°  $f \wedge (g+h) = f \wedge g + f \wedge h$  дистрибутивность  
 $(f+g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$

доказателство: об-ва  $2^{\circ}, 3^{\circ}$  следуют из об-в 1°

3°  $\forall \lambda \in K \quad (\lambda f) \wedge g = f \wedge (\lambda g) = \lambda(f \wedge g)$

4°  $f \wedge 0_{\Lambda^{p_2} V^*} = 0_{\Lambda^{p_1} V^*} \wedge g = 0_{\Lambda^{p_1+p_2} V^*}$

5°  $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$  ассоциативность, т.е.  $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$

доказателство:  $f \in \Lambda^{p_1} V^*$ ,  $g \in \Lambda^{p_2} V^*$ ,  $h \in \Lambda^{p_3} V^*$

$$\begin{aligned} & \frac{p_1! p_2! p_3!}{(p_1+p_2+p_3)!} (f \wedge g) \wedge h = \text{Aet}((\text{Aet}(f \otimes g) \otimes h)) = \text{Aet}\left(\frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\sigma)} \sigma(f \otimes g) \otimes h\right) = \text{Aet} \text{ нен. опр.} \\ & = \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}(\sigma(f \otimes g) \otimes h) = \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}(\sigma(f \otimes g \otimes h)) = \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\sigma(\sigma)} (-1)^{\sigma(\sigma)} \text{Aet}(f \otimes g \otimes h) \\ & \text{О-перестановка, представляющая } (p_1+p_2) \text{ шагов матрицы } f \otimes g \\ & \tau-\text{перестановка } (p_1+p_2+p_3) \text{ шагов такая, что представляющая первое } (p_1+p_2) \text{ шагов по} \\ & \text{перестановке } \sigma, \text{ а последние } p_3 \text{ шагов оставляют без изменения. Очевидно, } (-1)^{\sigma(\sigma)} = (-1)^{\sigma(\tau)} \end{aligned}$$

аналогично показываемо  $\frac{p_1! p_2! p_3!}{(p_1+p_2+p_3)!} f \wedge (g \wedge h) = \text{Aet}(f \otimes g \otimes h) \Rightarrow$

$\Rightarrow$  т.о.  $f \wedge g \wedge h = \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{Aet}(f \otimes g \otimes h)$

Далее, и.м.и. можно определить внешнее произведение на модуль конечное число внешних форм. Составим доказательство ассоциативности для них!

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_m = \frac{(p_1+p_2+\dots+p_m)!}{p_1! p_2! \dots p_m!} \text{Aet}(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_m), \text{ где } f_k - p_k-\text{форма.}$$

т.е. в базисе  $V$

$w^{i_1} \dots w^{i_n}$  базис  $V^*$ , соответствующий к  $e$ , т.е.  $w^k - 1$ -форма.

$$\Rightarrow w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p} = p! \text{Aet}(w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p}) - p-\text{форма.}$$

$j_k \in \{1, \dots, n\}$   
 $k = 1, \dots, p$

из об-ва 1°:  $w^{i_k} \wedge w^{j_l} = -w^{j_l} \wedge w^{i_k} \quad \forall (i_k, j_l)$   
 $w^{i_k} \wedge w^{i_k} = 0$

$$\Rightarrow w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p} \wedge w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} = -w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} \wedge w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}$$

$w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p} \wedge w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} = 0 \quad \forall (i_k, j_l)$

Теорема! (о базисе пр-ва внешних форм)

совокупность всевозможных  $p$ -форм вида

$$[w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p}], \text{ где } i_1 < i_2 < \dots < i_p, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

образует базис пр-ва  $\Lambda^p V^*$

Dok-bo:  $f \in \Lambda^p V^*$   $\Rightarrow f = A \text{et } f = d_{j_1 \dots j_p} A \text{et } (w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p}) = \frac{d_{j_1 \dots j_p}}{p!} w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p}$   $=$   
 а)  $f \in T(p,0)$   $\Rightarrow f = d_{j_1 \dots j_p} \underbrace{w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p}}_{\text{базис np-ва } T(p,0)}$   
 б)  $f \in \Lambda^p V^*$   $\Rightarrow f = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p}$   $\Rightarrow$  перенесение коэффициента

если хотя бы 2 индекса одинаковы, то произведение = 0  
 $\Rightarrow$  все  $j_i$  различны  $\rightarrow$  упорядочение.

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} = p! \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} A \text{et } (w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p})$$

применение обе части рав-ва к базису векторного np-ва  $V$ :  $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p} \quad j_1 < j_2 < \dots < j_p$

$$0 = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} w^{i_{\sigma_1}}(e_{j_1}) \dots w^{i_{\sigma_p}}(e_{j_p}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \delta_{j_1 \dots j_p}^{i_{\sigma_1} \dots i_{\sigma_p}} = \beta_{d_{j_1 \dots j_p}} \quad \forall j_1 < j_2 < \dots < j_p$$

Следствие:

- 1)  $\dim \Lambda^p V^* = C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- 2)  $\forall f \in \Lambda^p V^* \quad f \Leftrightarrow (d_{j_1 \dots j_p})$  коэр-мн  $f$  np-вс  $T(p,0)$   
 $\Rightarrow \beta_{i_1 \dots i_p} = d_{i_1 \dots i_p}$  коэр-мн  $f$  np-вс  $\Lambda^p V^*$

Теорема:  $\forall f^1, f^2, \dots, f^p \in V^*$  (*т.е.  $f^k$  - 1-формы*)  
 $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad f^1 \wedge \dots \wedge f^p (\xi_1, \dots, \xi_p) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{pmatrix}$

Dok-bo:  $f^1 \wedge \dots \wedge f^p = p! \text{et } (f^1 \otimes \dots \otimes f^p)$   
 $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad f^1 \wedge \dots \wedge f^p (\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma(f^1 \otimes \dots \otimes f^p)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_p} (\xi_1, \dots, \xi_p) =$

$$= \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} f^{i_1}(\xi_1) \dots f^{i_p}(\xi_p) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{pmatrix}$$

Следствие:

- 1)  $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \quad \xi_k = \xi_k^{i_k} e_{i_k} \quad \forall w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} (\xi_1, \dots, \xi_p) = \det \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_p^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{i_p} & \dots & \xi_p^{i_p} \end{pmatrix}$
- 2) если  $p=n$ ,  $\forall f^1, \dots, f^n \in V^*$ :  $f^k = a_{j_k}^k w^{i_k}, \quad A = (a_{j_k}^k)_{n \times n}$   
 $\Rightarrow f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det A \cdot w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_n}$

Задача: 1) док-во, что м-ца  $w^{i_k}(\xi_j) = \xi_j^{i_k}$   
 2)  $\forall k \quad f^k(\xi_j) = (a_{j_1}^k \dots a_{j_n}^k) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} \\ \vdots \\ \xi_n^{i_1} \end{pmatrix} \Rightarrow f^1 \wedge \dots \wedge f^n (\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^n(\xi_1) & \dots & f^n(\xi_n) \end{pmatrix} =$   
 $= \det \left( \begin{pmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^n & \dots & a_{j_n}^n \end{pmatrix} \left( \begin{matrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{i_1} & \dots & \xi_n^{i_n} \end{matrix} \right) \right) = \det A \cdot \det \underbrace{\left( \begin{matrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{i_1} & \dots & \xi_n^{i_n} \end{matrix} \right)}_{w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_n} (\xi_1, \dots, \xi_n)} \Rightarrow f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det A \cdot w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_n}$

Пример:

1)  $n=4 \quad f \in \Lambda^2 V^*, \quad f$ -2 форма  $f = w^1 \wedge w^2 + w^1 \wedge w^3 + w^1 \wedge w^4 + w^2 \wedge w^3 + w^2 \wedge w^4$   
 Вспоминаем о-ву тензора  $f$  в базисе np-ва  $V$ , сопряженного базису  $w$ . (т.е. в базисе  $e$ ).  
 Разберемся с формулой тензора:  $f \in T(2,0) \Leftrightarrow (d_{ij})$  о-ва тензора в np-ве  $T(2,0)$   
 $d_{ij} = f(e_i, e_j)$  no def.  
 $\Rightarrow$  постулат "в базисе np-ва  $V$ "

$$\sum_{i < j} w^i \wedge w^j = 2! \text{et } (w^i \otimes w^j) = w^i \otimes w^j - w^j \otimes w^i$$

$$\Rightarrow A = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ d_{ij} = 1 \quad d_{ji} = -1 \\ i < j \end{matrix}$$

2)  $f, g, h \in V^*$   
 $\downarrow$ -произв.  
 $n=3$

$$f = w^1 + w^2 + 2w^3$$

$$g = w^1 + 3w^2 + w^3$$

$$h = w^1 + w^2$$

Найти  $f \wedge g \wedge h$

T.K.  $p=n=3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f \wedge g \wedge h = \det \begin{pmatrix} w^1 \wedge w^2 \wedge w^3 \end{pmatrix} = -3w^1 \wedge w^2 \wedge w^3$   
 cm.  
 остаток.

 $\det A = -3$

Упр.: а)  $f = w^1 + w^2 + 2w^3 - w^4$   
 $g = w^2 - w^3 + w^4$   
 $h = w^1 + w^3$

Найти  $f \wedge g \wedge h$  (указание: использовать обозначение упр. а)  
 $w^i \wedge w^j = -w^j \wedge w^i, w^i \wedge w^i = 0$

б) найти значение  $f \wedge g \wedge h$  на векторах  
 $\xi_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$   
 $\xi_2 = e_2 + e_3 - e_4$   
 $\xi_3 = e_2 + e_4$

8.6. Дополнение к задаче по мере появления обозначения нр. виа вспомогательных форм:

$$\beta_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\epsilon(\sigma)} d_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} = d_{i_1 \dots i_p} = d_{i_1 \dots i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

т.к.  $f$  кососимметрический тензор  $\Rightarrow d_{i_1 \dots i_p} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} d_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}$

ноче теорема о вспомогательном произведении  $f$  форм доказывает следствие 2 из „новой“ следствия 2. (при этом старое следствие 2 будем частично считать)

„новое“ следствие 2!  $\forall f^1, \dots, f^p \in V^*, f^k \iff (a_{i_1}^k \dots a_{i_p}^k)$  вектор

$$\Rightarrow f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \sum_{i_1 \dots i_p} \det \begin{pmatrix} a_{i_1}^1 \dots a_{i_p}^1 \\ a_{i_1}^p \dots a_{i_p}^p \end{pmatrix} \cdot w^{i_1 \wedge \dots \wedge i_p}$$

задача!  $\exists f = f^1 \wedge \dots \wedge f^p$  кососимметрический тензор  $\Rightarrow f = \sum_{i_1 \dots i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} w^{i_1 \wedge \dots \wedge i_p}$

$$\beta_{i_1 \dots i_p} = d_{i_1 \dots i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = f^1 \wedge \dots \wedge f^p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \det \begin{pmatrix} f^1(e_{i_1}) \dots f^1(e_{i_p}) \\ f^p(e_{i_1}) \dots f^p(e_{i_p}) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{i_1}^1 \dots a_{i_p}^1 \\ a_{i_1}^p \dots a_{i_p}^p \end{pmatrix}, \text{ т.к. по def } a_{i_j}^k = f^k(e_{i_j})$$

Замечание!  $f$  -  $p$ -форма,  $f = \sum_{i_1 \dots i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} w^{i_1 \wedge \dots \wedge i_p}$

$\beta_{i_1 \dots i_p}$  координаты формы  $f$  в базисе нр. виа  $N^p V^*$  наз-м координатами.

и записываются в строку, имея!  $\begin{matrix} n=4 \\ p=3 \end{matrix} (\beta_{123}, \beta_{124}, \beta_{134}, \beta_{234}) = f$   
 в определенном порядке.

## 9 Евклидовы и унитарные пространства

### 9.1 Скалярное, псевдоскалярное произведение в Евкл. и унитарном пространствах. Норма в Евклидовом и унитарном пространствах.

**Определение 1.**  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{R}$  (вещ. пр-во)

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Скалярное произведение, если удовлетворяет 4м аксиомам:

$$\forall x, y \in V :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

1.  $(x, y) = (y, x)$  (симметр.)
2.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$  (Аддитивность по первому аргументу)
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  (Однородность по первому аргументу)
4.  $\forall x \neq 0 (x, x) > 0$  (Положительная определенность)

Из этих свойств можно понять, что скал. произведение – билинейная функция.

Из 3  $\Rightarrow \forall x \in V (x, \emptyset) = (\emptyset, x) = 0$

Из 4  $\Rightarrow \forall x \in V (x, x) \geq 0$ , причем  $= 0 \Leftrightarrow x = \emptyset$

**Определение 2.**  $V$  конечномерное, линейное пространство над  $\mathbb{R}$

$(V, (\cdot, \cdot))$  – Евклидово пространство

Замечание.  $V$  бесконечномерное  $(X, (\cdot, \cdot))$  предгильбертово

Если полное метрическое пространство, то оно называется гильбертовым

(Полное – любая фундаментальная последовательность сходится, из матанализа)

**Определение 3.**  $V$  – линейное пространство над полем  $\mathbb{C}$  (комплексн. линейное пространство)

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

Псевдоскалярное произведение:

$$\forall x, y, z \in V :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}$$

1.  $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$  (Аддитивность)
3.  $(\lambda x, z) = \lambda(x, z)$  (Однородность по 1му аргументу) Из 2 и 3  $\Rightarrow$  линейность по 1 аргументу
4.  $\forall x \neq 0 (x, x) > 0$  (Положительная определенность)

1, 2, 3  $(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$

$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)}$  Псевдооднородность по 2 арг.

$$(x, x) = \overline{(x, x)} \leftrightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$$

$\forall x \in V (x, x) \geq 0$ , причем  $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Определение 4.** Конечномерное  $V$  над полем  $\mathbb{C}$

$(X, (\cdot, \cdot))$  называется **унитарными** (псевдоевклидовыми, эрмитовыми)

**Определение 5.**  $(V, (\cdot, \cdot))$  Евклидово (унит.) пространство

$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$   $\forall x \in V \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}$  Евклидова норма

Аксиомы нормы:

1.  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  (невырожденность)
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (однородность)
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника)

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Ввели такую норму, удостоверимся, что все аксиомы выполнены:

1. Очевидно из 4
2.  $\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\frac{\lambda \bar{\lambda}(x, x)}{|\lambda|^2}} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$
3. ?

Давайте докажем неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$$\forall x, y \in (V, (\cdot, \cdot)) \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

2) Причем  $\Leftrightarrow x$  и  $y$  линейно зависимы

Доказательство. (a)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in V$

$$0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \bar{\alpha}(x, x) + \alpha \bar{\beta}(x, y) + \beta \bar{\alpha}(y, x) + \beta \bar{\beta}(y, y)$$

$$\begin{aligned} & \alpha := (y, y) \\ \square \quad & \beta = -(x, y) \Rightarrow \bar{\beta} = -(y, x) \end{aligned}$$

Подставим это в равенство, получим  $= \underbrace{(y, y)(\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \bar{\beta}\beta - \bar{\beta}\beta + \beta\bar{\beta})}_{\geq 0} \Rightarrow \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |(x, y)|^2 \geq 0$

(b)  $\Leftrightarrow x$  и  $y$  линейно завис.

Если  $x = 0$  или  $y = 0 \Rightarrow$  очевидно выполняется

$$\Rightarrow \exists x \neq 0 \text{ и } y \neq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \exists |(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$$

Из доказательства 1  $\begin{cases} \exists \alpha(y, y) > 0 \text{ (т.к. } y \neq 0) \\ \exists \beta = -(x, y) \end{cases} \quad 0 = \|x\|^2 \|y\|^2 = |(x, y)| = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y)$

$\Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0 \quad \alpha, \beta \text{ не все нули} \Rightarrow$  линейно завис.  $x, y$

$(\Leftarrow) \quad x, y \text{ линейно зав.} \Rightarrow \exists \alpha, \beta \text{ не все нули} \quad \alpha x + \beta y = 0$

$\square \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ противор.} \Rightarrow \alpha \neq 0 \text{ и } \beta \neq 0$

$\begin{cases} (\alpha x + \beta y, x) = 0 \\ (\alpha x + \beta y, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x, x) + \beta(y, x) = 0 \Rightarrow \alpha\|x\|^2 = -\beta(y, x) \\ \alpha(x, y) + \beta(y, y) = 0 \Rightarrow \beta\|y\|^2 = -\alpha(x, y) \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta\|x\|^2\|y\|^2 = \alpha\beta(x, y)(y, x) \quad |(x, y)|^2$

$$\Rightarrow \|x\|^2\|y\|^2 = |(x, y)|^2$$

■

Вернемся к 3 аксиоме  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + \underbrace{(x, y) + (y, x)}_{2Re(x,y) \leq 2|(x,y)| \leq 2\|x\|\|y\|} + (y, y) \stackrel{=||y||^2}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 =$$

$$(\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$a+b = z$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

**Определение 6.**  $\forall x \in V$

**Длина вектора**  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

**Нормировать вектор**  $\frac{x}{\|x\|} = x_0$  орт вектора,  $\|x_0\| = 1$

$\forall x, y \neq 0 \quad x, y \in V$

$\phi$  – угол между  $x$  и  $y$ :  $\cos \phi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$  (КБШ:  $\frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|} \leq 1$ )

**Примеры.**

1.  $V_3$  геом. вект.  $(x, y) = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos \phi$   
скал

2.  $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$   $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$  выполнены 1-4  
 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$   
(Евкл.  $\sum x_i y_i$ )

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_i^n |x_i|^2 \geq 0$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$$
 евкл. норма

$$\text{КБШ: } |\sum_i \bar{x}_i y_i| \leq (\sum_i^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_i^n |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Нер-во треугольника:

$$(\sum_i^n |x_i + y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_i^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_i^n |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

3.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad u, v \in R[a, b]$   $\int_a^b u(x) dx \quad \int_a^b v(x) dx$   
интегр.

$$f = u + iv$$

$$\int_a^b f dx = \int_a^b u dx + i \int_a^b v dx$$

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall f, g \quad (f, g) = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx$$

Все аксиомы очевидно выполнены, есть проблемы с 4ой аксиомой.

$$(f, f) = \int_a^b |f|^2 dx \geq 0$$

$= 0? \Leftrightarrow f \equiv 0$  почти везде на  $[a, b]$

Возникает евклидова норма.

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx} \quad L^2([a, b]) - пространство$$

$$\text{КБШ: } |\int_a^b f \bar{g} dx| \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$
 (Неравенство Буняковского)

$$\text{Неравенство треугольника: } (\int_a^b |f + g|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

(Неравенство Минковского)

## 9.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис (о.н.б.) Ортогональные системы векторов.

$(V, (\cdot, \cdot))$  евклидово (унит.) пространство

**Определение 1.**  $\forall x, y \in V$  ортогональные, если  $(x, y) = 0$

(Очевидно,  $\cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \rightsquigarrow$  перпендикулярны)

$\emptyset$  ортогонален  $\forall x \in V, \emptyset$  ортогонален  $V$

$y \in V : \forall x \in V \quad (y, x) = 0$  т.к.  $(y, y) = 0 \Rightarrow y = \emptyset$

**Определение 2.**  $v_1 \dots v_m$  парно-ортогональны, если  $\forall i \neq j : (v_i, v_j) = 0$

Система  $v_1 \dots v_m$  ортонормированна, если  $\forall (i, j) \boxed{(v_i, v_j) = \delta_{ij}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера

**Утверждение.**  $v_1 \dots v_m$  парно-ортог.  $\Rightarrow$  линейно незав.

Доказательство.  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \emptyset \quad \alpha_i \in K \quad 0 = (\emptyset, v_i) = \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, v_j \right) = \sum_i^m \alpha_i \boxed{\begin{matrix} \neq 0 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{matrix}} = \alpha_j(v_j, v_j) \neq 0$

$\Rightarrow \forall j \alpha_j = 0 \Rightarrow$  Линейно независ. ■

Существует ли такая система?

$\exists$  о.н.с. в  $V$  ?

**Теорема 1** (Процесс ортогон. Грама-Шмидта).

$\forall$  система векторов  $a_1 \dots a_m$  может быть заменена парно-ортог. системой векторов  $b_1 \dots b_k$ , с сохранением лин. оболочки

$span(a_1 \dots a_m) = span(b_1 \dots b_k) \quad k \leq m$

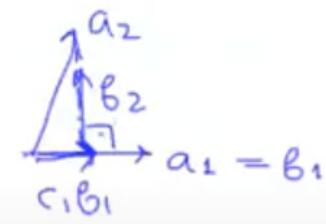
Доказательство.

1.  $a_1 \dots a_m$  лин. незав.

М.М.И.

- (a) База индукции  $m = 1 \quad a_1 = b_1$
- (b)  $\square$  верно для  $k - 1$  вектора — инд. предположение
- (c) Инд. переход. Докажем для  $k$  векторов.

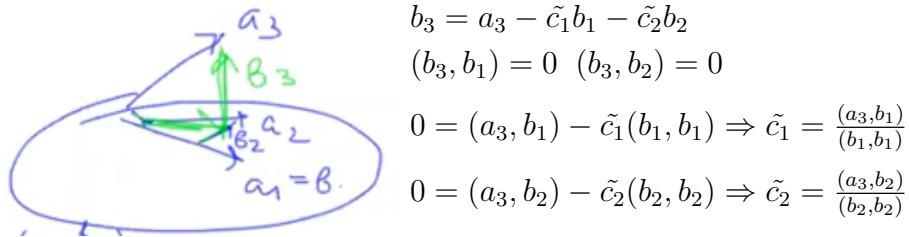
$a_1 \ a_2 \ a_3$



$$b_2 = a_2 - c_1 b_1$$

$$b_2 \perp b_1$$

$$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) - c_1 (b_1, b_1) \Rightarrow c_1 = \frac{(a_1, b_1)}{(b_1, b_1)}$$



Теперь для  $k$ -мерного случая.

$a_1 \dots a_{k-1} \rightsquigarrow b_1 \dots b_{k-1}$  попарно ортог.

$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i \quad c_i = ? \quad (b_k, b_i) = 0 \quad i = 1 \dots k-1$$

$$(b_k, b_j) = (a_k, b_j) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i (b_i, b_j) = (a_k, b_j) - c_j (b_j, b_j)$$

$$\Rightarrow c_j = \frac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)} \quad j = 1 \dots k-1$$

$$\Rightarrow \text{span}(a_1 \dots a_k) = \text{span}(\underset{\text{попарно-ортог.}}{b_1 \dots b_k})$$

2.  $a_1 \dots a_m$  линейно зав.  $\rightsquigarrow \Gamma\text{-III}$  на каком-то этапе  $b_j = 0$

$\rightsquigarrow$  проредить  $a_1 \dots a_m \rightsquigarrow a_{i_1} \dots a_{i_k} \rightsquigarrow \Gamma\text{-III}$ .  
лин. независ.

**Следствие 1.** В  $\forall$  евкл. (унит.) пространстве  $\exists$  О.Н.Б. (ортого-нормир. базис)

*Доказательство.* Упр.

**Следствие 2.**  $\forall$  лин. независ. систему векторов евкл. (унит.) про-ва можно дополнить до о.н.б.

*Доказательство.* Упр.

**Примеры.**

1.  $f : [a, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$f - 2\pi$  период.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) \bar{g}(x) dx$$

(a)  $\mathbb{R}$

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \quad ([0, 2\pi])$$

попарно-ортог. вещ.

$$(\cos kx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(m+k)x + \sin(m-k)x) dx = 0$$

$$(\sin kx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m+k)x - \cos(m-k)x) dx = 0$$

И т.д.

$$\left\| \cos kx \right\|_{k \neq 0} = \sqrt{(\cos kx, \cos kx)} = \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$\|1\| = \sqrt{(1, 1)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi}$$

(b)  $\mathbb{C} \setminus \{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$  попарно-ортог.

$$(e^{ikx}, e^{imx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx =$$

$$\begin{aligned} &= \left. \frac{1}{i(k-m)} e^{i(k-m)x} \right|_0^{2\pi} = 0 \\ &= \left\| e^{ikx} \right\|^2 = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi \\ &\|e^{ikx}\| = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

2.  $P_n$  многочлены  $\deg \leq n \subset L^2([-1, 1])$

$$\forall p, q \in P_n \quad (p, q) = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx \quad P_n = \text{span} 1, x, x^2, \dots, x^n \text{ канон. базис}$$

$$(x^k, x^m) = \int_{-1}^1 x^{k+m} dx \begin{cases} \neq 0 & k+m - \text{четн} \\ = 0 & k+m - \text{нечетн.} \end{cases}$$

$1, x, x^2, \dots, x^n$  Ортогонализуем Г-III

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 & (b_1, b_1) &= \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx = 2 \\ b_2 &= a_2 - c_1 b_1 & c_1 &= \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \quad (a_2, b_1) = \int_{-1}^1 x \cdot 1 dx = 0 \\ && \tilde{c}_1 &= \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} \quad (b_1, b_2) = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\ b_3 &= a_3 - \tilde{c}_1 b_1 - \tilde{c}_2 b_2 & (a_3, b_1) &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx = \frac{2}{3} \\ && \tilde{c}_2 &= \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} \quad (a_3, b_2) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^2 dx = 0 \end{aligned}$$

$$b_3 = x^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$b_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$P_n = \text{span}(1, x, \dots, x^n) \underset{\text{Г-III}}{\leadsto} l_0(x) = 1 \quad l_1(x) = x \quad l_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \quad l_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \dots$$

Полиномы Лежандра

н.у.о.  $\rightarrow l_k(x) = \lambda_k((x^2 - 1)^k)^{(k)}$  Общая ормула полиномов Лежандра с точностью до const

Доказательство.  $q_k(x) = ((x^2 - 1)^k)^{(k)}$   $\deg q_k = k$

$$\forall m = 0, \dots, k-1 \quad (q_k, x^m) = \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k)} x^m dx = \int_{-1}^1 x^m d((x^2 - 1)^k)^{(k-1)}$$

$$\boxed{f' dx = df}$$

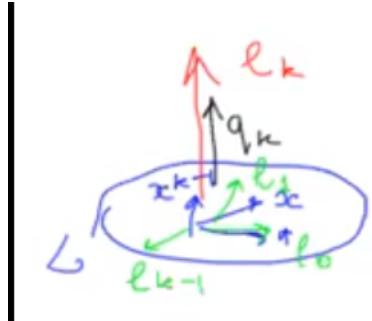
$$\begin{aligned} &= x^m \left( \frac{(x^2 - 1)^k}{(x-1)^k (x+1)^k} \right)^{(k-1)} \Big|_1^1 - \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k-1)} \underbrace{dx^m}_{mx^{m-1} dx} = -m \int_{-1}^1 x^{m-1} d((x^2 - 1)^k)^{(k-2)} = \dots \\ &= \frac{(x^2 - 1)^k}{(x-1)^k (x+1)^k} \Big|_1^1 - \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k-1)} mx^{m-1} dx \end{aligned}$$

$$= \pm m! \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k-m)} dx = \pm m! ((x^2 - 1)^k)^{(k-m-1)} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$L = \text{span}(1, \dots, x^{k-1})$$

$$q_k \perp L$$

$$\deg q_k = k \quad \text{span}(q_0, q_1, \dots, q_k) = \text{span}(1, x, \dots, x^k)$$



$$\Rightarrow \lambda_k q_k = l_k(x)$$

$$q_k(1) = \left. \left( \frac{(x^2 - 1)^k}{(x-1)^k (x+1)^k} \right)^{(k)} \right|_{x=1} = \sum_{m=0}^k C_k^m ((x+1)^k)^{(m)} ((x-1)^k)^{(k-m)} \Big|_{x=1} =$$

Применили формулу Лейбница для взятия производной

$$= (x+1)^k ((x-1)^k)^{(k)} \Big|_{x=1} = 2^k k!$$

$$\boxed{l_k(x) = \frac{1}{2^k k!} ((x^2 - 1)^k)^{(k)} \\ l_k(1) = 1}$$

**Формула Родрига** для полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} \|l_k\|^2 &= \int_{-1}^1 \underbrace{\left(\frac{1}{2^k k!}\right)^2 ((x^2 - 1)^k)^{(k)}}_A \underbrace{((x^2 - 1)^k)^{(k)}}_{d((x^2 - 1)^k)^{(k-1)}} dx = \\ &= A((x^2 - 1)^k)^{(k)} ((x^2 - 1)^k)^{(k-1)} \Big|_{-1}^1 - A \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^k)^{(k-1)} \underbrace{d((x^2 - 1)^k)^{(k)}}_{((x^2 - 1)^k)^{(k+1)} dx} = \\ &= (-1)^k A \int_{-1}^1 \underbrace{((x^2 - 1)^k)^{(2k)}}_{(2k)!} (x^2 - 1)^k dx = (-1)^k A(2k)! \cdot 2 \int_0^1 \frac{(x^2 - 1)^k}{(-1)^k (1-x^2)^k} dx = \\ &= x = \sin t \quad \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (k!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt = \\ &dx = \cos t dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2^k k!}{(2k+1)!!}$$

$$= \frac{(2k)!2^k \cdot k!}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+1)!!} = \frac{(2k)!2}{\underbrace{2^k k!(2k+1)!!}_{(2k+1)!}} = \frac{2}{2k+1}$$

$$\|l_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{k!2^k} ((x^2 - 1)^k)^{(k)} \text{ Нормиров. система полиномов Лежандра}}$$

3.  $L^2([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$  Скалярное произведение с весом

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f \cdot g \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Многочлены Чебышёва  $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)$   $k = 0, 1, 2 \dots$   
ортогон. система

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x \quad T_2 = 2x^2 - 1$$

$$(T_k, T_m) = 0 \quad k \neq 0$$

$$\deg T_k = k$$

4.  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$

Многочлены Эрмита  $H_k(x) = e^{x^2} (e^{-x^2})^{(k)}$   $k = 0, 1, 2 \dots$   
ортог. система

$$\deg H_k = k$$

$$(H_k, H_m) = 0 \quad k \neq m$$

$$H_0 = 1 \quad H_1 = -2x \quad H_2 = 4x^2 - 2 \dots$$

### 9.3 Матрица Грама. Объем к-мерного паралл-да. Ортогональная и унитарная матрица

$(V, (\cdot, \cdot))$  евклид. (унит.)

$$\forall x \in V \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x = \sum_i^n x_i e_i$$

$e_1 \dots e_n$  базис

$$\forall y \in V \leftrightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad y = \sum_i^n y_i e_i$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j (e_i, e_j)$$

**Определение 1.**  $\Gamma = (g_{ij})_{n \times n}$   $g_{ij} = (e_i, e_j)$

Матрица Грама  $\boxed{(x, y) = x^T \Gamma \bar{y}}$

Замечание.

1. евкл.  $y = \bar{y}$

2.  $e_1 \dots e_n$  попарно-ортог.  $\Gamma = diag(\|e_1\|^2 \dots \|e_n\|^2)$   
 $(e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j \quad (e_i, e_i) = \|e_i\|^2$

3.  $e_1 \dots e_n$  о.н.б.  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$   $\Gamma = E \rightsquigarrow (x, y) = x^T \bar{y} (x^T y)$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

**Определение 2.**  $a_1 \dots a_k$  ;  $G(a_1 \dots a_k)$  =  $((a_i, a_j))_{k \times k}$  ( $\Gamma = G(e_1 \dots e_n)$ )  
матрица Грама системы векторов  $a_1 \dots a_n$

$$g(a_1 \dots a_k) = \det G(a_1 \dots a_k)$$

**Определение 3.**  $A_{k \times k}$   $A^*$  называется сопряженной к  $A$ :  $A^* = \overline{A^T}$

$A$  называется самосопряж., если  $A^* = A$

$\mathbb{R}: A^T = A$  ( $A$  симметр.)

$\mathbb{C}: \overline{A^T} = A$  ( $A$  эрмитова)

$$G^* = G \quad ((a_i, a_j) = \overline{(a_j, a_i)})$$

Матрица Грама самосопряжена.

**Теорема 1** (об  $\det G$ ).

$$a_1 \dots a_k \underset{\Gamma\text{-III}}{\sim} b_1 \dots b_k$$

$$\Rightarrow g(a_1 \dots a_k) = g(b_1 \dots b_k) = \|b_1\|^2 \|b_2\|^2 \dots \|b_k\|^2$$

Доказательство.

$$g(a_1 \dots a_k) = \det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, a_3) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, a_3) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & & & & \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{из 2 стр. вычтем 1 стр., умноженн. на} \\ \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \\ a_1 = b_1 \end{array}$$

$$b_1 = a_1$$

$$b_m = a_m - \sum_{i=1}^{m-1} c_i b_i \quad c_i = \frac{(a_m, b_i)}{(b_i, b_i)}$$

$$(b_m, a_j) = (a_m, a_j) - \sum_{i=1}^{m-1} c_i (b_i, a_j)$$

$$(a_j, b_m) = (a_j, b_m) - \sum_{i=1}^{m-1} c_i (a_j, b_i)$$

$$(b_m, b_m) = (a_m, b_m) = (b_m, a_m)$$

$$= \det \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, a_2) & (b_1, a_3) & \dots & (b_1, a_k) \\ (b_2, b_1) & (b_2, a_2) & (b_2, a_2) & \dots & (b_2, a_k) \\ (a_3, b_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) & \dots & \\ \dots & & & & \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{To же для столбцов} \\ \text{вычтем из 2 столбц. 1 стол., умнож. на} \\ \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \dots & (b_1, a_k) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) & \dots & (b_2, a_k) \\ \vdots & \vdots & & \\ (a_k, b_1) & (a_k, b_2) & \dots & \dots \end{pmatrix} = \dots = \det \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & (b_k, b_k) & \end{pmatrix}$$

**Следствие 1.**  $a_1 \dots a_k$  линейно независима  $\Leftrightarrow f(a_1 \dots a_k) > 0$

*Доказательство.*  $a_1 \dots a_k$  лин. завис.  $\Leftrightarrow$  среди  $b_i$  есть нулевой  $\Rightarrow \|b_{i_0}\| = 0 \Rightarrow g(a_1 \dots a_k) = 0$

$$\left( \begin{array}{c} g(a_1 \dots a_k) \geq 0 \\ \forall a_1 \dots a_k \end{array} \right)$$

**Следствие 2.**  $a_1 \dots a_{k-1}$  лин. незав.  $a_1 \dots a_k \underset{\Gamma-III}{\sim} b_1 \dots b_k$

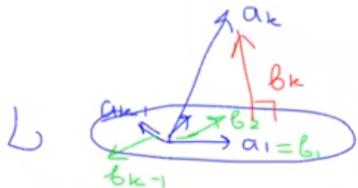
$$\|b_k\|^2 = \frac{g(a_1 \dots a_k)}{g(a_1 \dots a_{k-1})}$$

*Доказательство.*  $a_1 \dots a_{k-1} \underset{\Gamma-III}{\sim} b_1 \dots b_{k-1}$

$$g(a_1 \dots a_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} \|b_i\|^2 > 0$$

$$g(a_1 \dots a_k) = \prod_{i=1}^k \|b_i\|^2$$

*Замечание.*  $L = \text{span}(a_1 \dots a_{k-1}) = \text{span}(b_1 \dots b_{k-1})$   
лини. незав.



$$a_k = y + b_k \leftarrow \text{ортогон. составляющая } a_k \text{ относительно } L$$

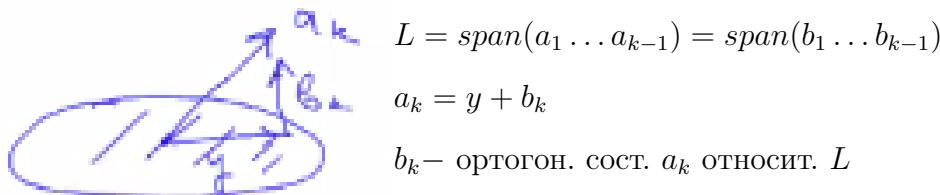
$$b_k \perp n_i \Rightarrow [b_k \perp L]$$

$$b_k = a_k - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i}_{y \in L}$$

$$G(A_1 \dots a_k) = ((a_i, a_j))_{k \times k}$$

$$g(a_1 \dots a_k) = \det G = \|b_1\|^2 \dots \|b_k\|^2$$

$$a_1 \dots a_k \underset{\Gamma-III}{\sim} b_1 - b_k \text{ попарно-ортог}$$



**Определение 4.**  $(V, (\cdot, \cdot))$   $a_1 \dots a_k \in V \quad 1 \leq k \leq n$

$$\prod(a_1 \dots a_k) = \{x \in V | x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \quad \alpha_i \in [0, 1] \}_{\forall i=1,k}$$

$k$ -мерный параллелепипед, построенный на векторах  $a_1 \dots a_k$

$$V = V_3 \cong \mathbb{R}^3$$

$k = 1 \quad x = \alpha_1 a_1 \quad \alpha_1 \in [0, 1] \quad 0 \longrightarrow a_1$  отрезок

$$k = 2 \quad \begin{array}{c} \text{диаграмма} \\ \text{параллелограмм} \end{array}$$

$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$   
 $\alpha_{1,2} \in [0, 1]$

$$k = 3 \quad \begin{array}{c} \text{диаграмма} \\ \text{параллелипед} \end{array}$$

$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$   
 $\alpha_i \in [0, 1]$

**Определение 5.**  $V(\prod(a_1 \dots a_k)) = (g(a_1 \dots a_k))^{1/2}$  объем  $k$ -мерного пар-да

$$\boxed{V(\prod(a_1 \dots a_k)) = V(\prod(a_1 \dots a_{k-1})) \cdot \|b_k\|} \quad \text{см. следствие к т-му о } \det G$$

$a_1 \dots a_k \underset{\Gamma-\text{III}}{\sim} b_1 \dots b_k$

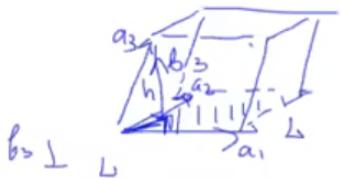
1.  $k = 1 \quad V(\longrightarrow a_1) = \sqrt{g(a_1)} = \sqrt{(a_1, a_1)} = \|a_1\|$  — длина отрезка

$$2. \ k = 2 \quad V(\begin{array}{c} a_2 \\ \diagdown \\ a_1 \end{array}) = \sqrt{g(a_1, a_2)} = \sqrt{g(a_1)} \cdot \|b_2\| = \|a_1\| \cdot \|b_2\| = \frac{\|b_1\| \cdot \|b_k\|}{\text{основание высота}} = S$$

площадь пар.

$$3. \ k = 3 \quad V(\begin{array}{c} a_3 \\ \diagdown \\ a_1 \end{array}) = \sqrt{g(a_1, a_2, a_3)} = \frac{\|b_1\| \|b_2\|}{\|b_3\|} = V_{\text{пар-да}}$$

$S$  основания  $h$  высота



$a_1 \dots a_k$  линейно зав.  $\Leftrightarrow g(a_1 \dots a_k) = 0$

$k = 2 \quad a_1, a_2$  коллин.  $\Leftrightarrow S_{\text{пар.}} = 0$

$k = 3 \quad a_1 a_2 a_3$  компл.  $\Leftrightarrow V = 0$

$$\exists e_1 \dots e_n \text{ базис } V \quad \Gamma = ((e_i, e_j)) = G(e_1 \dots e_n)$$

### Свойства $\Gamma$

1.  $\Gamma^* = \Gamma$  (самосопряженность)
2.  $\forall x \neq 0 \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \lambda_{=(x,x)}^T \Gamma \bar{x} > 0$

Эти 2 свойства  $\boxed{\Gamma > 0}$  Положительно определенная матрица

3.  $\Delta_k = g(e_1 \dots e_k)$  угловые миноры матрицы  $\Gamma$

$$\Gamma = \left( \begin{array}{c|c|c|c} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) & \dots \\ \hline (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) & \dots \\ \hline (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) & \dots \\ \hline & \dots & & \end{array} \right) \quad \boxed{\forall k = 1 \dots n \quad \Delta_k > 0}$$

*Доказательство.* Из следствия 1  $a_1 \dots a_k$  лин. независ.  $\Leftrightarrow g(a_1 \dots a_k) > 0$

$e_1 \dots e_k$  лин. независ.  $\forall k = 1 \dots n$  ■

В частности  $\Delta_n = \det \Gamma > 0 \Rightarrow \Gamma$  невырождена

4.  $e_1 \dots e_n$  базисы  $V$   $\boxed{T = T_{e \rightarrow e'}} \quad \Gamma = ((e_i, e_j)) \quad \Gamma' = ((e'_i, e'_j))$

*Доказательство.*

$x \leftrightarrow x'$  в базисе  $e$

$\leftrightarrow x'$  в базисе  $e'$   $x = Tx'$

$$(x, y) = x^T \Gamma \bar{y} = (x')^T T^T \Gamma \bar{T} \bar{y}'$$

||

$$(x')^T \Gamma' \bar{y}'$$

$$\forall x, y \quad x = e'_i \quad y = e'_j$$

$$\boxed{\Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}}$$

В частности,  $e$  и  $e'$  о.н.б.  $V \quad \Gamma = \Gamma' = E$

$$E = T^T \bar{T} \Rightarrow \underbrace{\bar{T}^T}_{T^*} T = E \quad \boxed{T^* T = E}$$

$$\boxed{e, e' \text{ о.н.б.} \Rightarrow T = T_{e \rightarrow e'} \text{ унитарн.(ортог.)}}$$

**Определение 6.** Невырожд. комплекснозн. (веществ) матрица  $Q_{n \times n}$  называется унитарной (ортогональной), если  $Q^* = Q^{-1} (\Leftrightarrow Q^* Q = Q Q^* = E)$

### Свойства унитарной (ортог.) матрицы

1.  $Q$  унитарн. (ортог.)  $\Leftrightarrow$  стр. (столб) попарно-ортагон. (в смысле станд. скал. проя)  
в пр-ве  $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$   $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

*Доказательство.*  $Q = (Q_1 \dots Q_n)$  столбцы

$$Q \text{ унит. (ортог.)} \Leftrightarrow Q^* = Q^{-1} \Leftrightarrow Q^* = \overline{Q^T} = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix}$$

$$Q^*Q = E$$

$$E = Q^*Q = \begin{pmatrix} \overline{Q}_1^T Q_1 & \overline{Q}_1^T Q_2 & \overline{Q}_1^T Q_n \\ \dots & & \\ \overline{Q}_n^T Q_1 & \overline{Q}_n^T Q_2 & \overline{Q}_n^T Q_n \end{pmatrix} = ((\overline{Q}_i, \overline{Q}_j)) \leftrightarrow (Q_i, Q_j) = \delta_{ij} \text{ аналогично для строк}$$

■

$$2. |det Q| = 1$$

$$det(Q^*)$$

$$\text{Доказательство. } 1 = det E = det(Q^*Q) = \frac{det(Q^*)}{det(Q)} \cdot det Q = \overline{det Q} \cdot det Q = |det Q|^2$$

■

$$\boxed{\text{евкл.: } Q_{\text{ортогон.}} \rightarrow det Q = \pm 1}$$

$$3. Q^{-1} - \text{унитарн.(ортогон.)}$$

$$\text{Доказательство. } (Q^{-1})^* = \overline{(Q^{-1})^T} = (\overline{Q^T})^{-1} = (Q^*)^{-1} = Q = (Q^{-1})^{-1}$$

■

$$4. Q, R \text{ унитарн.(ортог.)} \Rightarrow QR \text{ унит. (ортогон.)}$$

$$\text{Доказательство. } (QR)^* = (\overline{QR})^T = \overline{R^T Q^T} = R^* Q^* = R^{-1} Q^{-1} = (QR)^{-1}$$

■

$$5. \begin{matrix} e, e' \text{ о.н.б.} \\ T = T_{e \rightarrow e'} \end{matrix} \Rightarrow T - \text{унитарн.(ортог.) матрица.}$$

**Примеры.** Матрицы поворота на плоскости или в пространстве

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ ортогональна.}$$

## 9.4 Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Теорема Пифагора. Теорема о наилучшем приближении. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя.

**Определение 1.**  $L \subset V$   $\underset{\text{лин. подпр.}}{L^\perp} = \{y \in V \mid \forall x \in L : (x, y) = 0\}$   
– ортогональное дополнение подпр-ва  $L$

**Свойства  $L^\perp$**

$$1. L^\perp \text{ линейное подпр-во}$$

*Доказательство.*  $\forall \lambda \in K, \forall u, v \in L^\perp : \forall x \in L : (x, u) = 0, (x, v) = 0$

$$(x, u + \lambda v) = (x, u) + \lambda (x, v) = 0 \Rightarrow u + \lambda v \in L^\perp$$

■

$$2. \boxed{V = L \bigoplus L^\perp}$$

*Доказательство.*  $L = \text{span} \underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{лин. незав. н.у.о. попарно ортогон. (Г-III)}} \quad (a_1 \dots a_k)$

$$a_1 \dots a_k \underbrace{a_{k+1} \dots a_n}_{\text{лин. незав. н.у.о. попарно ортогон. (Г-III)}}$$

дополним до базиса  $V$  н.у.о. попарно ортогон. (Г-III)

$$L^{\perp?} = \text{span}(a_{k+1} \dots a_n) \quad V = L \bigoplus L^{\perp}$$

$$\forall x \in L : \quad x = \sum_{i=1}^k c_i a_i$$

$$\forall y \in L^{\perp} : \quad y = \sum_{j=k+1}^n c_j a_j$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n c_i \bar{c}_j (a_i, a_j) = 0 \Rightarrow L^{\perp} - \text{ортогон. дополн. } L$$

■

$$3. \quad (L^{\perp})^{\perp} = L$$

*Доказательство.*  $\forall x \in L \quad \forall y \in L^{\perp} : (x, y) = 0$

$$\Rightarrow L \subset (L^{\perp})^{\perp}$$

$$(L^{\perp})^{\perp} \oplus L^{\perp} = V = L \oplus L^{\perp}$$

$$\Rightarrow \dim(L^{\perp})^{\perp} = \dim L \Rightarrow L = (L^{\perp})^{\perp}$$

■

$$4. \quad (L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$$

$$(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$$

Похоже на правило Де Моргана, но не то же самое

*Доказательство.*  $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

$$\begin{aligned} \forall x \in L_1 + L_2 & \quad (x, y) = 0 \\ \parallel & \quad \forall y \in (L_1 + L_2)^{\perp} \quad || \\ l_1 + l_2 & \quad (l_1, y) + (l_2, y) \\ \in L_1 \in L_2 & \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \exists l_2 = 0 \quad (l_1, y) = 0 \Rightarrow y \in L_1^{\perp} \\ \forall l_1 \in L_1 \quad (l_2, y) = 0 \Rightarrow L_2^{\perp} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$$

$$\Rightarrow \boxed{(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}}$$

$$\underline{\text{Обратно:}} \quad \exists y \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} \forall l_1 \in L_1 \quad (l_1, y) = 0 \\ \forall l_2 \in L_2 \quad (l_2, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x = l_1 + l_2 \in L_1 + L_2 \\ (x, y) = (l_1, y) + (l_2, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y \in (L_1 + L_2)^{\perp} \Rightarrow \boxed{L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \subset (L_1 + L_2)^{\perp}} \Rightarrow (L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$$

$$(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$$

$$(L_1^{\perp} + L_2^{\perp})^{\perp} \underset{\text{по доказ-му}}{=} (L_1^{\perp})^{\perp} \cap (L_2^{\perp})^{\perp} \underset{\text{св-во 3}}{=} L_1 \cap L_2$$

$$\text{св-во 3} \quad L_1^{\perp} + L_2^{\perp} = (L_1 \cap L_2)^{\perp}$$

■

$$5. \quad V^{\perp} = \emptyset$$

$$\emptyset^{\perp} = V$$

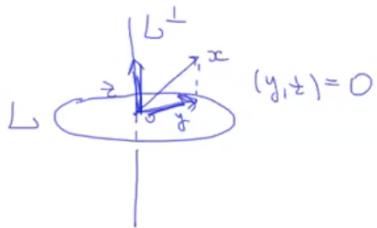
**Определение 2.**  $\forall x \in V \exists! y \in L, \exists! z \in L^\perp : [x = y + z]$

из сб-ва 2

$y$  – ортогон. проекция  $x$  на лин. подпр-во  $L$

$z$  – ортогон. составл.  $x$  относительно  $L$  – перпендикуляр, опущенный из  $x$  на  $L$

$$(x, y) = 0$$



**Задача о перпендикуляре  $z = ?$**

$$L = \text{span}(\underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{лин. независ.}}) \quad x \in V \quad x = y + z \quad y \in L \quad z \in L^\perp \quad z = ?$$

$$y \in L \quad y = \sum_{i=1}^k c_i a_i$$

$$x = \sum_{i=1}^k c_i a_i + z \quad | \cdot a_j$$

$$\forall j = 1 \dots k \quad (x, a_j) = \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j) + (z, a_j) \underset{=0}{\in} L \underset{z \in L^\perp}{=} \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j) \quad c_i = ?$$

СЛНУ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_2, a_1) \dots \\ (a_1, a_2) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}}_{G^T(a_1 \dots a_k)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix}$$

$$\det G > 0 \rightarrow \exists! \text{ реш-е } c_1 \dots c_k$$

$$\rightsquigarrow y = \sum_{i=1}^k c_i a_i \rightsquigarrow z = x - y.$$

**Примеры.**  $L = \text{span}(a_1 a_2 a_3)$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad z = ?$$

$$a_3 = 2a_1 - a_2 \quad L = \text{span}(a_1, a_2)$$

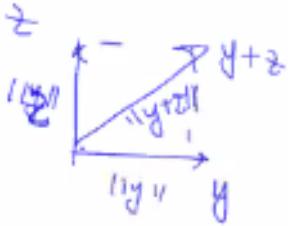
$$\underset{\text{всп.}}{G^T} = G = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad (x, a_1) = 4 \quad (x, a_2) = -8 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & | & 4 \\ 4 & 10 & | & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 6 & | & -12 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 3 \quad c_2 = -2$$

$$y = 3a_1 - 2a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad z = x - y = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (y, z) = 0$$

**Теорема 1** (Пифагора).

$$\forall y, z \in V \quad (y, z) = 0 \Rightarrow \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$



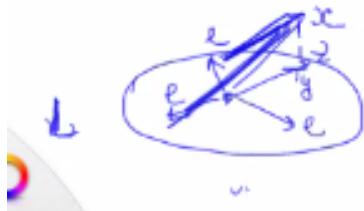
$$\text{Доказательство. } \|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + (y, z) + (z, y) + (z, z) \\ = \|y\|^2 + 0 + 0 + \|z\|^2$$

$$\text{Следствие 1. } x_1 \dots x_k \text{ попарно-ортог. } \Rightarrow \|x_1 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2$$

*Доказательство.* М.М.И. (упр.)

**Теорема 2** (О наилучш. приближении).

$$V = L \oplus L^\perp \quad : x = \underbrace{y}_{\in L} + \underbrace{z}_{\in L^\perp} \Rightarrow \forall l \in L \quad \frac{\|x - y\|}{\|z\|} < \|x - e\|$$



длина любой наклонной больше, чем длина перпендикуляра

$$\text{Доказательство. } \exists l \in L \quad l \neq y \quad \|x - l\|^2 = \underbrace{\|x - y\|^2}_{=z \in L^\perp} + \underbrace{\|y - l\|^2}_{\in L} \stackrel{\text{по т. Пифагора}}{=} \|x - y\|^2 + \|y - l\|^2$$

$$\Rightarrow \|x - l\|^2 > \|x - y\|^2 \Rightarrow \text{все.}$$

$$\text{Определение 3. } dist(x, L) = \min_{l \in L} \|x - l\| = \underset{\text{расстояние от } x \text{ до } L}{\|x - y\|} = \|z\|$$

**Теорема 3** (о расстоянии до линейного подпространства).  $L = \text{span}(a_1 \dots a_k)$ ,  $x = y + z$ ,  $y \in L$ ,  $z \in L^\perp$

$$L^\perp \Rightarrow dist^2(x, L) = \|z\|^2 = \frac{g(a_1 \dots a_k, x)}{g(a_1 \dots a_k)} \neq 0$$

$$\text{Доказательство. } \underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{лин. нез.}} x \xrightarrow{\Gamma-\text{III}} b_1 \dots b_k b_{k+1} \quad \text{span}(a_1 \dots a_k) = \text{span}(b_1 \dots b_k)$$

$$b_{k+1} = x - \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i b_i}_{\substack{|| \\ y \in L}} \Rightarrow b_{k+1} = x - y = z \xrightarrow[\text{T-ма о det матрицы } G(\text{следствие})]{} \|b_{k+1}\|^2 = \|z\| = \frac{g(a_1 \dots a_k, x)}{g(a_1 \dots a_k)}$$

■

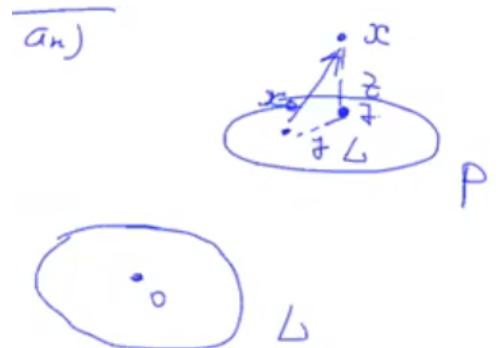
Упражнения:

1.  $P = x_0 + L$  линейное многообразие

$$dist(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| \xrightarrow{\text{доказать}} \|z\| = \sqrt{\frac{g(a_1 \dots a_k, x - x_0)}{g(a_1 \dots a_k)}}$$

$$L = \text{span}(a_1 \dots a_k)$$

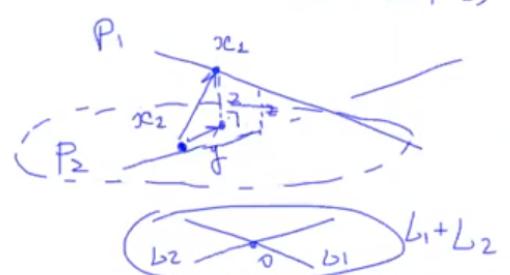
$$x - x_0 = \underset{\in L}{y} + z$$



2.  $P_1, P_2 \quad P_i = x_i + L_i \quad i = 1, 2$

$$dist(P_1, P_2) = \min_{\substack{u_1 \in P_1 \\ u_2 \in P_2}} \|u_1 - u_2\| \xrightarrow{\text{доказать}} \|z\|$$

$$x_2 - x_1 = \underset{\in L_1 + L_2}{y} + \underset{\in (L_1 + L_2)^\perp}{z}$$



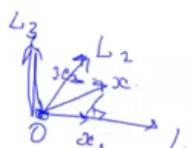
**Определение 4.**  $L_1 \dots L_k \subset V$  называются парно-ортого.  
если  $\forall x_i \in L_i \quad \forall x_j \in L_j \quad (x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j$

Очевидно,  $L_1 \dots L_k$  дизъюнктны.

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=1}^k x_i, x_j) = 0 \\ & x_1 + \dots + x_k = \emptyset \quad | \cdot x_j \quad j = 1 \dots k \quad || \\ & \sum_{i=1}^k (x_i, x_j) = (x_j, x_j) = 0 \Leftrightarrow x_j = \emptyset \end{aligned}$$

**Определение 5.**  $L_1 \dots L_k$  парно ортого.  $V = \bigoplus_{i=1}^k L_i$   $\mathcal{P}_i : V \rightarrow L_i$  операторы ортогонального проектирования

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i x \quad (\text{однозн. предст.})$$

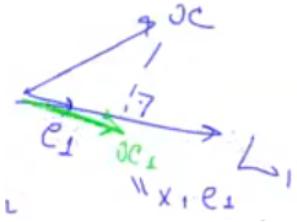


$x_i = \mathcal{P}_i x$  — ортогр. проекция  $x$  на подпространство  $L_i$

$$(x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j \Rightarrow \text{по т-ме Пифагора} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2$$

$e_1 \dots e_n$  ортогональный базис.  $L_i = \text{span}(e_i)$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n L_i \quad \forall x \in V : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ & \text{ортог. проекция на } e_i - \text{вектор} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & x_i - \text{координата относительно } e_i, \\ & \text{проекция элемента } x \text{ на } e_i \end{aligned}$$



$$\forall j = 1 \dots n \quad (x, e_j) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, e_j) = x_j (e_j, e_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_j = \frac{(x, e_j)}{(e_j, e_j)}} \quad \text{коэффициенты Фурье вектора } x \text{ относительно базиса } e \text{ (ортогон.)}$$

$x \overset{?}{\leftrightarrow} \sum x_j e_j$  – в бесконечномерных пространствах не все так просто, но мы этим и не занимаемся.  
 $x = \sum x_j e_j$

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \|e_i\|^2} \quad \text{Tождество Парсеваля}$$

$$\boxed{1 \leq k \leq n \quad \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2} \quad \text{Неравенство Бесселя}$$

"Квадрат длины вектора не меньше суммы квадратов длины его проекций"

$$e_1 \dots e_n \text{ о.н.б. } V \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

– коэффициенты  $x$  относительно  $e$

$$\boxed{x_i = (x, e_i)} \quad \begin{aligned} & \text{коэффициенты Фурье} \\ & \text{– проекция на } e_i \end{aligned}$$

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{– тождество Парсеваля} \quad \sum_i^k |x_i|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{– неравенство.}$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^k L_i \quad L_i \text{ попарно-ортогональны} \quad \mathcal{P}_i : V \rightarrow L_i$$

$$V = \text{span}(\underbrace{e_1}_{L_1}, \dots, \underbrace{e_n}_{L_k}) \text{ о.н.б.}$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad \boxed{x_i = \mathcal{P}_i x = \sum_{e_j \in L_i} (x, e_j) e_j}$$

## 9.5 Изометрия унитарных (евклидовых) пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидового пространства и сопряженного к нему.

**Определение 1.** Изометрией называется изоморфизм линейных пространств с сохранением скалярного (псевдоскалярного) произведения.

$$(V, (\cdot, \cdot)_V) \quad (V', (\cdot, \cdot)_{V^*}) \text{ унит. (евкл.)} \quad V \cong V^*$$

$$\begin{array}{ccc} x, y & \in V \\ \forall \downarrow \quad \downarrow & & (x, y)_V = (x', y')_{V'} \\ x', y & \in V' \end{array}$$

Очевидно, при изометрии сохраняется расстояние:

$$\|x - y\|_V^2 = (x - y, x - y)_V = (x' - y', x' - y')_{V'} = \|x - y\|_{V'}^2$$

"Изометрия  $\equiv$  сохраняет метрику"

**Теорема 1** (об изометрии).

Любые 2 унитарных (евкл.) пространства одной размерности изометричны.

*Доказательство.*  $\forall$  2 лин. пространства одной размерности изоморфны  $V \cong V'$

$$\begin{array}{ccc} e_1 \dots e_n & V \\ \text{базис о.н.б.} & \sum_{i \in V} x_i e_i \leftrightarrow \sum_{i \in V'} x'_i e'_i \\ \text{См. 1 семестр.} & e'_1 \dots e'_n & V' \\ & \text{было доказано, что это изоморфизм} \\ & \text{базис о.н.б.} \end{array}$$

$$(x, y)_V = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = (x', y')_{V'} \Rightarrow \text{изометричны.}$$

$$(V, (\cdot, \cdot)) \quad V^* - \text{сопряженное к } V$$

$$\text{Фиксируем } y \in V \Rightarrow \forall x \in V \quad f(x) := (x, y) \quad \begin{array}{c} f : V \rightarrow K \\ \text{линейное отображение} \end{array} \Rightarrow f \in V^*$$

$$\boxed{\forall y \in V \rightsquigarrow f \in V^* \\ \rightsquigarrow ?}$$

**Теорема 2** (Рисса  $(V(\cdot, \cdot))$ ).

$$\forall f \in V^* \exists! y \in V : \forall x \in V f(x) = (x, y) \quad y - \text{присоединенный вектор к } f$$

**Теорема 3.**

**Единственность:**  $\exists y' : f(x) = (x, y) \forall x \in V$

$$\Rightarrow \{\forall x \in V \quad 0 = f(x) - f(x) = (x, y) - (x, y') = (x, y - y')\} \Leftrightarrow y - y' = 0 \Leftrightarrow y = y'$$

$$\text{Существование: } \exists e_1 \dots e_n \text{ о.н.б. } V \quad f \in V^* \quad \forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \quad y_i = \overline{f(e_i)} \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{скл. (псевдоск.) про. в о.н.б.}}}{=} (x, y)$$

$$V \leftrightarrow V^*$$

те-ма Рисса

будет ли изоморфизм? Будет ли изометрия?

$V \xleftrightarrow[\text{т-ма Рисса}]{} \begin{array}{l} \text{изоморфизм, если } V \text{ евклидово пространство,} \\ \text{не изоморфизм, если } V \text{ унитарное пространство.} \end{array}$

Изоморфизм именно в смысле теоремы Рисса!

$$y_1, y_2 \in V \xleftrightarrow[\text{т-ма Рисса}]{} f_1, f_2 \in V^* \quad f_i(x) = (x, y_i) \quad i = 1, 2$$

$$y_1 + \lambda y_2 \in V \rightsquigarrow (x, y_1 + \lambda y_2) = \underbrace{(x, y_1)}_{f_1(x)} + \overline{\lambda} \underbrace{(x, y_2)}_{f_2(x)}$$

$$y_1 + \lambda y_2 \rightsquigarrow f_1 + \overline{\lambda} f_2$$

$V$ евклидово пространство	$V \cong V^* \Leftrightarrow \begin{array}{c} y \in V \leftrightarrow f \in V^* \\ \forall x \in V : f(x) = (x, y) \end{array}$
Естественный изоморфизм	

$V^*$  дадим определение  $(f, g)_{V^*} := (y, z)$       1-4 скал. произведения вып.  $\Rightarrow$  Изометрия

$$V^* \ni f \leftrightarrow y \in V$$

$$V^* \ni g \leftrightarrow z \in V$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} V \cong V^* \\ (\cdot, \cdot) \quad (\cdot, \cdot)_{V^*} \end{array}}$$

$$e_1 \dots e_n \text{ о.н.б. } V \xleftrightarrow[\text{т-ма Рисса}]{} \omega^1 \dots \omega^n \text{ сопряженный базис } V^*$$

$$\text{Действительно, } \omega^i(x) = x^i = (x, e_i) \xleftrightarrow[\text{т-ма Рисса}]{} e_i \leftrightarrow \omega^i$$

## 9.6 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический тензор. Взаимные базисы. Операции поднятия и опускания индексов.

$V$  линейное вещ. про-во       $(\cdot, \cdot)$  скалярное про-е       $V$  евклидово пространство

$$e_1 \dots e_n \text{ базис} \quad \Gamma = G(e_1 \dots e_n) = ((e_i, e_j))_{n \times n} = (g_{ij})_{n \times n}$$

матрица Грама

$\Gamma \in T_{(2,0)} -$  метрический ковариантный тензор

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис.} \quad \Gamma' = ((e'_i, e'_j))_{n \times n} = (g'_{ij}) \quad T = T_{e \rightarrow e'} = (t^i_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma' = T^T \Gamma T \Leftrightarrow g'_{ij} = t^k_{ij} = t^k_i g_{kl} t^l_j = g_{kl} t^k_i t^l_j \Rightarrow \Gamma - (2,0) \text{ тензор.}$$

было док-во

**Утверждение.**  $\Gamma^{-1}$  тензор типа  $(0,2)$

*Доказательство.*  $\square \quad \Gamma^{-1} = (g^{ij})_{n \times n} \quad S = T^{-1} = (S^k_l)_{n \times n} \quad T_{e \rightarrow e'}$

$$(\Gamma^{-1})' = (g'^{ij})_{n \times n} \quad (\Gamma^{-1})' = (\Gamma')^{-1} = (T^T \Gamma T)^{-1} = T^{-1} \Gamma^{-1} (T^{-1})^T = S \Gamma^{-1} S^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'^{ij} = S^i_k g^{kl} S^j_l = g^{kl} S^i_k S^j_l \Rightarrow \Gamma^{-1} \text{ 2 контравариантный тензор.}$$

■

**Определение 1.**  $\Gamma^{-1}$  тензор типа  $(0,2)$  называется контравариантным метрическим тензором

**Свойства**  $\Gamma, \Gamma^{-1}$ :

- $g_{ij}g^{jk} = \delta_j^k = g_{ji}g^{kj}$  ( $\Gamma\Gamma^{-1} = E = \Gamma^{-1}\Gamma$ )
- $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$  симметрические тензоры ( $\Gamma = \Gamma^T \Rightarrow (\Gamma^{-1})^T = (\Gamma^T)^{-1} = \Gamma^{-1}$ )
- $\forall x, y \in V$   $(x, y) = g_{ij}x^i y^j$ , причем  $\begin{cases} g_{ij} x^i y^j > 0, & \text{если } x \neq 0 \\ & || \\ & (x, x) \end{cases}$

$G = (g_{ij})$  ковариантный метр. тензор

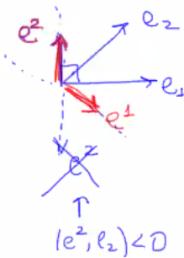
$G^{-1} = (g^{ij})$  контравариантный метр. тензор

**Определение 2.**  $e_1 \dots e_n$  базис  $V$  евклидово пространство.  $e^1 \dots e^n$  называется взаимным для базиса  $e_1 \dots e_n$ , если  $(e^i, e_j) = \delta_j^i = (e_j, e^i)$

$e_1 \dots e_n$  взаимный для базиса  $e^1 \dots e^n$

Взаимные базисы  $e_1 \dots e_n$  и  $e^1 \dots e^n$

**Примеры.**



$$(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \neq j \end{cases}$$

**Теорема 1.**  $\forall$  базиса  $e_1 \dots e_n$  пространства  $V$   $\exists!$  взаимный базис  $e^1 \dots e^n$

*Доказательство.*  $e_1 \dots e_n$

$$e^j = t_j^i e_i \quad t_j^i \leftrightarrow T_j \quad (e_i, e^j) = \delta_i^j \quad T_{e_i \rightarrow e^j} = (T_1 \dots T_j \dots T_n)$$

$$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \quad \delta_i^j = (e_i, e^j) = x^T \Gamma y \Leftrightarrow E = E \Gamma T \Leftrightarrow \begin{matrix} \Gamma T \\ \uparrow \\ T = \Gamma^{-1} \end{matrix} \Rightarrow \exists! \text{ взаимный базис } e^j \quad \blacksquare$$

**Следствие 1.**  $e_i, e^j$  взаимные базисы  $V$

$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \Rightarrow G(e^1 \dots e^n) = \Gamma^{-1}$ , при этом

$$\begin{cases} (e^1 \dots e^n) = (e_1 \dots e_n) \Gamma^{-1} \\ (e_1 \dots e_n) = (e^1 \dots e^n) \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^j = g^{ij} e_i = g^{ji} e_i \\ e_i = g_{ij} e^j = g_{ji} e^j \end{cases}$$

*Доказательство.*  $(e^j, e^i) = \left( \underset{x=T_i=(\Gamma^{-1})_i}{\overset{\uparrow}{e^i}}, \underset{y=T_j=(\Gamma^{-1})_j}{\overset{\uparrow}{e^j}} \right) = x^T \Gamma y = g^{ki} g_{km} g^{mj} =$   
скал. пр. в  $V$

$$= g^{ki} \delta_k^j = g^{ji} = g^{ij} \Rightarrow G(e^1 \dots e^n) = \Gamma^{-1}$$

$$g^{ki} \underbrace{g_{km} g_{mj}}_{\Gamma} =$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

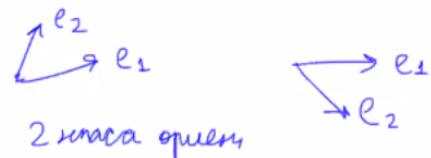
$$\kappa(\rightarrow)(\leftarrow) \quad \Gamma^{-1}$$

$$\underbrace{\Gamma \Gamma^{-1}}_{\text{E}}$$

**Отступление:**

$e_1 \dots e_n$  базисы  $V$   
 $e'_1 \dots e'_n$

Говорят, что базисы принадлежат одному классу ориентации, если  $\det T_{e \rightarrow e'} > 0$



В  $\mathbb{V}$  пространстве  $\exists$  2 класса ориентации на плоскости:

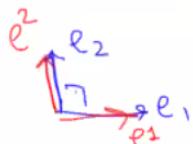
правая тройка  
в пространстве:  
левая тройка

В нашем случае, взаимные базисы всегда  $\in$  одному классу ориентации,

т.к.  $T_{e_i \rightarrow e^j} = \Gamma^{-1} = G(e^1 \dots e^n) > 0$

**Следствие 2.**  $e_1 \dots e_n$  о.н.б.  $V \Rightarrow e^i = e_i \quad \forall i = 1 \dots n$   
взаимные совпадают с исходными

*Доказательство.*  $e$  о.н.б.  $\Rightarrow G(e_1 \dots e_n) = E = \Gamma \Rightarrow \Gamma^{-1} = E = T_{e_i \rightarrow e^j} \Rightarrow e^i = e_i$



**Теорема 2.**

$V \cong V^*$  из Теоремы Рисса ( $\forall y \in V \leftrightarrow f \in V^* : \forall x \in V \quad f(x) = (x, y)$ )

$e_1 \dots e_n$  базис  $V$

$w^1 \dots w^n$  сопряженный базис  $V^*$

$V^* \ni \omega^i \underset{\text{изоморф.}}{\leftrightarrow} e^i \in V \Rightarrow e^i$  взаимные базисы к  $e_j$

*Доказательство.*  $\omega^i \xrightarrow{\text{T-ма Рисса}} e^i$

$\forall x \in V : \omega^i(x) = (x, e^i)$

$\forall e_j : \omega^i(e_j) = (e_j, e^i) \Rightarrow e^i$  взаимный к  $e_j$

$\delta_j^i$  т.к. сопряж. базисы

### Примеры.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{Найти взаимный базис!}$$

Координаты  $e_i$  заданы относительно о.н.б.  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i$

**1 сп.**  $\Gamma = G(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 65 & 18 & 23 \\ 18 & 38 & 53 \\ 23 & 53 & 74 \end{pmatrix}$

$$(e^1 e^2 e^3) = (e_1 e_2 e_3) \Gamma^{-1}$$

$$(e^1 e^2 e^3) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65 & 17 & 23 \\ 18 & 38 & 53 \\ 23 & 53 & 74 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -38 & 27 \\ -1 & 41 & -29 \\ 1 & -34 & 24 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -113 & 80 \\ -113 & 4201 & -3031 \\ 80 & -3031 & 2146 \end{pmatrix}}$

$e^1 e^2 e^3$  координаты базиса  
относительно базиса  $e_1 e_2 e_3$

$e^1 e^2 e^3 \leftarrow$  координаты векторов взаимного  
базиса в исходном о.н.б.

$$\Gamma^{-1} = T_{e_i \rightarrow e^j}$$

### 2 сп.

$\omega^1 \omega^2 \omega^3$  сопряж. к  $e_1 e_2 e_3$

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = E \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{array}$$

По теореме 2:  $(\mathbb{R}^3)^* \equiv \mathbb{R}_3 \underset{\substack{\cong \\ \text{изоморф. т-ма 2}}}{}$   $\mathbb{R}^3$

$$\omega^i \leftrightarrow e^i$$

$$\omega^i(x) = (x, e^i)$$

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e^2 = \begin{pmatrix} -38 \\ 41 \\ -34 \end{pmatrix} \quad e^3 = \begin{pmatrix} 27 \\ -29 \\ 24 \end{pmatrix}$$

**Определение 3.**  $e^i$  и  $e_j$  взаимные базисы  $V$

$$\forall x \in V \quad x = x^i e_i = x_j e^j$$

$x^i$  – контрвариант. координаты вектора

$x_j$  – ковариант. координаты вектора

$$e^j \leftrightarrow \omega^j \in V^* \underset{\text{сопряж. к } e_i}{}$$

$$\begin{aligned} x^i &= \omega^i(x) = (x, e^i) \\ x_j &= e_j(x) = (x, e_j) \end{aligned}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'} \quad S = T^{-1} \quad \boxed{\begin{aligned} x'^i &= s_j^i x^j \\ x'_j &= t_j^i x_i \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} e_1 \dots e_n &\quad e'_1 \dots e'_n \\ e^1 \dots e^n &\quad e'^1 \dots e'^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x^i e_i = (x, e^i) e_i \\ x &= x_j e^j = (x, e_j) e^j \end{aligned}$$

формулы Гибса

$(x^i)$  контравар. координаты вектора  $x$  – тензор типа  $(0, 1)$

**Определение 4.**

$(x_j)$  ковар. координаты вектора  $x$  – тензор типа  $(1, 0)$

Сверткой этих тензоров с метрическими тензорами  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$ , соответственно, называются следующие операции:

$$g_{ji} x^i = g_{ij} x^i \quad \text{и} \quad g^{ij} x_i = g^{ji} x_i \quad (\Leftrightarrow \text{свертка произв. тензоров})$$

$$\begin{aligned} g_{ij} x^i &= g_{ij}(x, e^i) = (x, g_{ij} e^i) = (x, e_j) = x_j \\ g^{ij} x_i &= g^{ij}(x, e_i) = (x, g^{ij} e_i) = (x, e^j) = x^j \end{aligned} \quad \text{операции поднятия и опускания индекса тензора}$$

**Примеры.**  $\forall x, y \in V \quad (x, y) = \underbrace{g_{ij} x^i}_{x_j} \underbrace{y^j}_{g^{ij} y_i} = x_j \underbrace{y^j}_{g^{ij} y_i} = g^{ij} x_j y_i = \xi^T \Gamma^{-1} \eta = (x, y)$

$$\begin{aligned} x^T \Gamma y &\quad \Gamma^{-1} = G(e^1 \dots e^n) \\ \Gamma = G(e_1 \dots e_n) &\quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \\ x = x^i e_i &\quad x = \xi_i e^i \\ y = y^j e_j &\quad y = \eta_j e^j \end{aligned}$$

$V$  Евклидово пространство,  $\Gamma, \Gamma^{-1}$  метр. тензоры.

**Определение 5.**  $\alpha \in T(p, q) \quad q \geq 1$  опусканием верхнего индекса тензора  $\alpha$  называется его свертка с ковариантн. метр. тензором  $(\Gamma)$  по тому верхнему индексу, который следует опустить. В результате, получаем тензор  $\in T_{(p+1, q-1)}$

**Определение 6.**  $\alpha \in T(p, q) \quad p \geq 1$  поднятием нижнего индекса  $\alpha$  называется его свертка с контравиантн. метр. тензором  $(\Gamma^{-1})$  по тому нижнему индексу, который следует поднять. В результате, получаем тензор  $\in T(p-1, q+1)$

При опускании верхнего индекса он всегда записывается нижними левым. Если опускаются несколько индексов, то они записываются в том же порядке, в котором стояли сверху.

При поднятии нижнего индекса он всегда записывается правым верхним. Если поднимаются несколько индексов, то они записываются в том же порядке, в котором стояли внизу.



$$g_{j_0 s} \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_{q-1} s} \in T(p, q) = \alpha_{j_0 j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_{q-1}} \in T(p+1, q-1)$$

$$g^{s_{i_q+1}} \alpha_{s j_2 \dots j_p}^{j_1 \dots j_q} \in T(p, q) = \alpha_{j_2 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q i_{q+1}} \in T(p-1, q+1)$$

Стандартный порядок следования индексов (сначала верхние, потом нижние)

В остальных случаях, дополнительно прежнее место индекса отмечается точкой.

Например,  $g_{is} \alpha_k^{sj} = \alpha_{ik}^{sj}$   
 $g^{sk} \alpha_{js}^i = \alpha_{js}^{ik}$

	элемент расположен во		
$i$ стр		2 стр.	
$j$ стол.		3 стол.	
$g_{is} g_{kr} \alpha_m^{sjrl} = \alpha_{ikm}^{sjl}$	$k$ слой	$\alpha_{242}^{3 \cdot 1}$	4 слое
	$l$ срез		1 срезе
$m$ след. слой			2...

### Примеры.

$$1. \alpha \in T(2, 0) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (g_{ij})$$

- (a) найти матрицу тензора с поднятым 1-м индексом
- (b) ... с 2-м индексом
- (c) ... с 2-мя индексами

$$\Gamma^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(a) \alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha_j^i = g^{ki} \alpha_{kj} = g^{ik} \alpha_{kj} \leftrightarrow \Gamma^{-1} A$$

$$\overset{i}{\underset{\Gamma^{-1}}{\text{---}}} (\overset{j}{\underset{A}{\text{---}}})$$

$$(\alpha_j^i) = \Gamma^{-1} A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 9 & 25 \end{pmatrix}$$

$$(b) \alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha_i^j = g^{jk} \alpha_{ik} = \alpha_{ik} g^{kj} \leftrightarrow A \Gamma^{-1} \quad (\alpha_{i \cdot}^j) = A \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 8 & 9 & 19 \\ 13 & 7 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ A \end{array}\right) \stackrel{i}{\sim} \left(\begin{array}{c} | \\ \Gamma^{-1} \end{array}\right) \quad \alpha_{20}^3 = \underbrace{\left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ A \end{array}\right)^2}_{= \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ A \end{array}\right)} \left(\begin{array}{c} | \\ \Gamma^{-1} \end{array}\right)$$

$$(c) \alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha^{ij} = g^{ik} g^{mj} \alpha_{km} \leftrightarrow \Gamma^{-1} A \Gamma^{-1}$$

$$(\alpha^{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & 17 & 51 \\ 18 & 9 & 71 \\ 49 & 69 & 87 \end{pmatrix}$$

2.  $\alpha \in T(2, 1)$   $\Gamma$  та же

$$\alpha_{jk}^i \quad A = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} A_1 & & & A_2 & & & A_3 \end{matrix}$$

(a) Найти матр. с опущенным верхним индексом

(b) С поднятым 2-м нижним

$$i \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \Gamma \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} \\ \hline k=1 & k=2 & k=3 \end{array}\right)$$

$$(a) \alpha_{jk}^i \rightsquigarrow \alpha_{ijk} = g_{im} \alpha_{jk}^m = (\Gamma A_k)^i_j$$

$$(\alpha_{ijk}) = (\Gamma A_1 | \Gamma A_2 | \Gamma A_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -6 & -25 & 31 & \dots & \dots \\ 3 & 12 & -15 & \dots & \dots \\ 1 & 5 & -5 & \dots & \dots \end{array} \right)$$

$$(b) \alpha_{jk}^i \rightsquigarrow \alpha_{j.}^{ik} = g^{mk} \alpha_{jm}^i = \alpha_{j1}^i g^{1k} + \alpha_{j2}^i g^{2k} + \alpha_{j3}^i g^{3k} =$$

$$i \left( \begin{array}{c|c|c} \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} \\ \hline \cdots & \square & \square \\ \hline A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c|c|c} \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c|c|c} \overset{j}{|} & \overset{j}{|} & \overset{j}{|} \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ \hline \Gamma^{-1} & & \end{array} \right)$$

=

$$= \left( \begin{array}{c|c|c} 1 \cdot A_1 + 2A_2 + 0A_3 & 2A_1 + 5A_2 - 2A_3 & 0A_1 - 2A_2 + 5A_3 \\ \hline k=1 & k=2 & k=3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -3 & \dots & \dots \\ -3 & 0 & 3 & \dots & \dots \\ 3 & -3 & 0 & \dots & \dots \end{array} \right)$$

$\square$  о.н.б.  $V = E = \Gamma^{-1} \Rightarrow$  все тензоры, которые получены сверткой с такими метр. тензорами

будут отличаться друг от друга только расположением верхних и нижних индексов.

Например,  $\alpha_{ik}^j = \underset{=\delta_{is}}{g_{is}} \alpha_k^{si} = \alpha_k^{ij}$  Элементы в обеих матрицах одинаковые.

$e, e'$  о.н.б.  $V$

$$T = \underset{\text{ортог.} \rightarrow}{T_{e \rightarrow e'}} \boxed{T^{-1} = S = T^T}$$

$$\alpha_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_q} = \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \ t_{j'_1}^{j_1} \dots t_{j'_p}^{j_p} \ s_{i_1}^{i'_1} \dots s_{i_q}^{i'_q} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_q=1}^n \alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \ t_{j'_1}^{j_1} \dots t_{j'_p}^{j_p} \ t_{i'_1}^{i_1} \dots t_{i'_q}^{i_q}$$

**Определение 7.** Все тензоры, которые после преобразования к одному о.н.б. евкл. пр-ва, отличающиеся только расположением верхних и нижних индексов, считаем равными и называем евклидовыми тензорами.

$r$  – валентность  $\alpha_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_q} \quad T(p, q) \leftrightarrow$  определяет  $(p+q)$  евкл. тензор

$$\boxed{\alpha'_{i'_1 \dots i'_r} = \alpha_{i_1 \dots i_r} t_{i'_1}^{i_1} \dots t_{i'_r}^{i_r}}$$

## 10 Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах

### 10.1 Сопряженный оператор в унитарном и евклидовом пространствах

$U, V$  линейные пространства над полем  $K$

$U^*, V^*$  соответственно, сопряженные пространства к  $U$  и  $V$

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U, V)$  линейное отображение.

**Определение 1.**  $\mathcal{A}^* : V^* \rightarrow U^*$  называется сопряженным к  $\mathcal{A}$ , если

$$\forall f \in V^* \quad \boxed{\mathcal{A}^* f(x) = f(\mathcal{A}x)} \quad \forall x \in U$$

$g$  линейн. очев., т.к.  $\mathcal{A}$  и  $f$  линейны.

$$x \in U \xrightarrow{\mathcal{A}} V \ni \mathcal{A}x \quad f : V \rightarrow K$$

$$g \in U^* \xleftarrow{\mathcal{A}^*} V^* \ni f \quad g : U \rightarrow K$$

$\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(U^*, V^*)$  т.е. линейное отображение:

$$\begin{aligned} \forall f_1, f_2 \in U^* \quad & A^*(\lambda f_1 + f_2)(x) = (\lambda f_1 + f_2)(\mathcal{A}x) = \underbrace{\lambda f_1(\mathcal{A}x)}_{\lambda(\mathcal{A}^* f_1)(x)} + \underbrace{f_2(\mathcal{A}x)}_{(\mathcal{A}^* f_2)(x)} \\ \forall \lambda \in K \quad & \mathcal{A}^*(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \mathcal{A}^* f_1 + \mathcal{A}^* f_2 \end{aligned}$$

$\square U = V \quad (V, (\cdot, \cdot))$  унит (евклидово пространство)  $\mathcal{A} \in End(V)$

$\mathcal{A}^* \in End(V^*)$

По теореме Рисса:  $\forall f \in V^* \leftrightarrow y \in V : f(x) = (x, y) \forall x \in V$

$$\exists g = \mathcal{A}^* f \in V^* \Leftrightarrow z \in V : g(x) = (x, z) \forall x \in V$$

$$\Rightarrow \forall x \in V \quad g(x) = \mathcal{A}^* f(x) = f(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, y) \\ \stackrel{\parallel}{(x,z)}$$

$$\text{T.k. } V \leftrightarrow V^* \quad \mathcal{A}^* : V \rightarrow V \\ g = \mathcal{A}^* f \Leftrightarrow z = \mathcal{A}^* y$$

$$g(x) = (x, z)$$

$$(x, \mathcal{A}^*, y) = (x, z) = (\mathcal{A}x, y)$$

**Определение 2.**  $(V, (\cdot, \cdot))$  унит. (евкл.) пространство,

$$\mathcal{A} \in End(V),$$

$$\mathcal{A}^* \in End(V^*) - \underline{\text{сопряженный к } \mathcal{A}},$$

$$\forall x, y \in V \quad \boxed{(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y)}$$

Замечание.

1. В силу теоремы Рисса  $\mathcal{A}^*$   $\exists$  и определен единственным образом
2.  $\mathcal{A}^*$  определяется операцией  $(\cdot, \cdot)$ , т.е. поменяем  $(\cdot, \cdot) \rightsquigarrow$

поменяется  $\mathcal{A}^*$  (в этом случае неоднозначно)

### Свойства сопряженного оператора

$$1. \ e_1 \dots e_n \text{ базис } V, \quad \mathcal{A}, \mathcal{A}^* \longleftrightarrow \quad A, A^{\circledast} \\ \text{матрицы операторов в базисе } e$$

$$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \text{ матрица Грама}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma}}, \text{ где } \underset{\text{сопряж. матрица}}{A^* = \overline{A^T}}$$

Доказательство.  $\forall x, y \in V$

$$x, y \leftrightarrow \quad x, y \quad \text{столбцы координат в базисе } e \quad (x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y) = (Ax)^T \Gamma \overline{y} = x^T A^T \Gamma \overline{y}$$

||

$$x^T \Gamma \overline{(A^{\circledast} y)} = x^T \Gamma \overline{A^{\circledast} \overline{y}} \Leftrightarrow A^T \Gamma = \overline{\Gamma A^{\circledast}}$$

$$\overline{A^{\circledast}} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

$$A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} \overline{A^T} \overline{\Gamma}$$

$$\text{Следствие 1. } e_1 \dots e_n \text{ о.н.б. } V \Rightarrow \boxed{A^{\circledast} = A^*}$$

(Очевидно, т.к.  $\Gamma = E$ )

2.  $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$  (т.е.  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  взаимно-сопряженные операторы)

$$\text{Доказательство. } \forall x, y : \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) \Leftrightarrow (y, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* y, x) \Rightarrow (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

$$3. \forall \lambda \in K \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V) \quad \boxed{(\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \overline{\lambda} \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*} \text{ (упр.)}$$

4.  $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$   $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$

*Доказательство.*

$$\forall x, y \in V \quad (x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^*y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y) \Leftrightarrow (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$$
■

5.  $Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp$   
 $Ker\mathcal{A}^* = (Im\mathcal{A})^\perp$

*Доказательство.*

(a)  $\forall x \in Ker\mathcal{A} \quad \forall y \in V$

$$(x, \underbrace{\mathcal{A}^*y}_{\in Im\mathcal{A}^*}) = (\mathcal{A}x, y) \underset{\parallel}{=} \emptyset \Rightarrow Im\mathcal{A}^* \subseteq (Ker\mathcal{A})^\perp$$

$$dim Im\mathcal{A}^* = rg A^{(*)} = rg(\overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma})_{\text{невырожд}} = rg A^T = rg(v_1 \dots v_k) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$$

комплексифик. венц. про-ва  
см. глава 7

$$= n - \underbrace{def A}_{dim Ker A} \underset{L \oplus L^\perp = V}{=} dim(Ker A)^\perp \Rightarrow Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp$$

(b)  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  вз. сопр. по а)  
 $Im\mathcal{A} = (Ker\mathcal{A}^*)^\perp$   
 $(Im\mathcal{A})^\perp = Ker\mathcal{A}^*$

■

6. Если  $\exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow \exists (\mathcal{A}^*)^{-1}$ , причем  $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$

*Доказательство.*

$$\exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow Ker\mathcal{A} = \{0\} \underset{5}{\Leftrightarrow} Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp = V \Leftrightarrow Ker\mathcal{A}^* = \{0\} \Leftrightarrow \exists (\mathcal{A}^*)^{-1}$$

$$\forall x, y \in V \quad (x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (\underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}}_\epsilon x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (\mathcal{A}^{-1}x, \underbrace{\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^*)^{-1}}_\epsilon y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y)$$

$$\Rightarrow_{\text{no def}} (\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$$
■

7.  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda}) = 0$

*Доказательство.*  $\square e_1 \dots e_n$  о.н.б.  $V \Rightarrow \underset{1}{A}^{(*)} = A^*$

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \chi_{A^*}(t) = det(A^* - tE) = det(\overline{A^T} - tE) = \overline{det(A^T - tE)} =$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$$

$$= \overline{det(A - \bar{t}E)} = \overline{\chi_A(\bar{t})} = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\bar{t})}$$

$\frac{||}{\chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda})} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda}) = 0$

■

8.  $\lambda$  с.ч.,  $u$  с.в. $\mathcal{A}$   
 $\bar{\lambda}$  с.ч.,  $v$  с.в. $\mathcal{A}^*$

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{A}u, v) & = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \mu v) = \bar{\mu}(u, v) \\
 \mathcal{A}u = \lambda u & \parallel & \\
 \mathcal{A}^*v = \mu v & (\lambda u, v) = \lambda(u, v) & (\lambda - \bar{\mu})(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0 \\
 & \uparrow & \downarrow 0
 \end{array}$$

9.  $L \subset V$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}^*$

*Доказательство.*  $\forall x \in L \Rightarrow \mathcal{A}x \in L$

$$\forall y \in L^\perp : (x, y) = 0 \Rightarrow (x, \mathcal{A}^*, y) = (\mathcal{A}x, \underset{\in L}{y}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^*y \in L^\perp \Rightarrow L^\perp$$
 инвариантно отн.  $\mathcal{A}^*$

■

## 10.2 Нормальные операторы в евклидов. и унит. пространствах

**Определение 1.**  $\mathcal{A} \in End(V)$   $(V, (\cdot, \cdot))$

Оператор  $\mathcal{A}$  называется нормальным, если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  перестановочны.

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}] \Leftrightarrow \forall x, y \in V \quad [\mathcal{A}x, \mathcal{A}y] = [\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y]$$

Действительно:  $\forall x, y \underset{\leftrightarrow}{(Ax, \mathcal{A}y)} = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}\mathcal{A}^*y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$

**Свойства нормального оператора:**

1.  $\mathcal{A}$  нормальный оператор  $\Leftrightarrow$  в некотором базисе матрица  $A$  (оператор  $\mathcal{A}$ ) перестановична с матрицей  $A^{\circledast}$  (опер.  $\mathcal{A}^*$ ):  $AA^{\circledast} = A^{\circledast}A$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) очевидно  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} \Leftrightarrow AA^{\circledast} = A^{\circledast}A$

( $\Leftarrow$ )  $\exists e'_1 \dots e'_n$  базис  $V$   $T_{e \rightarrow e'} = T$

$$A' \cdot (A^{\circledast})' = T^{-1}A \underbrace{TT^{-1}}_E A^{\circledast}T = T^{-1}A^{\circledast}AT = \underbrace{T^{-1}A^{\circledast}}_{(A^{\circledast})'} \underbrace{TT^{-1}AT}_{A'}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

■

2.  $Ker\mathcal{A} = Ker\mathcal{A}^*$   
 $(Ker\mathcal{A})^\perp = Im\mathcal{A}$   $\Rightarrow V = Ker\mathcal{A} \oplus Im\mathcal{A}$   
 $Ker\mathcal{A}^2 = Ker\mathcal{A}$

*Доказательство.*

$$(a) x \in Ker\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0$$

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \underset{\text{Норм. опер.}}{=} (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = 0 \Leftrightarrow x \in Ker\mathcal{A}^*$$

$$(b) 5 \text{ свойство сопряж.} \quad (Ker\mathcal{A}^*)^\perp = Im\mathcal{A}$$

$$(c) x \in Ker\mathcal{A}^2 \Leftrightarrow \mathcal{A}^2x = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2x, \mathcal{A}^2x) = 0 \underset{\text{норм. оператор}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{A}^* \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in Im\mathcal{A}}, \mathcal{A}^* \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in Im\mathcal{A}}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}^*(\underbrace{\mathcal{A}x}_{\in Im\mathcal{A}}) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in Im\mathcal{A}} \in Ker\mathcal{A}^* = Ker\mathcal{A}, \quad Im\mathcal{A} \cap Ker\mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = 0 \Leftrightarrow x \in Ker\mathcal{A}$$

3.  $\mathcal{A}$  норм. опер.  $\Leftrightarrow \forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$  норм.

$$\text{Доказательство. } \mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E} \quad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda} \mathcal{E} \quad \mathcal{E}^* = \mathcal{E}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{B}^* &= (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda} \mathcal{E}) = \underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}_{\mathcal{A}^*\mathcal{A}} - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\mathcal{E} \\ &\quad \parallel \Rightarrow \mathcal{B} \text{ нормальный оператор} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}^*\mathcal{B} = (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda} \mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\mathcal{E}$$

4.  $\boxed{\lambda \text{ с.ч., } u \text{ с.в. } \mathcal{A} \Rightarrow u \text{ с.в. для } \bar{\lambda} \text{ с.ч. } \mathcal{A}^*}$

*Доказательство.*

$$\mathcal{A}u = \lambda u \quad \mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E} \quad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda} \mathcal{E}$$

$\Updownarrow$

$$\mathcal{B}u = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{B}u, \mathcal{B}u = 0 \\ \text{3 св-во норм. опер.} \\ = (\mathcal{B}^*u, \mathcal{B}^*u) \end{array} \Leftrightarrow \mathcal{B}^*u = 0 \Leftrightarrow u \text{ с.в. для } \bar{\lambda} \text{ опер. } \mathcal{A}^*$$

5.  $\boxed{\begin{array}{c} \lambda \text{ с.ч. } u \text{ с.в. } \mathcal{A} \\ \mu \text{ с.ч. } v \text{ с.в. } \mathcal{A} \end{array} \lambda \neq \mu \Rightarrow u \perp v}, \text{ т.е. } \boxed{V_\lambda \perp V_\mu}_{\lambda \neq \mu} \text{ для норм. опер.}$

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ll} \lambda \text{ с.ч., } u \text{ с.в. } \mathcal{A} & \lambda \neq \mu \quad (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \bar{\mu}v) = \mu(u, v) \\ \mu \text{ с.ч., } v \text{ с.в. } \mathcal{A} & \parallel \\ \Downarrow \text{ по св-ву сопряж. опер. 4} & (\lambda u, v) = \lambda(u, v) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bar{\lambda}, \bar{\mu} \text{ с.ч. } \mathcal{A}^* & (\lambda - \mu)(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v \\ u, v \text{ с.в.} & \neq 0 \end{array}$$

**Напоминание:**  $\mathcal{A}$  нормальный оператор  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$$\forall x, y \in V \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$$

**Теорема 1** (Канонический вид матрицы нормального оператора в унитарном пространстве).

$\mathcal{A} \in End(V), (V(\cdot, \cdot))$  унитарное пространство

$\mathcal{A}$  нормальный оператор  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б.  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь диагональный вид.

$$\Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \text{ при этом}$$

матрица оператора  $\mathcal{A}^*$ , очевидно, также будет иметь диагональный вид

$$\bar{\Lambda} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

*Замечание.*

1. Очевидно, что о.н.б. состоит из с.в. (попарно-ортог. и нормиров.)  
 $\lambda$  соотв. с.ч.
2.  $\forall$  нормальный оператор в унитарном пр-ве является о.п.с. Обратное, вообще говоря, неверно.  
 Не всякий о.п.с. имеет именно о.н.б., в котором матрица опер. диагонана.

*Доказательство.*

$$(\Leftarrow) \text{ очевидно, в о.н.б. } A^{\odot} = A^* = \overline{A^T} = \overline{\Lambda^T} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

$$A^{\odot} = AA^{\odot} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ нормальный оператор}$$

$$(\Rightarrow) \quad v_1 \text{ с.в. } \mathcal{A} \text{ соотв. с.ч. } \lambda_1 \Rightarrow v_1 \text{ с.в. } \mathcal{A}^* \text{ с.ч. } \bar{\lambda}_1$$

$$L := \text{span}(v_1) \text{ инвариант. отн-но } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A}^* \Rightarrow L^\perp \text{ инвар. отн-но } \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A}^*$$

$\Rightarrow \mathcal{A}|_{L^\perp}$  и  $\mathcal{A}^*|_{L^\perp}$  останутся взаимно-сопряж. и нормальн.

*Докажем м.м.и.:* (по  $\dim V = n$ )

1. база:  $n = 1$  утв. очев.
2. инд. предпол.  $\square$  верно для  $n = k$
3. инд. переход докажем что тогда верно  $n = k + 1$ ?

$$L = \text{span}(v_1) \quad V = L \oplus L^\perp \quad \dim L^\perp = k \Rightarrow \text{по инд. предпол.}$$

$$(\mathcal{A}|_{L^\perp} \text{ и } \mathcal{A}^*|_{L^\perp} \text{ тоже нормальные}) \quad \exists \text{ о.н.б. } v_2, v_3, \dots, v_{k+1} \text{ т.ч.}$$

матрица  $\mathcal{A}$  будет иметь вид  $\text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_{k+1})$ ,

а матрица  $\mathcal{A}^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_{k+1})$

$$L \oplus L^\perp = V = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) \quad \text{попарно ортог. и нормир.}$$

$\Rightarrow$  матрица будет иметь блочно-диагональный вид

$$\left( \begin{array}{c|ccccc} \text{L} & & & & & \\ \hline & \lambda_1 & & 0 & & \\ & 0 & \lambda_2 & 0 & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_{k+1} & \end{array} \right) = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1})$$

$$A^{\odot} = \overline{A^T} = \overline{\Lambda}$$

■

**Следствие 1.**

$\mathcal{A}$  нормальный оператор в унитарном пр-ве  $V \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} V_\lambda$  собств. подпр.  $V_\lambda \perp V_\mu$   $\lambda \neq \mu$

*Доказательство.* Очевидно из теоремы.

■

**Следствие 2.**  $A_{n \times n} \quad a_{ij} \in \mathbb{C} \quad A^* = \overline{A^T}$

$\forall$  норм. матрицы  $A$  ( $AA^* = A^*A$ )  $\exists$  унитарн. матрица  $T$  ( $T^* = T^{-1}$ ),

м.ч.  $\boxed{T^{-1}AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)}$ , где  $\lambda_i$  с.ч. матрицы  $A$

Доказательство.  $A$  в канонич. базисе  $\mathbb{C}^n$  – матрица оператора  $\mathcal{A}$

$$A^{(\star)} = A^* = \overline{A^T}$$

матрица соотв.  $\mathcal{A}^*$

$A^*A = AA^* \Rightarrow \mathcal{A}$  нормальн.  $\Rightarrow$  применяем теорему

$\exists$  о.н.б.  $v_1 \dots v_n \rightsquigarrow T = T_{e \rightarrow v}$

т.к. о.н.б.  $\overline{T^T} = T^* = T^{-1}$ , т.е.  $T$  унитарн.  $\Rightarrow$  по формуле преобр. матрицы в новом базисе

$$A' = T^{-1}AT = \boxed{\substack{T^T \\ T^*}} AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

■

$\square V(\cdot, \cdot)$  евклидово про-во

не все корни хар. мн-на вещ.  $\Rightarrow$  не все корни это с.ч. оператора

$$\begin{aligned} (\text{см. 7.6}) \quad V_{\mathbb{C}} - \text{комплексификация } V \quad & \forall x, y \in V \Leftrightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \\ & e_1 \dots e_n \text{ базис } V \rightarrow e_1 \dots e_n \text{ базис } V_{\mathbb{C}} \\ & v_1 \dots v_k \text{ лин. нез. } \Leftrightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \text{ лин. нез.} \\ & \bar{z} = x - iy \end{aligned}$$

**Определение 2.** Определим скалярное (псевдоскал.) пр-ве на  $V_{\mathbb{C}}$ :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V \quad & (\Leftrightarrow z = x + iy) \quad (z, \omega) = (x + iy, u + iv) \stackrel{\text{def}}{=} (x, u) + (y, v) + i((y, u) - (x, v)) \\ \forall u, v \in V \quad & (\Leftrightarrow \omega = u + iv) \end{aligned}$$

Упр.: удовлетворить 1-4 свойства псевдоскал. пр-я  $(V_{\mathbb{C}}, (\cdot, \cdot))$  унит. пр-во

$$\text{Упр.: } \overline{(z_1, z_2)} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2) \quad \forall z_1, z_2 \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \quad & \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V) \quad \text{продолжение вещ. опер. } \mathcal{A} \text{ на } V_{\mathbb{C}} \\ \forall x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \end{aligned}$$

$$x, y \in V \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V \rightsquigarrow e_1 \dots e_n \text{ базис } V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A_{\text{вещ.}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\text{вещ.}}$$

**Утверждение.**  $\boxed{(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}}$

Доказательство.  $e_1 \dots e_n$  о.н.б.  $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$  базис  $V_{\mathbb{C}}$

$$(e_k, e_j)_{\mathbb{C}} = (e_k + i \cdot 0, e_j + i \cdot 0) = (e_k, e_j) = \delta_{kj} \Rightarrow \text{o.н.б. в } V_{\mathbb{C}}$$

в  $V$ :

в  $V_{\mathbb{C}}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \leftrightarrow A \quad & \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A \\ \mathcal{A}^* \leftrightarrow A^T = A^* \quad & (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A^* = A^T \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A \text{ в о.н.б. } V_{\mathbb{C}} \Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* \leftrightarrow \boxed{\substack{\overline{A^T} \\ \text{вещ.}}} = A^T = A^*$$

$\Rightarrow$  матрицы операторов  $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^*$  и  $(\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$  совпадают в о.н.б.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  совпадают в любом базисе  $\Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$

■

**Следствие:**  $\mathcal{A}$  норм. опер. в евклид.  $V \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  норм. опер. в  $V_{\mathbb{C}}$  (очевидно).

**Теорема 2** (Канонический вид матрицы нормального оператора в евклидовом пр-ве).

$\mathcal{A} \in End(V), (V, (\cdot, \cdot))$  евкл. пр-во

$\mathcal{A}$  норм. опер.  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б.  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 \\ & \Phi_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \Phi_m \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda_s \in \mathbb{R} \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$$

При этом матрица оператора  $\mathcal{A}^*$ , очевидно, также будет иметь блочно-диаг. вид:  $\Lambda^T$

*Замечание.* Очевидно,  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  собств. ч.  $\mathcal{A}$  и первые  $k$  векторов базиса – это о. н. с. в.

*Доказательство.* ( $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned} \Lambda \Lambda^T &= \Lambda^T \Lambda \text{ (упр.)} \\ \Updownarrow &\quad \text{o.н.б. } A^{\odot} = A^* = A^T \text{ т.к. евкл.} \quad \Rightarrow \mathcal{A} \text{ норм. опер.} \\ AA^* &= A^*A \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) \quad \mathcal{A} \text{ норм. опер.} \rightarrow \underset{\text{норм. опер.}}{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \text{ продолж. } \mathcal{A} \text{ на } V_{\mathbb{C}} \underset{\text{сле-вие 1}}{\Leftrightarrow} V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\substack{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}}} V_{\lambda} \quad V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu$$

т.е. все корни

$$\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \quad (\text{см. 7.6})$$

$$1. \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ корень } \chi_{\mathcal{A}} \quad (\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0) \Rightarrow \lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \text{ с.в. } \omega = \begin{matrix} u + iv \\ u, v \text{ с.в. для } \mathcal{A} \end{matrix} \quad \text{причем } u + iv \text{ корень } \chi_{\mathcal{A}} \quad \text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\omega = \mathcal{A}u + i\mathcal{A}v = \lambda u + i\lambda v = \lambda(u + iv) = \lambda\omega$$

$$\begin{matrix} V_{\lambda} = (Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}))_{\mathbb{C}} \\ \text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \end{matrix} \quad V_{\lambda} = \underset{\mathbb{C}}{\text{span}}(v_1 \dots v_k) \quad v_j \text{ попарно-орт. и норм.} \quad Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \underset{\mathbb{R}}{\text{span}}(v_1 \dots v_k)$$

$$2. \quad \mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\beta \neq 0) \quad \text{корень } \chi_{\mathcal{A}} \quad \chi_{\mathcal{A}}(\mu) = 0 \quad \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\bar{\mu}) = 0 \quad \bar{\mu} \text{ тоже корень, причем} \\ \text{мин-н с веществ. коэф.} \quad \text{той же кр-ти}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \alpha \pm i\beta \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \alpha + i\beta \text{ с.ч. } z \text{ с.в. } \Rightarrow \alpha - i\beta \text{ } \bar{z} \text{ с.в.} \end{matrix}} \quad (7.6)$$

$$u, v \in V \quad \begin{matrix} z = u + iv \\ \bar{z} = u - iv \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad (z, \bar{z})_{\mathbb{C}} = 0 \quad \text{т.к. с.в. различных с.ч. св-ва норм. опер.}$$

$$(z, \bar{z})_{\mathbb{C}} = (u + iv, u - iv) = (u, u) - (v, v) + i \overbrace{(u, v) + (v, u)}^{2(u,v)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u, u) = (v, v) \\ (u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|u\| = \|v\| \\ u \perp v \end{cases} \quad \boxed{u = \operatorname{Re} z} \quad \boxed{u = \frac{z + \bar{z}}{2}} \\ \boxed{v = \operatorname{Im} z} \quad \boxed{v = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

$$L = \operatorname{span}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{в } V, \text{ вещ. базис}}}{u, v}) \rightsquigarrow L_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{в } V_{\mathbb{C}}, \text{ вещ. базис}}}{u, v}) = \operatorname{span}(z, \bar{z})$$

$$L_{\mathbb{C}} = (\operatorname{span}(u, v))_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}(z, \bar{z})$$

Т.к.  $z$  и  $\bar{z}$  с. в.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ , то  $L_{\mathbb{C}}$  и  $L_{\mathbb{C}}^{\perp}$  инвар. относительно  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  и  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$

$$3. V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \text{ веш.}} V_{\lambda} \quad \bigoplus_{(\mu_j, \bar{\mu}_j)} L_{\mathbb{C}}^j, \quad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j \rightsquigarrow z_j = u_j + iv_j \quad \begin{aligned} u_j &= \operatorname{Re} z_j \\ v_j &= \operatorname{Im} z_j \end{aligned}$$

корни  $\chi_{\mathcal{A}}$       пара сопряж.

компл. корней  $\chi_{\mathcal{A}}$

$$L_{\mathbb{C}}^j = \operatorname{span}(u_j, v_j)$$

$$\Rightarrow V_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left( \begin{array}{c} \text{попарно ортог. } V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu \\ \dots \quad \overset{\swarrow}{v_{\lambda}} \quad \dots, \dots \overset{\searrow}{u_j}, v_j, \dots \\ \text{св-ва вещ. } \mathcal{A} \\ \text{для } \lambda \text{ вещ.} \\ \text{попарно-ортог. } (u_j \perp v_j) \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$  матрица  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в этом базисе имеет блочно-диагон. вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 \\ & \boxed{\Phi_1} & \\ 0 & \square & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix} \quad \Phi_j : \mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_{L_{\mathbb{C}}^j} \xrightarrow[\text{н.у.о.}]{\mu_j = \mu} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(u) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)$$

$$= 1/2\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z + 1/2\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z} = 1/2\mu z + 1/2\bar{\mu} \bar{z} = \operatorname{Re}(\mu z) = \operatorname{Re}((\alpha + i\beta)(u + iv)) = \alpha u - \beta v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = \frac{\mu z - \bar{\mu} \bar{z}}{2i} = \operatorname{Im} \mu z = \beta u + \alpha v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Phi$

$$\rightsquigarrow \Phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \left( \text{н.у.о. } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad z \rightsquigarrow \bar{z} \right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_{L_{\mathbb{C}}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Базис у нас получился ортогональный, теперь осталось его отнормировать.

$$\|u\| = \|v\|$$

$$1 = \|z\|^2 = (z, z) = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = \|v\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z \text{ и } \bar{z} \rightsquigarrow \sqrt{2}z \text{ и } \sqrt{2}\bar{z} \rightsquigarrow \begin{array}{l} u \rightsquigarrow \sqrt{2}u \\ v \rightsquigarrow \sqrt{2}v \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \|u\| = 1 \\ \|v\| = 1 \end{array}$$

Матрица  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в этом базисе вез.  $\Rightarrow$  то и у  $\mathcal{A}$  такая же матрица

■

**Следствие 1.**  $A_{n \times n}$   $a_{ij} \in \mathbb{R}$   $A^* = A^T$

Всегда норм. матрицы  $A$  ( $AA^T = A^TA$ )  $\exists$  ортог. матрица  $T$  ( $T^T = T^* = T^{-1}$ )

$$m.u. \quad T^{-1}AT = T^TAT = \Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 \\ & \boxed{\Phi_1} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \lambda_s \text{ c.u. } \mathcal{A}$$

$\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$  компл. сопряжс.

$\bar{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$  корни хар. мн-на  $A$

*Доказательство.* См. док-во следствия 2 к т-ме о кан. виде в унит. пр-ве

$$T = T_{e \rightarrow v} \quad v \text{ о.н.б. в евкл. пр-ве} \quad T \text{ - ортогон.} \quad T^{-1} = T^T$$

■

### 10.3 Самосопряженные операторы. Изометрические операторы

**Определение 1.**  $\mathcal{A} \in End(V)$   $(V, (\cdot, \cdot))$  Унит. (евкл.)

$\mathcal{A}$  называется самосопряженным, если  $\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}^*}$

$$m.e. \forall x, y \in V \quad \boxed{(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)}$$

Унит. пространство – эрмитов оператор

Евклидово пространство – симметричный оператор

Очевидно,  $\mathcal{A}$  – самосопр., то  $\mathcal{A}$  – нормальный

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

**Свойства:**

1.  $\mathcal{A}$  самосопр.  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б., т.ч.  $A = \overline{A^T} = A^*$   $\begin{cases} A - \text{эрмитова матрица (компл.)} \\ A - \text{симм. матрица (вещ.)} \end{cases}$

*Доказательство.* Свойство 1 (?) для сопряж. опер.

$$\forall \text{ о.н.б. } \mathcal{A}^* \leftrightarrow \mathcal{A}^* = \overline{\mathcal{A}^T} \Leftrightarrow A = A^* = \overline{A^T}$$

2.  $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}$  самосопр.  $\Rightarrow (\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B}) \quad \forall \underline{\lambda \in \mathbb{R}}$  (упр.)  
самосопр. опер.
3.  $\begin{cases} \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ самосопр.} \\ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \end{cases} \xrightarrow{\text{перестанов.}} \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$  самосопр. (упр.)
4.  $\mathcal{A}$  самосопр.  $\Leftrightarrow$  все корни характерист. многочлена  $\chi$  веществ. (!)

*Доказательство.*

(a) ( $V(\cdot, \cdot)$ ) унитарн.  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow$  нормальн.  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б., т.ч.  
матрица оператора  $\mathcal{A} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$   $\lambda_i$  с.ч.  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}^* \leftrightarrow \overline{\Lambda} = \text{diag}(\overline{\lambda}_1 \dots \overline{\lambda}_n)$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \Lambda = \overline{\Lambda} \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda_i} \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ с.ч. } \mathcal{A} \Leftrightarrow \text{все с.ч. } \lambda_i \text{ корни } \chi$$

(b) ( $V, (\cdot, \cdot)$ ) евклид.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  продолж.  $\mathcal{A}$  на  $V_{\mathbb{C}}$

$$\Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \stackrel{\mathcal{A} = \mathcal{A}^*}{=} \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$
 самосопр.  $\Leftrightarrow$  по п. а) Все корни  $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$  вещ.,  $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  все корни  $\chi_{\mathcal{A}}$  вещ.

5.  $L \subset V$  инвар. отн.  $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$  инвар. отн.  $\mathcal{A}$   
линей. подпр.

*Доказательство.* см. свойства сопряж. опер.

**Теорема 1** (Канонич. вид матрицы самосопряж. оператора).

$\mathcal{A} \in \text{End}(V), \quad V(\cdot, \cdot)$  унит. (евкл.)

$\mathcal{A}$  самосопр. опер.  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б.  $V$  такой, что матрицы операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  будут иметь в нем диагональный вид  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Очевидно, что базис состоит из о.н. с. в.  $A$  ( $\mathcal{A}^*$ ),  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  соотв. с.ч.  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A}^*$ )

*Доказательство.* Т.к.  $\mathcal{A}$  самосопр.  $\Rightarrow \mathcal{A}$  норм.  $\Rightarrow$  по теореме о кан. виде матрицы норм. опер.

Унит:  $\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i$  с.ч. ( $\lambda_i \in \mathbb{R}$  св-во 4)

Евкл:  $\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i$  с.ч. ( $\lambda_i \in \mathbb{R}$  св-во 4), блоков  $\Phi_j$  не будет

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$  матрицы опер. совпад.

**Следствие 1.**  $\mathcal{A}$  самосопр. опер.  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} V_{\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 $V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu \quad V_{\lambda}$  собств. подпр.

**Следствие 2.**  $\forall$  симм. (эрмит.) матрицы  $A$  ( $A = A^*$ )

$\exists$  ортог. (унит.) матрица  $T$  ( $T^* = T^{-1}$ ), т.ч.

$A$  симм. ( $A = A^T$ ):  $T^{-1}AT = T^TAT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

$A$  эрмитова ( $A = \overline{A^T}$ ):  $T^{-1}AT = \overline{T^TAT} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$  с.ч.  $A$

*Доказательство.*  $T = T_{e \rightarrow v}$   $e$  – канон. базис  $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$   $\Rightarrow T$  ортог. (унит.)  
 $v$  – о.н.б. из с.в. ■

**Определение 2.** Невырожденный линейный оператор  $Q \in End(V)$ ,  $(V, (\cdot, \cdot))$  унит. (евкл.).

называется изометрическим, если  $Q^* = Q^{-1}$ , т.е.

$$\forall x, y \in V \quad (Qx, Qy) = (x, y)$$

$$((Qx, Qy)) = (x, \underbrace{Q^*Q y}_{\varepsilon}) = (x, y)$$

"Сохраняет расстояние и углы"

унитар. –  $Q$  унитарный оператор

евкл. –  $Q$  ортогон. оператор.

Очевидно, что  $Q$  изометрич.  $\Rightarrow Q$  нормальный:  $QQ^* = QQ^{-1} = E = Q^{-1}Q = Q^*Q$

**Свойства изометр. оператора:**

1.  $Q$  изометр.  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б.  $Q^{-1} = \overline{Q^T} = Q^*$ , где  $Q$  матрица оператора  $Q$  в этом базисе  
 (т.е.  $Q$  унит. (компл.) ортог. (вещ.) матрица)

*Доказательство.* Свойство матрицы сопряж. опер.

$$\forall \text{о.н.б. } Q^* = \overline{Q^T} = Q^{-1}$$

2.  $Q$  изометр.  $\Leftrightarrow Q$  переводит о.н.б. в о.н.б.

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ )  $e$  о.н.б.  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

$$\square v_i = Qe_i \quad i = 1 \dots n$$

$$(v_i, v_j) = (Qe_i, Qe_j) \underset{\text{изометр.}}{=} (e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow v$$
 о.н.б

$$(\Leftarrow) e \text{ и } e' \text{ о.н.б. } V, \text{ т.ч. } e'_i = Qe_i \quad \forall x, y \in V \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

$$(Qx, Qy) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j (Qe_i, Qe_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j (e'_i, e'_j) \stackrel{=\delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = (x, y) \Rightarrow Q \text{ изометр.}$$

3.  $Q, R$  – изометр.  $\Rightarrow Q \circ R$  изометр. (упр.)

4.  $Q$  изометр.  $\Rightarrow Q^{-1}$  изометр. (упр.)

5.  $Q$  изометр.  $\Leftrightarrow$  все корни  $\chi$  по модулю равны 1

*Доказательство.*

- (a)  $(V, (\cdot, \cdot))$  унит.  $Q^* = Q^{-1} \Rightarrow Q$  норм. опер.  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б., т.ч. матрица  $Q$  имеет диагон. вид  
 $\Lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad \lambda_i$  с.ч. (все корни  $\chi$ )

причем матрица  $Q^* = \overline{\Lambda} = (\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$

$$Q^* = Q^{-1} \Leftrightarrow \overline{\Lambda} = \Lambda^{-1} \Leftrightarrow \overline{\Lambda} \Lambda = E$$

$$\underbrace{\lambda_i \bar{\lambda}_i}_{|\lambda_i|^2} = 1 \Leftrightarrow |\lambda_i| = 1$$

(b)  $(V, (\cdot, \cdot))$  евклидово про-во

$\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$  продолж.  $\mathbb{Q}$  на  $V_{\mathbb{C}}$  ( $\chi_{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathbb{Q}}$ )

$$\Rightarrow (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^* = (\mathbb{Q}^*)_{\mathbb{C}} = (\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}$$

$(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}} = (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1}$  ? Можно ли переставить?

$\mathbb{Q}$  невырожд.  $\Leftrightarrow \det_{\neq 0} \mathbb{Q} = \chi_{\mathbb{Q}}(0) = \chi_{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}}(0) = \det \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$  невырожд.

Проверим, что  $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \cdot (\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}$  ?

$$\forall x, y \in V \quad \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}(\underbrace{\mathbb{Q}^{-1}x}_{\text{вещ.}} + i\underbrace{\mathbb{Q}^{-1}y}_{\text{вещ.}}) =$$

$$= \underbrace{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}x}_{\mathcal{E}} + i\underbrace{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}y}_{\mathcal{E}} = x + iy \Rightarrow (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1} = (\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}$$

Аналогично:  $(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}$

$$(\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^* = (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1} \Rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \text{ изометр. на } V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \text{по а) все корни } \chi \text{ по модулю} = 1$$

■

*Замечание.*  $V$  евкл.  $\mathbb{Q}$  – ортог. оператор  $\Rightarrow$  все с.ч.  $\mathbb{Q} = \pm 1$

6.  $L_{\text{лин. подпр.}} \subset V$  инвар. отн.  $\mathbb{Q} \Rightarrow L^{\perp}$  инвар. отн.  $\mathbb{Q}$

*Доказательство.*  $\forall x \neq 0 \in L$ , т.к.  $\mathbb{Q}$  невырожд.  $\Rightarrow \exists z \in L : x = \mathbb{Q}z$

$$\forall y \in L^{\perp} \quad (x, \mathbb{Q}y) = (\mathbb{Q}z, \mathbb{Q}y) \underset{\text{изометр.}}{=} (z, y) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}y \in L^{\perp} \Rightarrow L^{\perp} \text{ инвариант отн. } \mathbb{Q}$$

■

**Теорема 2** (канонич. вид матрицы унитарного оператора).

$(V, (\cdot, \cdot))$  унит.  $\mathbb{Q} \in End(V)$ , невырожд.

$\mathbb{Q}$  унитарный оператор (изометр.)  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б., т.ч. матрица оператора  $\mathbb{Q}$  в этом базисе будет иметь диагональный вид:  $\Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ , где  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  и  $|\lambda_j| = 1 \quad \forall j = 1 \dots n$

при этом матрица  $\mathbb{Q}^*$  будет иметь также диагон. вид:  $\Lambda^{-1} = diag(1/\lambda_1 \dots 1/\lambda_n) = \overline{\Lambda^T} = \Lambda^*$

*Доказательство.* См. теорему о канон. виде матрицы норм. опер.

$\mathbb{Q}$  унит. (норм. + все корни хар. мн.  $\chi$  по модулю = 1)  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б. матрица  $\mathbb{Q} = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

$\lambda_i$  с.ч.  $\mathbb{Q}$  (корни хар. мн-на)

$$\forall i \lambda_i \neq 0 \quad (\text{т.к. } \mathbb{Q} \text{ невырожд. } \det \overset{\neq 0}{\mathbb{Q}} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot (-1)^n) \quad \Lambda^* = \Lambda^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

■

**Следствие 1.**  $\mathbb{Q}$  унит. опер.  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C} \text{ с.ч. } \mathbb{Q} \text{ собств. подпр.}} V_{\lambda} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| = 1 \quad V_{\lambda} \perp V_{\mu} \quad \lambda \neq \mu$

**Следствие 2.**  $\forall$  унит. матрицы  $Q$  ( $Q^* = Q^{-1}$ )  $\exists$  унит. матрица  $T$  ( $T^* = T^{-1}$ )

$$\text{т.ч. } T^{-1}QT = \overline{T^T}QT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

где  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  с.ч.  $Q$ , причем  $|\lambda_i| = 1$

Все док-ва см. раньше (для самосопр., для норм.)

**Теорема 3** (Канонич. вид матрицы ортог. оператора).

$(V, (\cdot, \cdot))$  евклидово       $\mathbb{Q} \in End(V)$ , не вырожд.

$\mathbb{Q}$  ортог. оператор (изометр.)  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б.  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathbb{Q}$  в этом базисе будет иметь блочно-диагон. вид.

где  $\lambda_i = \pm 1$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \\ & \mathbb{D} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$$

Причем, матрица оператора  $\mathbb{Q}^*$  будет также иметь блочно диагон. вид

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix} & & \\ & \boxed{\Phi_1^T} & \\ & & \ddots \\ & & \boxed{\Phi_m^T} \end{pmatrix} = \Lambda^T \quad \Phi_j \Phi_j^T = E \quad (\Phi_j^{-1} = \Phi_j^T)$$

*Доказательство.* см. теорему о канон. виде матрицы норм. опер. в евкл. про-ве

$\mathbb{Q}$  ортог.  $\Leftrightarrow \mathbb{Q}$  (нормал. + все корни хар. мн-на  $\chi$  по модулю = 1)  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{с.ч. } \lambda_s = \pm 1 \\ \text{компл. корни } |\alpha_j + i\beta_j| = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} = 1 \end{array} \Rightarrow \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

Замечание.  $\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1 \quad \alpha_j = \cos \phi \quad \beta_j = \sin \phi$

$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow$  поворот соотв. коорд пл-ти на угол " $-\phi$ "

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} \right) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{поворот на угол } \pi$$

$-1 \Leftrightarrow$  "отражение" относительно соотв. коорд. пл-ти

?  $\Phi_j$  неодн.  $=$  ...

$\mathbb{Q}$  ортог. преобразование  $\equiv$  последовательные повороты и отражения относительно коорд. осей

**Следствие 1.**  $\forall$  ортог. матрицы  $Q$  ( $Q^T = Q^{-1}$ )

$\exists$  ортог. матрица  $T$  ( $T^T = T^{-1}$ ), т.ч.

$$T^{-1}QT = T^TQT = \begin{pmatrix} & & \\ \text{diag}(Q) & & \\ & & \end{pmatrix}$$

где  $\pm 1$  с.ч.  $Q$

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j \pm i\beta_j \text{ компл. корни } \chi_Q \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$$

## 10.4 Разложения матриц: LU, Холецкого, QR и полярное

**Определение 1.**

$$L_{low} = (l_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{называется нижняя (левая) треугольная матрица}$$

Если  $l_{ii} = 1 \forall i = 1 \dots n$ , то добавляют унитреугольную

$$U_{up} = (u_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & u_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{называется верхняя (правая) треуг. матрица.}$$

Если  $u_{ii} = 1 \forall i = 1 \dots n$ , то добавляют унитреугольную.

$$\text{Определение 2. } A_{n \times n} = (A_{ij}) \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & \ddots & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{угловая матрица}$$

$$\Delta_k = \det A_k - \text{угловой минор } A \quad \Delta_1 = a_{11} \quad \Delta_n = \det A$$

**Теорема 1** ( $LDU$  – разложение  $A_{n \times n}$ ).

$$\forall k = 1 \dots n-1 \quad \Delta_k \neq 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists! L \text{ унитреугольная} \\ &\exists! U \text{ унитреуг.} \\ &\exists! D = \text{diag}(d_1 \dots d_n), d_i \neq 0 \quad i = 1 \dots n-1 \end{aligned}$$

$$A = LDU$$

$$A = \underbrace{LDU}_{\text{унитреуг.}} = \left. \begin{array}{l} \boxed{LDU} = \tilde{L}U \\ \tilde{L} \text{ нижнетреуг.} \\ L \boxed{DU} = L\tilde{U} \\ \tilde{U} \text{ верхнетреуг.} \end{array} \right\} - LU \text{ разложение (не единств. образом определяется)}$$