Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

4 июня 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. *U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$*
Линейным отображением $\mathcal{A}$ называется $\mathcal{A} : U \to V$, обладающее свойством линейности:
$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$
$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda\mathcal{A}(v)$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно"выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}\mathbb{0}_U = \mathbb{0}_V$

Примеры.

1. $\mathbb{0}$ – нулевое отображение $U \to V$
   $\forall u \in U : \mathbb{0}u = \mathbb{0}_v$
2. $\mathcal{E}$ – тождественное отображение: $V \to V$
   $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n
   $\mathcal{A} : V \to V$
   $\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор
   $\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda\mathcal{A}p_2$
   Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
4. $U = \mathbb{R}^n$ $V = \mathbb{R}^m$
   $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m\times n}$
   $\mathcal{A} : x \in U \to y = \mathcal{A}x \in V$
   $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda\mathcal{A}x_2$
5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K$ $\mathcal{A} : U \to V$
Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение
$\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$
$\mathcal{B} : U \to V$ $\forall u \in U$ $\mathcal{B}u = \lambda\mathcal{A}u$

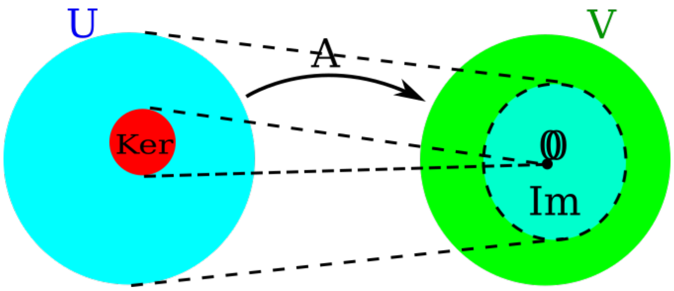
Определение 3. *Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \to V$ называется $\mathcal{C} : U \to V$*
$\forall u \in U$ $\mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$ $\quad \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ *– отображение противоположное $\mathcal{A}$*
$\forall u \in U$ $(-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$

$L(U, V) = Hom_K(U, V) = Hom(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$
$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V.
Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$
Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).
Значит $\quad \boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$ – *ядро линейного отображения.*

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \ \forall u \in U\} =$
$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$ – *образ линейного отображения.*



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - это подпространства соответственно пространств U и V. То есть они замкнуты относительно линейных операций.
Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U, то
$\boxed{dim\ Ker\mathcal{A} = def\mathcal{A}}$ – дефект линейного отображения.
Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V, то
$\boxed{dimIm\mathcal{A} = rg\mathcal{A}}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфно между* U *и* $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $Im\mathcal{A} = V$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$ *тривиально*

Доказательство. $\mathcal{A}$ изоморфно $\Leftrightarrow$ взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Пусть $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$
$v_1 = \mathcal{A}u_1 \ v_2 = \mathcal{A}u_2$
$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$ т. к. ядро тривиально.
Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюрьекцию. ■

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
–*инъективно, если* $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
–*сюръективно, если* $Im\mathcal{A} = v$
–*биективно* $\equiv$ *изоморфизм, если инъекция + сюръекция.*
–*эндоморфизм* $\equiv$ *линейный оператор, если* $U \equiv V$
$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$
–*автоморфизм* $\equiv$ *эндоморфизм + изоморфизм.*
$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. *Произведением линейных отображений* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$
$\mathcal{A} \in L(W, V) \quad \mathcal{B} \in L(U, W) \quad U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$
называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, *которое является композицией функций, определяющих отображения* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$

$\forall u \in U : (\mathcal{AB})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$

Очевидно, $\mathcal{C}$ – линейное отображение.

$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$

Упр:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм
2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$

   $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{AB}_1 + \mathcal{AB}_2$ – дистрибутивность
3. $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$ – ассоциативность
4. $\lambda\mathcal{AB} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$ – единица $\mathcal{EA} = \mathcal{AE}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ *изоморфно.*

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$

$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$

Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения $\mathcal{A}$ на линейное подпространство U_0 называется

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V \quad \forall u \in U_0 \ \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$

Утверждение. *$\mathcal{A}$ изоморфизм $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ – изоморфизм*

Примеры.

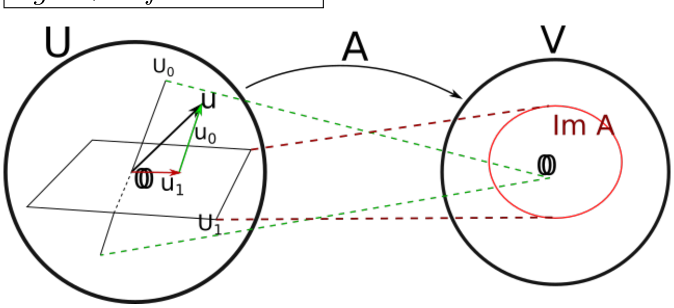
1. $\mathbb{0} : U \to U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2. $\mathcal{E} : U \to U$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \quad \mathcal{A} : P_n \to P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4. $x \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.

   Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists\mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.

   То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$



Доказательство. $U_0 = Ker\mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U:

$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\}$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \qquad Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}_1$ – изоморфизм? $Im\mathcal{A}_1 = Im\mathcal{A}$ – сюръекция

$\left.\begin{array}{c} \forall w \in Ker\mathcal{A}_1 \in U_1 \\ KerA_1 \subset KerA = U_0 \end{array}\right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow Ker\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфизм.

$U_1 \cong Im\mathcal{A} \Leftrightarrow dimU_1 = dim(Im\mathcal{A})$ – инъекция.

Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $dimU = dimU_0 + dimU_1 = \underbrace{dimKer\mathcal{A}}_{def\mathcal{A}} + \underbrace{dimIm\mathcal{A}}_{rg\mathcal{A}}$ ■

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма)**.**
$\mathcal{A} \in L(U, V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A}$ *изоморфно*
2. $dimU = dimV = rg\mathcal{A}$
3. $dimU = dimV$
   $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in End(V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
2. $dimV = rg\mathcal{A}$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$\forall u \in U \ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\mathcal{A}\xi_i$ Достаточно знать, как $\mathcal{A}$ работает на базисных векторах $\xi_1 \dots \xi_n$

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \qquad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m\times n}}$ матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ относительно базисов (ξ, η)

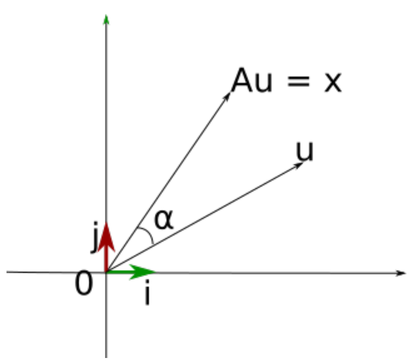
Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$
$A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора
$Ae_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

Примеры.

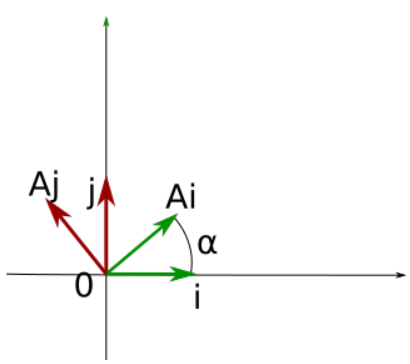
1. $\mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E} e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

2.
$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$
$$\mathcal{E} e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$
$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \to e'}$$

3.



$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$v = \mathcal{A} u$
Поворот векторов в плоскости на угол α.
Очевидно, линейный оператор.



$\mathcal{A}_i = \cos\alpha i + \sin\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$
$\mathcal{A}_j = -\sin\alpha i \cos\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$
$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{A}: \overset{1,t,t^2}{p_2} \to \overset{1,t,t^2}{p_2}$

$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}: \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t}{p_1}$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m\times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм $\equiv$ биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \to A_{m\times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m\times n} = (a_{ij})$

$U \ \xi_1 \dots \xi_n$ базис $\qquad \mathcal{A}: U \to V$

$V \ \eta_1 \dots \eta_m$ базис $\qquad \mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \in V$

$\forall u \in U \ \ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$

$\mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \ \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$

$\forall \lambda \in K \ \ \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda\mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}n_j + \lambda\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность $\Rightarrow$ изоморфизм. ∎

$\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$

$End(V) \cong M_{n\times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$V\eta_1 \dots \eta_m \qquad u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^{m} v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \underset{\xi,\eta}{\leftrightarrow} A$$

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} u_i a_{ji})\eta_j$$

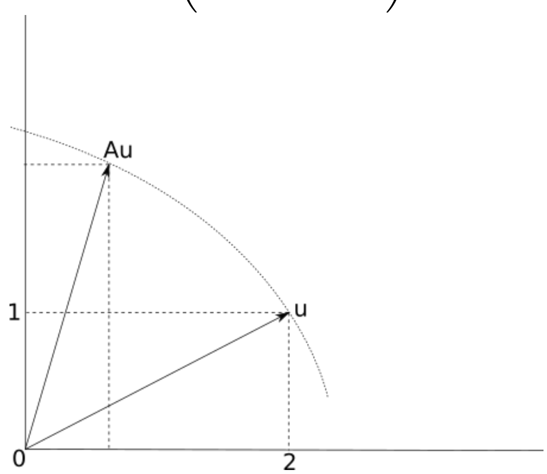
Так как координаты определяются единственным образом:

$$\boxed{v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} u_i} \leftrightarrow \quad \boxed{v = Au} \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ поворот на угол α

   $$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

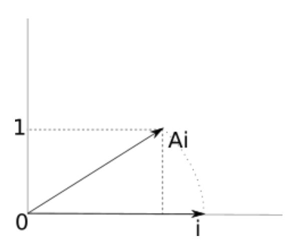
   $$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

   $$\boldsymbol{u} \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mathcal{A}u} \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

   $$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

2. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t,t^2}{p_2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overbrace{3t^3 + 6t + 4}^{u(t)})' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi,\eta)} A$

$\quad \xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$

$T_{\eta\to\eta'}$ – *матрица перехода*

$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi',\eta')} A'$

$\quad \eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T^{-1}_{\eta\to\eta'} \cdot A \cdot T_{\xi\to\xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \underset{\xi_1\dots\xi_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\rightrightarrows} & \underset{\eta_1\dots\eta_m}{V} \\ \mathcal{E}_u \uparrow\upharpoonleft & & \downharpoonleft\uparrow \mathcal{E}_v \\ \underset{\xi'_1\dots\xi'_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\to} & \underset{\eta'_1\dots\eta'_m}{V} \end{array}$$

$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T^{-1}_{\eta\to\eta'} A T_{\xi\to\xi'}$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$

$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$

$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T^{-1}_{\eta\to\eta'}$ Смотри пример 2 ■

Следствие 1.

$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1\dots e_n}{V} \to \underset{e_1\dots e_n}{V}$

$e_1 \dots e_n$ *базис* $V \leftrightarrow A$

$e'_1 \dots e'_n$ *базис* $\leftrightarrow A'$

$\mathcal{A} : \underset{e'_1\dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1\dots e'_n}{V}$

$T = T_{e\to e'}$

$\boxed{A' = T^{-1}AT}$

Замечание. В условиях теоремы $v = \mathcal{A}u \begin{array}{l} \xleftrightarrow{(\xi,\eta)} v = Au \\ \xleftrightarrow{(\xi',\eta')} v' = A'u \end{array}$

$V = T_{\eta\to\eta'}V'$

$U = T_{\xi\to\xi'}U'$
$T_{\eta\to\eta'}v' = AT_{\xi\to\xi'}u'$
$v' = \underbrace{\boxed{T^{-1}_{\eta\to\eta'}AT_{\xi\to\xi'}}}_{A'}u'$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{u} \leftrightarrow v = Au$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.

$v' = A'u'$

Определение 1. $A_{m\times n}$

$ImA = span(A_1, A_2, \dots A_n) = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i A_i | \alpha_i \in K\} =$
$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) | x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$

$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$rgA = dimImA$ — *ранг матрицы*

$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) | Ax = \mathbb{0}\} = \{$*множество решений СЛОУ* $\}$ — *ядро матрицы*

$dimKerA = n - rgA = defA$ — *дефект матрицы*

$\boxed{rgA + defA = n}$ — *аналогично теореме о ранге и дефекте*

Теорема 1. $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{\begin{matrix} rg\mathcal{A} = rgA \\ def\mathcal{A} = defA \end{matrix}}$,

где матрица A *– матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств* U *и* V*.*
$rg\mathcal{A}$*,* $def\mathcal{A}$ *инвариантны относительно выбора базиса.*

Доказательство. $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi,\eta)}{A}$ $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U
$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V
$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$
$\mathcal{A}\xi_i \underset{\cong}{\overset{\leftrightarrow}{}} A_i$
Координатный изоморфизм.
Пусть $rgA = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.
По свойствам изоморфизма это означает, то из $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$ k линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dimIm\mathcal{A} = k$

$$\begin{matrix} dimU & = & rg\mathcal{A} & +def\mathcal{A} \\ \| & & \| & \\ n & & rgA & \\ & & \| & \\ & & k & \end{matrix}$$

$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim$ пространства решений $Ax = 0 = defA$ ∎

Следствие 1. *$\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow$ A невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.*

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{matrix} defA = 0 \\ dimU = dimV \end{matrix} \Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow A$ невырожденная. ■

Теорема 2. *$det\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $det\mathcal{A} = detA$, где A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.*

Доказательство. $V\ e_1 \dots e_n$

$det\mathcal{A} = det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$

$\mathcal{A}e_k = \sum\limits_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} =$ (det n-форма, т. е. полиномиальная форма)

$= \sum\limits_{i_1=1}^{n} \sum\limits_{i_2=2}^{n} \dots \sum\limits_{i_n=n}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}\ det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) =$ (n-форма – 2 одинаковых аргумента $\Rightarrow det = 0$)

$= \sum\limits_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \underbrace{\overbrace{det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}^{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)}\quad det(e_1 \dots e_n)=1}}_{\text{все разные}} = \sum\limits_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = detA$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$T = T_{e \to e'}$

$det\mathcal{A} = detA' \stackrel{?}{=} detA$

$A' = T^{-1}AT$

$detA' = detT^{-1} \cdot detA \cdot detT = detA$ ■

Определение 2. *A, B называются подобными, если*
$\exists$ невырожденная $C : B = C^{-1}AC$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$A' = T^{-1}AT$

A, B подобны $\Rightarrow detA = detB$

Следствие 1. *f – n-форма на V*

$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \boxed{f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = det\mathcal{A}\ f(\xi_1 \dots \xi_n)}$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$\underbrace{g(\xi_1 \dots \xi_n)}_{n\text{-форма}} = det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$

$det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\text{смотри док-во теоремы}} = det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum\limits_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$

$\mathcal{A}e_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$ ■

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n \times n}$

$AB = (AB_1\ AB_2 \dots AB_n)$

$det(AB) = det(AB_1 \dots AB_n) =$

$= detA \cdot det(B_1 \dots B_n) = detA \cdot detB$

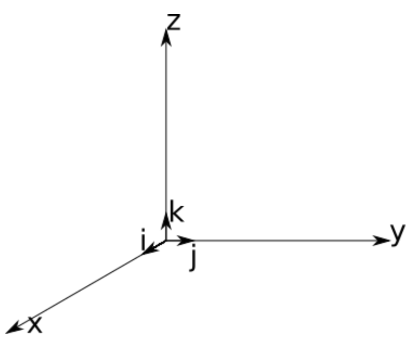
Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$
$det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Доказательство. $det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det(AB) = detA \cdot detB = det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{B}$ ∎

Следствие 3. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
$\Leftrightarrow det\mathcal{A} \neq 0$
Причем $det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathcal{A}}$

Доказательство. Из следствия 2
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$
$det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{A}^{-1} = det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$ ∎

Примеры. V_3



$V_{abc\text{–правая тройка}} = \underset{\text{смешанное пр-е}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} = f(\underset{\text{3-форма}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}})$
$\mathcal{A} \in End(V_3)$ $u \in V_3 \to v = \mathcal{A}u \in V_3$
Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$\mathcal{A}(V_{(\overline{a}\overline{b}\overline{c})}) = f(\mathcal{A}\overline{a}, \mathcal{A}\overline{b}, \mathcal{A}\overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot V(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$
$\lambda = |det\mathcal{A}|$ Объем увеличится в λ раз.

1. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
   Оператор подобия
   $\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}\overline{i} = \mu\overline{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A?$
$$\mathcal{A}\overline{j} = \mu\overline{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

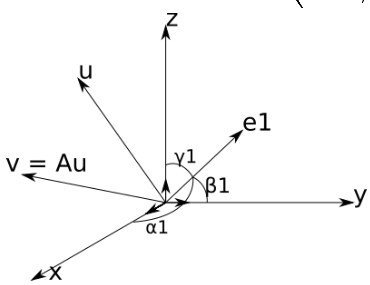
$$\mathcal{A}\overline{k} = \mu\overline{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

   $\lambda = |det\mathcal{A}| = |detA| = |\mu^3|$

2. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$

Оператор поворота

$$\mathcal{A} : \quad \begin{array}{l} \bar{i} \to e_1 \nearrow \\ \bar{j} \to e_2 \to \\ \bar{k} \to e_3 \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \end{array}$$



$|e_i| = 1$
$(e_i, e_j) = 0$
$i \neq j$

$$"\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})" = det\mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$detA = |\cdots| \underbrace{e_1 e_2 e_3}_{\text{Смешанное произведение}} = 1$$

$$(detA)^2 = detA \cdot detA^T = det(AA^T) = det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = detE = 1$$

$$|detA| = 1$$

Утверждение. *A, B подобные матрицы $\Rightarrow trA = trB$*
$trace =$ след

Доказательство. A, B подобные $\Rightarrow$
$\exists\ C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{"-1"}(AC)ji = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{''-1''} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_{ki} C_{ij}^{''-1''}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = trA$$

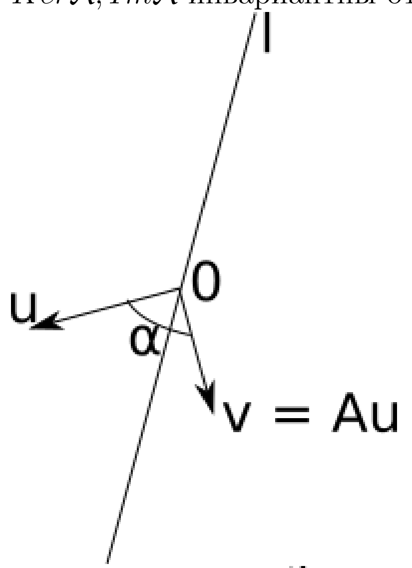
$$\boxed{\delta_{kj} = \left[\begin{array}{l} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{array}\right.} \quad CC^{-1} = E \qquad \blacksquare$$

Определение 3. *$tr\mathcal{A} = trA$, где A – матрица оператора в некотором базисе.*
$tr\mathcal{A} = trA = trA'$ — не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

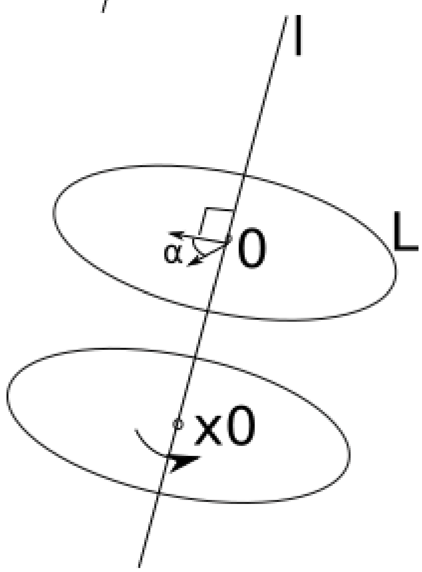
Определение 4. $L \subset V$ L *инвариантно относительно* $\mathcal{A} \in End(V)$ *если* $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

Примеры.

1. $\mathbb{O}, V$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$
2. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$



$\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
Поворот вектора(пр-ва) относительно оси l на угол α



Плоскость $\perp$ l инвариантна относительно $\mathcal{A}$
$P = x_0 + L$ инвариантно

Теорема 3. $L \subset B$ $\mathcal{A} \in End(V)$. *Линейное пространство инвариантно относительно* $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \exists$ *базис пространства* V, *т.ч. матрица оператора* $\mathcal{A}$ *в этом базисе будет иметь вид:* $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \mathbb{O} & A_3 \end{array}\right)$
$A_1 k \times k$ *где* $k = dimL$

Доказательство. $L = span\underbrace{(e_1 \dots e_k)}_{\text{базис}}$
Дополним до базиса $V : e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \underset{1\le i\le k}{\mathcal{A}e_i} \in L = \sum_{m=1}^{k} a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^{n} 0\cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k+1\le i\le n}{\mathcal{A}e_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1i} & \\ \vdots & A_i^1 \\ a_{ki} & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_i^{2,3} \\ \dots \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Следствие 1. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно* $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$ *базис пр-ва* V*, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *будет иметь* <u>*блочно-диагональный вид:*</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\Big(\underset{\text{размерность матрицы}}{A^i}\Big) = dimL_i$$

Доказательство. $L_1 = span(\underset{\text{базис}}{e_i^1 \dots e_i^{i_k}})$

т.к. $\bigoplus$, то базис V – объединение базисов L_i

$V = span(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overset{L_1}{\underline{1\dots i_1}} & \overset{L_2}{\underline{i_1+1\dots i_2}} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}}\right\} \text{отвечает позиции базисных элементов пр-ва } L_i \text{в базисе } V \qquad \blacksquare$$

Следствие 2. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

Доказательство. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \Rightarrow \forall\ u \in V \ \ \exists! u = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in L_i$

$Im\mathcal{A} \subset \sum\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

Верно и "$\supset$"

Пусть $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in V) \in Im\mathcal{A}$

$Im\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$\bigoplus$ прямая?

$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \mathbb{0} \longleftarrow$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнктны $\nwarrow\Rightarrow \forall i : v_i = \mathbb{0}$

$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i}$ дизъюнктны $\Rightarrow \bigoplus$ ∎

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(v) \quad V$ линейное пространство над K

Определение 1. $\lambda \in K$ – ***собственное число*** *(с.ч.) линейного оператора* $\mathcal{A}$*, если* $\exists$ $\boxed{v \in V \neq \mathbb{0}}$*, который называется* ***собственным вектором*** *(с.в.), такой что* $\boxed{\mathcal{A}v = \lambda v}$

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$

Определение 2. $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \{$*с.в.* v *и* $\mathbb{0}\}$ *называется собственным подпространством.* $\boxed{\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda}$ – *геометрическая кратность с.ч.*

$\gamma \geq 1$

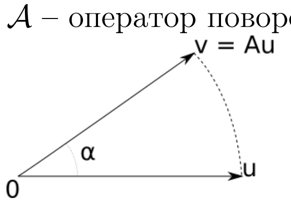
V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$v \in V_\lambda \ \ \mathcal{A}v = \lambda v \overset{?}{\in} V_\lambda$

$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda\mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ – оператор подобия:
   $\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$
   μ с.ч. $\quad V_\lambda = V$
2. $\mathcal{A}$ – оператор поворота на плоскости на угол α



$\alpha \neq \pi k \Rightarrow$ нет с.в.

3. Пусть λ с.ч.$=0$ $\quad \mathcal{A}v = \mathbb{0}$ с.в. $\neq \mathbb{0} \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow Ker\mathcal{A}$ нетривиально $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ не автоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ необратимо $\Leftrightarrow det\mathcal{A} = 0$
4. $\mathcal{A} : V \to V$
   $v_1 \dots v_n$ базис, т.ч. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$
   Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$
   $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
   λ – с.ч. v с.в. $\neq \mathbb{0} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ нетривиально $\Leftrightarrow det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – *характеристический многочлен оператора* $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$ базис $\quad \mathcal{A} \leftrightarrow A$
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = det(A - tE)$ т.к. det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (\underbrace{a_{11} + \dots + a_{nn}}_{trA = tr\mathcal{A}}) t^{n-1} + \dots + \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$$

По теореме Виета: $det\mathcal{A} = \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_n}_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)}$

$\underline{\underline{\lambda \in K}}$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \;\; (\underline{\underline{\lambda \in K}})$
λ корень характеристического многочлена.
$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.
$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни χ_A будут с.ч.
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$
$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. *Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется* ***спектром*** *линейного оператора.* $(\lambda, \alpha(\lambda))$
Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.
$\alpha(\lambda) = 1 \; \forall \; \lambda$

Немножко про алгебраическую кратность
$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod\limits_{a\text{–корень}} (t - a)^{m_a}$

a–корень $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \,\vdots\, (t - a)$

a – корень f **кратности** $m \Leftrightarrow \begin{matrix} f \mid (t-a)^m \\ f \nmid (t-a)^{m+1} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow f(t) = (t-a)^m g(t)$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a$ $\quad$ a–корень с учетом кратности

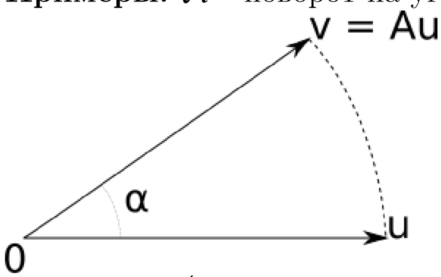
$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$

$(-1)^n t^n + \ldots = (-1)^n (t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \ldots = (-1)^n (t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)$

$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ с.ч.

Примеры. $\mathcal{A}$ – поворот на угол α



$\bar{i}\ \bar{j}$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \begin{pmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{pmatrix} =$$

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha t + t^2 + sin^2\alpha = t^2 - 2\cos\alpha t + 1$

$D = 4\cos^2\alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$

нет вещ. корней $\Rightarrow$ нет с.ч.

$K = \mathbb{R}$

Теорема 1. *λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow$* $\boxed{1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = dimV_\lambda = span(\underbrace{v_1 \ldots v_k}_{\text{базис}})$

V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 \end{array}\right) \quad A^1_{k\times k}$$

Базис $= v_1 \ldots v_k v_{k+1} \ldots v_n$

$$\mathcal{A} \underset{i=1\ldots k}{v_i} \in V_\lambda = \lambda v_i \leftrightarrow A^1_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & \\ 0 & \lambda - t & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 - tE_{n-k} \end{array}\right) \underset{\text{св-ва } det}{=} \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{\mathcal{A}^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$ ■

Теорема 2. *$\lambda_1 \ldots \lambda_m$ – различные с.ч. $\mathcal{A}$*

$v_1 \ldots v_m$ соответствующие им с.в. $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \ldots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1 \quad \lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq \mathbb{0}$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m-1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

   От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A}$,

   а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

   Пусть $v_m = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$

   $$\begin{array}{l} \mathcal{A}_{v_m} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i \\ || \\ \lambda_m v_m = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i \end{array}$$

   $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\underset{\overset{\nparallel}{0}}{\lambda_i - \lambda_m}) v_i = \mathbb{0}$ $\;v_i$ линейно независим по инд. предположению

   $\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall\; i = 1 \dots m-1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow v_m = \mathbb{0}$ — Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть $\mathbb{0}$

$\blacksquare$

Следствие 1. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ *различные с.ч.* $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ *дизъюнктны.* $\left(\bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ \text{с.ч.}}} V_\lambda\right)$

Доказательство. $v_1 + \ldots + v_m = \mathbb{0} \quad v_i \;\in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq \mathbb{0} \Rightarrow$ это слагаемое с.в. $\Rightarrow$ противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall\; i : v_i = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктны. $\blacksquare$

Теорема 3. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \to L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \qquad A_{k_i \times k_i}$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства } det}{=} |A^1 - tE_{k_1}||A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\begin{array}{cccc} \chi_{A^1}(t) & \chi_{A^2}(t) & \dots & \chi_{A^m}(t) \\ || & || & & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & & \mathcal{A}^m \end{array}$$

$\blacksquare$

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n \times n} \quad \lambda$ с.ч. $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq \mathbb{0} \quad Ax = \lambda x$

$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейный оператор}}}{Ax}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$

$t_1 = 0 \;\; \alpha(0) = 2$

$t_2 = 1 \;\; \alpha(1) = 1$

$V_\lambda = Ker(A - \lambda E) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in]R$

$V_{\lambda_1} = 0 = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$

$\lambda_2 \;\; 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma(1) = 1$

7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.) Проекторы. Спектральное разложение о.п.с. Функция от матрицы.

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V)$

$\mathcal{A}$ называется о.п.с., если $\exists$ базис пространтсва V, т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид $\Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$ базис V из с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda с.ч.\ \mathcal{A}} V_\lambda$

$V = span(v_1 \ldots v_n)$

Теорема 1. *Пусть $\sum\limits_{\lambda с.ч.\ \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = dimV$*

$\Leftrightarrow$все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. $\mathcal{A}$

$\boxed{\mathcal{A} о.п.с. \Leftrightarrow \forall с.ч. \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = dimV = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \gamma(\lambda) \underset{\nearrow}{=} \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda)$

$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \qquad \nearrow$

$\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \to \quad \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$ ■

Следствие 1. $\sum\limits_{\lambda c.ч.} \alpha(\lambda) = n = dimV$

$\mathcal{A}$о.п.с. $\Leftarrow$ спектр – простой.

(n попарно различных с.ч. $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$)

Определение 2. *$A_{n\times m}$ называется диагонализируемой, если $\exists$ невырожденная $T_{n\times n}$, т.ч.*
$T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$
("A подобна диагональной матрице")

Следствие 2. *Если матрица $A_{n\times n}$ – матрица некоторого о.п.с. $\mathcal{A}$, то она **диагонализируема**. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.*

Доказательство.

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{A} & \text{о.п.с.} & \Leftrightarrow & \exists\ \text{базис} & \underset{\text{с.в.}}{v_1 \ldots v_n} \\
\updownarrow & \underset{\text{базис}}{(e_1 \ldots e_n)}V & & & \underset{\text{с.ч.}}{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \\
A & & & & \quad\updownarrow \\
 & & & & \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

$T = T_{e\to v}$ невырожденная.

$\Lambda = T^{-1}AT$

$A = T\Lambda T^{-1}$ ■

$$\boxed{\begin{array}{r} A \text{ диагонализируема } \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \\ \forall\ \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \end{array}}$$

Определение 3.

$$\begin{array}{ccc}
V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i & & p_i : V \to L_i \subset V \\
\nwarrow\Leftarrow & \Leftrightarrow & \Rightarrow\searrow \\
\underset{\textit{линейное подпр.}}{L_i \subset V} & \forall v \in V\ \exists! : v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i &
\end{array}$$

$\boxed{\forall\ v \in V \quad \mathcal{P}_i v \overset{def}{:=} v_i} \qquad i = 1 \ldots m$

Оператор проектирования (проектор)

$\mathcal{P}_i \overset{?}{\in} End(V)$

$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_i$ линейный оператор.

$u + \lambda V = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in L_i + \lambda \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\underbrace{u_i + \lambda v_i}_{\in L_i})$

$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$

Свойства проекторов:

1. $\forall\ i \neq j \quad \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij = \mathbb{0}$
2. $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\varnothing_i^k = \mathcal{P}_i)$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
4. $Ker\mathcal{P}_i = \sum\limits_{j\neq i} L_j \quad \forall i = 1 \ldots m$

   $Im\mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

1. $\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij(v) = \mathcal{P}_iv_j \in L_j = \mathbb{0} \Rightarrow \mathcal{P}_i\mathcal{P}_ij = \mathbb{0}$

   Т.к. L_i дизъюнктны

   $v = v_1 + v_i + \underset{\text{Ед. образом}}{v_j} + \ldots + v_n$

   $v_j = v_j + \mathbb{0}$
2. $\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \underbrace{\mathcal{P}_i(v)}_{v_i \in L_i} = v_i = \mathcal{P}_i v$

   Т.к. верно $\forall v \in V$, то верно и для базиса $\Rightarrow$ операторы совпадают. $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$
3. $\forall v \in V(\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i)v = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_iv = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i = v = \mathcal{E}v \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} = \mathcal{E}$
4. $\mathcal{P}_i(v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_m) + \mathbb{0}$

   $= \sum\limits_{j\neq i} \underbrace{\mathcal{P}_iv_j}_{\mathbb{0}}$

   $$\boxed{\begin{array}{c}\sum\limits_{j\neq i} L_j \subset Ker\ \mathcal{P}_i \\ \text{т.к. } v = \bigoplus\limits_{j\neq i} L_j \oplus L_i\end{array}} \Rightarrow Ker\ \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j\neq i} L_j$$

   $Im\ \mathcal{P}_i = L_i$ по def $"\subset"$

   Верно "$\supset$" $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P}v_i = v_i$

∎

Утверждение. $\underset{i=1\ldots m}{\mathcal{P}_i \in End(V)} : V \to V$ *и выполнены свойства 1, 3* $\Rightarrow$

$\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{P}_i$ *(т.е.* $\mathcal{P}_i$ *проекторы на* $L_i = Im\mathcal{P}_i$*)*

Доказательство.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

   $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_i \stackrel{?}{=} \mathcal{P}_i$

   $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i\mathcal{E} = p_i \sum\limits_{j=1}^{m} \mathcal{P}_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \underset{\substack{|| \\ \mathbb{0} \\ i\neq j}}{\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j} = \mathcal{P}_i^2$
2. $v_1 + v_2 + \ldots + v_m = \mathbb{0}$

   $v_i \in Im\mathcal{P}_i$ дизъюнктно?

   $v_i = \mathcal{P}_iw_i\ w_i \in V$

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \underset{\uparrow}{=} \mathcal{P}_i(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j}}_{=\mathbb{0}}) = \mathbb{0}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j}_{=\mathbb{0}\ i\neq j} w_j) = \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i$$

$$\forall\ v \in V\ \mathcal{E}v = v = \sum_{j=1}^{m} \underset{v_j \in Im\mathcal{P}_j}{\underset{||}{\mathcal{P}_j v}} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{m} Im\mathcal{P}_j$$

■

Теорема 2 (О спектральном разложении о.п.с.). $v = \bigoplus\limits_{\lambda с.ч.} V_\lambda \qquad \underset{проекторы}{\mathcal{P}_\lambda : V \to V_\lambda}$

$\mathcal{A}$ *о.п.с.* $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda с.ч.} \lambda\mathcal{P}_\lambda \leftarrow$*спектральные проекторы*

Доказательство.

1. $\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$
2. $\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$
3. $\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E}$

$\forall v \in V$

$$\mathcal{A}v \underset{\substack{\uparrow \\ V=\bigoplus_\lambda V_\lambda}}{=} \mathcal{A}(\sum_\lambda v_\lambda \in V_\lambda) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{=\lambda v_\lambda} =$$

$$\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda\mathcal{P}_\lambda v$$

Доказательство верно $\forall$ векторного про-ва V. В частности для базиса $\Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda\mathcal{P}_\lambda}$ ■

Следствие 1. $A_{n\times n}$ ***диагонализируема*** $\Leftrightarrow\ \exists \underset{проекторы}{\mathcal{P}_{\lambda\ n\times n}}\ 1^\circ\ 2^\circ\ 3^\circ$

$$A = \sum_{\lambda с.ч.} \lambda\mathcal{P}_\lambda$$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1\ \alpha(\lambda_1) = \gamma(\alpha_1) = 2$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = span(v_1, v_2)$

$\lambda_2 = -1\ \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = span\ V_3$

$\Rightarrow$ о.п.с. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = span(V_1, V_2, V_3)$

$T_{e\to v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad \boxed{AT = T\Lambda}$

$\mathcal{P}_1 : V \to V_{\lambda_1} \subset V$

$\mathcal{P}_2 : V \to V_{\lambda_2} \subset V$

$\mathcal{P}_1'$ матрица $\mathcal{P}_1$ в базисе $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$– матрицы проекторов в базисе e(канонич.)

$\mathcal{P}_1 v_i = \left[\begin{array}{l} v_i, i = 1,2 \\ \mathbb{0}, i = 3 \end{array} \right.$

1° 2° 3°

$\mathcal{P}_1' + \mathcal{P}_2' = E$

$\mathcal{P}_1'\mathcal{P}_2' = \mathbb{0} \dots$

$\mathcal{P}_2'$ матрица $\mathcal{P}_2$ в базисе $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_i' = T^{-1}\mathcal{P}_i T \qquad i = 1,2$

$\mathcal{P}_i = T\mathcal{P}_i' T^{-1} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \mathbb{0} \\ \mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1 \end{array}$

$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$

Определение 4. $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$ – *последовательность матриц*
$\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall\ i,j\ \exists a_{ij} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^k$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\textit{Ряд.} \\ \textit{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{N} A_m}_{\substack{s_N \ \textit{частичная} \\ \textit{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \ \textit{аналитическая в}\ |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$e^x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}\ R = \infty\ \cos x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$

$\ln(1+x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad$ либо $x = 1$

Определение 5. *Функция от матрицы.*

$A_{n\times n}$

$f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m$, *где* $\boxed{\begin{array}{rcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{array}}$

$e^A = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

$\cos A = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A^{2m}$

Теорема 3. *f аналитическая в $|x| < R$*

$A_{n\times n}$ все с.ч. $|\lambda| < R$

*A **диагонализируемая** То есть:*

$\exists \underset{\textit{невырожд.}}{T} : \Lambda = T^{-1}AT$

$\exists \mathcal{P}_\lambda : A = \sum\limits_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

$\Downarrow$

1. $\underset{f(A)}{\exists} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$
2. $\underset{f(A)}{\exists} = \sum\limits_{\lambda \textit{с.ч.}} f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$

Доказательство.

1. $f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m$ $\qquad \boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x| < R \end{array}}$

   $A^m = (T\Lambda T^{-1})^m =$

   $= T\Lambda \underbrace{T^{-1}T}_{E} \Lambda T^{-1} \dots T\Lambda T^{-1} 1 =$

   $= T\Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$

   $f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m T\Lambda^m T^{-1} = T(\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m) T^{-1} =$

   $= T \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$

   $|\lambda_i| < R$

2. $A^m = (\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda)^m \underset{\substack{\lambda \neq \mu \\ \mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu - \mathbb{0}}}{=} \sum\limits_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda^m = \sum\limits_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$

   $f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m (\sum\limits_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda) = \sum\limits_{\lambda} (\underset{|\lambda| < R}{\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m = f(\lambda)}) \mathcal{P}_\lambda = \sum\limits_{\lambda} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$

■

Замечание. A диагон. $\Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$

$\Leftrightarrow A = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$

$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$

$f(A) = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$

$t \in \mathbb{R}$

$f(At) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$

$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$

$$\boxed{f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}}$$

$t^m A^m = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$

$$\boxed{f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda}$$

Примеры. e^{At}

$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$\chi(t) = det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$

$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$

$V_{\lambda_1} : \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array}\right)$

$V_{\lambda_1} = span \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$

$V_{\lambda_2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array}\right)$

$V_{\lambda_2} = span \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{v_3} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$

$\forall\ \lambda : \left.\begin{array}{rcl} \alpha(\lambda) & = & \gamma(\lambda) \\ \sum\limits_{\lambda} \alpha(\lambda) & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A$ диагонализируемая

$$T_{e\to v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \underset{i=1,2}{\rightarrow} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$A_{n\times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x}$ – производная

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \qquad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности $\quad \begin{matrix} (e^{At})' = Ae^{At} \\ e^{A\cdot 0} = E \end{matrix}$

$$e^{At} = \left(\sum_{\lambda \text{с.ч.}} e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda\right)' = \underline{\underline{\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda}}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_\mu \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_\lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda \underset{\mu=\lambda}{=} \underline{\underline{\sum_\lambda \lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda}}$$

Замечание. $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow detA \neq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \neq 0$
(все корни хар. многочлена)

$\sqsupset A$ диагонализируема. Все с.ч. $\lambda \neq 0$

$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$

$\Lambda\Lambda^{-1} = E$

$AA^{-1} = \underbrace{T\,\underbrace{\Lambda\,\underbrace{T^{-1}T}_{E}\,\Lambda^{-1}}_{E}\,T^{-1}}_{E} = E$

$A^{-1} = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda}\mathcal{P}_\lambda$

($AA^{-1} = E$ <u>упр.</u>)

$$\sqrt[m]{A} = T\,\sqrt[m]{\Lambda}T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[n]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\sqsupset$ все $\lambda_i \geq 0$

(m нечет $\Rightarrow \lambda$ любого знака)

$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$

$(\sqrt[m]{A})^m = T\,\underbrace{\sqrt[m]{\Lambda}\,\underbrace{T^{-1}T}_{E}\,\sqrt[m]{\Lambda}\,\underbrace{T^{-1}\dots T}_{E}\,\sqrt[m]{\Lambda}}_{\Lambda}\,T^{-1} = T\Lambda T^{-1} = A$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda}\mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.: $(\sqrt[m]{A})^m = A$)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \quad A^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$A^{-1} = \dfrac{1}{1}\mathcal{P}_1 + \dfrac{1}{(-1)}\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$

$A^2 = E$

7.6 Комплексификаци линейного вещ. пространства. Продолжение вещ. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V) \quad V$ над полем K

$$\chi(\lambda) \underset{\lambda \text{ корень}}{=0}$$

$\swarrow$

$K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$

Все корни $\lambda \in K$

Т.е. каждый корень с.ч.

$\sum\limits_{\lambda \text{с.ч}} \alpha(\lambda) = n = dimV$

$\searrow$ III

$K = \mathbb{R}$

Не все корни вещ.

т.е. $\exists \lambda \notin K = \mathbb{R}$

$\sum\limits_{\text{вещ.}\lambda\text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = dimV$

$\mathcal{A} \to A$?

I $\swarrow$

$\forall\ \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ – о.п.с. $\to A$ диагонализир.

$\searrow$ II

$\exists\ \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ не о.п.с.

$\to A$ приводится к Жордановой форме

Определение 1. V *– линейное пространство над* $\mathbb{R}$

$\forall\ x, y \in V \quad v := x + iy\ \in V_{\mathbb{C}}$

$\forall\ v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \quad \begin{matrix} x = Re\ v \\ y = Im\ v \end{matrix}$

Определим

1. $v = v' \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = x' \in V \\ y = y' \end{matrix}\right.$
2. $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{matrix}\right.$
3. $\forall\ \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   $$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\overbrace{\alpha x - \beta y}^{a \in V} + i\overbrace{\beta x + \alpha y}^{b \in V}}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

4. $\forall\ x \in V \leftrightarrow x + i\mathbb{0} \in V_{\mathbb{C}}$

   $V \subset V_{\mathbb{C}}$

   $\mathbb{0} \leftrightarrow \mathbb{0} + i\mathbb{0}$

Упр.: $V_{\mathbb{C}}$ *– линейное пространство над* $\mathbb{C}$

$\boxed{V_{\mathbb{C}} \text{ – комплексификация линейного вещественного пространства } V}$

Утверждение. $e_1 \dots e_n$ *базис* $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ *базис* $V_{\mathbb{C}}$

Т.е. $dimV = dimV_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$ *структуры над разными полями.*

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$?

– порождающая?

– линейно независимая?

1. $\forall\ v \in V_{\mathbb{C}}\quad v = x \in V + iy \in V = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j + i\sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j =$

$\sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\boxed{x_j + iy_j}}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n$ порождающая.

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j e_j = \mathbb{0} \qquad \begin{array}{c} \gamma_j \in \mathbb{C} \\ \gamma_j = \alpha_j + i\beta_j \end{array}$

$||$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\alpha_j}\, e_j}_{x} + i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\beta_j}\, e_j}_{y} = \mathbb{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathbb{0} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\alpha_j}\, e_j \\ y = \mathbb{0} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\beta_j}\, e_j \end{cases} \underset{e_1 \dots e_n \text{ линейно независ.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \forall\ j\ \alpha_j = 0 \\ \forall\ j\ \beta_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall j\ \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow \underset{\text{лин. незав.}}{e_1 \dots e_n}$ в $V_{\mathbb{C}}$

■

Определение 2. $z = x + iy \quad x, y \in V$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

вектор сопряженный к z:

$\overline{z} = x - iy$

$(\overline{\overline{z}} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \overline{\lambda}\overline{z})$

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix}$$

Утверждение. *$v_1 \dots v_m$ линейно незав. в $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \overline{v}_1 \dots \overline{v}_m$ линейно независимы в $V_{\mathbb{C}}$*

Очевидно, $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы $\Rightarrow \overline{v}_1 \dots \overline{v}_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j \overline{v}_j} = \overline{\mathbb{0}} = \mathbb{0} \\ || \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{\gamma}_j \overline{\overline{v}_j} = \sum\limits_{j=1}^{m} \underset{\text{линейно незав.}}{\gamma'_j v_j} \end{array}\right| \Leftrightarrow \forall j\ \gamma'_j = 0 = \overline{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow$ линейно независим.

■

$\boxed{rg(v_1 \dots v_m) = rg(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_m)}$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$

$V_{\mathbb{C}}$

$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i \underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$

Линейность?

1. *Аддитивность.* $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1+v_2)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1+\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

   Очевидно, из аддитивности $\mathcal{A}$

   $v_1+v_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
2. *Однородность*

   $\forall\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha+i\beta)(x+iy))=$

   $=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x-\beta y)+i(\alpha y+\beta x))=$

   $=\mathcal{A}(\alpha x-\beta y)+i\mathcal{A}(\alpha y+\beta x)=$

   $=\alpha\mathcal{A}x-\beta\mathcal{A}y+i\alpha\mathcal{A}y+i\beta\mathcal{A}x=$

   $=(\alpha+i\beta)\mathcal{A}x+i(\alpha+i\beta)\mathcal{A}y=\lambda\mathcal{A}x+i\lambda\mathcal{A}y=$

   $=\lambda(\mathcal{A}x+i\mathcal{A}y)=\lambda\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ – ***продолжение линейного вещ. оператора*** $\mathcal{A}$

с пространства V на его комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $$\left.\begin{matrix}\underset{\text{веществ.}}{e_1\dots e_n}\text{ базис } V(V_{\mathbb{C}})\\ \mathcal{A}\leftrightarrow A\\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\leftrightarrow A_{\mathbb{C}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A_{\mathbb{C}}=A$$

   Т.е. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр. $\mathcal{A}$
2. $\forall z\in V_{\mathbb{C}}\ \ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z}=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z}$

   $z=x+iy\ \ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z}=\overline{\underset{\text{вещ.}}{\mathcal{A}x}+i\underset{\text{вещ.}}{\mathcal{A}y}}=\mathcal{A}x-i\mathcal{A}y=$

   $=\mathcal{A}x+i\mathcal{A}(-y)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x-iy)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z}$
3. $$\begin{matrix}\chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) & \exists\, e_1\dots e_n\text{базис}V\\ || & & || & \mathcal{A}\leftrightarrow A\\ det(A-tE) & & det(A_{\mathbb{C}}-tE) & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\leftrightarrow A_{\mathbb{C}}=A\end{matrix}$$

   Все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ являются собственными числами $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
4. $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)=\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda)=0$

   Т.к. многочлен с вещ. коэф. $\Rightarrow\overline{\lambda}$ тоже корень.

   $\lambda=\alpha+i\beta$ корень $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}\quad \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\overline{\lambda})=0$

   v соотв. с.в.

   $\Rightarrow\overline{v}$ с.в. для $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$

   $$\boxed{\text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}: \begin{matrix}dimV_{\lambda}=dimV_{\overline{\lambda}}\text{(из утв. 2)}\\ \gamma(\lambda)=\gamma(\overline{\lambda})\end{matrix}}$$

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{v}\underset{\text{св-во 2}}{=}\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\underset{\text{с.в. для }\lambda}{\underset{\uparrow}{v}}}=\overline{\lambda v}=\overline{\lambda}\overline{v}\Rightarrow\overline{v}$ с.в. для $\overline{\lambda}$

"III": $\mathcal{A}\in End(V)$

V над $\mathbb{R}$

$\sum\limits_{\lambda\text{с.ч.}}\alpha(\lambda)<n=dimV$

Т.е. не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ **вещ.**

$\rightarrow$ строим$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\in End(V_{\mathbb{C}})\quad A_{\mathbb{C}}=A$

Все корни с.ч. $\Rightarrow$ матрица для $A_{\mathbb{C}}$ будет сведена либо к I, либо к II

Примеры.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$\chi_A(t) = det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$
$D = -36 < 0$
$\lambda_1 = 1$ с.ч. $\alpha(\lambda_1) = 1 \qquad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3 \ \alpha(2,3) = 1$
$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$
$\lambda_1 = 1 \ \ V_{\lambda_1}]span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = 2 + 3i \qquad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$
Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещ. чисел.
Только теперь арифметические операции с комплексными.
$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix}$
$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = span \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$
$\forall \lambda : \ \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$ диагонализир.
$T_{e \to v} = \begin{pmatrix} 1 & 3-3i & 3+3i \\ 2 & 5-3i & 5+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix} T^{-1} = \dots$

7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение 1. *Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен $\psi(t)$ называется **аннулятором элемента** $v \in V$, если $\psi(\mathcal{A})v = \mathbb{0}$*

$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$
$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in End(V)$
$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$
$\psi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$
$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$
Т.е. перестановочны.

Определение 2. *$\psi(t)$ аннулятор элемента $v \in V$ наименьший возможной степени называется **минимальным аннулятором элемента** v*

Теорема 1 (О минимальном аннуляторе элемента)**.**
$\mathcal{A} \in End(V)$

1. *$\forall v \in V$ $\exists!$ минимальный аннулятор v*
2. *$\forall$ аннулятор элемента делится на его минимальный.*

Доказательство.

1. (a) $\sqsupset v = \mathbb{0} \quad \psi(t) = 1$ Очевидно, минимальный аннулятор.
   $\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = \mathbb{0}$
   (b) $\sqsupset v \neq \mathbb{0}$
   $$\underbrace{\underbrace{(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}v,}_{\text{линейно независимая система}} \quad \mathcal{A}^m v}_{\text{линейно зависимая система}}$$
   $dimV = n$
   $m \leq n+1$
   $\mathcal{A}^m v = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$
   $\mathbb{0} = \mathcal{A}^m v - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum\limits_{k-0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow$ Алгоритм
   $\psi(t) = t^m - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k t^k$
   Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента v
2. ψ_1 – аннулятор v
   $\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$
   $deg\ r(t) < deg\ \psi(t)$
   $\mathbb{0} = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A}) \underbrace{\psi(\mathcal{A})v}_{=\mathbb{0}} + r(\mathcal{A})v = r(\mathcal{A})v \Rightarrow$
   $$\Rightarrow \left.\begin{matrix} r(t) \text{ аннулятор } v \\ deg\ r < deg\ \psi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$
   $\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdots \psi$

■

Определение 3. *Нормализованный многочлен $\phi(t)$* ***называется аннулятором*** *$\mathcal{A}$, если $\phi(\mathcal{A}) = 0$*
$(\Leftrightarrow \forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0})$
Аннулятор $\mathcal{A}$ минимальной степени называется ***минимальный многочленом***

Теорема 2 (о минимальном многочлене)**.** $\mathcal{A} \in End(V)$

1. *$\forall \mathcal{A}$ $\exists!$ минимальный многочлен*
2. *$\forall$ аннулятор $\mathcal{A}$ делится на минимальный многочлен*

Доказательство.
$e_1 \ldots e_n$ базис V
$\Rightarrow$ по Теореме 1 для $\forall e_j$ $\exists!$ ψ_j минимальный аннулятор e_j

$\psi_j(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0}$
$\psi(t) = $ Н.О.К. $(\psi_1 \dots \psi_n)$
$\forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \phi(\mathcal{A}) e_i =$
$= \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$
$\phi \vdots \psi_j \Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)$

$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0} \Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A}$
Давайте покажем, что у ϕ степень минимальная.
От противного.
$\exists \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A} \quad \sqsupset deg\ \phi_1 < deg\ \phi$
$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0} \Rightarrow \phi_1$ аннулятор элемента $e_j \overset{\text{по Теореме 1}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \underset{\text{аннулятор } e_j}{\phi_1} \vdots \underset{\text{минимальный аннулятор } e_j}{\psi_j} \Rightarrow \phi_1 \vdots \phi \Rightarrow deg\ \phi_1 \geq deg\ \phi$. Противоречие $\Rightarrow$
$\Rightarrow deg\ \phi$ минимальный $\Rightarrow$ п.2 доказан, т.к. $\forall$ аннулятор $\mathcal{A} \vdots \phi$
Единственность?
$\sqsupset \quad \phi_1, \phi \quad$ минимальные аннуляторы одной степени.
нормализов. $\Rightarrow$ ст. коэф. 1
$deg(\phi_1 - \phi) < deg(\phi) = deg(\phi_1)$
$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \underbrace{\phi_1(\mathcal{A})}_{=\mathbb{0}}v - \underbrace{\phi(\mathcal{A})}_{=\mathbb{0}}v = \mathbb{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \phi_1 - \phi$ аннулятор $\mathcal{A}$ меньшей степени $\Rightarrow$ противоречие <u>минимальн.</u> ∎

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \phi = ?$ минимальный многочлен

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_1?$

$$\underbrace{\underbrace{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{линейно независ.}} \quad \mathcal{A}^2 e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}^2 e_1 = -4e_1 + 4\mathcal{A}e_1$
$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\underbrace{\underbrace{e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{линейно независ.}} \quad \mathcal{A}^2 e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}^2 e_2 = 4\mathcal{A}e_2 - 4e_2$

$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\underbrace{e_2 = \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{лин. нез.}} \qquad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$

$\psi_3(t) = t - 2$

$\phi(t) = \text{Н.О.К. } ((t-2)^2, (t-2)) = (t-2)^2$

Теорема 3 (Кэли-Гамильтона)**.** $\mathcal{A} \in End(V)$

$\underbrace{\chi(t)}_{\textit{характерист. многочлен}} = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ *– аннулятор* $\mathcal{A}$

Доказательство. μ – не корень $\chi(t)$

$det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$

$e_1 \dots e_n$ базис v. $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$(A - \mu E)^{-1} = \dfrac{1}{det(A - \mu E)} B \leftarrow$ союзная матрица (прис-ная)

$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow$ определиитель $(n-1)$-го порядкка $A - \mu E$

Т.е. мн-н степени $n-1$ относительно μ

$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \ldots + B_1\mu + B_0$

$$\begin{array}{l} det(A - \mu E) \cdot E = \quad (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \ldots + B_1\mu + B_0) \\ || \\ \chi(\mu) \cdot E \\ || \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k \cdot E \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l} \mu^0: & \alpha_0 E = AB_0 & A^0 \\ \mu^1: & \alpha_1 E = AB_1 - B_0 & A^1 \\ \mu^2: & \alpha_2 E = AB_2 - B_1 & A^2 \\ \ldots & & \\ \mu^{n-1}: & \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2} & A^{n-1} \\ \mu^n: & \alpha_n E = -B_{n-1} & A^n \end{array}$$

$\chi(\mathcal{A}) = \chi(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \ldots + A^n B_{n-1}$

$- A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = \mathbb{0}$

χ – аннулятор $\mathcal{A}$ ■

Теорема 4. $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корнеq характеристического многочлена $\mathcal{A}$ совпадает с множеством корней минимального многочлена $\mathcal{A}$ (без учета кратности)

Доказательство. $\chi(t)$ – характерист., $\phi(t)$ – минимальный многочлен.

$" \Leftarrow "$ $\quad \sqsupset \phi(\lambda) = 0 \Rightarrow$ т.к. χ аннулятор $\mathcal{A}$, то по Т-ме 2 $\chi \vdots \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

$" \Rightarrow "$ $\quad \sqsupset \chi(\lambda) = 0$

1. $\sqsupset \lambda \in K \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \qquad \exists v \neq \mathbb{0} : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$
   $\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = \mathbb{0} \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$ минимальный аннулятор v
   Т.к. $\phi \vdots \psi \Rightarrow \lambda$ корень ϕ
   $\phi(\lambda) = 0$
2. $\lambda \notin K$ т.е. III случай: $K = \mathbb{R}$
   $\exists$ комплексные корни характерист. многочлена.
   $V \to V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$ базис $V \to$ базис $V_{\mathbb{C}}$
   $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \mathcal{A} e_j + i\mathcal{A}\mathbb{0} = \mathcal{A} e_j$
   $e_j = e_j + i\mathbb{0}$
   $\Rightarrow \forall k \ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$
   $\Rightarrow$ Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).
   Получим, что минимальные многочлены $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{A}$ совпадают.
   $$\left.\begin{array}{c}\text{Т.е. } \phi \text{ мин. мн-н для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Применим случай а) для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$
   $\Rightarrow \lambda$ с.ч. λ корень ϕ

■

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни $\chi : 2$

Корни $\phi : 2$

$\rightsquigarrow$ еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

Следствие 1.

1. $\underset{\text{характер. (аннулятор)}}{\psi} \ \vdots \ \underset{\text{минимальный (аннулятор мин.)}}{\phi}$
2. *deg* $\phi = n = dimV \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \chi(t) & = & \prod\limits_{\lambda} (t-\lambda)^{\alpha(\lambda)} \\ \phi(t) & = & \prod\limits_{\lambda} (t-\lambda)^{m(\lambda)} \end{array} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$$

7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$\phi(t) = \prod_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ $\qquad$ $\sum_{\lambda} m(\lambda) = m$

$deg\ \phi = m$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$dim P_{m-1} = m$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

$\phi(t) = \underbrace{(t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t)}_{\text{вз. просты}}$

$$\phi_\lambda(\lambda) \neq 0$$

$$\phi_\lambda(\mu) = 0$$

$$\mu \neq \lambda$$

Определение 1. $I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p \vdots \phi_\lambda\}$

Главный идеал*, порожденный многочленом* $\phi_\lambda =$

$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda \phi_\lambda\}$

I_λ *– линейное подпространство* P_{m-1}

$p_{1,2} \vdots \phi_\lambda \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \vdots \phi_\lambda$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$\mathbb{0} = \sum_{\lambda} \underbrace{f_\lambda \phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda \cdot \phi_\lambda + \underbrace{\sum_{\mu\neq\lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

$$\Rightarrow f_\lambda \cdot \underbrace{\phi_\lambda \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}_{\text{вз. просты}} \Rightarrow \underbrace{f_\lambda}_{deg\ f_\lambda = m(\lambda)-1} \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow f_\lambda \phi_\lambda \equiv \mathbb{0} \Rightarrow \text{Дизъюнктны}$$

2.
$$\begin{array}{ccc} dim P_{m-1} & = & m \\ \| & & \\ \sum_{\lambda} dim I_\lambda & = & \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \end{array}$$

$I_\lambda \subset P_{m-1}$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_\lambda$$

■

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1}\ \exists!\ p = \sum_{\lambda} p_\lambda$

$p_\lambda \in I_\lambda$

$$\boxed{1 = \sum_{\lambda} p_\lambda \text{ – полиномиальное разложение единицы}}$$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{cccc} p_\lambda & \cdot \; p_\mu & \vdots & \phi \\ \| & \| & & \\ f_\lambda\phi_\lambda & f_\mu\phi_\lambda & = & \eta\cdot\phi \\ & \uparrow & & \\ & (t-\lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

2. $\forall\lambda\ m(\lambda)=1$

   Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

   $f_\lambda = const \quad (def\ f_\lambda = m(\lambda)-1=0)$

Теорема 2 (Лагранжа)**.**
$\forall\lambda : m(\lambda)=1 \Rightarrow$
$\forall p \in P_{m-1}\ \ p(t)=\sum\limits_\lambda \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\cdot\phi_\lambda(t)$

Доказательство.

корень $\phi \to \mu \neq \lambda$ $\begin{array}{l}\phi_\lambda(\mu)=0\\ \phi_\lambda(\lambda)\neq 0\end{array}$

$$p(t)\ \sum_\lambda p_\lambda(t) = \sum_\mu \underbrace{\boxed{f_\mu}}_{\substack{const,\ \text{т.к.}\\ \text{корни взаимно}\\ \text{просты}}}\cdot\phi_\mu(t)$$

$p(\lambda)=f_\lambda\cdot\phi_\lambda(\lambda)\Rightarrow\forall\lambda : f_\lambda=\frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$

$\phi(t)=\prod\limits_\mu(t-\mu)$

$$\phi'(t)=\sum_\mu\underbrace{\prod_{\lambda\neq\mu}(t-\lambda)}_{\phi_\mu(t)}=\sum_\mu\phi_\mu(t)$$

$$\phi'(\lambda)=\sum_\mu \underset{\substack{\|\\ 0\ \mu\neq\lambda}}{\phi_\mu(\lambda)} = \phi_\lambda(\lambda)\ \Rightarrow f_\lambda=\frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\Rightarrow p=\sum_\lambda\frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$$ ■

Следствие 1. $\forall\lambda : m(\lambda)=1$

$1=\sum\limits_\lambda p_\lambda \Rightarrow \boxed{t=\sum\limits_\lambda \lambda p_\lambda}$

Доказательство. По теореме: $1=\sum\limits_\lambda \boldsymbol{p_\lambda}=\sum\limits_\lambda f_\lambda\cdot\phi_\lambda=\sum\limits_\lambda\dfrac{1}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}}\cdot\boldsymbol{\phi_\lambda(t)}$

По теореме: $t=\sum\limits_\lambda\dfrac{\lambda}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}}\boldsymbol{\phi_\lambda(t)}=\sum\limits_\lambda\lambda p_\lambda$ ■

$\mathcal{A}\in End(V)$

ϕ минималный многочлен, все корни $\in K(\Rightarrow$ все корни $\chi\in K$

$\Rightarrow$ т.е. все с.ч. $\in K$ – I, II случаи)

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t)$

$\mathcal{P}_\lambda := p_\lambda(\mathcal{A})$ $\quad \boxed{\mathcal{E} = \sum\limits_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$ операторное разложение единицы

$\mathcal{P}_\lambda \in End(V)$

$\mathcal{P}_\lambda$ – проекторы ? $\quad \uparrow$ это уже есть

Достаточно проверить $\underset{\lambda \neq \mu}{\mathcal{P}_\lambda \cdot \mathcal{P}_\mu} = \mathbb{0}$

$\mathcal{P}_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\lambda \neq \mu$

$\mathcal{P}_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = f_\mu(\mathcal{A}) \cdot \phi_\mu(\mathcal{A})$

перестановочны, т.к. многочлены от $\mathcal{A}$

$\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot f_\mu(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \boldsymbol{\phi_\mu(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$

$\updownarrow$ $\qquad\qquad \uparrow$ содержит

$(p_\lambda \cdot p_\mu \vdots \phi$ см. замеч. 1) $\quad \eta(\mathcal{A})\boldsymbol{(t-\mu)^{m(\mu)}} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_\lambda$ проекторы – **спектральные проекторы** $\mathcal{A}$

$Im\mathcal{P}_\lambda$ **спектральное подпространство**

$\underset{7.5}{\Rightarrow} \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} Im\mathcal{P}_\lambda}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow$ не о.п.с.

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \gamma(\lambda_2) = 1$

$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$

$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1}\phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$

$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$

Прав. дробь $\frac{1}{\phi} = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{\frac{f_\lambda \cdot \phi_\lambda}{\phi}}_{\text{Правильн.}} = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{\frac{f_\lambda}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\text{Правильн. дробь}}$

$deg\ f_\lambda < m(\lambda)$

$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \underbrace{\frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2}}_{\text{простейшие}} + \frac{A_3}{t-3} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$

$1 = \underbrace{(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16})\overbrace{(t-3)}^{\phi_\lambda}}_{p_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}\overbrace{(t+1)^2}^{\phi_{\lambda_2}}}_{p_{\lambda_2}}$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \ p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

$\boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda} \nearrow \quad 1 = \sum p_\lambda$ спектральное разложение о.п.с.

$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1 \qquad \text{Доказательство позже}}$

Определение 2. $K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
называется ***корневым подпространством*** $\mathcal{A}$

Теорема 3.

1. K_λ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$
2. $Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$
3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ *минимальный многочлен* $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda}$

Доказательство.

1. $x \in K_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_\lambda$

   $\underset{\text{перестановочны}}{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{A}}x = \mathcal{A}\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

   $\Rightarrow \mathcal{A}x \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

2. $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{P}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A}) =$

   $= f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$

   $\forall x \in V$

   $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda} = \mathbb{0} \Rightarrow Im\mathcal{P}_\lambda \subseteq Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_\lambda$

   Обратно: $K_\lambda \overset{?}{\subseteq} Im\mathcal{P}_\lambda$

   $x \in K_\lambda$

   $\mu \neq K_\lambda \ \mathcal{P}_\mu x = \underbrace{\underset{\text{содержит } (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}}{f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A})x}}_{\eta(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}} = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

   $x = \mathcal{E}x = \sum\limits_{\mu} \underset{\mathbb{0} \ \mu\neq\lambda}{\mathcal{P}_\mu x} = \mathcal{P}_\lambda x \in Im\mathcal{P}_\lambda \Rightarrow K_\lambda \subseteq Im\mathcal{P}_\lambda$

   $\Rightarrow \boxed{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$?
$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$
Минимальный?

$\sqsupset$ не мини$\overset{\psi}{\text{м}}$альный
$\psi_1 = (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}$ $\sqsupset$ это минимальный многочлен
$\phi_1 := (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$ аннулятор $\mathcal{A}$?
$\underset{\mu\neq\lambda}{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$
$= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A})\cdot\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$
$\forall x\ \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$
$$= \phi_\lambda(\mathcal{A})\underbrace{\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})}\ \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}}_{\substack{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x \\ \text{мин. многочлен по предположению}}} = \mathbb{0}$$
$\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0}$
$$\phi_1(\mathcal{A})\cdot\mathcal{E} = \underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\sum_\mu \mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu\neq\lambda}\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = \mathbb{0}$$
$\Rightarrow \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A}$, но степени $< \phi$
$deg\ \phi_1 = m-1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

■

Следствие 1. *A о.п.с.* $\Leftrightarrow \forall\lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A}$ о.п.с.
$\phi(t)\ \prod_\lambda (t-\lambda)$ покажем что это минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ – собственные подпространства $\mathcal{A}$
$\forall v \in V\ \exists!\ v = \sum_\lambda v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$
$\phi(\mathcal{A})v = \prod_\lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})\sum_\mu v_\mu =$
$$= \sum_\mu \underbrace{\prod_\lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})}_{\phi_\mu(\mathcal{A})\cdot(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})} v_\mu = \sum_\mu \phi_\mu(\mathcal{A})\underbrace{(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})v_\mu}_{\substack{\| \\ \mathbb{0}}} = \mathbb{0}$$
$v_\mu \in V_\mu = Ker(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}) \nearrow$
$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень $\Rightarrow$ минимальный многочлен.
$(\Leftarrow)\forall\lambda : m(\lambda) = 1$
$\underset{\substack{\| \\ Im\mathcal{P}_\lambda}}{K_\lambda} = Ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^1 = V_\lambda$
$V = \bigoplus_\lambda K_\lambda = \bigoplus_\lambda V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$ о.п.с. ■

Примеры.
$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A-\lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$
$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A-\lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2}$ — упр.

7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. $\mathcal{B} \in End(V)$ *называется* ***нильпотентным****, если* $\phi(t) = t^{\nu}$
Минимальный многочлен $\mathcal{B}$*, т.е.* $\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{0}$
ν – индекс нильпотентности *(мин. степерь* $\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{0}$*)*

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{P}_{\lambda}^2 = \mathcal{P}_{\lambda} \\ \textit{Идемпотентность}\end{array}}$$

Степень минимального многочлена $\to \nu \leq dimV \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{степень } \chi}}{=} n$

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \leq dimV_{\lambda}$

Доказательство. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_{\lambda}}$
$\mathcal{B}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{k_{\lambda}} \Rightarrow \mathcal{B}_{\lambda}^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_{\lambda}} = \mathbb{0}$
$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_{\lambda} \in End(K_{\lambda})$
$m(\lambda) \leq dimK_{\lambda}$ ∎

Замечание. $\underbrace{\sum_{\lambda} m(\lambda)}_{deg\ \phi} \leq \underset{\substack{|| \\ deg\ \chi}}{\sum} dimK_{\lambda} = n$

$$\bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана)**.**
$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ можно представить в виде:
$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{D}$ о.п.с.
$\mathcal{B}$ нильпотентный, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ перестановочны

Доказательство. ϕ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$\mathcal{E} = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}$ операторн. разложение единицы
$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}$ $\quad D$ о.п.с.?
$V = \bigoplus_{\lambda} Im\mathcal{P}_{\lambda}$
$\sqsupset v_{\lambda} \neq 0 \ \in Im\mathcal{P}_{\lambda}$

$$\underline{\underline{Dv_{\lambda}}} = (\sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}) v_{\lambda} = \sum_{\mu} \mu \underset{\substack{\mathcal{P}_{\mu}\mathcal{P}_{\lambda} = \mathbb{0} \\ \lambda \neq \mu}}{\overset{\substack{0\ \mu \neq \lambda \\ ||}}{(\mathcal{P}_{\mu} v_{\lambda})}} = \lambda \mathcal{P}_{\lambda} v_{\lambda} = \underline{\underline{\lambda \cdot v_{\lambda}}}$$

$\Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{D}, v_{\lambda}$ соотв. с.в. $\mathcal{D}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} Im\mathcal{P}_{\lambda} \subseteq V_{\lambda}^{\mathcal{D}} \text{ собств. подпр-во } \mathcal{D}\text{, отвечающ. с.ч. } \lambda \\ V = \bigoplus_{\lambda} Im\mathcal{P}_{\lambda} \text{ дизъюнктны} \end{array}} \Rightarrow Im\mathcal{P}_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

Объединение базисов $Im\mathcal{P}_{\lambda} =$ базис V
Каждый вектор из $Im\mathcal{P}_{\lambda}$ – это с.в. $\mathcal{D}$
$\Rightarrow$ у V есть базис из с.в. $\Leftrightarrow D$ о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_\lambda \lambda\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{A}\sum_\lambda \mathcal{P}_\lambda - \sum_\lambda \lambda\mathcal{P}_\lambda = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda$$

$$\nu = \max_\lambda m(\lambda) \qquad \underset{\text{мин. мн-н } \mathcal{A}}{\phi(t)} = \prod_\lambda (t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^\nu = (\sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda)^\nu = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^\nu \mathcal{P}_\lambda =$$

$$\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

$$= \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^\nu \underbrace{f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_\lambda} =$$

все операторы перестановочны

$$\sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{\nu - m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}} = 0$$

$\mathcal{B}$ нильпотент

$$\mathcal{B} = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}$$

перестановочны

$$D = \sum_\mu \mu\mathcal{P}_\mu$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$ ■

Замечание.

1. $\mathcal{B} = \sum_\lambda (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{P}_\lambda = \sum_\lambda \mathcal{B}_\lambda$
   $\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}$
2. $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ все три оператора взаимно-перестановочны
   $\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$
   $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix} \qquad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$$B^2 \overset{?}{=} \mathbb{0} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \underset{\text{Разложение Жордана}}{=} \underset{\text{Диагонализ.}}{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}} + \underset{\text{Нильпотент.}}{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Теорема 2 (Единственность разложения Жордана)**.**

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)

Рис. 1

Доказательство. $\sqsupset \mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{Нильпотент}}{\mathcal{C}} \qquad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

Т.к. $\mathcal{D}'$ о.п.с., то $\mathcal{D}' = \sum\limits_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

M – множество с.ч. $\mathcal{D}'$

Q_μ спектральные проекторы

$Q_\mu : V \to V_\mu^\nu$

$\sum\limits_\mu Q_\mu = \mathcal{E}$

<u>Достаточно доказать: $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$</u>

1. Множество M совпадает с множеством корней ϕ – минимальн. мн-н $\mathcal{A}$

$$\{\mu\} = \{\lambda\}$$

2. $ImQ_\mu = K_\mu \leftarrow$ корневое подпространство $\mathcal{A}$, отвеч. с.ч. μ ($Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$)

1. $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})Q_\mu = (\sum\limits_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum\limits_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$

$$\begin{matrix} Q_\nu Q_\mu = 0 \\ \nu \neq \mu \end{matrix} \qquad Q_\mu^2 = Q$$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu \;\; = \;\; \mathcal{C}^k Q_\mu$$

$\uparrow$

Верно, если $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ докажем: $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$\sqsupset \lambda \neq \mu \;\; (\lambda - \mu)Q_\lambda\mathcal{C}Q_\mu = \underset{Q_\lambda\mathcal{D}'}{(\lambda Q_\lambda)}\mathcal{C}Q_\mu - Q_\lambda\mathcal{C}\underbrace{(\mu Q_\mu)}_{\mathcal{D}'Q_\mu} =$

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \sum_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu\mathcal{D}'$$

$$Q_\lambda(\underset{\underset{\mathbb{0}}{\|}}{\mathcal{D}'\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{D}'})Q_\mu = \mathbb{0}$$

$\lambda \neq \mu \qquad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \mathbb{0} = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$

$$\underbrace{\sum_\lambda Q_\lambda}_{\mathcal{E}} \mathcal{C} Q_\mu = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \underline{\underline{\boxed{\sum_\lambda} Q_\mu \mathcal{C} \boxed{Q_\lambda}}}_{\boxed{\mathcal{E}}}$$

$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu C}$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$

$k(\mu) = minK$, такой что $\mathcal{C}^k Q_\mu = \mathbb{0}$

Такое $K(\mu)$ обязательно найдется, т.к. $\mathcal{C}$ – нильпотент.
$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$

$(t-\mu)^{k(\mu)}$ – минимальный аннулятор элементов imQ_μ

$ImQ_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)}$

ϕ минимальный многочлен $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулирует любые элементы V,
в частности элементы ImQ_μ
Т.е. $\phi(t)$ аннулятор элементов $ImQ_\mu \Rightarrow \phi(t) \vdots (t-\mu)^{k(\mu)} \leftarrow$ минимальный аннулятор для ImQ_μ

$\Rightarrow$ верно $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t-\mu)^{k(\mu)}$$

$\Rightarrow \phi \vdots \psi$

Покажем, что ψ аннулятор $\mathcal{A}$
$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \in M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{перестановочны}}}{(\mathcal{A} - \nu\mathcal{E})^{k(\nu)}} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu\mathcal{E})^{k(\nu)} \underbrace{(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}_{\substack{|| \\ \mathbb{0}}} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \psi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow \psi \vdots \phi$ минимальный аннулятор
$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda$ – корни $\phi\}$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$
$$\mu = \lambda$$

2.
$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu &= \mathbb{0} \\ || \quad & \\ (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu &= \mathbb{0} \end{aligned}$$

μ корень ϕ

$$ImQ_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = \underset{\text{Корневое подпр-во}}{K_\mu} = Im\mathcal{P}_\mu$$

$$\left.\begin{aligned} \bigoplus_\mu K_\mu &= V \\ \bigoplus_\mu ImQ_\mu &= V \end{aligned}\right\} \Rightarrow ImQ_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

$\blacksquare$

Теорема 3. *$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана*
$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$

Доказательство. $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

μ – не корень $\underset{\text{не зависит от } t}{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu} = det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\mathbb{0}}) =$

$= det(\mathcal{A} - \underset{t=1}{\mu\mathcal{E}} - t\mathcal{B}) \cdot det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + \underset{t=0}{(}\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \ldots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1})$

μ – не корень

$\underset{\neq 0}{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu} = det(\underset{\boxed{\mathcal{D}}}{\underline{\underline{\boxed{\mathcal{A}} - \mu\mathcal{E}\boxed{-\mathcal{B}}}}}) \cdot det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} =$

$= \underbrace{det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{(det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}))^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}}$

$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$ $\blacksquare$

Следствие 1. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана*

То $det\mathcal{A} = det\mathcal{D}$

Доказательство. Очевидно, $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$ $\blacksquare$

Следствие 2. $\boxed{dimK_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \underset{\uparrow \atop \text{о.п.с.}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = dim\mathcal{P}_\lambda = dimK_\lambda$

$\forall\lambda$ корня χ с.ч. (I, II) $\blacksquare$

7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda$ корневые $\quad dimK_\lambda = \alpha(\lambda)$

$\chi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \qquad \lambda \in K$ все корни с.ч.

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$

$V_\lambda \ = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \qquad \gamma(\lambda) = dimV_\lambda$

$\bigcap|$

$K_\lambda \ = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

$\forall\lambda\ K_\lambda \rightsquigarrow$ строим базис $\rightsquigarrow$ матрица оператора будет иметь
$\bigcup\limits_\lambda$ Жорданов базис — блочно-диагональную структуру
– Жорданова форма матрицы

$\sqsupset K_\lambda = K \ \ \gamma(\lambda) = \gamma$

$\alpha(\lambda) = \alpha \ \ m(\lambda) = m$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{K_\lambda} \qquad dim = \gamma$

$$\begin{array}{rcl} K_1 & = & V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \\ \bigcap| & & \\ K_2 & = & Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \\ \vdots & & \\ \bigcap| & & \\ K_m & = & Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad dim = \alpha \end{array}$$

Пример.

$\alpha = dimK_\lambda = dimK_5 = 24$

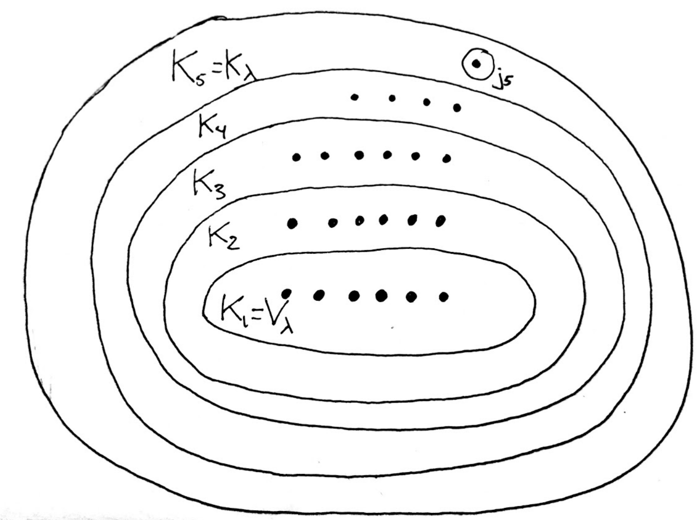
$m = 5$

$\gamma = 7$

Циклический базис

$$\begin{array}{|c|cl} j_5 & \in & K_5 \backslash K_4 \\ j_4 & = & \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_5 \in K_4 \\ j_3 & = & \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_4 \in K_3 \\ j_2 & = & \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_3 \in K_2 \\ j_1 & = & \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda \end{array}$$

j_1, j_2, j_3, j_4 – **присоединенные вектора.**



$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$

$j_{r+1} \in K_{r+1} = Ker\mathcal{B}^{r+1} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r+1}$

$\mathcal{B}^r j_r = \mathcal{B}^r \mathcal{B} j_{r+1} = \mathcal{B}^{r+1} j_{r+1} = \mathbb{0}$

$\Rightarrow j_r\ in K_r = Ker\mathcal{B}^r$

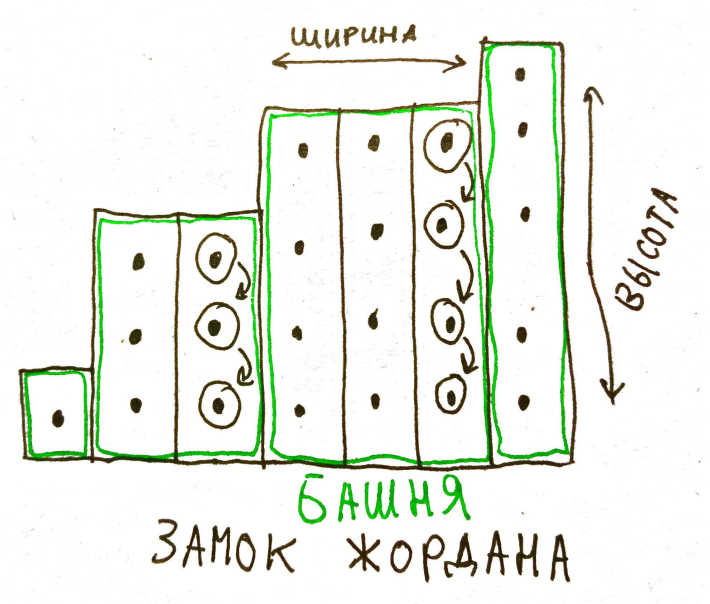
$L = span(j_1\ j_2\ j_3\ j_4\ j_5)$

$\mathcal{A}|_L$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 & \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 & \mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3 & \mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4 & \mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5 \end{array}$$

Матрица $\mathcal{A}|_L$ в базисе $j = A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **Клетка Жордана 5 × 5** (блок нижнего уровня)

$$(j_5\ j_4\ j_3\ j_2\ j_1) \to \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



Башня – объединение циклических базисов одной длины.

Высота башни – количество векторов в базисе.

Ширина башни – число циклических базисов одной размерности

Основания каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов $= \gamma$

$\quad ||$

Число Жордановых клеток

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\lambda} & & & \\
& \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} & \leftarrow \begin{matrix}\text{Блок}\\ \text{нижнего}\\ \text{уровня}\end{matrix} \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} \end{matrix}} & & \\
\begin{matrix}\text{Блок среднего}\\ \text{уровня} \rightarrow\\ \text{(отвечает башне)}\end{matrix} & & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} \end{matrix}} & \\
& & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{matrix}}
\end{pmatrix}$$

$\uparrow$

Блок верхнего уровня, отвечает K_λ

$\gamma =$ Число блоков нижнего уровня

$\alpha =$ Число λ на диагонали

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\forall \alpha = \gamma$

V_λ $\boxed{\cdot}\,\boxed{\cdot}\,\boxed{\cdot}\,\boxed{\cdot}\,\boxed{\cdot}$

"Деревня Жордана"

Примеры. $\lambda \ \ \alpha(\lambda) = 4$

1. $\gamma(\lambda) = 3$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}\boxed{\lambda} & 0\\ 0 & \boxed{\lambda}\end{matrix}\end{pmatrix}$

2. $\gamma(\lambda) = 2$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}$ $\underset{?}{\text{или}}$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$

3. $\gamma(\lambda) = 1$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{J}$ $T = (\ldots j_1 \ldots j_5 \ldots)$

Объединение цикл. базисов для всех λ

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \underset{\text{В Жорд. базисе}}{\mathcal{J}} \\ \updownarrow & & \\ \underset{\text{В исходном}}{A} & & \end{array}$$

$\boxed{\mathcal{J} = T^{-}1AT}$

$\underset{1,\,3}{\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}}} \to T\mathcal{J} = AT$

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы $T \rightsquigarrow T$

$\rightsquigarrow$ построить Жорданов базис.

2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

I

1. Найдем $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \underset{dimK=\alpha}{K}$

   $K_r = Ker(A - \lambda E)^2$

   $\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

II

1. Найдем $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$
2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m = Ker(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$

   $\Rightarrow dimK_m = \alpha(\lambda)$
3. Строим Жорданов базис по алгоритму

Теперь обоснуем

$\forall\lambda$ $K = K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$m(\lambda) = m$

$\alpha(\lambda) = \alpha$

$K_r = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^r \qquad r = 1 \ldots m$

$V_\lambda = K_1$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_m = K_\lambda = K$

Все включения будут строгие:

$\sqsupset K_{r+1} = K_r \qquad Ker\mathcal{B}^{r+1} = Ker\mathcal{B}^3$

По Теореме о rg и def: $dimK = rg\mathcal{B}^{r+1} + \cancel{def\mathcal{B}^{r+1}} = rg\mathcal{B}^r + \cancel{def\mathcal{B}^r}$ $(def\mathcal{B}^{r+1} = def\mathcal{B}^r)$

$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$
$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$

$$\begin{array}{ccccc} Im\mathcal{B}^{r+1} & = & Im\mathcal{B}^r & & \to 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие} \\ || & & & \nearrow & \\ Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) & = & Im\mathcal{B}^r & \overset{\text{либо}}{\to} & \mathcal{B}^r = \mathbb{0} - \text{противоречие мин. } m \end{array}$$

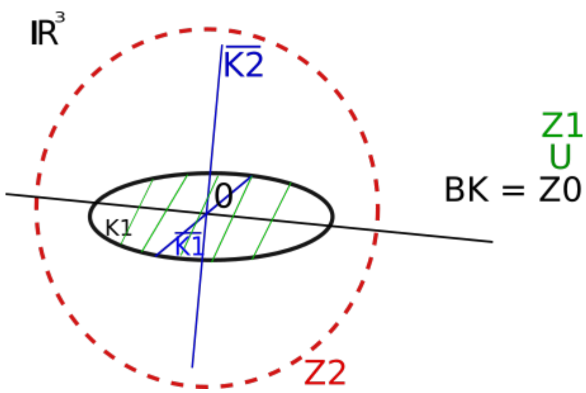
$Im\mathcal{B}|_K =: BK$
$Z_0 = BK$
$Z_r = BK + K_r$

$r = 1, \ldots, m \ \ (K_m = K) \quad B : K \to K$

$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_m = K$

$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$
$\overline{K_r} \subset K_r$

$$K = \underbrace{\underbrace{\underbrace{BK} \oplus \underbrace{\overline{K_1}}}_{Z_1} \oplus \underbrace{\overline{K_2}}}_{Z_2} \oplus \ldots \oplus \overline{K_m}$$



$\underset{dim2}{K_1} \subset \underset{dim3}{K_3}$

$\underset{def\mathcal{B}}{\underset{||}{dimK_1}} + \underset{dimIm\mathcal{B}}{\underset{||}{dimBK}} = 3$

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & = & BK + K_1 \supset Z_0 \\ \bigcap & & \\ Z_2 & = & BK + K_2 \end{array}$$

$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus BK$

Теорема 1. $0 \leq r \leq m - 1$

$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$

Доказательство.
$K = \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus BK$

$\forall x \in K \quad x = \underset{\in \overline{K}_1}{x_1} + \underset{\in \overline{K}_2}{x_2} + \ldots + \underset{\in \overline{K}_m}{x_m} + \underset{\in BK}{Bx^*}$

$1 \leq r \leq m - 1$

$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \ldots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^* \boxed{=}$

$$B^r x_j = B^{r-j} \underset{\mathbb{0}}{\underset{||}{B^j x_j}} = \mathbb{0}$$

$$1 \le j \le r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = KerB^j = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$$\boxed{=} B^r x_{r+1} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^*$$

Дизъюнктность?

$$* \; B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \ldots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = \mathbb{0}$$

$$B^r(\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m + Bx^*}_{y}) = \mathbb{0}$$

$$y \in KerB^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K_r} \oplus BK$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\text{Однозначно} \\ \text{представим}}}{y} = \underset{x_i \in \overline{K_i}}{x_1 + x_2 + \ldots + x_r +} B x^{**}$$

$$||$$

$$\underset{x_{r+i} \in \overline{K_{r+i}}}{x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m} + Bx^* \Rightarrow \underset{\forall i = 1 \ldots m}{\boxed{x_i = \mathbb{0}} *}$$

$\Downarrow$ подставим

$\mathbb{0} + \mathbb{0} + \ldots + \mathbb{0} + B^{r+1}x^* = \mathbb{0} \Rightarrow B^{r+1}x^* = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктн. ■

Следствие 1.

$$K = \underline{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m} \oplus \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus$$

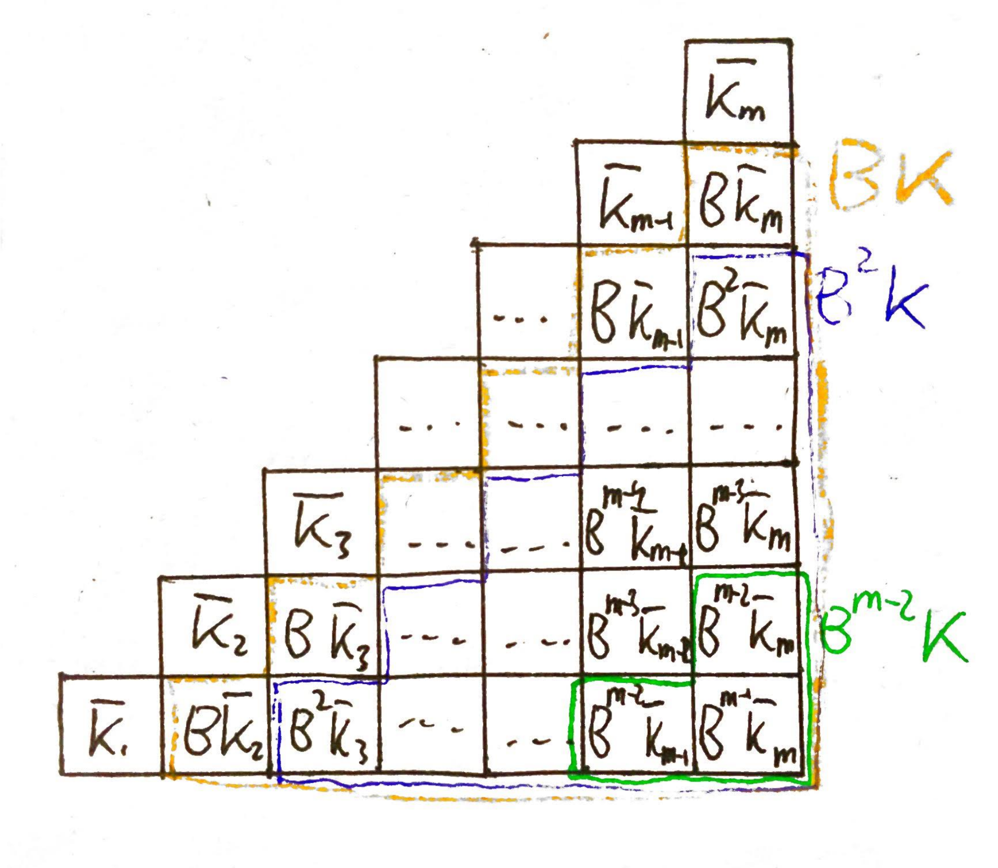
$$\oplus \underline{B^2\overline{K}_3 \oplus B^2\overline{K}_4} \oplus \ldots \oplus B^{m-2}\overline{K}_{m-1} \oplus B^{m-2}\overline{K}_m \oplus B^{m-1}\overline{K}_m$$

Доказательство.

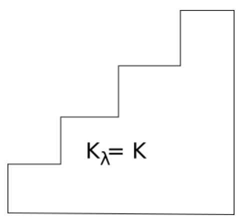
$$K = \underline{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m} \oplus BK$$

$$BK = \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus B^2K$$

$$B^2K = \underline{B^2\overline{K}_3 \oplus B^2\overline{K}_4 \oplus \ldots \oplus B^2\overline{K}_m} \oplus B^3K$$ ■



$\overline{K}_j$ – **Опорные подпространства**



$1 \le r \le m$

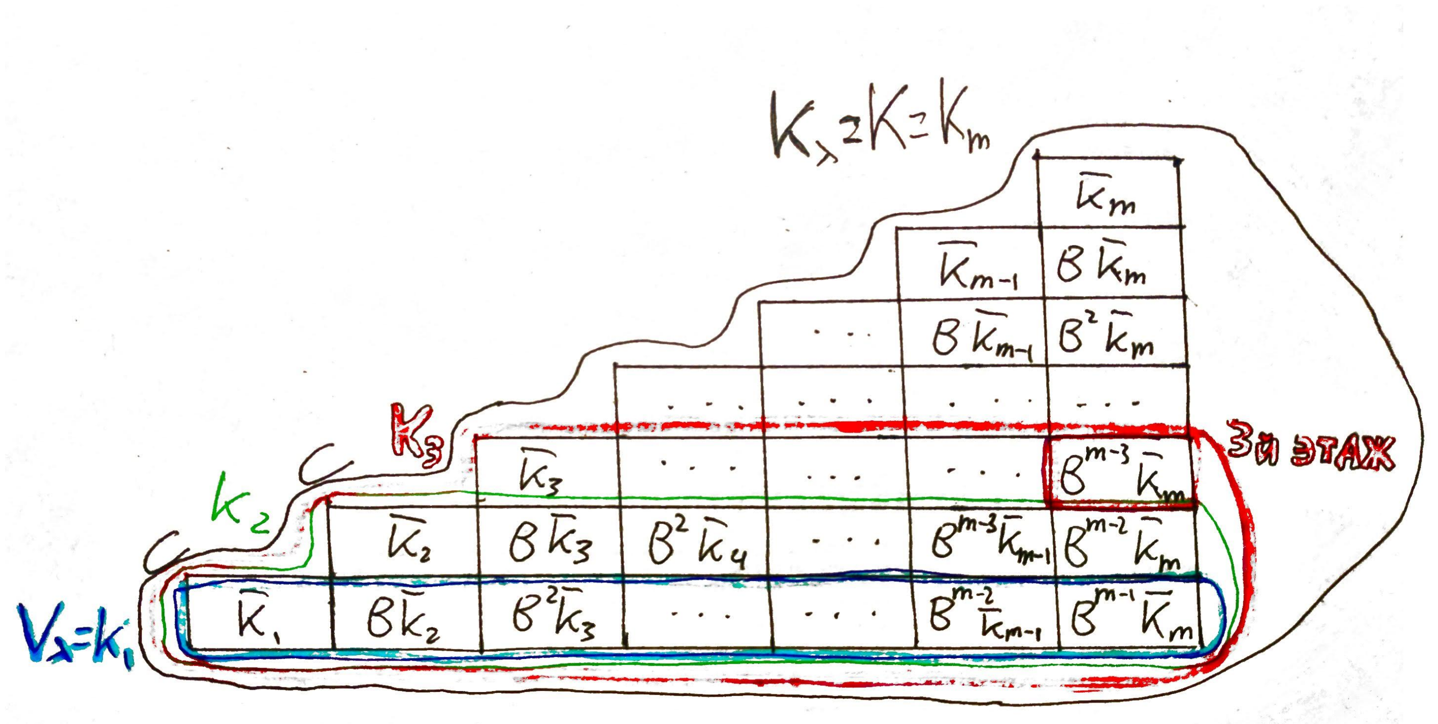
Если $\overline{K_r} \neq \mathbb{0} \longrightarrow \boxed{\tau_r = \overline{K_r} \oplus B\overline{K_r} \oplus B^2\overline{K_r} \oplus \ldots \oplus B^{r-1}\overline{K_r}}$

Башня высоты r. "Башня растет вниз"

"Основание" башни $\equiv$ опорное подпространство $\overline{K_r}$

"Крыша" башни $\equiv B^{r-1}\overline{K_r} \subset V_\lambda$

$x \in B^{r-1}\overline{K_r}$ $\quad \begin{array}{c} x = B^{r-1}y \\ \underline{y \in \overline{K_r} \subseteq K_r} \end{array}$ $\quad \underline{Bx = B^r y = \mathbb{0}}$ $\quad x \in KerB = V_\lambda$



Если $\overline{K_r} = \{\mathbb{0}\}$, то башня высоты r отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$1 \le l \le m$
$\overline{K}_l, B\overline{K}_{l+1}, B^2\overline{K}_{l+2}, \dots B^{m-1}\overline{K}_m \quad \subset K_l = KerB^l$
– l-ые этажи соотв. башен

Покажем: $B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\overline{K}_{l+j}) = (B^{l+j})\underbrace{\overline{K}_{l+j}}_{\subset K_{l+j}=KerB^{l+j}} = \mathbb{0} \Rightarrow B^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^{m} \tau_r$$

Теорема 2 (О размерности башни)**.**
$\forall \tau_r$ любой этаж башни имеет одну и ту же размерность $d_r = dim\overline{K}_r$ = ширина башни.

r *высота* ↕

$\overline{K}_r$
$B\overline{K}_r$
$B^2\overline{K}_r$
$\dots$
$B^{r-1}\overline{K}_r$

τ_r

$\boxed{d_r = dim\overline{K}_r}$ = *ширина башни*

Доказательство.
$B^j|_{\overline{K}_r} : \overline{K}_r \to B^j\overline{K}_r$

$B^j_{\overline{K}_r}$ изоморфизм "?"

$KerB^j|_{\overline{K}_r} = \{\mathbb{0}\}$ тривиально "?"

$$\begin{array}{llll} x \in \overline{K}_r \subset K_r \subset Z_r & = & Z_{r-1} & \oplus \overset{\ni x}{\overset{\downarrow}{\overline{K}_r}} \Rightarrow \boxed{x = \mathbb{0}} \qquad \boxed{Z_{r-1} = BK + K_{r-1}} \\ \underset{j=1\dots r-1}{x \in KerB^j = K_j} \to & \nearrow & \cup & \\ & & K_{r-1} & \\ & & \cup & \\ & & \vdots & \\ & & \cup & \\ & & K_1 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Изоморфизм $\Rightarrow dim(\overline{K_r}) = dim(B^j \overline{K}_r) = d_r$ ∎

Следствие 1. $\sum\limits_{r=1}^{m} d_r = dimV_\lambda = \gamma(\lambda)$

$\sum\limits_{r=1}^{m} \underbrace{r \cdot d_r}_{dim\ \tau_r} = dimK_\lambda = dimK = \alpha(\lambda)$

Следствие 2 (Теорема Фробениуса)**.**
$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$

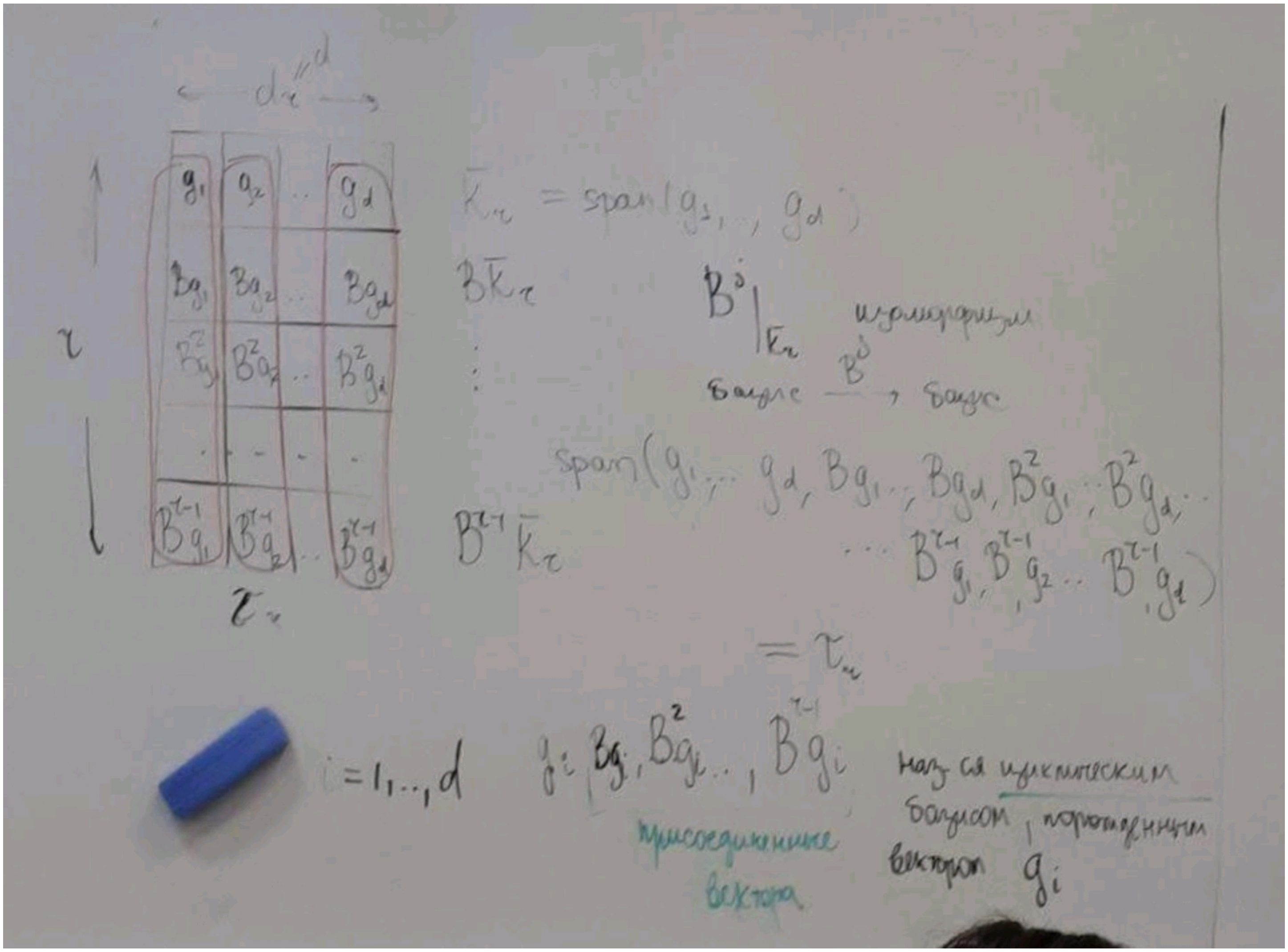
$(d_m = rgB^{r-1})$

Доказательство.
$B^rK = B^r\overline{K}_{r+1} \oplus B^r\overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus B^r\overline{K}_m \oplus B^{r+1}K$

$\rho := rgB^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \ldots + d_m + \underbrace{rgB^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + \ldots + d_m &= \rho_0 - \rho_1 \\ d_2 + \ldots + d_m &= \rho_1 - \rho_2 && \downarrow - \\ d_3 + \ldots + d_m &= \rho_2 - \rho_3 && \downarrow - \\ d_{m-2} + d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-3} - \rho_{m-2} && \downarrow - \\ d_{m-1} + d_m &= \rho_{m-2} - \rho_{m-1} && \downarrow - \\ d_m &= \rho_{m-1} && \downarrow - \\ \rho_m &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}}$ ∎



$d_r = d$
r
$\bar{K}_r = \mathrm{span}(g_1, \dots, g_d)$
$B\bar{K}_r$
$B^{r-1}\bar{K}_r$
$B^\delta|_{\bar{K}_r}$ изоморфизм
базис $\xrightarrow{B^\delta}$ базис
$\mathrm{span}(g_1, \dots, g_d, Bg_1, \dots, Bg_d, B^2g_1, \dots, B^2g_d, \dots$
$\dots B^{r-1}g_1, B^{r-1}g_2 \dots B^{r-1}g_d)$
$= T_r$
T_r
$i = 1, \dots, d$ $\quad g_i, Bg_i, B^2g_i, \dots, B^{r-1}g_i$
наз-ся циклическим базисом, порожденным вектором g_i
присоединенные вектора

$S_i = \operatorname{span}(g_i, Bg_i, \ldots, B^{r-1}g_i)$ циклическое подпр-во

$$\tilde{K}_r = \bigoplus_{i=1}^{d} S_i$$

$A\big|_{S_i} \longleftrightarrow$ м-ца в базисе $g_i, Bg_i, \ldots, B^{r-1}g_i$?

$$A\big|_{S_i} = (B + \lambda\mathcal{E})\big|_{S_i}$$

упорядочим базис: $B^{r-1}g_i\; B^{r-2}g_i \ldots Bg_i\; g_i$

$$Ag_i = Bg_i + \lambda g_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$ABg_i = B^2 g_i + \lambda B g_i$$

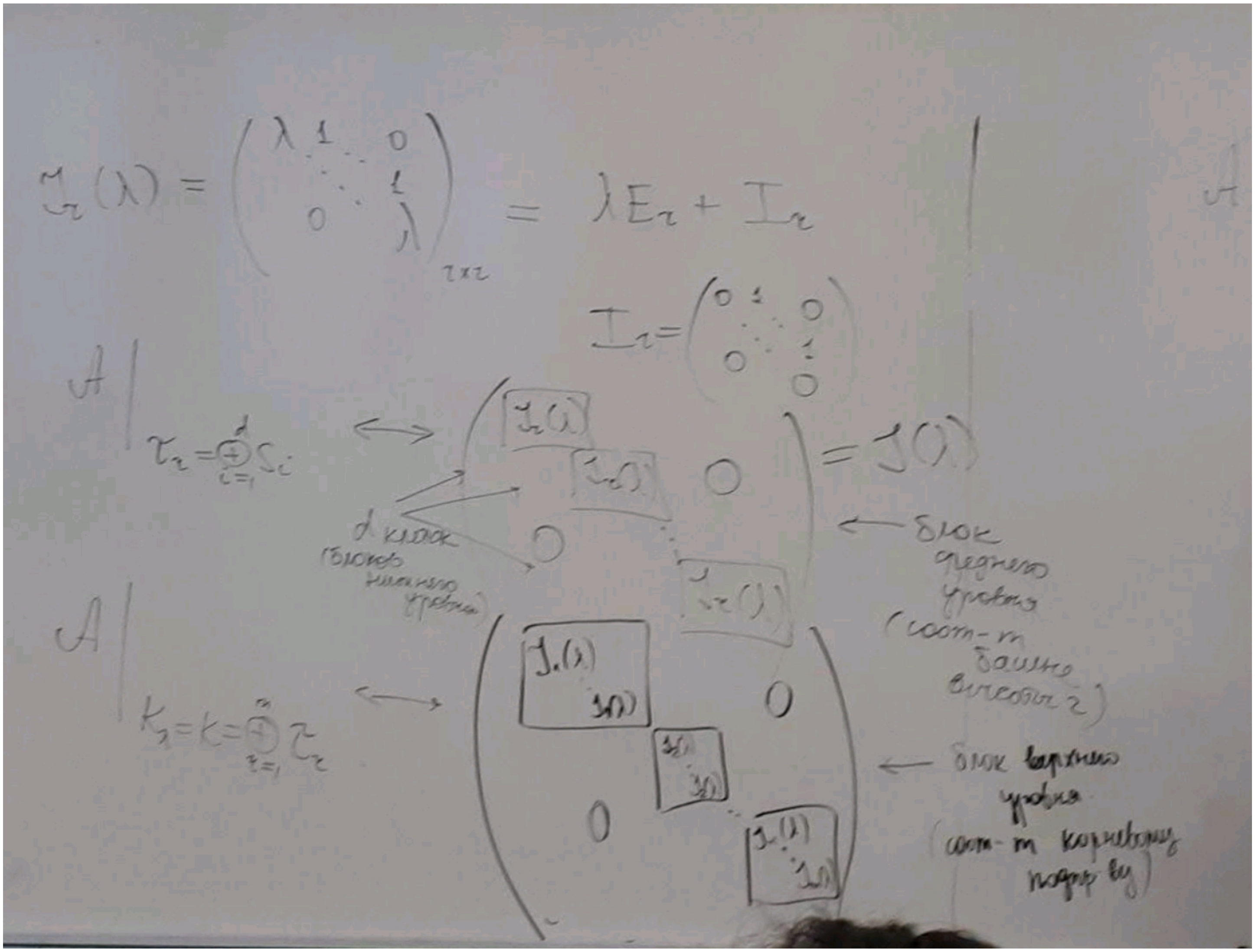
$$AB^{r-2}g_i = B^{r-1}g_i + \lambda B^{r-2}g_i$$

$$AB^{r-1}g_i = \underset{\overset{\parallel}{0}}{B^{r}g_i} + \lambda B^{r-1}g_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$g_i \in \bar{K}_r \subset K_r = \operatorname{Ker} B^r$

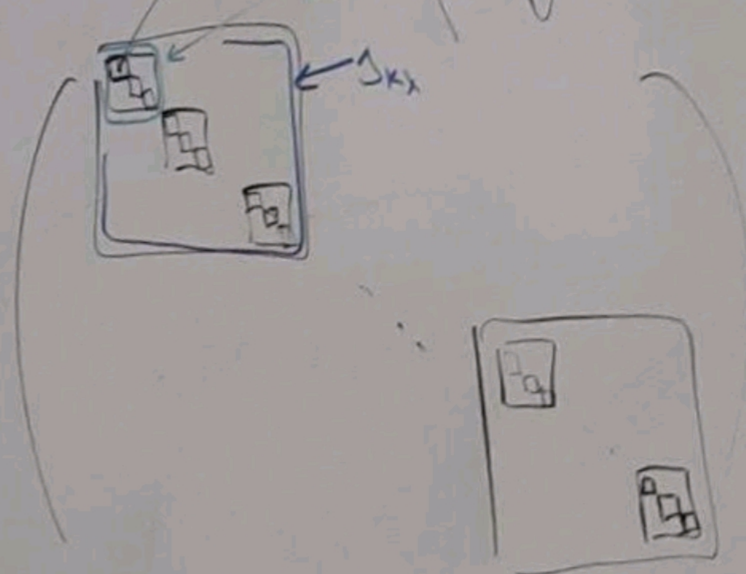
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & \ddots & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

жорд клетка $r \times r$ (блок нижн уровня)


$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}_{r\times r} = \lambda E_r + I_r$
$I_r = \begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$
$A\big|_{\tau_r = \bigoplus_{i=1}^{d} S_i}$
$= J()$
d клеток (блоков нижнего уровня)
блок среднего уровня (соот-т башне высоты r)
$A\big|_{K_\lambda = K = \bigoplus_{r=1}^{m} \tau_r}$
блок верхнего уровня (соот-т корневому подпр-ву)

$$A = A\Big|_{V = \underset{\lambda}{\oplus} K_\lambda} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{J_{K_\lambda}} & & 0 \\ & \boxed{J_{K_\mu}} & \\ 0 & & \ddots \quad \boxed{J_{K_\gamma}} \end{pmatrix}$$

$=$



$= J$ жорданова форма матрицы

объединение всех циклич. базисов для всех башен для всех корневых подпр-в = жорданов базис

$$j = (j_1, \dots j_k \dots j_n) \qquad T = T_{e \to j}$$

$$\boxed{J = T^{-1} A T}$$

$e_1 .. e_n$ базис V

$\mathcal{A} \longleftrightarrow A$

в базисе e.

$$TJ = AT$$

$\Rightarrow$ можно найти T, решив матрич. сист. ур-й

3-й алгоритм построения Ж.ф. и Ж.б для м-цы.

λ: $K_\lambda = K = \underbrace{\bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2 \oplus .. \oplus \bar{K}_m}_{\bar{K}} \oplus BK$

1. найдем $K = K_\lambda$
2. найдем $BK = \mathrm{Im}\, B|_K$ $\quad B = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$
3. дополним BK до K

т.е. найдем базисные вектора $\bar{K} = \bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2 \oplus . \oplus \bar{K}_m = \mathrm{span}(v_1 .. v_t)$

4. будем строить циклич. базисы:

$$\underbrace{v_i,\ Bv_i,\ \dots,\ B^{\nu} v_i}_{\text{циклич. базис}},\ B^{\nu+1} v_i \quad \text{пока не получим } 0$$

$$B^{\nu} v_i \in V_\lambda, \qquad B^{\nu+1} v_i = 0$$

→ клетка → Ж. ф

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = (t-5)(t-4)^3$$

$\lambda_1 = 5 \quad d(\lambda_1) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 4 \quad d(\lambda_2) = 3$

$\gamma(\lambda_2) = ?$

$$rg(A - \lambda_2 E) = rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-3} \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 + rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3$$

$\gamma(\lambda_2) = 1 \to 1$ клетка (1 цикл. базис)

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$K = K_3 = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 E)^3 =$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right)$$

$$BK = \operatorname{span}(Bv_1, Bv_2, Bv_3) =$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}} \right)$$

$$K = BK \oplus \bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2 \oplus \bar{K}_3$$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$\overline{K} = \mathrm{span}(v_3) \to$ 1 цикл. базис.

базис жорд.

v_3

$Bv_3 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$

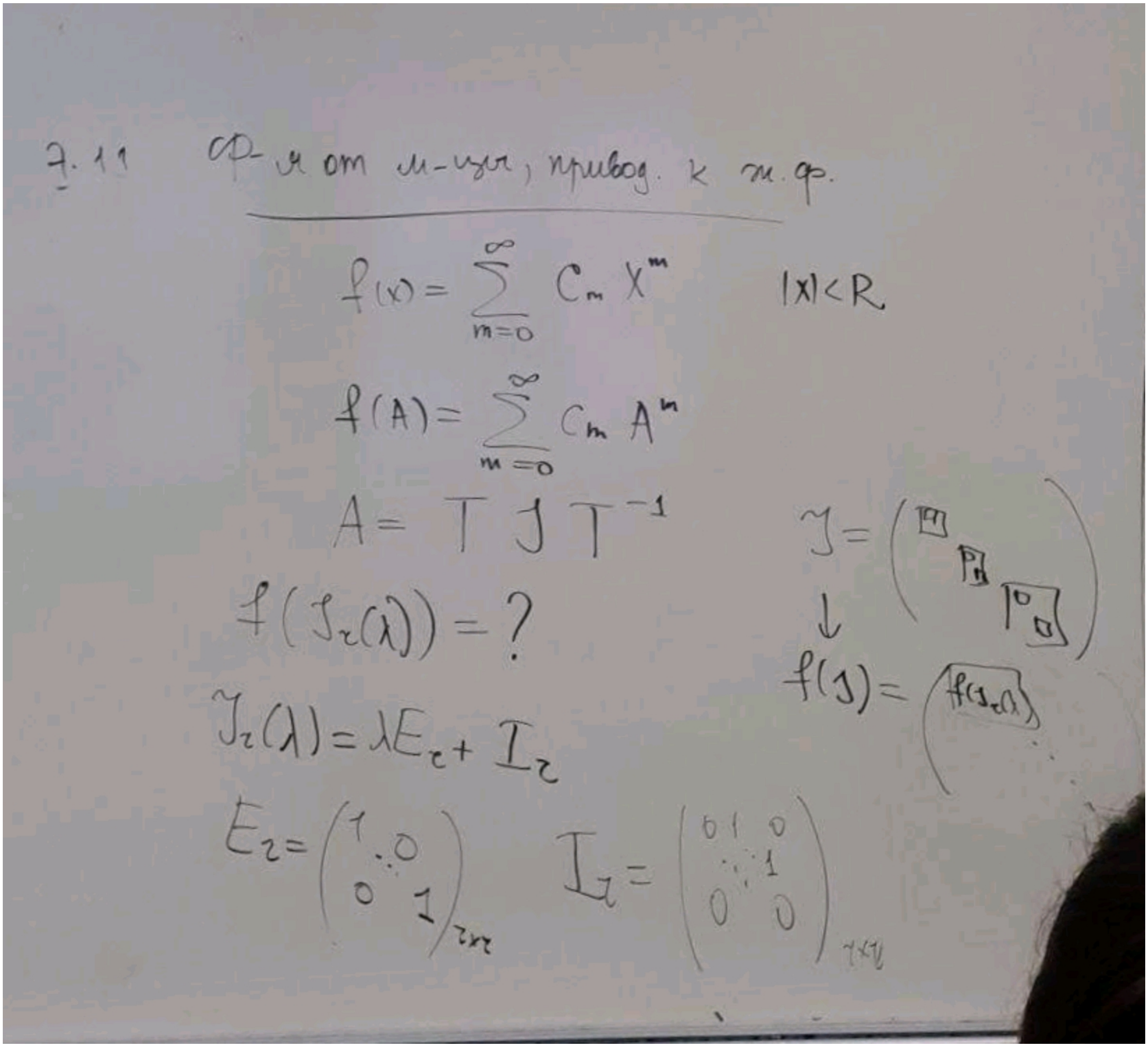
$$B^2 v_3 = \begin{pmatrix}3&1&0&-3\\2&-1&1&-1\\1&-1&1&0\\3&-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \to V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$B^3 v_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$V_{\lambda_1} = \mathrm{span}(v)$

$$J = \left(v_1, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

7.11 Функция от матрицы, приведенной к Жордановой форме



$$f(J_r(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \, J_r^m(\lambda)$$

$$(\lambda E + I)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \, I^k \, \lambda^{m-k} =$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2!}\lambda^{m-2} & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3} & \cdots \\ & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & m\lambda^{m-1} \\ 0 & & & \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ & & & & \lambda^m \end{pmatrix} \qquad I^4 = 0 \qquad \boxed{I_r^r = 0}$$

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2!}$$

7.11 Ф-я от м-цы, привод. к ж.ф.

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \qquad |x|<R$$

$$f'(x)=\sum_{m=1}^{\infty} C_m m x^{m-1}$$

$$f''(x)=\sum_{m=2}^{\infty} C_m m(m-1)x^{m-2}$$

$$f(tJ_r(\lambda))=\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m(\lambda t)^m & \frac{t}{1!}\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m m(\lambda t)^{m-1} & \frac{t^2}{2!}\sum\limits_{m=2}^{\infty} C_m m(m-1)(\lambda t)^{m-2} & \frac{t^3}{3!}\sum\limits_{m=3}^{\infty} C_m m(m-1)(m-2)(\lambda t)^{m-3} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$f(At)=T\,f(Jt)\,T^{-1}$$

$$f(tJ_r(\lambda))=\sum_{m=0}^{\infty} C_m\, J_r^m(\lambda)\, t^m$$

$t\in\mathbb{R}$

$$(\lambda E+I)^m=\sum_{k=0}^{m} C_m^k\, I^k\, \lambda^{m-k}=$$

$$=\begin{pmatrix} f(\lambda t) & t\frac{f'(\lambda t)}{1!} & \frac{t^2 f''(\lambda t)}{2!} & t^3\frac{f'''(\lambda t)}{3!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & f(\lambda t) \end{pmatrix}$$

$$f^{(k)}(\lambda t)=\left(f^{(k)}(x)\right)\Big|_{x=\lambda t}$$

Пример:

$$\tau = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A = T \tau T^{-1}$$

$$f(A) = T f(\tau) T^{-1}$$

$$\sin(\tau t) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda t) & t\cos\lambda t & -\frac{t^2}{2!}\sin\lambda t & -\frac{t^3}{3!}\cos\lambda t \\ 0 & \sin\lambda t & t\cos\lambda t & -\frac{t^2}{2!}\sin\lambda t \\ 0 & 0 & \sin\lambda t & t\cos\lambda t \\ 0 & 0 & 0 & \sin\lambda t \end{pmatrix}$$

$f(x) = \sin x$

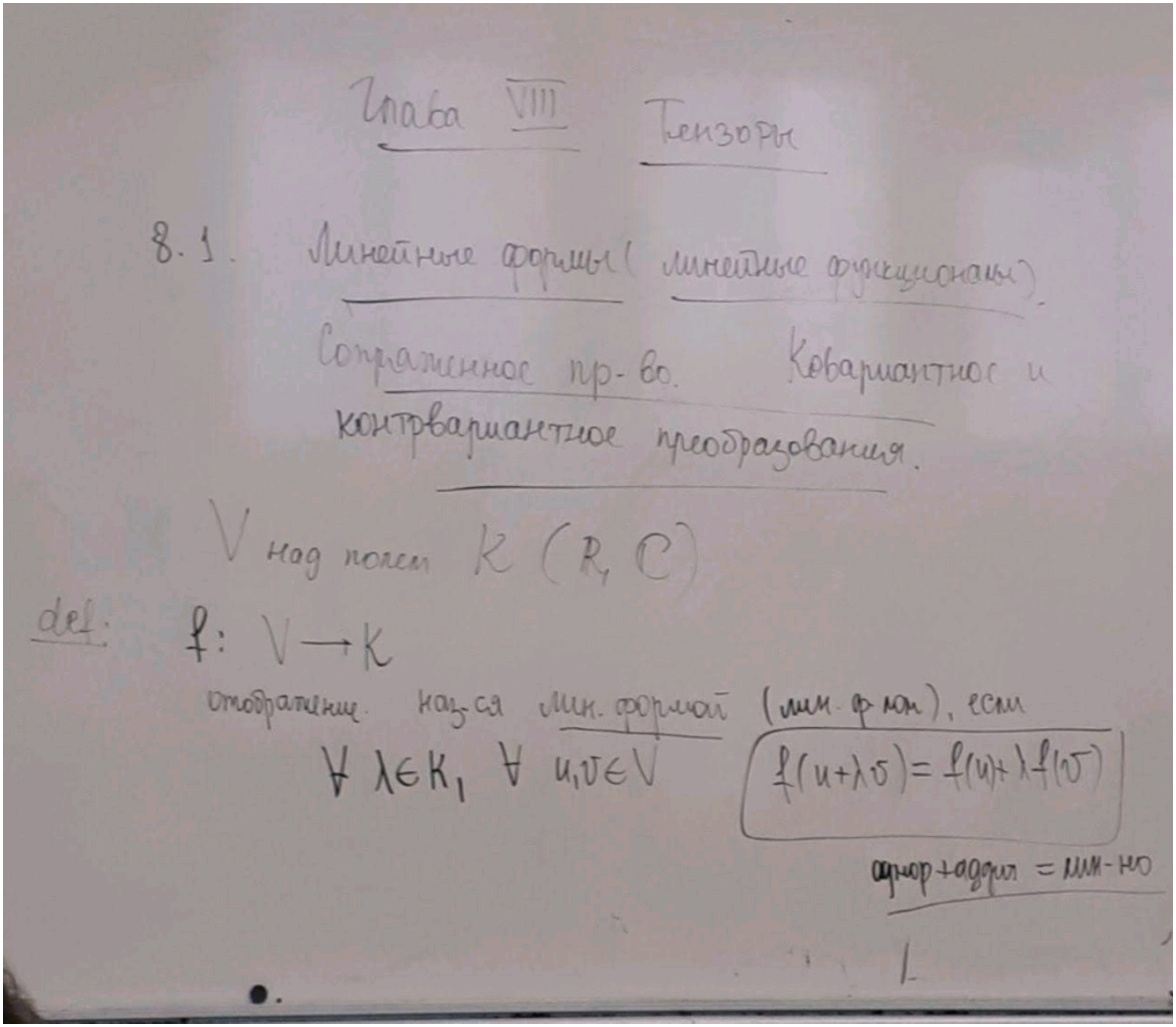
$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

8 Тензоры

8.1 Линейные формы (линейные функционалы). Сопряженное пространство. Ковариантные, контрвариантные преобразования.



Примери:

1. $V = \{ g \mid g \in C(\mathbb{R}) \}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\delta : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{\delta(g) = g(0)}$$

лин. форма.

дельта-ф-я Дирака

2. V_3 $\quad \bar{a}$ – фиксируем.

$f : V_3 \to \mathbb{R}$

$\forall v \in V_3 \quad f(\bar{v}) = (\bar{a}, \bar{v})$

скал. пр-е.

лин. форма

3. P_n мн-ны степени $\le n$

$m \in \mathbb{N}$

$t_0 \in \mathbb{R}$ фикс

$$f_m : P_n \to \mathbb{R}$$

$$\forall p \in P_n \quad f_m(p) = \frac{p^{(m)}(t_0)}{m!}$$ лин. форма.

4. $A_{n\times n}$ $\quad M_{n\times n}$ пр-во м-ц $n\times n$

$$f : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$$

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr} A$$ лин. форма.

$$f(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}+\lambda b_{ii}) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} \lambda B = f(A) + f(\lambda B)$$

V конечномерн.

$e = (e_1 \ldots e_n)$ базис V

$$\forall x \in V : \quad x = x^i e_i \left(= \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right)$$

пр-ло Эйнштейна

$$\longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$ коорд-ты x отн-но e

$f : V \to \mathbb{R}$ лин. форма

"+" "$\cdot\lambda$" как у обычных ф-й $\quad f_1 + f_2$, λf_1

def: $\mathcal{O} : V \to \mathbb{R}$ лин. форма $\quad \forall v \in V \quad$ "$\mathcal{O}(v) = 0$"

$-f : V \to \mathbb{R}$ противопол. лин. форма f $\quad \forall v \in V \quad$ "$-f(v) = -(f(v))$"

$V^* = \{ f : V \to K$ лин-формы $\}$

удовл-ют 1°-8° аксиомы $=$ лин. пр-во

V^* сопряженное (дуальное) пр-во к V

$f \in V^*$ $\quad \forall x \in V$

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K} = x^i a_i$$

$$\xleftrightarrow{\text{вз однозн. соотв.}} (a_1 \dots a_n) = \underset{\text{строка}}{a} \in K_n \quad \text{пр-во } n\text{-мерных строк}$$

a_i коэфф-ты f отн-но базиса e

обладает св-вом лин-ти

$f \leftrightarrow a = (a_1 .. a_n)$

$g \leftrightarrow b = (b_1 .. b_n)$

$f + \lambda g \to a + \lambda b$

$V^* \cong K_n$ (изоморфизм не естеств, т.е. зависит от базиса)

$\Rightarrow \dim V^* = n = \dim V$

напоминание: $V^* = \{ \underset{\text{лин.}}{f}: V \to K \}$ сопряженное (дуальное) пр-во к V

$V^* \cong K_n$ — пр-во n-мерных строк. (не естественный)

$e_1 \dots e_n$ базис V $\quad \forall x \in V \quad x = x^i e_i \quad f(x) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \text{ коэф-ты } f} = x^i a_i \leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n) \in K_n$

$\forall f \in V^*$ $\quad \Updownarrow \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n$ пр-во n-мерных столбцов.

$\dim V^* = n = \dim V$

определим: $\omega^i : V \to K \quad \forall x \in V \quad \omega^i(x) = x^i$ i-ая коор-та x отн-но базиса $e_1 \dots e_n$

$i = 1 \dots n$ $\quad \omega^i$ — координатные ф-ии

очевидно, ω^i лин. отобр. $\Rightarrow \omega^i \in V^*$

очевидно, $\forall j = 1 \dots n$, $\forall i = 1 \dots n$ $\quad \omega^i(e_j) = \underbrace{\delta^i_j}_{\text{символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$$\boxed{\text{Теорема 1: } \omega^1, \dots, \omega^n \text{ базис } V^*}$$

Док-во: т.к. $\dim V^* = n$, то достаточно проверить лин. незав. $\omega^1, \dots, \omega^n$.

$\exists\ \alpha_i \omega^i = 0$, $\alpha_i \in K$

$\Rightarrow \forall x \in V \quad \alpha_i \omega^i(x) = 0 \Rightarrow$ в частности, для $\forall j = 1 \dots n \quad \alpha_i \underbrace{\omega^i(e_j)}_{\delta^i_j} = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$

$\Leftrightarrow \omega^1, \dots, \omega^n$ лин. незав. $\Rightarrow$ базис V^* ∎

Следствие: $\forall f \in V^*$ коэф-ты $a_i = f(e_i)$ (отн-но базиса e) явл-ся коор-ми формы f в пр-ве V^* отн-но базиса $\omega^1, \dots, \omega^n$.

т.о. $V^* \cong K_n$ — координ. изоморфизм отн-но базиса $\omega^1 \dots \omega^n$

док-во: $\forall f \in V^* \ \forall x \in V \quad f(x) = x^i a_i$, где $a_i = f(e_i)$

т.к. $x^i = \omega^i(x) \Rightarrow f(x) = a_i \omega^i(x) \ \forall x \in V \Rightarrow f = a_i \omega^i \Leftrightarrow a = (a_1 \dots a_n)$ коор-ты f отн-но базиса $\omega^1 \dots \omega^n$ ∎

def: коорд. ф-ии $\omega^1 \dots \omega^n$, порожденные базисом $e_1, \dots, e_n$ пр-ва V наз-ся сопряженным (дуальным) базисом пр-ва V^* к базису $e_1 \dots e_n$ пр-ва V.

$\boxed{?}$ Всякий ли базис V^* будет сопряженным к некоторому базису пр-ва V?

Теорема 2: $\exists\ \omega'^1, \omega'^2, \dots, \omega'^n$ базис $V^* \Rightarrow \exists$ базис $e_1', e_2', \dots, e_n'$ пр-ва V, т.ч. базис ω' будет сопряженным к базису e'

Док-во: $\exists\ e_1, \dots, e_n$ базис V, а $\omega^1, \dots, \omega^n$ базис V^*, сопряжен. к e.

т.к. ω и ω' базисы пр-ва V^*, то $(\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \to \omega'}$ ↑ м-ца перехода.

т.к. в координ. представлении эл-там V^* соот-т строки, то последнее равенство удобнее записывать в транспонированном виде:

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = T^T_{\omega \to \omega'} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} \qquad \text{Обозначим } \boxed{S := T^T_{\omega \to \omega'}}$$

м-ца S, очевидно, невырожденная $\Rightarrow \exists\ S^{-1} =: T$

Определим „новый" базис в пр-ве V следующим равенством:

$(e_1' \dots e_n') = (e_1 \dots e_n) T$, т.о. $T = T_{e \to e'}$

Покажем, что ω' будет сопряженным к построенному e'.

$S = (s^i_j)_{n\times n}$ (номер стр — i, номер столбца — j), аналогично $T = (t^i_j)_{n\times n}$ $\Rightarrow$ $\omega'^i = s^i_k \omega^k$

$\forall x \in V$: $\omega'^i(x) = s^i_k \omega^k(x) = \underbrace{s^i_k x^k}_{(Sx)_{i\text{-ая коор-та}}} = x'^i$ – i-ая коор-та x в базисе e' $\Rightarrow$ ω'^i – координатная ф-я отн-но базиса e', т.е. ω' сопряж. базис к e' ∎

т.к. $T = T_{e\to e'}$, то $x' = T^{-1}x = Sx$

Следствие: e, e' базисы V, $T = T_{e\to e'}$, $S = T^{-1}$
ω, ω' сопряжен. к e и e', соот-но, базисы V^*

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll} \forall x \in V & x' = Sx = T^{-1}x \\ \forall f \in V^* & a' = aT \end{array}}$, причем $T_{\omega\to\omega'} = S^T = (T^{-1})^T$

док-во: $T^T_{\omega\to\omega'} = S$, очевидно, из док-ва т-мы.
также, очевидно, что $x' = T^{-1}x$.
остается показать, что $\forall f \in V^*$ $a' = aT$
т.к. $(\omega'^1 .. \omega'^n) = (\omega^1 .. \omega^n) T_{\omega\to\omega'}$, то $(a')^T = T^{-1}_{\omega\to\omega'} a^T \Rightarrow a' = a(\underbrace{T^T_{\omega\to\omega'}}_{S})^{-1} = aT$ ∎

Замечание: очевидно, значение лин. формы f на элементе x не должно зависеть от выбора базиса:

$$f(x) = x^i a_i = (t^i_k x'^k)\cdot(a'_m s^m_i) = \underbrace{(s^m_i t^i_k)}_{(ST)^m_k = \delta^m_k} x'^k a'_m = x'^k a'_k$$

$x = Tx'$
$a = a'S$
E

– инвариантность формы записи лин. формы отн-но выбора базиса

def: Векторы, координаты которых, при замене базиса меняются по закону, согласованному с формулой замены e на e', т.е. с той же м-цей $T = T_{e\to e'}$, наз-ся ковариантными векторами или ковекторами $\equiv$ элементы пр-ва V^*

Векторы, коор-ты которых, при замене базиса e на e', меняются по закону, противоположному ф-ле замены e на e', т.е. с матрицей $T^{-1} = S$, наз-ся контрвариантными векторами или просто векторами $\equiv$ элементы пр-ва V

Поэтому, лин. формы, также называют просто ковекторами.

Рассмотрим пр-во $(V^*)^* = V^{**}$ – дважды сопряженное к V
очевидно, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ (все три пр-ва изоморфны)
Построим изоморфизм между V и V^{**} следующим образом:

$$\forall x \in V \xrightarrow[\text{сопоставим}]{} „x" \in V^{**} : \quad \forall f \in V^* \quad \boxed{„x"(f) = f(x)}$$

очевидно, $„x" : V^* \to K$

проверим лин-ть $„x"$: $\forall \lambda \in K$ $\forall f_{1,2} \in V^*$

$$„x"(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = „x"(f_1) + \lambda „x"(f_2)$$
$\Rightarrow$ лин-но $\Rightarrow$ $„x" \in (V^*)^*$

Теорема 3: соответствие $x \in V \longrightarrow „x" \in V^{**}$ явл-ся вз-одн. и лин-м, т.е. изоморфизмом. ($V \cong V^{**}$)

Док-во: итак, $\forall x \in V \rightsquigarrow „x" \in V^{**}$
покажем, что это отображение обладает св-вом лин-ти: $\forall \lambda \in K$, $\forall x_1, x_2 \in V$

$\underset{\in V}{(\lambda x_1 + x_2)} \longrightarrow \underset{\in V^{**}}{„\lambda x_1 + x_2"}$ $\quad \forall f \in V^*$ $„\lambda x_1 + x_2"(f) = f(\lambda x_1 + x_2) =$
$= \lambda f(x_1) + f(x_2) = \lambda „x_1"(f) + „x_2"(f) \Rightarrow „\lambda x_1 + x_2" =$
$= \lambda „x_1" + „x_2"$, т.е. лин-но.

Т.о. мы получаем вложение пр-ва V в пр-во V^{**}, обладающее св-вом лин-ти.
В частности, $\exists$ $e_1, .., e_n$ базис V $\longrightarrow$ $„e_1", .., „e_n" \in V^{**}$
$\Rightarrow \forall j = 1..n$ $\quad \forall f \in V$ $\quad „e_j"(f) = f(e_j) = a_j$ – коор-та f в пр-ве V^* отн-но базиса ω^j пр-ва V^*
$\Rightarrow$ $„e_j"$ координ. ф-я и сопряжен. базис к базису ω^j $\Rightarrow$ по т-ме 1 $„e_1" .. „e_n"$ базис V^{**}
$\Rightarrow$ Т.о. наше вложение пр-в на самом деле изоморфизм, т.к. переводит базис в базис. ∎

Замечания! 1. изоморфизм, построенный в т-ме 3 является естественным изоморфизмом пр-в V и V^{**}, т.к. его построение не зависело от выбора базиса.

2. Принято отождествлять эл-ты x пр-ва V и „x" пр-ва V^{**}, поэтому пишут $x(f) := f(x)$ без кавычек.

$\forall x \in V \quad \forall f \in V^*$: $\quad f(x) = x^i f(e_i) = \omega^i(x) a_i \qquad f(e_i) = e_i(f) = a_i$

$x = x^i e_i \qquad f = a_i \omega^i \qquad \overset{\shortparallel}{x(f)} = a_i x(\omega^i) = e_i(f) x^i \qquad x(\omega^i) = \omega^i(x) = x^i$

т.е. Т-ма 3 показывает, что на самом деле пр-ва V и V^* „равноправные" V^* сопряж. к V, а V сопряж. к V^*. Базис ω сопряжен к e, также как и базис e сопряжен к базису ω.

3. $\forall x \in V \quad \forall f \in V^*$ $\qquad f(x) = x^i a_i = a \cdot x = (a_1 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ „строка * столбец" $\Longrightarrow$ т.к. $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$

$x \updownarrow X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad f \updownarrow a = (a_1 \dots a_n) \qquad f(x) = x(f) \qquad \omega^i(e_j) = e_j(\omega^i)$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E}$$

Примеры! 1) $\mathbb{R}^3$: базис $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти сопряж. базис $\omega^1, \omega^2, \omega^3$.

$\omega^i \longleftrightarrow (a^i_1 a^i_2 a^i_3) = a^i \qquad \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} (e_1 e_2 e_3) = E \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = E$

$$\Rightarrow \quad A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \omega^1 \\ = \omega^2 \\ = \omega^3 \end{matrix}$$

2) $V = \oplus V_\lambda \qquad \underset{\text{проекторы}}{\mathcal{P}_\lambda : V \to V_\lambda} \qquad \sum_\lambda \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E} \qquad \mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = \mathcal{O} \qquad \mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$

$V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) \longrightarrow$ построим $\omega^1, \dots, \omega^n$ сопряж. к $v_1 \dots v_n$

$\Rightarrow \forall x \in V : \; x = \sum_\lambda x_\lambda = x^i v_i = \omega^i(x) v_i$

$\Rightarrow \mathcal{P}_\lambda x = x_\lambda = \sum_{v_k \in V_\lambda} x^k v_k = \sum_{v_k \in V_\lambda} \omega^k(x) v_k$

$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 & \alpha(\lambda_1) = 1 = \gamma(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -3 & \alpha(\lambda_2) = 2 = \gamma(\lambda_2) \end{matrix} \qquad V_{\lambda_1} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$

$V_{\lambda_2} = \operatorname{span}\left(\underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

построим сопряж. базис! (см. пример 1) $\qquad \omega^1 = (-\tfrac{1}{2} \; \tfrac{1}{2} \; 0)$

$\omega^2 = (\tfrac{1}{2} \; \tfrac{1}{2} \; 0) \qquad \omega^i(x) = (a^i_1 a^i_2 a^i_3) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3.$

$\omega^3 = (0 \; 0 \; 1)$

$$\mathcal{P}_{\lambda_1}(x) = \omega^1(x) \cdot v_1 = \left(-\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{2} - \frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{\lambda_2}(x) = \omega^2(x) \cdot v_2 + \omega^3(x) \cdot v_3 = \left(\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{2} \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.2 Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейной пространство тензоров.

8.2. Два определения тензора. Многомерная матрица. Линейное пр-во тензоров.

V лин. пр-во над полем K $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

V^* сопряженное пр-во; $\dim V = \dim V^* = n$

def: ($1^{ое}$ def тензора) тензором α типа (p,q) (p-раз ковариантным, q-раз контрвариантным) наз-ся полилинейная функция $f: V^p \times (V^*)^q \to K$

$$V^p = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p \text{ раз}} \qquad (V^*)^q = \underbrace{V^* \times \ldots V^*}_{q \text{ раз}}$$

$\boxed{\text{тензор } \alpha \equiv f \text{ полилин. ф-я}}$

полилинейная $\equiv$ линейная по каждому аргументу.

p и q – валентности тензора

$r = (p+q)$ – ранг или полная валентность тензора.

def: Тензор α типа $(p,0)$, т.е. $\underset{\text{полилин.}}{f: V^p \to K}$ наз-т ковариантным тензором валентности p

Тензор α типа $(0,q)$, т.е. $\underset{\text{полилин.}}{f: (V^*)^q \to K}$ наз-т контрвариантным тензором валентности q

если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то говорят о тензоре смешанного типа.

если $r = 0$, то тензор типа $(0,0) \equiv$ скаляр $\in K$

Далее, определим операции „$+$" и „$\cdot\lambda$" для тензоров, как и для обычных функций, т.е. будем складывать и умножать на скаляр значения ф-ций на одном и том же наборе аргументов

Определим $\underset{\text{нулевой тензор}}{\mathbb{O}}: V^p \times (V^*)^q \to K$, т.ч. $\forall \underset{k=1,\ldots,p}{\xi_k} \in V$ $\forall \underset{m=1,\ldots,q}{\eta^m} \in V^*$ $\mathbb{O}(\xi_1, .., \xi_p, \eta^1, .., \eta^q) = 0$

и $\underset{\text{противопол. тензор}}{-\alpha}$, т.е. $-f: V^p \times V^q \to K$, т.ч. $\forall \underset{k=1,\ldots,p}{\xi_k} \in V$ $\forall \underset{m=1,\ldots,q}{\eta^m} \in V^*$ $-f(\xi_1, .., \xi_p, \eta^1, .., \eta^q) = -1 \cdot f(\xi_1, .., \xi_k, \eta^1 .. \eta^m)$

$\Rightarrow -f + f = \mathbb{O} = f + (-f)$

Т.о. вып-ны 1°–8° аксиомы лин. пр-ва (упр.)

def: $T_{(p,q)}$ – лин. пр-во тензоров типа (p,q)

$e_1, .., e_n$ базис V

$\omega^1, .., \omega^n$ базис V^*, сопряженный e

$\xi_k \in V$, $k = 1, .., p$ — вектор (контрвариантный) $\qquad \xi_k = \xi_k^{j_k} e_{j_k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_k^1 \\ \vdots \\ \xi_k^n \end{pmatrix}$ – коор-ты ξ_k отн-но базиса e

$\eta^m \in V^*$, $m = 1, .., q$ — ковектор (ковариантный) $\qquad \eta^m = \eta^m_{i_m} \omega^{i_m} \longleftrightarrow (\eta^m_1 \ldots \eta^m_n)$ – коор-ты η^m отн-но базиса ω

$\alpha \equiv f$ полилин. ф-ция $\Rightarrow$

тензор типа (p,q)

$$\boxed{f(\xi_1, .., \xi_p, \eta^1, .., \eta^m) = \xi_1^{j_1} \cdots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \cdots \eta^q_{i_q} f(e_{j_1}, .., e_{j_p}, \omega^{i_1}, .., \omega^{i_q})} \quad (1)$$

$$\boxed{\alpha \in T_{(p,q)}} \longrightarrow \boxed{\alpha^{i_1 .. i_q}_{j_1 .. j_p} := f(e_{j_1}, .., e_{j_p}, \omega^{i_1}, .., \omega^{i_q})} \quad (2)$$

координаты (компоненты) тензора α отн-но базисов e и ω

Т.о, очевидно, значение полилин. ф-ии f (а значит и тензора α), полностью опр-ся её значениями на всевозможных p-наборах базисных векторов e_j и q-наборах базисных ковекторов ω^i.

$$\boxed{f(\xi_1, .., \xi_p, \eta^1, .., \eta^m) = \alpha^{i_1 .. i_q}_{j_1 .. j_p} \xi_1^{j_1} \cdots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \cdots \eta^q_{i_q}} \quad (1')$$

def: $s = (p+q)$ – мерной матрицей порядка n наз-ся мн-во элементов, занумерованных двумя типами индексов: верхних $i_1, .., i_q$ и нижних $j_1, .., j_p$, при этом все индексы пробегают значения от 1 до n.

$$\boxed{A = \left(\alpha^{i_1 .. i_q}_{j_1 .. j_p}\right)} \qquad \begin{matrix} i_m = 1, .., n & m = 1, .., q \\ j_k = 1, .., n & k = 1, .., p \end{matrix}$$

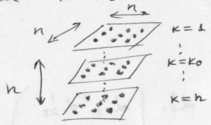
$s = (p+q)$ – мерная м-ца порядка n содержит $\boxed{n^{p+q} = n^s \text{ элементов.}}$

Примеры: 1) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $\quad A = (a^i_j)_{n \times n}$ $\quad A = (a^{ij})_{n \times n}$

двумерные м-цы порядка n (n^2 элементов)

2) $A = (\alpha^i_{jk})_{n \times n \times n}$ 3-хмерная м-ца порядка n

фиксируем $k = k_0 \rightsquigarrow$ получаем $(\alpha^i_{j k_0})$ – обычная двумерная м-ца.



„куб" из n^3 чисел.

аналогично, 4-хмерная м-ца – упорядоч. набор из n 3-х мерных м-ц.

Т.о. $\forall\, \alpha \in T_{(p,q)} \longrightarrow A$ – $(p+q)$ – мерная м-ца компонент α

Верно и обратное $\forall\, (p+q)$ – мерной м-це A порядка n $\longrightarrow$ полилин. ф-ю f по формулам (1)(2), где $e_1 .. e_n$ некоторый фиксир. базис V, а $\omega^1, .., \omega^n$ базис V^*, сопряж. e.

Т.о. получаем $\boxed{\alpha \in T_{(p,q)} \underset{\text{взодн.}}{\longleftrightarrow} A \ (p+q) \text{ мерн. м-ца порядка } n}$

Очевидно, сложение и умножение на скаляр тензоров приведёт к сложению и умножению на скаляр соответствующих компонент их матриц, т.е. наше вз-одн. соответствие обладает св-вом лин-ти, т.е. явл-ся изоморфизмом

$$\boxed{T_{(p,q)} \cong A = \left(\alpha^{i_1 .. i_q}_{j_1 .. j_p}\right) \cong K^{n^{p+q}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}}$$

Соглашение о порядке записи эл-тов многомерной матрицы (т.е. матрицы тензора)

общее правило: первый индекс всегда верхний левый индекс, далее по верхней строке, а затем по нижней.

$\exists$ $n=2$

$r=2$ возможные варианты матриц: $A=(\alpha^i_j)$ $A=(\alpha^{ij})$ $A=(\alpha_{ij})$ $\quad i=1,2$, $j=1,2$

1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец.

$$A=(\alpha^i_j)=\begin{pmatrix}\alpha^1_1 & \alpha^1_2\\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2\end{pmatrix} \qquad A=(\alpha^{ij})=\begin{pmatrix}\alpha^{11} & \alpha^{12}\\ \alpha^{21} & \alpha^{22}\end{pmatrix}$$

$r=3$ $A=(\alpha^{ijk})$ $A=(\alpha^{ij}_k)$ $A=(\alpha^i_{jk})$ $A=(\alpha_{ijk})$

1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец.

3й индекс – всегда „слой"

$$A=(\alpha^i_{jk})=\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha^1_{11} & \alpha^1_{21} & \alpha^1_{12} & \alpha^1_{22}\\ \alpha^2_{11} & \alpha^2_{21} & \alpha^2_{12} & \alpha^2_{22}\end{array}\right)$$

1 слой $\quad$ 2 слой

$$A=(\alpha_{ijk})=\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha_{111} & \alpha_{121} & \alpha_{112} & \alpha_{122}\\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \alpha_{212} & \alpha_{222}\end{array}\right)$$

$r=4$ 1й индекс – всегда строка

2ой индекс – всегда столбец

3й индекс – всегда слой

4й индекс – всегда „сечение"

$$A=(\alpha^{ij}_{km})=\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha^{11}_{11} & \alpha^{12}_{11} & \alpha^{11}_{12} & \alpha^{12}_{12}\\ \alpha^{21}_{11} & \alpha^{22}_{11} & \alpha^{21}_{12} & \alpha^{22}_{12}\\ \hline \alpha^{11}_{21} & \alpha^{12}_{21} & \alpha^{11}_{22} & \alpha^{12}_{22}\\ \alpha^{21}_{21} & \alpha^{22}_{21} & \alpha^{21}_{22} & \alpha^{22}_{22}\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{1 слой}\\ \\ \text{2 слой}\end{array}=\left(\begin{array}{c|c}A_{11} & A_{12}\\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right)$$

A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} $\quad$ 1 сечение $\quad$ 2 сечение

Примеры:

1) $f\in V^*$ $\quad$ f – $(1,0)$ тензор. (1 раз ковариантный)

$f: V\to K$ лин.

$\forall\ \xi\in V$ $\quad \xi=\xi^i e_i$ $\quad f(\xi)=\xi^i \underbrace{f(e_i)}_{\alpha_i}$ $\leftrightarrow$ $A=(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ 1мерная м-ца.

$e_1\ldots e_n$ базис V

2) V_3 – 3х мерн. геом. вектора. $\quad f: V_3\times V_3\to\mathbb{R}$ $\quad \forall \bar a,\bar b\in V_3$ $\quad \underbrace{f(\bar a,\bar b)=|\bar a||\bar b|\cos\varphi}_{\text{скал. пр-е}}$ $\quad \varphi=\angle(\bar a,\bar b)$

очевидно, f – билинейная ф-я – тензор типа $(2,0)$, $f\in T_{(2,0)}$

$\exists$ $e_1=\bar i$, $e_2=\bar j$, $e_3=\bar k$

$f(\bar a,\bar b)=\alpha_{ij}a^i b^j$ $\qquad \bar a=a^i e_i$, $\bar b=b^j e_j$, $\alpha_{ij}=f(e_i,e_j)=\delta_{ij}$

$$\Rightarrow\ f\longleftrightarrow A=(\alpha_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

$f(\bar a,\bar b)=a^T A b$ $\quad\Rightarrow$ в нашем случае $f(\bar a,\bar b)=a^T b=\sum\limits_{i=1}^{3}a^i b^i$ (т.к. оба индекса наверху пишем значок Σ)

$\boxed{?}$ Как изменится вид тензора, если выбрать другой – „новый" – базис в пр-ве V?

$e_1\ldots e_n$ $\quad$ базисы пр-ва V $\quad T=T_{e\to e'}$, $S=T^{-1}=T^T_{\omega\to\omega'}$ $\quad \forall x\in V$ $\quad x=Tx'$ $\quad x=x^i e_i=x'^i e'_i$

$e'_1\ldots e'_n$ $\qquad \boxed{x^i=t^i_j x'^j}$

$\omega^1\ldots\omega^n$ $\quad$ базисы пр-ва V^*, сопряжен. к e и e', соот-но $\quad \forall a\in V^*$ $\quad a=a'S$ $\quad a=a_j\omega^j=a'_j\omega'^j$

$\omega'^1\ldots\omega'^n$ $\qquad \boxed{a_i=a'_j S^j_i}$

$\Rightarrow$ $\forall\ \xi_k\in V$ $\quad \xi^{j_k}_k=t^{j_k}_{r_k}\xi'^{r_k}_k$ $\qquad j_k=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,p$

$\forall\ \eta^m\in V^*$ $\quad \eta^m_{i_m}=S^{u_m}_{i_m}\eta'^m_{u_m}$ $\qquad i_m=1,\ldots,n$, $m=1,\ldots,q$

$\Rightarrow$ подставим в (1')

$$f(\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta^1,\ldots,\eta^q)=\boxed{\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p}S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q}}\ \xi'^{r_1}_1\ldots\xi'^{r_p}_p\,\eta'^1_{u_1}\ldots\eta'^q_{u_q}=$$

по правилу Эйнштейна по индексам, расположенные вверху и внизу, происходит суммирование (i_m, j_k)

$\Rightarrow$ в результате, просуммировав, получим новую компоненту со штрихованными индексами.

$$=\boxed{\alpha'^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p}}\ \xi'^{r_1}_1\ldots\xi'^{r_p}_p\,\eta'^1_{u_1}\ldots\eta'^q_{u_q},$$

т.о. получим снова тензор типа (p,q)

Т.о., при замене базиса тензор типа (p,q) остаётся тензором того же типа, а его координаты меняются по следующему закону:

$$\boxed{\underbrace{\alpha'^{\,u_1\ldots u_q}_{\;r_1\ldots r_p}}_{\substack{\text{коор-ты тензора}\\ \text{в „новых" базисах}\\ e',\,\omega'}} = \underbrace{\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}}_{\substack{\text{коор-ты тензора}\\ \text{в „старых" базисах}\\ e,\,\omega}}\, t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p}\, S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q}} \quad (3)$$

верхние индексы $\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots}$ преобразуются с м-цей S, т.е. по контрвариантному закону, поэтому наз-ся контрвариантными индексами, а тензор q-раз контрвариантным

Соот-но, нижние индексы $\alpha^{\ldots}_{j_1\ldots j_p}$ преобразуются с матрицей T, т.е. по ковариантному закону, поэтому наз-ся ковариантными индексами, а тензор p раз ковариантным.

Примеры: 1) тензор типа $(0,0)\equiv\lambda\in K$, очевидно, не меняется при замене базиса, т.е. инвариант

2). $A=(a^i_j)_{n\times n}$ м-ца тензора $\alpha\in T_{(1,1)}$

$$a'^{\,k}_{m} = a^i_j\, t^j_m\, S^k_i \iff A' = SAT = T^{-1}AT$$ получаем ф-лу замены м-цы лин. опер. при замене базиса.

3) $\forall f\in V^*$ тензор типа $(1,0) \longleftrightarrow A=(a_i)_{1\times n} = a\in K_n$ $\quad a'_j = a_i t^i_j \iff a' = aT$ $\quad a_i = f(e_i)$

ковариантн.

$\forall x\in V \quad f(x) = x^i a_i = x'^j a'_j = a_i \boxed{t^i_j\, x'^j} = a_i x^i$

$V\cong V^{**}$ $\quad x(f)$ $\quad x: V^*\to K$ тензор типа $(0,1)$ $\quad x'^j = S^j_i x^i \iff x' = Sx \quad x^i = x(\omega^i)$

контрвариант.

$a_i x^i = a'_j x'^j = x^i \boxed{S^j_i a'_j} = x^i a_i$

4) $\alpha\in T_{(1,2)} \Rightarrow A = (\alpha^{ij}_k)$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{A_1} & \multicolumn{3}{c|}{A_2} & \multicolumn{3}{c}{A_3}\\ 0&0&0 & 3&1&0 & 0&0&0\\ 2&0&0 & -7&-2&0 & 1&0&0\\ 0&0&0 & 3&1&0 & 3&0&0 \end{array}\right) \quad e_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad e_3' = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Найти $\alpha'^{\,21}_{2}$

$$T = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \quad S = T^{-1} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}S^1\\S^2\\ \end{array} \quad \alpha'^{\,21}_{2} = \alpha^{ij}_k\, \underset{\text{2ой столбец } T}{t^k_2}\, \underset{\text{2ая строка } S}{S^2_i}\, \underset{\text{1ая строка } S}{S^1_j}$$

$\exists\, K$ фиксир. $\alpha^{ij}_k \in A_k$ $\quad \alpha^{ij}_k S^2_i S^1_j \iff S^2 A_k (S^1)^T \Rightarrow \underbrace{(S^2 A_k (S^1)^T)\, t^k_2}_{\alpha'^{\,21}_{2}} = (2\;\; -17\;\; -5)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -19$

Вернемся к def тензора. Тензор был определен нами, как полилинейная ф-ция и наше def не зависило от выбора базиса в пр-ве V. Но, при этом, тензор оказался согласован с заменой базиса, т.е. после замены базиса тензор остался тензором, причем того же типа. Для такого рода объектов исп-ся термин геометрический объект. Поэтому сущ-т другой подход к def. тензора.

def: (2ое def тензора) Тензором α типа (p,q) наз-ся геометрический объект на пр-ве V, который описывается A $(p+q)$ мерной матрицей элементов поля K размерности $n=\dim V$. При этом, каковы бы не были базисы e и e' в пр-ве V и соответствующие им сопряженные базисы V^* ω и ω', соответствующие компоненты матриц A и A' должны быть связаны формулой (3).

Операции „+" и „$\cdot\lambda$" между двумя тензорами одного типа, очевидно, опр-ся в этом случае как операции „+" и „$\cdot\lambda$" соответствующих компонент матриц тензоров.

При этом, новые компоненты, полученные в следствии этих операций, также будут уд-ть ф-ле (3). Т.е. при сложении и умножении на скаляр снова будет получать тензор того же типа, что и исходные.

Действительно, $\forall\lambda\in K$; $\alpha,\beta\in T(p,q)$

$$(\lambda\alpha+\beta)^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} := \lambda\cdot\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} + \beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}$$

$$(\lambda\alpha+\beta)^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\, t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p}\, S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q} = \left(\lambda\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} + \beta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}\right) t^{j_1}_{r_1}\ldots t^{j_p}_{r_p}\, S^{u_1}_{i_1}\ldots S^{u_q}_{i_q} =$$

$$\underset{\substack{\text{т.к.}\\ \alpha,\beta\in T(p,q)}}{=} \lambda\alpha'^{\,u_1\ldots u_q}_{\;r_1\ldots r_p} + \beta'^{\,u_1\ldots u_q}_{\;r_1\ldots r_p} = (\lambda\alpha'+\beta')^{u_1\ldots u_q}_{r_1\ldots r_p} = (\lambda\alpha+\beta)'^{\,u_1\ldots u_q}_{\;r_1\ldots r_p}$$

Т.о. лин. операциям на пр-ве полилин. ф-й соответствуют лин. опер. над многомерными м-цами с сохранением св-ва (3). Поэтому def 1 $\iff$ def 2.

В зависимости от поставленой задачи, мы будем исп-ть как 1ое, так и 2ое def.

8.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Операция свертки.

8.3. Произведение тензоров. Базис пр-ва тензоров. Операция свертки.

def: $\alpha \in T_{(p_1,q_1)}$, $\beta \in T_{(p_2,q_2)}$

Произведением тензоров α и β наз-ся тензор $\boxed{\gamma = \alpha \otimes \beta} \in T_{(p_1+p_2,q_1+q_2)}$, компоненты которого опр-ся следующим равенством:

$$\boxed{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}} = \alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} \cdot \beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}}}$$

корректность def: надо проверить выполнение св-ва (3) для новой многомерной м-цы γ:

$$\gamma'^{\,i_1' \dots i_{q_1}' k_1' \dots k_{q_2}'}_{\;j_1' \dots j_{p_1}' m_1' \dots m_{p_2}'} = \alpha'^{\,i_1' \dots i_{q_1}'}_{\;j_1' \dots j_{p_1}'} \cdot \beta'^{\,k_1' \dots k_{q_2}'}_{\;m_1' \dots m_{p_2}'} \underset{\alpha,\beta\text{ - тензоры}}{=} \overbrace{\alpha^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} t^{j_1}_{j_1'} \dots t^{j_{p_1}}_{j_{p_1}'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_{q_1}'}_{i_{q_1}} \cdot \beta^{k_1 \dots k_{q_2}}_{m_1 \dots m_{p_2}}}^{\gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1} m_1 \dots m_{p_2}}} t^{m_1}_{m_1'} \dots t^{m_{p_2}}_{m_{p_2}'} S^{k_1'}_{k_1} S^{k_{q_2}'}_{k_{q_2}} =$$

$$= \gamma^{i_1 \dots i_{q_1} k_1 \dots k_{q_2}}_{j_1 \dots j_{p_2} m_1 \dots m_{p_2}} t^{j_1}_{j_1'} \dots t^{j_{p_1}}_{j_{p_2}'} t^{m_1}_{m_1'} \dots t^{m_{p_2}}_{m_{p_2}'} S^{i_1'}_{i_1} \dots S^{i_{q_1}'}_{i_{q_1}} S^{k_1'}_{k_1} \dots S^{k_{q_2}'}_{k_{q_2}} \Rightarrow \text{св-во (3) вып-но} \Rightarrow \gamma \in T_{(p_1+p_2,q_1+q_2)}$$

Замечание: $\forall \lambda \in K$ - тензор типа $(0,0)$ $\Rightarrow$ $\lambda \cdot \alpha = \lambda \otimes \alpha = \alpha \otimes \lambda$

Тензорное произведение, очевидно, ассоциативно, но не коммутативно! $\boxed{\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha}$

Пример: $\alpha, \beta \in T_{(1,0)}$ $\alpha = (1\ 0\ {-1})$ $\beta = (0\ 3\ 5)$

$$\gamma_1 = \alpha \otimes \beta = (\alpha_i \beta_j) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A_1 \qquad \gamma_2 = \beta \otimes \alpha = (\beta_i \alpha_j) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2$$

$\gamma_1 \in T_{(2,0)}$ $\qquad$ $\gamma_2 \in T_{(2,0)}$

$\gamma_1 \neq \gamma_2$ $\qquad A_1 = A_2^T$

Упр: 1) $\alpha \in T_{(p,0)}$, $\beta \in T_{(0,q)}$ $\Rightarrow$ $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$

2) $\otimes$ дистрибутивно

В смысле 1го def тензора произведению тензоров будет соот-ть произведение функций, определяющих эти тензоры.

$$\alpha \longleftrightarrow f: V^{p_1}\times (V^*)^{q_1} \to K$$
$$\beta \longleftrightarrow g: V^{p_2}\times (V^*)^{q_2} \to K$$
$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \alpha\otimes\beta \longleftrightarrow f\cdot g: V^{p_1+p_2}\times (V^*)^{q_1+q_2} \to K}$$

$\forall\ \xi_1,\dots,\xi_{p_1},\zeta_1,\dots,\zeta_{p_2} \in V \quad \forall\ \eta^1,\dots,\eta^{q_1},\theta^1,\dots,\theta^{q_2}\in V^*$

$$f\cdot g(\xi_1,\dots,\xi_{p_1},\zeta_1,\dots,\zeta_{p_2},\eta^1,\dots,\eta^{q_1},\theta^1,\dots,\theta^{q_2}) = \underbrace{\gamma^{i_1\dots i_{q_1}k_1\dots k_{q_2}}_{j_1\dots j_{p_1}m_1\dots m_{p_2}}}_{\text{подставим выражения компонент } \gamma \text{ через компоненты } \alpha \text{ и } \beta} \xi_1^{j_1}\dots\xi_{p_1}^{j_{p_1}}\zeta_1^{m_1}\dots\zeta_{p_2}^{m_{p_2}}\eta^1_{i_1}\dots\eta^{q_1}_{i_{q_1}}\theta^1_{k_1}\dots\theta^{q_2}_{k_{q_2}} =$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1\dots i_{q_1}}_{j_1\dots j_{p_1}}\xi_1^{j_1}\dots\xi_{p_1}^{j_{p_1}}\eta^1_{i_1}\dots\eta^{q_1}_{i_{q_1}}}_{f(\xi_1,\dots,\xi_{p_1},\eta^1,\dots,\eta^{q_1})}\cdot\underbrace{\beta^{k_1\dots k_{q_2}}_{m_1\dots m_{p_2}}\zeta_1^{m_1}\dots\zeta_{p_2}^{m_{p_2}}\theta^1_{k_1}\dots\theta^{q_2}_{k_{q_2}}}_{g(\zeta_1,\dots,\zeta_{p_2},\theta^1,\dots,\theta^{q_2})}$$

В частности, $\forall\ \underset{\text{лин. форма}}{f^j} \in T_{(1,0)}$, $j=1,\dots,p$ $\quad f^1\otimes f^2\otimes\dots\otimes f^p \in T_{(p,0)}$

$$\forall\ \xi_1,\dots,\xi_p\in V \quad \boxed{f^1\otimes f^2\otimes\dots\otimes f^p(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_p) = f^1(\xi_1)\cdot f^2(\xi_2)\cdot\ldots\cdot f^p(\xi_p)}$$

$$\forall\ g_j\in T_{(0,1)} \quad j=1,\dots,q \qquad g_1\otimes g_2\otimes\dots\otimes g_q\in T_{(0,q)}$$

$$\forall\ \eta^1,\dots,\eta^q\in V^* \quad \boxed{g_1\otimes g_2\otimes\dots\otimes g_q(\eta^1,\dots,\eta^q) = g_1(\eta^1)\cdot g_2(\eta^2)\cdot\ldots\cdot g_q(\eta^q)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^1\otimes\dots\otimes f^p\otimes g_1\otimes\dots\otimes g_q(\xi_1,\dots,\xi_p,\eta^1,\dots,\eta^q) = f^1(\xi_1)\cdots f^p(\xi_p)\cdot g_1(\eta^1)\cdots g_q(\eta^q)} \quad (4)$$

Теорема: (о базисе пр-ва $T_{(p,q)}$)
$e_1,\dots,e_n$ базис V, $\omega^1,\dots,\omega^n$ базис V^*, сопряжен. e.
Совокупность тензоров вида $\boxed{\omega^{j_1}\otimes\dots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_q}}$ по всевозможным наборам индексов $(j_1,\dots,j_p,i_1,\dots,i_q)$, где $j_k=1,\dots,n$, $i_m=1,\dots,n$
явл-ся базисом пр-ва $T_{(p,q)}$

Док-во: очевидно, $\omega^{j_1}\otimes\dots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_q}\in T_{(p,q)}$, т.к. $\underset{\substack{\text{лин. форма}\\ \omega^j\in T_{(1,0)}}}{\omega^j: V\to K}$, а $\underset{\substack{\text{лин. отобр.}\\ e_i\in T_{(0,1)}}}{e_i: V^*\to K}$

порождающая: $\forall\ \alpha\in T_{(p,q)} \longleftrightarrow f$ полилин. ф-я

$\forall\ \xi_1,\dots,\xi_p\in V \quad \forall\ \eta^1,\dots,\eta^q\in V^* \qquad f(\xi_1,\dots,\xi_p,\eta^1,\dots,\eta^q) = \alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\underbrace{\xi_1^{j_1}\dots\xi_p^{j_p}\eta^1_{i_1}\dots\eta^q_{i_q}}_{\omega^{j_1}(\xi_1)\cdots\omega^{j_p}(\xi_p)e_{i_1}(\eta^1)\cdots e_{i_q}(\eta^q)} = \text{св-во } (4) =$

$$= \alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\dots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_q}(\xi_1,\dots,\xi_p,\eta^1,\dots,\eta^q)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\dots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_q}} \Rightarrow \text{порожд.}$$

лин. независимость: $\exists\ \underset{\substack{\text{нулевой}\\ \text{тензор}}}{\Theta} = \alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\,\omega^{j_1}\otimes\dots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_q}$

применим нулевой тензор к набору векторов $e_{m_1},\dots,e_{m_p},\omega^{k_1},\dots,\omega^{k_q}$

$$0 = \alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\,\omega^{j_1}(e_{m_1})\cdots\omega^{j_p}(e_{m_p})\,e_{i_1}(\omega^{k_1})\cdots e_{i_q}(\omega^{k_q}) = \alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\underbrace{\delta^{j_1}_{m_1}\dots\delta^{j_p}_{m_p}\delta^{k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_q}_{i_q}}_{\text{символы Кронекера}} = \alpha^{k_1\dots k_q}_{m_1\dots m_p}$$

верно для любого набора индексов $m_1,\dots,m_p,k_1,\dots,k_q$ $\Rightarrow$ нулевая комбинация тривиальна $\Rightarrow$ лин. незав. ∎

Пример: $\alpha = (\omega^1-2\omega^2+\omega^3)\otimes(3\omega^1+\omega^2)\otimes e_2 + (\omega^2+2\omega^3)\otimes\omega^1\otimes e_3$

1) найти значение α на векторах $\xi_1 = 2e_1-e_2$, $\xi_2 = e_1+2e_2-e_3$, $\eta = \omega^2-\omega^3$
2) записать матрицу тензора.

1) $\alpha(\xi_1,\xi_2,\eta) = (\xi_1^1-2\xi_1^2+\xi_1^3)(3\xi_2^1+\xi_2^2)\cdot\eta_2 + (\xi_1^2+2\xi_1^3)\cdot\xi_2^1\eta_3 = (2+2+0)(3\cdot1+2)\cdot1 + (-1+2\cdot0)1\cdot(-1) = 21$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\quad \xi_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\quad \eta = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

2) $\alpha\in T_{(2,1)} \Rightarrow \alpha = (\alpha^i_{jk})$

$\alpha^2_{11}=3 \quad \alpha^2_{21}=-6 \quad \alpha^2_{31}=3$
$\alpha^2_{12}=1 \quad \alpha^2_{22}=-2 \quad \alpha^2_{32}=1$
$\alpha_{21}=1 \quad \alpha^3_{31}=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 3&-6&3&1&-2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$
$k=1 \qquad k=2 \qquad k=3$

def: $\exists\, p,q \geq 1$ $\quad \alpha \in T_{(p,q)}$. Приравняем один верхний индекс одному нижнему. Тогда, по правилу Эйнштейна, мы должны будем просуммировать соответствующие компоненты. В результате, получим систему элементов, у которых число верхних и нижних будет на единицу меньше.

$$\boxed{\beta^{i_1 \ldots \overset{\text{отсутствует}}{\hat{i}_k} \ldots i_q}_{j_1 \ldots \underset{\text{отсутствует}}{\hat{j}_m} \ldots j_p} = \alpha^{i_1 \ldots \overset{k\text{-й индекс}}{æ} \ldots i_q}_{j_1 \ldots \underset{m\text{-й индекс}}{æ} \ldots j_p}}$$

– эта операция наз-ся __свёрткой тензора__

$\alpha \in T_{(p,q)} \rightsquigarrow \beta \in T_{(p-1,q-1)}$

__корректность определения:__ надо проверить выполнение св-ва (3)

$$\beta'^{\,i_1' \ldots \hat{i}_k' \ldots i_q'}_{\,j_1' \ldots \hat{j}_m' \ldots j_p'} = \alpha'^{\,i_1' \ldots æ' \ldots i_q'}_{\,j_1' \ldots æ' \ldots j_p'} = \alpha^{i_1 \ldots i_k \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_m \ldots j_p}\, t^{j_1}_{j_1'} \ldots \boxed{t^{j_m}_{æ'} \ldots t^{j_p}_{j_p'}\, S^{i_1'}_{i_1} \ldots S^{æ'}_{i_k}} \ldots S^{i_q'}_{i_q} =$$

$$(TS)^{j_m}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k} = \begin{cases} 0, & j_m \neq i_k \\ 1, & j_m = i_k = æ \end{cases}, \qquad TS \overset{\shortparallel}{=} E$$

$$= \underbrace{\alpha^{i_1 \ldots æ \ldots i_q}_{j_1 \ldots æ \ldots j_p}}_{\beta^{i_1 \ldots \hat{i}_k \ldots i_q}_{j_1 \ldots \hat{j}_m \ldots j_p}} \underbrace{t^{j_1}_{j_1'} \ldots t^{j_p}_{j_p'}}_{\text{нет } t^{j_m}_{æ}} \underbrace{S^{i_1'}_{i_1} \ldots S^{i_q'}_{i_q}}_{\text{нет } S^{æ}_{i_k}} \Rightarrow \text{вып-но (3)}$$

$\Rightarrow \beta$ тензор типа $(p-1, q-1)$

__Замечания:__

1) Свёртка может проводится по нескольким индексам.
2) Если в результате свертки получается тензор типа $(0,0)$ (т.е. скаляр), то такая __свертка__ наз-ся __полной__.

__Примеры:__

1) $\alpha \in T_{(1,1)} \leftrightarrow A = (\alpha^i_j)_{n\times n}$ $\qquad \underset{\text{свертка}}{\beta = (\alpha^i_i)} = \operatorname{tr} A \in K$ $\Rightarrow$ полная свертка; $\beta \in T_{(0,0)}$ инвариант отн-но замены базиса.

2) $f \in T_{(1,0)}$ – ковектор $\leftrightarrow a = (a_1, \ldots a_n)$
$x \in T_{(0,1)}$ – вектор $\leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$\alpha = f \otimes x = (a_j x^i) = (\alpha^i_j) \Rightarrow \underset{\text{свертка}}{\beta = (\alpha^i_i)} = a_i x^i = f(x) = x(f)$ — значение лин. формы f на векторе x.

3) $\alpha \in T_{(1,1)} \leftrightarrow A = (\alpha^i_j)$
$x \in T_{(0,1)} \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$\gamma = \alpha \otimes x = (\alpha^i_j x^k) = (\gamma^{ik}_j) \in T_{(1,2)}$

$\underset{\text{свертка}}{\beta = (\gamma^{ij}_j)} = (\alpha^i_j x^j) = (\beta^i) \iff b = Ax$

$\alpha^i_j x^j \updownarrow (Ax)^{i\text{-ая коор-та}}$ $\qquad \beta \in T_{(0,1)}$

$\updownarrow$

$b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix}$

$\underset{\text{свертка}}{\tilde{\beta} = (\gamma^{jk}_j)} = (\alpha^j_j x^k) = (\tilde{\beta}^k) \iff \tilde{b} = (\operatorname{tr} A)\cdot x$

$\updownarrow$

$\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^n \end{pmatrix}$

4) $\alpha \in T_{(1,1)}$ $\qquad \alpha'^{\,i'}_{\,j'} = \alpha^i_j\, t^j_{j'}\, S^{i'}_i$ = свертка по $2^{\text{м}}$ индексам тензора $\alpha \otimes T \otimes S = \gamma = (\alpha^i_j\, t^k_m\, S^e_r) = (\gamma^{ike}_{jmr})$

$\Rightarrow \alpha'^{\,i'}_{\,j'} = \gamma^{i\,j\,i'}_{j\,j'\,i}$ свертка.

8.4 Транспонирование тензора. Симметрические и кососимметричческие тензоры.

8.4. Транспонирование тензора. Симметричные и кососимметричные тензоры.

def: $\rceil$ $p \geqslant 2$, $\alpha \in T(p,q)$ $\rceil$ $\sigma = (\sigma_1, .., \sigma_p)$ перестановка p чисел от 1 до p.

(напоминание: $\varphi: \{1,2,.,p\} \to \{1,2,.,p\}$ – подстановка
вз. однозн. отобр. $\sigma_k = \varphi(k)$, $k = 1,..,p$ $\qquad \varphi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & .. & p \\ 1 & 2 & 3 & .. & p \end{pmatrix}$
$\sigma = (\sigma_1, .., \sigma_p) = (\varphi(1), \varphi(2) .., \varphi(p))$ – перестановка)

$\boxed{\beta = \sigma(\alpha)}$ – наз-ся тензором, полученным транспонированием тензора α перестановкой σ

$\boxed{p \geqslant 2}$ по нижним индексам, если $\boxed{\beta^{i_1..i_q}_{j_1..j_p} = \alpha^{i_1..i_q}_{j_{\sigma_1}..j_{\sigma_p}}}$

Аналогично опр-ся транспонирование по верхним индексам.

Замечание: для тензоров операция транспонирования опр-ся только по одному типу индексов; либо по нижним, либо по верхним, в отличии от произвольной многомерной м-цы, которую можно транспонировать по любым типам индексов.

корректность def: как и раньше надо проверить выполнение св-ва (3), т.е. что $\beta \in T(p,q)$

Как известно, любая перестановка может быть получена конечным числом транспозиций. Поэтому, достаточно показать, что св-во (3) вып-ся при транспонировании тензора по паре индексов.

$$\rceil \quad \beta^{i_1..i_q}_{j_1 .. j_k .. j_m .. j_p} = \alpha^{i_1..i_q}_{j_1 .. j_m .. j_k .. j_p} \Rightarrow \beta'^{i_1'..i_q'}_{j_1' .. j_k' .. j_m' .. j_p'} = \alpha'^{i_1'..i_q'}_{j_1' .. j_m' .. j_k' .. j_p'} = \quad \text{т.к. } \alpha \in T(p,q) \Rightarrow \text{вып-но (3)}$$

$$= \underbrace{\boxed{\alpha^{i_1..i_q}_{r_1..r_k..r_m..r_p}}}_{\beta^{i_1..i_q}_{r_1..r_m..r_k..r_p}} t^{r_1}_{j_1'} .. t^{r_k}_{j_m'} .. t^{r_m}_{j_k'} .. t^{r_p}_{j_p'} S^{i_1'}_{i_1} .. S^{i_q'}_{i_q} = \beta^{i_1..i_q}_{r_1..r_m..r_k..r_p} t^{r_1}_{j_1'} .. t^{r_m}_{j_k'} .. t^{r_k}_{j_m'} .. t^{r_p}_{j_p'} S^{i_1'}_{i_1} .. S^{i_q'}_{i_q} \Rightarrow (3) \text{ вып-но.}$$

Как будет выглядеть транспонирование тензора, если брать за определение тензора def 1?

$\alpha \in T_{(p,q)} \longleftrightarrow \alpha$ полилин. отобр. I $\boxed{\beta = \sigma(\alpha)}$ $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$, $\forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$ $\boxed{\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)} = \beta^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} =$

$= \alpha^{i_1 \dots i_q}_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} \xi_{\sigma_1}^{j_{\sigma_1}} \dots \xi_{\sigma_p}^{j_{\sigma_p}} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} = \boxed{\alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)}$

Замечание: при транспонировании по нижним индексам, очевидно, верхние индексы никак не задействованы. Кроме того, очевидно, что операция транспонирования по верхним индексам будет обладать теми же св-ми, что и операция транспонирования по нижним. Поэтому все результаты, которые мы получим для нижних индексов, автоматически переносятся на верхние индексы.

Пример: $\alpha = (\omega^1 - 2\omega^2) \otimes \omega^3 \otimes (\omega^1 - \omega^3) + \omega^2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^3$ $(\Rightarrow \alpha \in T_{(3,0)} \Rightarrow (\alpha_{ijk}))$

1) найти $\beta = \sigma(\alpha)$ $\sigma = (3,1,2)$, выписать матрицу.

2) найти значение β на векторах $\xi_1 = e_1 + e_2$, $\xi_2 = -e_2 - e_3$, $\xi_3 = e_1 + 2e_2$

1) $\alpha = (\alpha_{ijk}) \Rightarrow \beta = (\alpha_{kij})$ т.е. $i \leftrightarrow j_1$
$\sigma(3,1,2)$ $\quad \beta = (\beta_{ijk})$ $\quad j \leftrightarrow j_2$
$k \leftrightarrow j_3$

$\cancel{\boxed{\alpha_{ijk} = \beta_{kij}}}$ неверно! здесь $\sigma = (2\,3\,1)$

$$\beta_{ijk} = \beta_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_3 j_1 j_2} = \alpha_{kij}$$

$\boxed{1 \text{ сп.}}$ выпишем м-цу α: $\alpha_{131} = 1$ $\alpha_{133} = -1$ $\alpha_{213} = 1$
$\alpha_{231} = -2$ $\alpha_{233} = 2$ остальные нули

$\Rightarrow \beta_{311} = 1$ $\beta_{331} = -1$ $\beta_{132} = 1$
$\beta_{312} = -2$ $\beta_{332} = 2$ остальные нули $\Rightarrow \beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\boxed{2 \text{ сп}}$ любая перестановка $\equiv$ конечное число транспозиций (т.е. транспонирование м-цы по паре индексов)

транспонирование многомерной м-цы по паре индексов (i,j) $\equiv$ транспонирование двумерных слоёв м-цы, получаемых фиксированием различных сочетаний всех индексов, кроме индексов (i,j).

$\beta_{ijk} = \alpha_{kij}$ $\qquad \alpha_{kij} \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{\tilde{\alpha}}_{ijk} = \beta_{ijk}$

за 2 транспозиции эл-т, стоящий в матрице на позиции $(k\,i\,j)$, должен переместиться на позицию $(i\,j\,k)$

$\alpha_{kij} \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_{ikj}$

j не меняется, поэтому будем фиксировать различные значения $j = 1,2,3$, т.е. извлекать из м-цы тензора двумерные м-цы, которые после обычной операции транспонирования нужно будет поместить обратно в тензор.

$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ фиксируем j в α $\rightsquigarrow$ фиксируем слой $\rightsquigarrow$ каждый слой надо транспонировать

$\tilde{\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\tilde{\alpha}_{ikj} \rightsquigarrow \tilde{\tilde{\alpha}}_{ijk}$ не меняется i $\Rightarrow$ фиксируем $i = 1,2,3$ $\Rightarrow$ извлекаем двумерную м-цу $\Rightarrow$ транспонируем $\Rightarrow$ помещаем обратно.

$i = 1$ (1ая стр) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ помещаем обратно на исходные позиции

$i = 2$ (2ая стр) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad i = 3$ (3-я стр) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \tilde{\tilde{\alpha}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
$\parallel$
β

2) $\boxed{1\text{ сп.}}$ $\beta = \sigma(\alpha)$ $\sigma = (3, 1, 2)$

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = (\underset{1}{\omega^1(\xi_3)} - 2\underset{2}{\omega^2(\xi_3)})\cdot \underset{0}{\omega^3(\xi_1)}\cdot(\omega^1(\xi_2) - \omega^3(\xi_2)) + \underset{2}{\omega^2(\xi_3)}\underset{1}{\omega^1(\xi_1)}\underset{-1}{\omega^3(\xi_2)} =$$
$$= -2$$

$\boxed{2\text{ сп}}$ $$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \beta_{ijk}\xi_1^i\xi_2^j\xi_3^k = \overset{\beta_{311}}{1}\cdot\underset{\xi_1^3}{0}\ldots - \overset{\beta_{312}}{2}\cdot\underset{\xi_1^3}{0}\ldots - \overset{\beta_{331}}{1}\cdot\underset{\xi_1^3}{0}\ldots + \overset{\beta_{332}}{2}\cdot\underset{\xi_1^3}{0}\ldots + \overset{\beta_{132}}{1}\cdot\underset{\xi_1^1}{1}\,\underset{\xi_2^3}{(-1)}\cdot\underset{\xi_3^2}{2} = -2$$

Из def. транспонирования $\Rightarrow$ лин. операция. $\forall \lambda \in K$ $\forall \alpha_{1,2} \in T(p,q)$ $\boxed{\sigma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda\sigma(\alpha_2)}$

Кроме того, любая подстановка – это вз-одн. отобр. $\Rightarrow$ операция транспон. вз-одн.

$\Rightarrow$ транспонирование – это изоморфизм на $T(p,q)$

Транспонирование ассоциат., но не коммутативно (!) (очевидно, следует из соответ. свойств перестановок)

. σ, τ, θ перестановки $\alpha \in T(p,q)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}(\sigma(\tau\theta))(\alpha) = ((\sigma\tau)\theta)(\alpha)) \\ \sigma\tau(\alpha) \neq \tau\sigma(\alpha)\end{array}}$

упр! док-ть: $\alpha \otimes \beta = \sigma(\beta \otimes \alpha)$

def: тензор $\alpha \in T(p,q)$ наз-ся симметричным (по нижним индексам), если $\forall$ перестановки (нижних индексов) σ : $\boxed{\sigma(\alpha) = \alpha}$

и наз-ся кососимметричным (антисимметричным, альтернированным) (по нижним индексам), если $\forall$ перестановки (нижних индексов) σ : $\boxed{\sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha}$, где $\varepsilon(\sigma)$ – четность перестановки.

Из def автоматически получаем св-во для компонент симм. и кососимм. тензоров. $\forall\ \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}} \\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha^{i_1\ldots i_q}_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}\end{array}}$$

Т.к. $\forall$ перестановка $\equiv$ конечное число транспозиций ($\equiv$ транспонирование по паре индексов)

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall\ (j_k, j_m) \quad \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_k \ldots j_m \ldots} = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_m \ldots j_k \ldots} \\ \alpha \text{ кососимм} \Leftrightarrow \forall\ (j_k, j_m) \quad \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_k \ldots j_m \ldots} = -\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j_m \ldots j_k \ldots}\end{array}}$$

или если брать $\overset{def}{\vee}$ тензора в смысле def 1:

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \text{ симм.} \Leftrightarrow \forall\ (k,m) \quad \alpha(\ldots, \xi_k, \ldots, \xi_m, \ldots) = \alpha(\ldots \xi_m, \ldots \xi_k, \ldots) \\ \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\ (k,m) \quad \alpha(\ldots \xi_k, \ldots, \xi_m, \ldots) = -\alpha(\ldots \xi_m, \ldots, \xi_k, \ldots)\end{array}}$$

$\boxed{\text{Утв: } \alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\ (k,m) \quad \alpha(\ldots \xi, \ldots, \xi \ldots) = 0}$

док-во! ($\Rightarrow$) α кососимм. $\Rightarrow \forall (k,m)$ $\alpha(\ldots \xi, \ldots, \xi \ldots) = -\alpha(\ldots \xi, \ldots, \xi \ldots) \Rightarrow \alpha(\ldots \xi, \ldots \xi \ldots) = 0$

($\Leftarrow$) $\forall (k,m)$ $\alpha(\ldots(\xi_k + \xi_m), \ldots, (\xi_k + \xi_m), \ldots) = 0$

$$\underset{0}{\alpha(\ldots \xi_k, \ldots, \xi_k, \ldots)} + \alpha(\ldots \xi_k, \ldots, \xi_m \ldots) + \alpha(\ldots \xi_m, \ldots, \xi_k, \ldots) + \underset{0}{\alpha(\ldots \xi_m, \ldots, \xi_m, \ldots)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\ldots \xi_k, \ldots, \xi_m \ldots) = -\alpha(\ldots \xi_m, \ldots, \xi_k \ldots) \Rightarrow \alpha \text{ кососимм.} \blacksquare$$

$$\boxed{\alpha \text{ кососимм.} \Leftrightarrow \forall\ (k,m) \quad \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots j \ldots j \ldots} = 0}$$

def: $\alpha \in T(p,0)$ наз-ся полилинейной формой. Если α к тому же, кососимметричен., то α наз-ся антисимм. полилин. формой или p-формой или внешней p-формой или внешней формой степени p

$\alpha \in T(0,q)$ наз-ся <u>поливектором</u>. Если α к тому же, кососимметричен, то α наз-ся <u>q-вектором</u>

<u>упр</u>: вспомнить def det из прошлого семестра. и сравнить с def p-формы.

$\boxed{\alpha \in T(p,q) \text{ кососимм. (по нижним индексам)} \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ \text{если } p > n \Rightarrow \alpha \equiv 0 \\ 2)\ \text{если } p = n \Rightarrow \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_n} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha^{i_1 \ldots i_q}_{1 2 \ldots n} \\ \quad \sigma = (j_1, \ldots, j_n) \text{ перестановка чисел } (1 2 \ldots n) \end{array}}$

<u>Примеры</u>: 1) V_3 – пр-во 3^xмерн. геом. векторов.

$\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b})$ скал. пр-е. $\alpha \in T(2,0)$, симметр.

$\beta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ смеш. пр-е. $\beta \in T(3,0)$, кососимм.

<u>упр</u>: 1) вычисл. м-цы α, β.
2) убедиться $\forall \sigma: \sigma(\alpha) = \alpha$
$\forall \sigma: \sigma(\beta) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\beta$.

2) $A = (a_{ij}) \leftrightarrow \alpha \in T(2,0)$ α симм. $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow A$ симм. м-ца.
α кососимм. $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -A^T \Leftrightarrow A$ кососимм. м-ца.

3) $\alpha \in T(3,0)$ <u>кососимм.</u> (3-форма) $\alpha \equiv 0$ $n < 3$

$\exists\, n = 3$ $\alpha_{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{123}$, $\sigma = (j_1, j_2, j_3)$ перестановка $(1 2 3)$
Остальные эл-ты нули.

σ: $(1 2 3)\oplus$ $(2 1 3)\ominus$ $(3 1 2)\oplus$
$(1 3 2)\ominus$ $(2 3 1)\oplus$ $(3 2 1)\ominus$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{123} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{123} & 0 & \alpha_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>упр</u>: как будет выглядеть м-ца α (кососимм) $\in T(3,0)$, если $n = 4$. ?

4) $\alpha \in T(3,0)$ <u>симметр.</u> $\exists\, n = 3$ $\alpha_{j_1 j_2 j_3} = \alpha_{j_{\sigma_1} j_{\sigma_2} j_{\sigma_3}}$ $\forall \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ перестановка $(1 2 3)$

$\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321} =: x$
$\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211} = y$
$\alpha_{113} = \alpha_{131} = \alpha_{311} = z$
$\alpha_{221} = \alpha_{212} = \alpha_{122} = t$
.... и т.д. <u>доделать</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_{111} & y & z & y & t & x & z & x & \cdot \\ y & t & x & t & \alpha_{222} & \cdot & x & \cdot & \cdot \\ z & x & \cdot & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{333} \end{array}\right)$$

<u>упр</u>: — " —
1) если $n = 2$
2) если $n = 4$?

8.5 Операции альтернирования и симметрирования тензоров

8.5. Операции альтернирования и симметрирования тензоров

def: Альтернированием (антисимметризацией) и симметрированием тензора $\alpha \in T_{(p,q)}$ (по нижним индексам) наз-ся операции:

$$Alt\,\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(\alpha)$$

$$Sim\,\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\sigma(\alpha)$$

S_p – мн-во всех перестановок чисел от 1 до p.

Замечания:

1) очевидно, если α симм. $\Rightarrow Sim\,\alpha = \alpha$ $\left(Sim\,\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\alpha = \frac{p!}{p!}\alpha\right.$, т.к. $\left.\sigma(\alpha)=\alpha \;\forall\sigma\right)$

   если α кососимм. $\Rightarrow Alt\,\alpha = \alpha$ $\left(Alt\,\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha = \frac{p!}{p!}\alpha\right.$, т.к. $\left.\sigma(\alpha)=(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha \;\forall\sigma\right)$

2) очевидно, Alt и Sim – лин. операции на $T_{(p,q)}$, т.к. σ – лин. операция на $T_{(p,q)}$

3) Alt и Sim можно проводить не по всему набору (нижних) индексов.

В таких случаях, при записи координатных компонент тензора, те индексы, по которым происходит альтернирование (симметрирование), заключают в квадратные (круглые) скобки. Если внутри этих скобок оказались индексы, по которым альтернирование (симметрирование) не проводится, то эти индексы выделяют вертикальными чертами.

например, $\alpha^{(i_1|i_2|i_3|i_4|i_5)}_{[j_1 j_2 j_3]}$ – по верхним индексам проводится симметрирование по индексам $i_1 i_3 i_5$

– по нижним индексам проводится альтернирование по всем индексам.

Пример: $\alpha \in T(3,0)$ $\quad n=3 \quad$ $\alpha = (\alpha_{ijk}) = (\alpha_{j_1j_2j_3})$ $\quad \sigma \in \left\{ \begin{matrix} (123) & (213) & (312) \\ (132) & (231) & (321) \end{matrix} \right\} = S_3$, $\quad \sigma = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$

1) $\boxed{\beta = \mathrm{Sim}\,\alpha} = \frac{1}{3!}\sum\limits_{\sigma\in S_3}\sigma(\alpha)$ $\qquad \beta = \alpha_{(ijk)} \rightsquigarrow \beta_{j_1j_2j_3} = \frac{1}{6}\sum\limits_{\sigma\in S_3}\alpha_{j_{\sigma_1}j_{\sigma_2}j_{\sigma_3}}$

симметрир. по всем индексам.

$\boxed{\beta_{123}} = \alpha_{(123)} = \frac{1}{6}(\alpha_{123}+\alpha_{132}+\alpha_{213}+\alpha_{231}+\alpha_{312}+\alpha_{321})$

$\alpha_{(123)} = \alpha_{(132)} = \alpha_{(213)} = \alpha_{(231)} = \alpha_{(312)} = \alpha_{(321)} \Rightarrow \beta_{123}=\beta_{132}=\beta_{213}=\beta_{231}=\beta_{312}=\beta_{321}=x$ (см. пример 4)

$\beta_{112} = \underset{j_1j_2j_3}{\alpha_{(112)}} = \frac{1}{6}\Big(\underset{\substack{j_1j_2j_3\\(123)}}{\alpha_{112}} + \underset{\substack{j_1j_3j_2\\(132)}}{\alpha_{121}} + \underset{\substack{j_2j_1j_3\\(213)}}{\alpha_{112}} + \underset{\substack{j_2j_3j_1\\(231)}}{\alpha_{121}} + \underset{\substack{j_3j_1j_2\\(312)}}{\alpha_{211}} + \underset{\substack{j_3j_2j_1\\(321)}}{\alpha_{211}}\Big)$

$\alpha_{(112)} = \alpha_{(121)} = \alpha_{(211)} \Rightarrow \beta_{112} = \beta_{121} = \beta_{211} = y$ (см. пример 4) и т.д. $\Rightarrow$ $\boxed{\beta \text{ — симметр. тензор.}}$

2) $\boxed{\gamma = \mathrm{Alt}\,\alpha} = \frac{1}{3!}\sum\limits_{\sigma\in S_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(\alpha)$ $\qquad \gamma = \alpha_{[ijk]} \rightsquigarrow \gamma_{j_1j_2j_3} = \frac{1}{6}\sum\limits_{\sigma\in S_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha_{j_{\sigma_1}j_{\sigma_2}j_{\sigma_3}}$

альтернир. по всем индексам.

$\boxed{\gamma_{123}} = \alpha_{[123]} = \frac{1}{6}(\alpha_{123}-\alpha_{132}-\alpha_{213}+\alpha_{231}+\alpha_{312}-\alpha_{321})$ $\qquad \varepsilon(\sigma) \in \left\{ \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \end{matrix} \right\}$

$\alpha_{[123]} = -\alpha_{[132]} = \alpha_{[312]} = -\alpha_{[321]} = \alpha_{[231]} = -\alpha_{[213]} \Rightarrow \gamma_{j_1j_2j_3} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\gamma_{123}$ $\qquad \sigma=(j_1j_2j_3)$ перестановка (123)

$\gamma_{112} = \underset{j_1j_2j_3}{\alpha_{[112]}} = \frac{1}{6}\Big(\underset{\substack{j_1j_2j_3\\(123)}}{\cancel{\alpha_{112}}} - \underset{\substack{j_1j_3j_2\\(132)}}{\cancel{\alpha_{121}}} - \underset{\substack{j_2j_1j_3\\(213)}}{\cancel{\alpha_{112}}} + \underset{\substack{j_2j_3j_1\\(231)}}{\cancel{\alpha_{121}}} + \underset{\substack{j_3j_1j_2\\(312)}}{\cancel{\alpha_{211}}} - \underset{\substack{j_3j_2j_1\\(321)}}{\cancel{\alpha_{211}}}\Big) = 0$

$\alpha_{[112]} = -\alpha_{[121]} = \alpha_{[211]} \Rightarrow \gamma_{112} = \gamma_{121} = \gamma_{211} = 0 \Rightarrow$ все компоненты γ, у которых совпадают хотя бы 2 индекса равны нулю (см. пример 3)

$\Rightarrow$ $\boxed{\gamma \text{ — кососимм. тензор.}}$

3) $\boxed{\tilde\beta = \alpha_{(i|j|k)}}$ $\rightsquigarrow$ $\tilde\beta_{j_1 j j_2} = \frac{1}{2!}\sum\limits_{\sigma\in S_2}\alpha_{j_{\sigma_1} j j_{\sigma_2}} = \frac{1}{2}(\alpha_{j_1jj_2}+\alpha_{j_2jj_1}) = \alpha_{(j_1|j|j_2)}$

симметрир. по 1 и 3 индексам.

$\sigma \in \{(12)\ (21)\} = S_2 \qquad \sigma = (\sigma_1,\sigma_2)$

$\tilde\beta_{\underline{1}1\underline{2}} = \alpha_{(1|1|2)} = \frac{1}{2}\Big(\underset{\substack{j_1jj_2\\(12)}}{\alpha_{\underline{1}1\underline{2}}} + \underset{\substack{j_2jj_1\\(21)}}{\alpha_{\underline{2}1\underline{1}}}\Big) \Rightarrow \tilde\beta_{112} = \tilde\beta_{211}$; $\quad \alpha_{(1|1|2)} = \alpha_{(2|1|1)}$

$\tilde\beta_{\underline{1}2\underline{1}} = \alpha_{(1|2|1)} = \frac{1}{2}\Big(\underset{\substack{j_1jj_2\\(12)}}{\alpha_{\underline{1}2\underline{1}}} + \underset{\substack{j_2jj_1\\(21)}}{\alpha_{\underline{1}2\underline{1}}}\Big) = \alpha_{121} \Rightarrow \boxed{\tilde\beta_{iji} = \alpha_{(i|j|i)} = \alpha_{iji}}$ $\quad \forall\, i,j$

$\tilde\beta_{\underline{1}2\underline{3}} = \alpha_{(1|2|3)} = \frac{1}{2}(\alpha_{\underline{1}2\underline{3}} + \alpha_{\underline{3}2\underline{1}}) \Rightarrow \tilde\beta_{123} = \tilde\beta_{321}$ и т.д. $\Rightarrow \boxed{\tilde\beta_{ijk} = \tilde\beta_{kji}}$ $\quad \forall\, i,j,k$; $\quad \alpha_{(1|2|3)} = \alpha_{(3|2|1)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde\beta \text{ симметр. по 1 и 3 индексам.}}$

4) $\boxed{\tilde\gamma = \alpha_{[i|j|k]}}$ $\rightsquigarrow$ $\tilde\gamma_{j_1 j j_2} = \frac{1}{2!}\sum\limits_{\sigma\in S_2}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\alpha_{j_{\sigma_1} j j_{\sigma_2}} = \frac{1}{2}(\alpha_{j_1jj_2}-\alpha_{j_2jj_1}) = \alpha_{[j_1|j|j_2]}$

$\varepsilon(\sigma) \in \{+\ -\}$

$\tilde\gamma_{112} = \alpha_{[1|1|2]} = \frac{1}{2}(\alpha_{\underline{1}1\underline{2}} - \alpha_{\underline{2}1\underline{1}}) \Rightarrow \tilde\gamma_{112} = -\tilde\gamma_{211}$; $\quad \alpha_{[1|1|2]} = -\alpha_{[2|1|1]}$

$\tilde\gamma_{121} = \alpha_{[1|2|1]} = \frac{1}{2}(\alpha_{121} - \alpha_{121}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde\gamma_{iji} = \alpha_{[i|j|i]} = 0 \quad \forall\, i,j}$

$\tilde\gamma_{123} = \alpha_{[1|2|3]} = \frac{1}{2}(\alpha_{123} - \alpha_{321}) \Rightarrow \tilde\gamma_{123} = -\tilde\gamma_{321}$ и т.д. $\Rightarrow \boxed{\tilde\gamma_{ijk} = -\tilde\gamma_{kji} \quad \forall\, i,j,k}$; $\quad \alpha_{[1|2|3]} = -\alpha_{[3|2|1]}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde\gamma \text{ кососимм. по 1 и 3 индексам.}}$

Упр: $\alpha \in T(2,0) \leftrightarrow A = (a_{ij})$ $\quad$ 1) $\mathrm{Sim}\,A = \frac{A+A^T}{2}$, $\mathrm{Alt}\,A = \frac{A-A^T}{2}$ $\quad$ 2) $\mathrm{Sim}\,A$ — симм. м-ца? $\mathrm{Alt}\,A$ — кососим. м-ца?

Теорема! $\forall$ перестановки σ $\quad Alt(\sigma(\alpha)) = \sigma(Alt\alpha) = (-1)^{d(\sigma)} Alt\alpha$

$Sim(\sigma(\alpha)) = \sigma(Sim\alpha) = Sim\alpha$

операции Alt и Sim перестановочны с операцией транспонирования !

Док-во! док-м для Alt (для Sim аналогично: упр)

$$Alt(\sigma(\alpha)) = \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}(-1)^{d(\tau)}\tau(\sigma(\alpha)) = \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}(-1)^{d(\tau)}(\tau\sigma)(\alpha) \ominus$$

$\tau\in S_p$ - пробегает мн-во всех перестановок $S_p \Rightarrow \tau\sigma\in S_p$ также пробегает всё мн-во S_p

$\exists\ \rho = \tau\sigma \Rightarrow (-1)^{d(\rho)} = (-1)^{d(\tau)}(-1)^{d(\sigma)} \Rightarrow (-1)^{d(\tau)} = (-1)^{d(\rho)}(-1)^{d(\sigma)}$

$$\ominus \frac{1}{p!}\sum_{\rho\in S_p}(-1)^{d(\rho)}(-1)^{d(\sigma)}\rho(\alpha) = (-1)^{d(\sigma)}\underbrace{\frac{1}{p!}\sum_{\rho\in S_p}(-1)^{d(\rho)}\rho(\alpha)}_{Alt\alpha} = (-1)^{d(\sigma)}Alt\alpha \Rightarrow \boxed{Alt(\sigma(\alpha)) = (-1)^{d(\sigma)}Alt\alpha}$$

$$\sigma(Alt\alpha) = \sigma\Big(\frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}(-1)^{d(\tau)}\tau(\alpha)\Big) \underset{\sigma\text{ - лин. опер.}}{=} \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}(-1)^{d(\sigma)}\sigma(\tau(\alpha)) = \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}(-1)^{d(\sigma)}(\sigma\tau)(\alpha) \underset{\substack{\text{аналогично}\\ \text{1-му док-ву рав-ву.}\\ \rho=\sigma\tau}}{=} (-1)^{d(\sigma)}\frac{1}{p!}\sum_{\rho\in S_p}(-1)^{d(\rho)}\rho(\alpha) =$$

$$= (-1)^{d(\sigma)}Alt\alpha \Rightarrow \boxed{\sigma(Alt\alpha) = (-1)^{d(\sigma)}Alt\alpha}$$ ∎

Следствия!

1) $\forall\alpha$ $\quad Alt\alpha$ – кососимм. тензор

$Sim\alpha$ – симм. тензор

2) α кососимм. $\iff \alpha = Alt\alpha$

α симметр $\iff \alpha = Sim\alpha$

3) $Alt(Alt\alpha) = Alt\alpha \qquad Alt(Sim\alpha) = 0$

$Sim(Sim\alpha) = Sim\alpha \qquad Sim(Alt\alpha) = 0$

Док-во: 1) очевидно, $\sigma(Alt\alpha) = (-1)^{d(\sigma)}Alt\alpha$ (def. кососимм)

очевидно, $\sigma(Sim\alpha) = Sim\alpha$ (def симметр).

2) док-м для кососимм. (для симм. аналог. упр)

($\Rightarrow$) очев, из def кососимм. (см. def)

($\Leftarrow$) $\exists\ \alpha = Alt\alpha \Rightarrow \forall\sigma:\ \sigma(\alpha) = \sigma(Alt\alpha) =$

$= (-1)^{d(\sigma)}Alt\alpha = (-1)^{d(\sigma)}\alpha \underset{\text{по def.}}{\Rightarrow}$ кососимм.

3) $Alt(Alt\alpha) = Alt\alpha$ (из 1) 2) т.к. $Alt\alpha$ кососимм.)

$Sim(Sim\alpha) = Sim\alpha$ (из 1) 2) т.к. $Sim\alpha$ симметр)

$$Alt(Sim\alpha) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{d(\sigma)}\underbrace{\sigma(Sim\alpha)}_{Sim\alpha} = Sim\alpha\cdot\frac{1}{p!}\underbrace{\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{d(\sigma)}}_{\det\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}=0} = 0$$

$$Sim(Alt\alpha) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\underbrace{\sigma(Alt\alpha)}_{(-1)^{d(\sigma)}Alt\alpha} = Alt\alpha\cdot\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{d(\sigma)} = 0.$$ ∎

Замечания: 1) $T_{(p,q)}^{(\text{симм})}$ – мн-во симм. тензоров по нижн. (верх) индексам.

$T_{(p,q)}^{(\text{кососим})}$ – мн-во кососим. тензоров по нижн. (верх) индексам.

$\Rightarrow T_{(p,q)}^{(\text{симм})},\ T_{(p,q)}^{(\text{кососимм})}$ лин. подпр-ва $T_{(p,q)}$

очевидно, т.к. $\underset{\text{кососимм.}}{\alpha = Alt\alpha} \Rightarrow \forall\lambda\in K\ \forall\alpha_1,\alpha_2\in T_{(p,q)}^{(\text{кососимм})}:\ (\alpha_1+\lambda\alpha_2) = Alt(\alpha_1+\lambda\alpha_2)$

действ-но: $Alt(\alpha_1+\lambda\alpha_2) = \underbrace{Alt\alpha_1}_{\alpha_1} + \lambda\underbrace{Alt\alpha_2}_{\alpha_2}$

аналогично для симметр.

2) если альтернирование (симметрирование) происходит не по всем индексам, то, очевидно, т-ма и следствия также будут верны, но только по отношению к индексам, по которым совершается альтерн. (симметр)

3) $\exists\ (k,m)$ фиксированная пара индексов. $\Rightarrow$

$\forall\alpha:\ \boxed{\alpha = \underset{(k,m)}{Alt}\alpha + \underset{(k,m)}{Sim}\alpha}$, т.е. $T_{(p,q)} = T_{(p,q)}^{\text{симм}(k,m)} \oplus T_{(p,q)}^{\text{кососим}(k,m)}$

действ-но, $\underset{(k,m)}{Alt}\alpha = \beta \qquad \beta^{i_1\ldots i_q}_{\ldots k\ldots m\ldots} = \frac{1}{2}\left(\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots k\ldots m\ldots} + \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots m\ldots k\ldots}\right)$

$\oplus \qquad\qquad\qquad\qquad \oplus \qquad\qquad\qquad = \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots k\ldots m\ldots}$

$\underset{(k,m)}{Sim}\alpha = \mu \qquad \mu^{i_1\ldots i_q}_{\ldots k\ldots m\ldots} = \frac{1}{2}\left(\alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots k\ldots m\ldots} - \alpha^{i_1\ldots i_q}_{\ldots m\ldots k\ldots}\right)$

упр: $A = (a_{ij})$ проверить: $A = Alt A + Sim A$.

8.6 p-формы. Внешнее произведение p-формы.

8.6. p-формы. Внешнее произведение p-форм.

p-форма это $\underset{\text{кососимм.}}{\alpha \in T_{(p,0)}}$ (см. def. п. 8.4) $\boxed{p \le n, \text{ иначе } \alpha = 0}$

мн-во $T^{(\text{кососимм})}_{(p,0)}$ лин. подпр-во $T_{(p,q)}$, т.е. само явл-ся лин. пр-вом.

$$f \in \Lambda^p V^* \text{ — лин. пр-во } p\text{-форм} = \{ f \in T_{(p,0)} \mid \mathrm{Alt} f = f \}$$

$f : V^p \to K$

полилин., антисимм. форма $\equiv$ кососимм. тензор (p-ковариантный)

В def кососимм. необходимо, чтобы $p \ge 2$, поэтому, формально, лин. формы (т.е. тензоры $T_{(1,0)}$) не могут подходить под def p-формы. Тем не менее, принято лин. формы называть 1-формами и $\Lambda^1 V^* \underset{\text{очевидно}}{\equiv} V^*$

def: $f \in \Lambda^{p_1} V^*$, $g \in \Lambda^{p_2} V^*$ Внешним произведением p_1-формы f и p_2-формы g, наз-ся (p_1+p_2)-форма $f \wedge g$, определенная следующим равенством:

$$\boxed{f \wedge g = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!\, p_2!} \mathrm{Alt}(f \otimes g)}$$

$f \wedge g \in \Lambda^{p_1+p_2} V^*$, очевидно, т.к. $f \otimes g \in T_{(p_1+p_2,0)}$, а $\mathrm{Alt}(f \otimes g)$ кососимм.

Свойства внешнего произведения:

1° $\boxed{f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f}$

док-во:

$$f \wedge g = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!\, p_2!} \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{d(\sigma)} \sigma(\underbrace{f \otimes g}_{\gamma})$$

$$g \wedge f = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!\, p_2!} \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\tau \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{d(\tau)} \tau(\underbrace{g \otimes f}_{\theta})$$

$f = (\alpha_{i_1 \dots i_{p_1}})$ $g = (\beta_{j_1 \dots j_{p_2}})$

$\gamma = f \otimes g = (\alpha_{i_1 \dots i_{p_1}} \beta_{j_1 \dots j_{p_2}}) = (\gamma_{i_1 \dots i_{p_1} j_1 \dots j_{p_2}})$

$\theta = g \otimes f = (\beta_{j_1 \dots j_{p_2}} \alpha_{i_1 \dots i_{p_1}}) = (\theta_{j_1 \dots j_{p_2} i_1 \dots i_{p_1}})$

σ и τ пробегают одно и то же мн-во перестановок $S_{p_1+p_2}$ $\Rightarrow$ достаточно посмотреть каким знаком отличаются перестановки $(i_1,\dots i_{p_1} j_1,\dots j_{p_2})$ и $(j_1\dots j_{p_2}\, i_1 \dots i_{p_1})$. Переведем первую перестановку во вторую конечным числом транспозиций соседних элементов.

$$\underbrace{(i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_1 \dots j_{p_2})}_{p_1 \text{ раз}} \rightsquigarrow \underbrace{(j_1 i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_2 \dots j_{p_2})}_{p_1 \text{ раз}} \rightsquigarrow (j_1 j_2 i_1 i_2 \dots i_{p_1} j_3 \dots j_{p_2}) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow$$

итого: p_2 раз по p_1 раз $= p_1 \cdot p_2$ транспозиций

$\Rightarrow$ $f\wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g\wedge f$ ■

в частности: $p_1=p_2=1$, т.е. $\boxed{\forall\, f,g \in V^* \quad f\wedge g = -g\wedge f \quad \text{и} \quad f\wedge f = 0}$

2° $\boxed{\begin{array}{l} f\wedge(g+h) = f\wedge g + f\wedge h \\ (f+g)\wedge h = f\wedge h + g\wedge h \end{array}}$ дистрибутивность.

док-во: св-ва 2°, 3° следуют из св-в Alt. ■

3° $\boxed{\forall \lambda\in K \quad (\lambda f)\wedge g = f\wedge(\lambda g) = \lambda(f\wedge g)}$

4° $\boxed{f\wedge 0_{\Lambda^{p_2}V^*} = 0_{\Lambda^{p_1}V^*}\wedge g = 0_{\Lambda^{p_1+p_2}V^*}}$

5° $\boxed{(f\wedge g)\wedge h = f\wedge(g\wedge h)}$ ассоциативность, т.е. $(f\wedge g)\wedge h = f\wedge(g\wedge h) = f\wedge g\wedge h$

док-во: $f \in \Lambda^{p_1}V^*$, $g\in\Lambda^{p_2}V^*$, $h \in \Lambda^{p_3}V^*$

$$\frac{p_1!\,p_2!\,p_3!}{(p_1+p_2+p_3)!}(f\wedge g)\wedge h = Alt(Alt(f\otimes g)\otimes h) = Alt\left(\frac{1}{(p_1+p_2)!}\sum_{\sigma\in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma(f\otimes g)\otimes h\right) = \text{т.к. Alt лин. опер.}$$

$$= \frac{1}{(p_1+p_2)!}\sum_{\sigma\in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} Alt(\sigma(f\otimes g)\otimes h) = \frac{1}{(p_1+p_2)!}\sum_{\sigma\in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\varepsilon(\tau)} Alt(\tau(f\otimes g\otimes h)) = \frac{1}{(p_1+p_2)!}\sum_{\sigma\in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\varepsilon(\tau)}(-1)^{\varepsilon(\tau)} Alt(f\otimes g\otimes h)$$

σ – перестановка, переставляющая (p_1+p_2) индексов тензора $f\otimes g$

τ – перестановка $(p_1+p_2+p_3)$ чисел такая, что переставляются первые (p_1+p_2) чисел по перестановке σ, а последние p_3 числа оставляют без изменения. Очевидно, $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} = (-1)^{\varepsilon(\tau)}$

$$= \frac{1}{(p_1+p_2)!} Alt(f\otimes g\otimes h)\underbrace{\sum_{\sigma\in S_{p_1+p_2}} 1}_{=(p_1+p_2)!} = Alt(f\otimes g\otimes h)$$

аналогично показывается $\frac{p_1!\,p_2!\,p_3!}{(p_1+p_2+p_3)!} f\wedge(g\wedge h) = Alt(f\otimes g\otimes h)$ $\Rightarrow$ ■

$\Rightarrow$ т.о. $\boxed{f\wedge g\wedge h = \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!\,p_2!\,p_3!} Alt(f\otimes g\otimes h)}$

Далее, м.м.и. можно определить внешнее произведение на любое конечное число внешних форм. Соот-но док-ть ассоциат. и ф-лу!

$$\boxed{f_1\wedge f_2\wedge\dots\wedge f_m = \frac{(p_1+p_2+\dots+p_m)!}{p_1!\,p_2!\dots p_m!} Alt(f_1\otimes f_2\otimes\dots\otimes f_m), \text{ где } f_k - p_k\text{-форма.}}$$

$e_1\dots e_n$ базис V

$\omega^1,\dots,\omega^n$ базис V^*, сопряженный к e, т.е. ω^k – 1-форма.

$\Rightarrow$ $\boxed{\omega^{j_1}\wedge\dots\wedge\omega^{j_p} = p!\,Alt(\omega^{j_1}\otimes\dots\otimes\omega^{j_p}) \text{ – } p\text{-форма.}}$ $j_k\in\{1,\dots,n\}$, $k=1,\dots,p$

из св-ва 1°: $\omega^i\wedge\omega^j = -\omega^j\wedge\omega^i$ $\forall(i,j)$

$\omega^i\wedge\omega^i = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \omega^{j_1}\wedge\dots\wedge\omega^i\wedge\dots\wedge\omega^j\wedge\dots\wedge\omega^{j_p} = -\omega^{j_1}\wedge\dots\wedge\omega^j\wedge\dots\wedge\omega^i\wedge\dots\wedge\omega^{j_p} \\ \omega^{j_1}\wedge\dots\wedge\omega^j\wedge\dots\wedge\omega^j\wedge\dots\wedge\omega^{j_p} = 0 \qquad \forall(i,j) \end{array}}$

Теорема! (о базисе пр-ва внешних форм)
совокупность всевозможных p-форм вида $\boxed{\omega^{i_1}\wedge\dots\wedge\omega^{i_p}}$, где $i_1<i_2<\dots<i_p$, $i_k\in\{1,2,\dots,n\}$ образуют базис пр-ва $\Lambda^p V^*$

Док-во: $f \in \Lambda^p V^* \underset{\text{антисимм.}}{\Rightarrow} f = \mathrm{Alt} f \underset{\text{подставим}}{=} \alpha_{j_1..j_p} \mathrm{Alt}(\omega^{j_1} \otimes .. \otimes \omega^{j_p}) = \dfrac{\alpha_{j_1..j_p}}{p!} \omega^{j_1} \wedge .. \wedge \omega^{j_p} =$

$f \in T_{(p,0)} \Rightarrow f = \alpha_{j_1..j_p} \underbrace{\omega^{j_1} \otimes .. \otimes \omega^{j_p}}_{\text{базис пр-ва } T_{(p,0)}}$

если хотя бы 2 индекса совпадают, то произведение $= 0$ $\Rightarrow$ все j_k различные $\rightsquigarrow$ упорядочим.

$= \sum\limits_{i_1<i_2<..<i_p} \beta_{i_1..i_p} \omega^{i_1} \wedge .. \wedge \omega^{i_p} \Rightarrow$ порождающ. система

$$\boxed{\beta_{i_1..i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{i_{\sigma_1}..i_{\sigma_p}} = \alpha_{[i_1..i_p]}, \quad i_1<i_2<..<i_p, \quad \sigma = (\sigma_1..\sigma_p)}$$

док-м лин. незав.: $\exists \; 0 = \sum\limits_{i_1<i_2<..<i_p} \beta_{i_1..i_p} \omega^{i_1} \wedge .. \wedge \omega^{i_p} = p! \sum\limits_{i_1<i_2<..<i_p} \beta_{i_1..i_p} \mathrm{Alt}(\omega^{i_1} \otimes .. \otimes \omega^{i_p})$

применим обе части рав-ва к базисным векторам пр-ва V: $e_{j_1}, e_{j_2}, .., e_{j_p}$ $\quad j_1<j_2<..<j_p$

$0 = \sum\limits_{i_1<i_2<..<i_p} \beta_{i_1..i_p} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \omega^{i_{\sigma_1}}(e_{j_1}) \cdots \omega^{i_{\sigma_p}}(e_{j_p}) = \sum\limits_{i_1<i_2<..<i_p} \beta_{i_1..i_p} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \delta^{i_{\sigma_1}}_{j_1} .. \delta^{i_{\sigma_p}}_{j_p} = \beta_{j_1 j_2 .. j_p} \quad \forall j_1<j_2<..<j_p$

$\Rightarrow$ лин. незав. ∎

Следствия:
1) $\dim \Lambda^p V^* = C^p_n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
2) $\forall f \in \Lambda^p V^*$ $\quad f \leftrightarrow (\alpha_{j_1..j_p})$ коор-ты f в пр-ве $T_{(p,0)}$
$\Rightarrow \beta_{i_1..i_p} = \alpha_{i_1..i_p}$, $i_1<i_2<..<i_p$ коор-ты f в пр-ве $\Lambda^p V^*$

Теорема: $\forall f^1, f^2, .., f^p \in V^*$ (т.е. f^k — 1-форма)
$\forall \xi_1, .., \xi_p \in V \quad f^1 \wedge .. \wedge f^p (\xi_1, .., \xi_p) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \dots & & \dots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{pmatrix}$

Док-во: $f^1 \wedge .. \wedge f^p = p! \, \mathrm{Alt}(f^1 \otimes .. \otimes f^p)$

$\forall \xi_1, .., \xi_p \in V \quad f^1 \wedge .. \wedge f^p(\xi_1, .., \xi_p) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma(f^1 \otimes .. \otimes f^p)(\xi_1, .., \xi_p) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f^{\sigma_1} \otimes .. \otimes f^{\sigma_p}(\xi_1, .., \xi_p) =$

$= \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f^{\sigma_1}(\xi_1) \cdots f^{\sigma_p}(\xi_p) \underset{\text{def det}}{=} \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \dots & & \dots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{pmatrix}$ ∎

Следствия:
1) $\forall \xi_1, .., \xi_p \in V$, $\xi_k = \xi_k^{i_k} e_{i_k}$ $\quad \forall \omega^{i_1} \wedge .. \wedge \omega^{i_p}(\xi_1, .., \xi_p) = \det \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_p^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{i_p} & \dots & \xi_p^{i_p} \end{pmatrix}$

2) если $p = n$, $\forall f^1, .., f^n \in V^*$: $f^k = a^k_{j_k} \omega^{j_k}$, $A = (a^k_j)_{n \times n}$
$\Rightarrow \boxed{f^1 \wedge .. \wedge f^n = \det A \cdot \omega^1 \wedge .. \wedge \omega^n}$

док-во: 1) очевидно, из т-мы $\quad \omega^{i_k}(\xi_j) = \xi_j^{i_k}$ ∎

2) $\forall k \quad f^k(\xi_j) = (a^k_1 .. a^k_n) \cdot \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \vdots \\ \xi_j^n \end{pmatrix} \underset{\text{по т-ме}}{\Longrightarrow} f^1 \wedge .. \wedge f^n(\xi_1, .., \xi_n) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_n) \\ \vdots & & \\ f^n(\xi_1) & \dots & f^n(\xi_n) \end{pmatrix} =$
$\forall \xi_j \in V \quad \xi_j = \xi_j^i e_i$

$= \det\left(\begin{pmatrix} a^1_1 & .. & a^1_n \\ \vdots & & \\ a^n_1 & .. & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & .. & \xi_n^1 \\ & & \\ \xi_1^n & .. & \xi_n^n \end{pmatrix} \right) = \det A \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \xi_1^1 & .. & \xi_n^1 \\ \vdots & & \\ \xi_1^n & .. & \xi_n^n \end{pmatrix}}_{\omega^1 \wedge .. \wedge \omega^n(\xi_1, .., \xi_n)} \Rightarrow f^1 \wedge .. \wedge f^n = \det A \; \omega^1 \wedge .. \wedge \omega^n$ ∎

Примеры:

1) $n = 4$ $\quad f \in \Lambda^2 V^*$, f-2 форма $\quad f = \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^4 + \omega^2 \wedge \omega^3 + \omega^3 \wedge \omega^4$

Выписать м-цу тензора f в базисе пр-ва V, сопряженного базису ω. (т.е. в базисе e)

Разберемся с формулировкой задания: f - 2форма, т.е. $f \in T_{(2,0)} \leftrightarrow (\alpha_{ij})$ м-ца тензора в пр-ве $T_{(2,0)}$

$\alpha_{ij} = f(e_i, e_j)$ по def.
$\rightsquigarrow$ поэтому говорят „в базисе пр-ва V"

$i<j \quad \omega^i \wedge \omega^j = 2! \, \mathrm{Alt}(\omega^i \otimes \omega^j) = \omega^i \otimes \omega^j - \omega^j \otimes \omega^i$
$\Downarrow$
$\alpha_{ij} = 1 \quad \alpha_{ji} = -1$, $\; i<j$

$\Rightarrow A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $f, g, h \in V^*$ (1-формы)

$n=3$

$$f = \omega^1 + \omega^2 + 2\omega^3$$
$$g = \omega^1 + 3\omega^2 + \omega^3$$
$$h = \omega^1 + \omega^2$$

Найти $f \wedge g \wedge h$

т.к. $p = n = 3 \;\sim\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f \wedge g \wedge h = \det A \, \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = -3\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$

см. следств. 2.

$\det A = -3$

<u>упр</u>! а) $f = \omega^1 + \omega^2 + 2\omega^3 - \omega^4$
$g = \omega^2 - \omega^3 + \omega^4$
$h = \omega^1 + \omega^3$

Найти $f \wedge g \wedge h$ (указание: исп-ть св-ва внешн. пр-ия) $\omega^i \wedge \omega^j = -\omega^j \wedge \omega^i$, $\omega^i \wedge \omega^i = 0$

б) найти значение $f \wedge g \wedge h$ на векторах
$\xi_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$
$\xi_2 = e_2 + e_3 - e_4$
$\xi_3 = e_2 + e_4$

8.6. <u>Дополнение</u> к док-ву теоремы о базисе пр-ва внешних форм:

$$\beta_{\substack{i_1..i_p \\ i_1<..<i_p}} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{d(\sigma)} \alpha_{i_{\sigma_1}..i_{\sigma_p}} = \alpha_{\substack{[i_1..i_p] \\ i_1<..<i_p}} \underset{\uparrow}{=} \alpha_{\substack{i_1..i_p \\ i_1<..<i_p}} = f(e_{i_1},..,e_{i_p})_{\,i_1<..<i_p}$$

т.к. f кососимм. тензор $\Rightarrow \alpha_{i_{\sigma_1}..i_{\sigma_p}} = (-1)^{d(\sigma)} \alpha_{\substack{i_1..i_p \\ i_1<..<i_p}}$

после теоремы о внешнем произведении 1 форм заменить следствие 2 на „<u>новое</u>" следствие 2. (при этом старое следствие 2 будет частным случаем)

„Новое" <u>следствие 2</u>! $\forall f^1,..,f^p \in V^*$ (1-формы), $f^k \longleftrightarrow (a^k_1 .. a^k_n)$ ковектор

$$\Rightarrow \boxed{f^1 \wedge .. \wedge f^p = \sum_{i_1<..<i_p} \det \begin{pmatrix} a^1_{i_1} & .. & a^1_{i_p} \\ a^p_{i_1} & .. & a^p_{i_p} \end{pmatrix} \cdot \omega^{i_1} \wedge .. \wedge \omega^{i_p}}$$

<u>док-во</u>!] $f = f^1 \wedge .. \wedge f^p$ кососимм. тензор (p-форма) $\Rightarrow f = \sum_{i_1<..<i_p} \beta_{i_1..i_p} \omega^{i_1} \wedge .. \wedge \omega^{i_p}$

$$\beta_{\substack{i_1..i_p \\ i_1<..<i_p}} = \alpha_{\substack{i_1..i_p \\ i_1<..<i_p}} = f(e_{i_1},..,e_{i_p})_{\,i_1<..<i_p} = f^1 \wedge .. \wedge f^p(e_{i_1},..,e_{i_p}) = \det \begin{pmatrix} f^1(e_{i_1}) & .. & f^1(e_{i_p}) \\ f^p(e_{i_1}) & .. & f^p(e_{i_p}) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a^1_{i_1} & .. & a^1_{i_p} \\ a^p_{i_1} & .. & a^p_{i_p} \end{pmatrix}, \text{ т.к. по def } a^k_{i_j} = f^k(e_{i_j}) \quad \blacksquare$$

<u>Замечание</u>! f − p-форма; $f = \sum_{i_1<..<i_p} \beta_{i_1..i_p} \omega^{i_1} \wedge .. \wedge \omega^{i_p}$

$\beta_{\substack{i_1..i_p \\ i_1<..<i_p}}$ коор-ты формы f в базисе пр-ва $\Lambda^p V^*$ наз-т <u>существенными координатами</u>. и записывают в строку, в определенном порядке.

<u>Пример</u>! $n=4$, $p=3$ $\quad (\beta_{123}, \beta_{124}, \beta_{134}, \beta_{234}) = f$

9 Евклидовы и унитарные пространства

9.1 Скалярное, псевдоскалярное произведение в Евкл. и унитарном провах. Норма в Евклидовом и унитарном пространствах.

Определение 1. *V – линейное пространство над $\mathbb{R}$ (вещ. пр-во)*

$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

*Скалярное произведение, если удовлетворяет 4м **аксиомам:***

$\begin{matrix} \forall x, y \in V \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix} :$

1. $(x, y) = (y, x)$ *(симметр.)*
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ *(Аддитивность по первому аргументу)*
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ *(Однородность по первому аргументу)*
4. $\forall x \neq 0$ $(x, x) > 0$ *(Положительная определенность)*

Из этих свойств можно понять, что скал. произведение – билинейная функция.
Из 3 $\Rightarrow \forall x \in V$ $(x, \mathbb{0}) = (\mathbb{0}, x) = 0$
Из 4 $\Rightarrow \forall x \in V$ $(x, x) \geq 0$, *причем* $= 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

Определение 2. *V конечномерное, линейное пространство над $\mathbb{R}$*
$(V, (\cdot,\cdot))$ – ***Евклидово пространство***

Замечание. V бесконечномерное $(X, (\cdot,\cdot))$ **предгильбертово**
Если полное метрическое пространство, то оно называется **гильбертовым**
(Полное – любая фундаментальная последовательность сходится, из матанализа)

Определение 3. *V – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ (комплексн. линейное пространство)*
$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$
Псевдоскалярное произведение:

$\begin{matrix} \forall x, y, z \in V \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \end{matrix} :$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ *(Аддитивность)*
3. $(\lambda x, z) = \lambda(x, z)$ *(Однородность по 1му аргументу) Из 2 и 3* $\Rightarrow$ *линейность по 1 аргументу*
4. $\forall x \neq 0$ $(x, x) > 0$ *(Положительная определенность)*

1, 2, 3 $\quad (x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$
$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}\overline{(y, x)}$ *Псевдооднородность по 2 арг.*

$\underset{\leftrightarrow}{(x, x)} = \overline{(x, x)} \leftrightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$

$\forall x \in V$ $(x, x) \geq 0$, *причем* $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение 4. *Конечномерное V над полем $\mathbb{C}$*
$(X, (\cdot,\cdot))$ *называется **унитарными** (псевдоевклидовым, эрмитовым)*

Определение 5. $(V, (\cdot,\cdot))$ *Евклидово (унит.) пространство*

$\underset{\text{норма}}{||\cdot||} : V \to \mathbb{R}_+ \;\; \forall x \in V \; ||x|| = \sqrt{(x,x)}$ ***Евклидова норма***

Аксиомы нормы:

1. $||x|| = 0 \Rightarrow x = \mathbb{0}$ *(невырожденность)*
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ *(однородность)*
3. $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$ *(неравенство треугольника)*

$||x|| = \sqrt{(x,x)}$

Ввели такую норму, удостоверимся, что все аксиомы выполнены:

1. Очевидно из 4
2. $\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{|\lambda|^2}(x,x)} = |\lambda|\sqrt{(x,x)} = |\lambda| ||x||$
3. ?

   Давайте докажем неравенство Коши-Буняковского-Шварца

   $\forall x, y \in (V, (\cdot,\cdot)) \;\; |(x,y)| \le ||x|| \cdot ||y||$

   2) Причем $= \Leftrightarrow$ x и y линейно зависимы

   Доказательство. (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;\; \forall x, y \in V$

   $$0 \le (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) + \alpha\overline{\beta}(x,y) + \beta\overline{\alpha}(y,x) + \beta\overline{\beta}(y,y)$$

   $$\sqsupset \begin{matrix} \alpha := (y,y) \\ \beta = -(x,y) \Rightarrow \overline{\beta} = -(y,x) \end{matrix}$$

   Подставим это в равенство, получим $= \underbrace{(y,y)}_{\ge 0}(||x||^2 \cdot ||y||^2 - \overline{\beta}\beta - \cancel{\beta\overline{\beta}} + \cancel{\beta\overline{\beta}}) \Rightarrow ||x||^2 \cdot ||y||^2 - |(x,y)|^2 \ge 0$

   (b) $= \Leftrightarrow$ x и y линейно завис.

   Если $x = \mathbb{0}$ или $y = \mathbb{0} \Rightarrow$ очевидно выполняется

   $\Rightarrow \sqsupset x \ne \mathbb{0}$ и $y \ne \mathbb{0}$

   $(\Rightarrow) \;\; \sqsupset |(x,y)| = ||x|| \cdot ||y||$

   Из доказательства 1 $\begin{matrix} \exists \alpha (y,y) > 0 (\text{т.к. } y \ne \mathbb{0}) \\ \exists \beta = -(x,y) \end{matrix} \;\; 0 = ||x||^2||y||^2 = |(x,y)| = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y)$

   $\Leftrightarrow \alpha x + \beta y = \mathbb{0} \;\; \alpha, \beta$ не все нули $\Rightarrow$ линейно завис. x, y

   $(\Leftarrow) \;\; x, y$ линейно зав. $\Rightarrow \exists \alpha, \beta \begin{matrix} \text{не все нули} \\ \alpha x + \beta y = \mathbb{0} \end{matrix}$

   $\sqsupset \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta \ne 0 \end{matrix} \Rightarrow y = 0$ противор. $\Rightarrow \alpha \ne 0$ и $\beta \ne 0$

   $$\begin{cases} (\alpha x + \beta y, x) = 0 \\ (\alpha x + \beta y, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x,x) + \beta(y,x) = 0 \Rightarrow \alpha||x||^2 = -\beta(y,x) \\ \alpha(x,y) + \beta(y,y) = 0 \Rightarrow \beta||y||^2 = -\alpha(x,y) \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta||x||^2||y||^2 = \alpha\beta\underbrace{(x,y)(y,x)}_{|(x,y)|^2}$$

   $\Rightarrow ||x||^2||y||^2 = |(x,y)|^2$

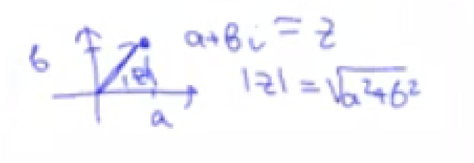
   ■

   Вернемся к 3 аксиоме $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$

   $||x+y||^2 = (x+y, x+y) = \overset{=||x||^2}{(x,x)} + \underbrace{(x,y) + \overset{=\overline{(x,y)}}{(y,x)}}_{2Re(x,y) \le 2|(x,y)| \le 2||x||||y||} + \overset{=||y||^2}{(y,y)} \le ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 =$

$(||x|| + ||y||)^2$

$\Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$



Определение 6. $\forall x \in V$
Длина вектора $||x|| = \sqrt{(x,x)}$
Нормировать вектор $\frac{x}{||x||} = x_0$ *орт вектора,* $||x_0|| = 1$
$\forall x, y \neq \mathbb{0} \;\; x, y \in V$
ϕ *– угол между* x *и* y : $\cos\phi = \frac{(x,y)}{||x|| ||y||}$ *(КБШ:* $\frac{|(x,y)|}{||x|| ||y||} \leq 1$*)*

Примеры.

1. V_3 геом. вект. $\underset{\text{скал}}{(x,y)} = |\overline{x}| \cdot |\overline{y}| \cdot \cos\phi$
2. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ $\quad (x,y) \quad \underset{(\text{Евкл. } \sum x_i y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i}$ выполнены 1-4

   $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

   $(x,x) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x}_i \;\; \sum_i^n |x_i|^2 \overset{\geq 0}{=} 0 \Leftrightarrow \forall i \; x_i = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

   $||x|| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ евкл. норма
   КБШ: $|\sum_i^n \overline{x_i y_i}| \leq (\sum_i^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_i^n |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
   Нер-во треугольника:
   $(\sum_i^n |x_i + y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_i^n |x_i|^2)\frac{1}{2} + (\sum_i^n |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
3. $f : [a,b] \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad u, v \in \underset{\text{интегр.}}{R[a,b]} \;\; \int_a^b u(x)dx \;\; \int_a^b v(x)dx$

   $f = u + iv$

   $\int_a^b f dx = \int_a^b u dx + i \int_a^b v dx$

   $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C} \;\; \forall f, g \;\; (f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$

   Все аксиомы очевидно выполнены, есть проблемы с 4ой аксиомой.

   $(f,f) = \int_a^b |f|^2 dx \geq 0$

   $= 0? \Leftrightarrow f \equiv 0$ почти везде на $[a,b]$
   Возникает евклидова норма.

   $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx} \quad L^2([a,b])$ – пространство

   КБШ: $|\int_a^b f\overline{g}dx| \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ (Неравенство Буняковского)

   Неравенство треугольника: $(\int_a^b |f+g|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

(Неравенство Минковского)

9.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис (о.н.б.) Ортогональные системы векторов.

$(V, (\cdot,\cdot))$ евклидово (унит.) пространство

Определение 1. $\forall x, y \in V$ *ортогональные, если* $(x, y) = 0$
(Очевидно, $\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \rightsquigarrow$ *<u>перпендикулярны</u>)*

$\mathbb{0}$ ортогонален $\forall x \in V, \mathbb{0}$ ортогонален V

$y \in V : \forall x \in V \;\; (y, x) = 0$ т.к. $\underset{x:=y}{(y, y)} = 0 \Rightarrow y = \mathbb{0}$

Определение 2. $v_1 \dots v_m$ *<u>попарно-ортогональны</u>, если* $\forall i \neq j : (v_i, v_j) = 0$

Система $v_1 \dots v_m$ *<u>Ортонормированна</u>, если* $\forall (i,j) \boxed{(v_i, v_j) = \delta_{ij}} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

δ_{ij} – символ Кронекера

Утверждение. $\underset{\text{ненулевые}}{v_1 \dots v_m}$ *<u>попарно-ортог.</u>$\Rightarrow$ линейно незав.*

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \mathbb{0} \;\; \alpha_i \in K \;\; 0 = (\mathbb{0}, v_i) = (\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, v_j) = \sum\limits_{i}^{m} \alpha_i (\overset{\neq 0}{v_i}, \overset{i=j}{v_j}) = \alpha_j (v_j, v_j) \neq 0$

$\Rightarrow \forall j \;\; \alpha_j = 0 \Rightarrow$ Линейно независ. ∎

<u>Существует ли такая система?</u>
$\exists?$ о.н.с. в V ?

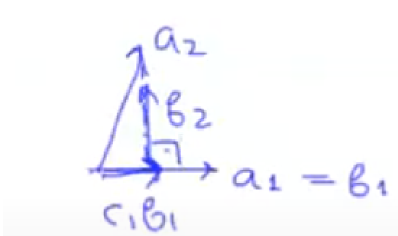
Теорема 1 (Процесс ортогон. Грама-Шмидта)**.**
$\forall$ система векторов $a_1 \dots a_m$ может быть заменена попарно-ортог. системой векторов $b_1 \dots b_k$, с сохранением лин. оболочки

$span(a_1 \dots a_m) = span(b_1 \dots b_k) \;\; k \leq m$

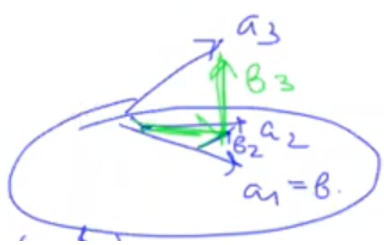
Доказательство.

1. $a_1 \dots a_m$ лин. незав.
   М.М.И.
   (a) База индукции $m = 1 \;\; a_1 = b_1$
   (b) $\sqsupset$ верно для $k - 1$ вектора — инд. предположение
   (c) Инд. переход. Докажем для k векторов.

$a_1 \; a_2 \; a_3$



$b_2 = a_2 - c_1 b_1$
$b_2 \perp b_1$
$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) - c_1 (b_1, b_1) \Rightarrow c_1 = \frac{(a_1, b_1)}{(b_1, b_1)}$



$b_3 = a_3 - \tilde{c}_1 b_1 - \tilde{c}_2 b_2$

$(b_3, b_1) = 0 \ \ (b_3, b_2) = 0$

$0 = (a_3, b_1) - \tilde{c}_1 (b_1, b_1) \Rightarrow \tilde{c}_1 = \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}$

$0 = (a_3, b_2) - \tilde{c}_2 (b_2, b_2) \Rightarrow \tilde{c}_2 = \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}$

Теперь для k-мерного случая.

$a_1 \dots a_{k-1} \rightsquigarrow b_1 \dots b_{k-1}$ попарно ортог.

$$\boxed{b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i} \qquad \begin{matrix} c_i = ? \\ (b_k, b_i) = 0 \ i = 1 \dots k-1 \end{matrix}$$

$$(b_k, b_j) = (a_k, b_j) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i (b_i, b_j) = (a_k, b_j) - c_j (b_j, b_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{c_j = \frac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)}} \ \ j = 1 \dots k-1$$

$$\Rightarrow span(a_1 \dots a_k) = span(\underbrace{b_1 \dots b_k}_{\text{попарно-ортог.}})$$

2. $a_1 \dots a_m$ линейно зав. $\rightsquigarrow$ Г-Ш на каком-то этапе $b_j = \mathbb{0}$

$$\rightsquigarrow \text{проредить } a_1 \dots a_m \rightsquigarrow \underbrace{a_{i_1} \dots a_{i_k}}_{\text{лин. независ.}} \rightsquigarrow \text{Г-Ш.}$$

■

Следствие 1. *В $\forall$ евкл. (унит.) пространстве $\exists$ О.Н.Б.(орто-нормир. базис)*

Доказательство. Упр. ■

Следствие 2. *$\forall$ лин. независ. систему векторов евкл. (унит.) про-ва можно дополнить до о.н.б.*

Доказательство. Упр. ■

Примеры.

1. $f : [a, 2\pi] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

   f – 2π период.

   $(f, g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$

   (a) $\mathbb{R}$

   $$\underbrace{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots}_{\text{попарно-ортог.}} \quad \underbrace{([0, 2\pi])}_{\text{вещ.}}$$

   $$(\cos kx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin(m+k)x + \sin(m-kx))dx = 0$$

   $$(\sin kx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos(m+k)x - \cos(m-kx))dx = 0$$

   И т.д.

   $$\underbrace{\|\cos kx\|}_{k\neq 0 = \|\sin kx\|} = \sqrt{(\cos kx, \cos kx)} = (\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{2\pi} \tfrac{1+\cos 2kx}{2} dx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$\|1\| = \sqrt{(1,1)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} 1dx} = \sqrt{2\pi}$$

(b) $\mathbb{C}$ $\underset{\text{попарно-ортог.}}{\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}}$ $\quad (e^{ikx}, e^{imx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-imx}dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x}dx =$

$$\underset{k\neq m}{=} \frac{1}{i(k-m)}e^{i(k-m)x}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\underset{k=m}{=} \|e^{ikx}\|^2 = \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$$

$$\|e^{ikx}\| = \sqrt{2\pi}$$

2. P_n многочлены $deg \leq n \subset L^2([-1,1])$

$\forall p,q \in P_n \quad (p,q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \qquad P_n = \underset{\text{канон. базис}}{span 1, x, x^2, \dots, x^n}$

$$\underset{k\neq m}{(x^k, x^m)} = \int_{-1}^{1} x^{k+m}dx \begin{cases} \neq 0 & k+m - \text{четн} \\ = 0 & k+m - \text{нечетн.} \end{cases}$$

$1, x, x^2, \dots, x^n$ Ортогонализуем Г-Ш

$$\begin{matrix} b_1 = 1 \\ b_2 = a_2 - c_1 b_1 \end{matrix} \quad c_1 = \frac{(a_2.b_1)}{(b_1,b_1)} \quad \begin{matrix} (b_1,b_1) = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1dx = 2 \\ (a_2,b_1) = \int_{-1}^{1} x\cdot 1dx = 0 \end{matrix}$$

$$b_3 = a_3 - \tilde{c_1}b_1 - \tilde{c_2}b_2 \quad \begin{matrix} \tilde{c_1} = \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} & (b_1,b_2) = \int_{-1}^{1} x^2dx = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3} \\ & (a_3,b_1) = \int_{-1}^{1} x^2\cdot 1dx = \frac{2}{3} \\ \tilde{c_2} = \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} & (a_3,b_2) = \int_{-1}^{1} x^2\cdot x^dx = 0 \end{matrix}$$

$b_3 = x^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$

$b_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$

$P_n = span(1, x, \dots, x^n) \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} l_0(x) = 1 \;\; l_1(x) = x \;\; \underset{\text{попарно-ортог.}}{l_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}} \qquad l_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \dots$

Полиномы Лежандра

$\boxed{\text{н.у.о.} \to \;\; l_k(x) = \lambda_k((x^2-1)^k)^{(k)} \text{ Общая ормула полиномов Лежандра с точностью до const}}$

Доказательство. $q_k(x) = ((x^2-1)^k)^{(k)} \quad deg\ q_k = k$

$$\forall m = 0,\dots,k-1 \quad (q_k, x^m) = \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k)}x^m dx = \int_{-1}^{1} x^m d((x^2-1)^k)^{(k-1)}$$

$\boxed{f'dx = df}$

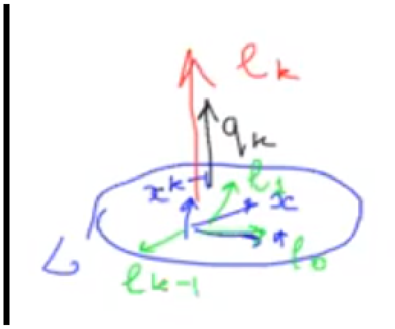
$$= x^m(\underset{\substack{= (x-1)^k(x+1)^k \\ \text{2 корня: } \pm 1 \text{ кр-ти } k}}{(x^2-1)^k})^{(k-1)}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k-1)} \underbrace{dx^m}_{mx^{m-1}dx} = -m\int_{-1}^{1} x^{m-1}d((x^2-1)^k)^{(k-2)} = \dots$$

$$= \pm m! \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k-m)} dx = \pm m! ((x^2-1)^k)^{(k-m-1)} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$L = span(1, \dots, x^{k-1})$

$q_k \perp L$

$deg\ q_k = k \quad span(q_0, q_1, \dots, q_k) = span(1, x, \dots, x^k)$



$\Rightarrow \lambda_k q_k = l_k(x)$ ■

$$q_k(1) = (\underbrace{(x^2-1)^k}_{=(x-1)^k(x+1)^k})^{(k)}\Big|_{x=1} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m ((x+1)^k)^{(m)} (\underbrace{(x-1)^k)^{(k-m)}}_{=0\ \ m\neq 0}\Big|_{x=1} =$$

Применили формулу Лейбница для взятия производной

$$= (x+1)^k ((x-1)^k)^{(k)}\Big|_{x=1} = 2^k k!$$

$$\boxed{\begin{array}{c} l_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!}((x^2-1)^k)^{(k)} \\ l_k(1) = 1 \end{array}}$$

Формула Родрига для полиномов Лежандра

$$\|l_k\|^2 = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\frac{1}{2^k k!})^2}_{A} ((x^2-1)^k)^{(k)} \underbrace{((x^2-1)^k)^{(k)} dx}_{d((x^2-1)^k)^{(k-1)}} =$$

$$A((x^2-1)^k)^{(k)}((x^2-1)^k)^{(k-1)}\Big|_{-1}^{1} - A\int_{-1}^{1} ((x^2-1)^k)^{(k-1)} \underbrace{d((x^2-1)^k)^{(k)}}_{((x^2-1)^k)^{(k+1)}dx} =$$

$$= (-1)^k A \int_{-1}^{1} \underbrace{((x^2-1)^k)^{(2k)}}_{(2k)!} (x^2-1)^k dx = (-1)^k A (2k)! \ \ 2\int_0^1 \underbrace{(x^2-1)^k}_{=(-1)^k(1-x^2)^k} dx =$$

$$\underset{x=\sin t}{=} \quad \tfrac{(2k)!}{2^{2k-1}(k!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt =$$

$dx = \cos t dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt = \tfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \tfrac{2^k k!}{(2k+1)!!}$$

$$= \frac{(2k)!2^k \cdot k!}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+1)!!} = \frac{(2k)!2}{\underbrace{\underbrace{2^k k!}_{(2k)!!}(2k+1)!!}_{(2k+1)!}} = \frac{2}{2k+1}$$

$$\|l_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\frac{1}{k!2^k}((x^2-1)^k)^{(k)} \text{ Нормиров. система полиномов Лежандра}}$$

3. $L^2([-1,1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Скалярное произведение с весом

   $(f,g) = \int_{-1}^{1} f \cdot g \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

   <u>Многочлены Чебышёва</u> $\quad \underbrace{T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)}_{\text{ортогон. система}}\ k = 0,1,2\ldots$

   $T_0(x) = 1 \ \ T_1(x) = x \ \ \ T_2 = 2x^2 - 1$

   $\underset{k \neq 0}{(T_k, T_m)} = 0$

   $degT_k = k$
4. $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$

   <u>Многочлены Эрмита</u> $\quad \underbrace{H_k(x) = e^{x^2}(e^{-x^2})^{(k)}}_{\text{ортог. система}}\ \ k = 0,1,2\ldots$

   $degH_k = k$

   $\underset{k \neq m}{(H_k, H_m)} = 0$

   $H_0 = 1 \ \ \ H_1 = -2x \ \ \ H_2 = 4x^2 - 2\ldots$

9.3 Матрица Грама. Объем к-мерного паралл-да. Ортогональная и унитарная матрица

$(V, (\cdot,\cdot))$ евклид. (унит.)

$$\forall x \in V \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x = \sum_i^n x_i e_i$$

$e_1 \ldots e_n$ базис

$$\forall y \in V \leftrightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad y = \sum_i^n y_i e_i$$

$(x,y) = (\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y}_j (e_i, e_j)$

Определение 1. $\Gamma = (g_{ij})_{n \times n} \quad\ g_{ij} = (e_i, e_j)$

<u>*Матрица Грама*</u> $\boxed{(x,y) = x^T \Gamma \overline{y}}$

Замечание.

1. евкл. $y = \overline{y}$
2. $e_1 \dots e_n$ попарно-ортог. $\qquad \Gamma = diag(\|e_1\|^2 \dots \|e_n\|^2)$

   $(e_i, e_j) = 0 \;\; i \neq j \quad (e_i, e_i) = \|e_i\|^2$
3. $e_1 \dots e_n$ о.н.б. $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \Gamma = E \rightsquigarrow (x, y) = x^T \overline{y} (\overset{\mathbb{R}}{\overset{\downarrow}{x^T}} y)$

   $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$

Определение 2. $a_1 \dots a_k \quad ; \quad \underset{\text{матрица Грама системы векторов } a_1 \dots a_n}{G(a_1 \dots a_k)} = ((a_i, a_j))_{k \times k} \quad (\Gamma = G(e_1 \dots e_n))$

$g(a_1 \dots a_k) = det\ G(a_1 \dots a_k)$

Определение 3. $A_{k \times k}$ A^* *называется* *сопряженной* *к* A : $\boxed{A^* = \overline{A^T}}$

A *называется* *самосопряж.*, *если* $A^* = A$

$\mathbb{R} : A^T = A$ *(A симметр.)*

$\mathbb{C} : \overline{A^T} = A$ *(A эрмитова)*

$G^* = G \quad ((a_i, a_j) = \overline{(a_j, a_i)}$

Матрица Грама самосопряженна.

Теорема 1 (об $det\ G$)**.**

$a_1 \dots a_k \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{попарно-ортог.}}{b_1 \dots b_k}$

$\Rightarrow \boxed{g(a_1 \dots a_k) = g(b_1 \dots b_k) = \|b_1\|^2 \|b_2\|^2 \dots \|b_k\|^2}$

Доказательство.

$$g(a_1 \dots a_k) = det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, a_3) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, a_3) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & & & & \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} =$$

из 2 стр. вычтем 1 стр., умноженн. на $\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$

$a_1 = b_1$

$b_1 = a_1$

$b_m = a_m - \sum\limits_{i=1}^{m-1} c_i b_i \qquad c_i = \dfrac{(a_m, b_i)}{(b_i, b_i)}$

$(b_m, a_j) = (a_m, a_j) - \sum\limits_{i=1}^{m-1} c_i (b_i, a_j)$

$(a_j, b_m) = (a_j, b_m) - \sum\limits_{i=1}^{m-1} c_i (a_j, b_i)$

$(b_m, b_m) = (a_m, b_m) = (b_m, a_m)$

$$= det \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, a_2) & (b_1, a_3) & \dots & (b_1, a_k) \\ (b_2, b_1) & (b_2, a_2) & (b_2, a_2) & \dots & (b_2, a_k) \\ (a_3, b_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) & \dots & \\ \dots & & & & \end{pmatrix} =$$

То же для столбцов

вычтем из 2 столбц. 1 стол., умнож. на $\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}$

$$= \begin{pmatrix} (b_1,b_1) & \overset{=0}{(b_1,b_2)} & \dots & (b_1,a_k) \\ \underset{=0}{(b_2,b_1)} & (b_2,b_2) & \dots & (b_2,a_k) \\ \vdots & \vdots & & \\ (a_k,b_1) & (a_k,b_2) & & \dots \end{pmatrix} = \dots = det \begin{pmatrix} (b_1,b_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (b_k,b_k) \end{pmatrix}$$ ■

Следствие 1. *$a_1 \dots a_k$ линейно независима* $\Leftrightarrow f(a_1 \dots a_k) > 0$

Доказательство. $a_1 \dots a_k$ лин. завис. $\Leftrightarrow$ среди b_i есть нулевой $\Rightarrow \|b_{i_0}\| = 0 \Rightarrow g(a_1 \dots a_k) = 0$

$$\begin{pmatrix} g(a_1 \dots a_k) \geq 0 \\ \forall a_1 \dots a_k \end{pmatrix}$$ ■

Следствие 2. *$a_1 \dots a_{k-1}$ лин. незав.* $\quad a_1 \dots a_k \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} b_1 \dots b_k$

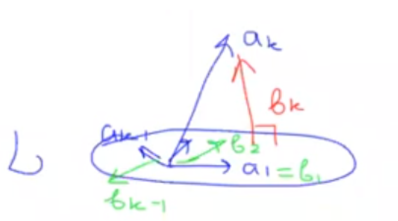
$$\|b_k\|^2 = \frac{g(a_1 \dots a_k)}{g(a_1 \dots a_{k-1})}$$

Доказательство. $a_1 \dots a_{k-1} \overset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} b_1 \dots b_{k-1}$

$$g(a_1 \dots a_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} \|b_i\|^2 > 0$$

$$g(a_1 \dots a_k) = \prod_{i=1}^{k} \|b_i\|^2$$ ■

Замечание. $L = span(\underset{\text{лин. незав.}}{a_1 \dots a_{k-1}}) = span(b_1 \dots b_{k-1})$



$$b_k = a_k - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i}_{y \in L}$$

$a_k = y + b_k \leftarrow$ ортогон. составляющая a_k относительно L

$\underset{i=1 \dots k-1}{b_k \perp n_i} \Rightarrow \boxed{b_k \perp L}$

$G(A_1 \dots a_k) = ((a_i, a_j))_{k \times k}$

$g(a_1 \dots a_k) = det\ G = ||b_1||^2 \dots ||b_k||^2$

$a_1 \dots a_k \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{попарно-ортог}}{b_1 - b_k}$

$L = span(a_1 \dots a_{k-1}) = span(b_1 \dots b_{k-1})$

$a_k = y + b_k$

b_k- ортогон. сост. a_k относит. L

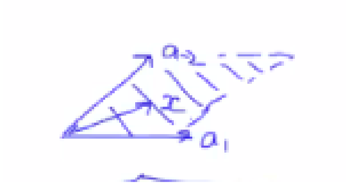
Определение 4. $(V, (\cdot,\cdot))\ \ a_1 \dots a_k \in V \qquad 1 \leq k \leq n$

$$\prod(a_1 \dots a_k) = \{x \in V | x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \ \ \underset{\forall i=1,k}{\alpha_i \in [0,1]}\}$$

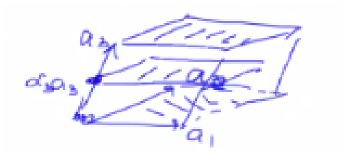
k-мерный параллелепипед, построенный на векторах $a_1 \dots a_k$

$V = V_3 \cong \mathbb{R}^3$

$k=1 \quad x = \alpha_1 a_1 \quad \alpha_1 \in [0,1] \quad 0 \longrightarrow a_1$ отрезок

$k=2$ 

$\begin{matrix} x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \\ \alpha_{1,2} \in [0,1] \end{matrix}$ параллелограмм

$k=3$ 

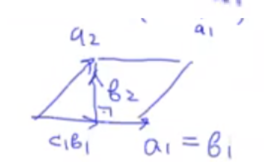
$\begin{matrix} x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \\ \alpha_i \in [0,1] \end{matrix}$ параллелиипед

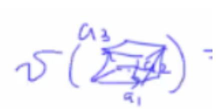
Определение 5. $V(\prod(a_1 \dots a_k)) = (g(a_1 \dots a_k))^{1/2}$ *объем к-мерного пар-да*

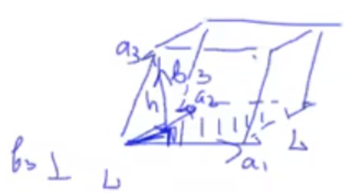
$\boxed{V(\prod(a_1 \dots a_k)) = V(\prod(a_1 \dots a_{k-1})) \cdot ||b_k||}$ *см. следствие к т-ме о det G*

$a_1 \dots a_k \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} b_1 \dots b_k$

1. $k=1 \quad V(\longrightarrow a_1) = \sqrt{g(a_1)} = \sqrt{(a_1, a_1)} = ||a_1||$ – длина отрезка
2. $k=2 \quad V($  $) = \sqrt{g(a_1,a_2)} = \sqrt{g(a_1)} \cdot \|b_2\| = \|a_1\| \cdot \|b_2\| = \underbrace{||b_1||}_{\text{основание}} \cdot \underbrace{||b_k||}_{\text{высота}} = S$ площадь пар.



3. $k=3$  $= \sqrt{g(a_1,a_2,a_3)} = \underset{\substack{|| \\ S \text{ основания}}}{\overset{\substack{\|b_1\|\|b_2\| \\ ||}}{\sqrt{g(a_1,a_2)}}} \cdot \underset{\substack{|| \\ h \text{ высота}}}{||b_3||} = V_{\text{пар-да}}$



$a_1 \dots a_k$ линейно зав. $\Leftrightarrow g(a_1 \dots a_k) = 0$

$k=2 \quad a_1, a_2$ коллин. $\Leftrightarrow S_{\text{пар.}} = 0$

$k=3 \quad a_1 a_2 a_3 \quad$ компл. $\Leftrightarrow V = 0$

$\sqsupset e_1 \dots e_n$ базис $V \qquad \Gamma = ((e_i, e_j)) = G(e_1 \dots e_n)$

Свойства Γ

1. $\Gamma^* = \Gamma$ (самосопряженность)
2. $\forall x \neq 0 \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \underset{=(x,x)}{\lambda^T \Gamma\, \overline{x}} > 0$

   Эти 2 свойства = $\boxed{\Gamma > 0}$ Положительно определенная матрица
3. $\triangle_k = g(e_1 \dots e_k)$ угловые миноры матрицы Γ

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) & \dots \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) & \dots \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) & \dots \\ & \dots & & \end{pmatrix} \quad \boxed{\forall k = 1 \dots n \quad \triangle_k > 0}$$

   Доказательство. Из следствия 1 $a_1 \dots a_k$ лин. независ. $\Leftrightarrow g(a_1 \dots a_k) > 0$

   $e_1 \dots e_k$ лин. независ. $\forall k = 1 \dots n$ ■

   В частности $\triangle_n = det\ \Gamma > 0 \Rightarrow$ Γ невырождена
4. $\begin{matrix} e_1 \dots e_n \\ e'_1 \dots e'_n \end{matrix}$ базисы $V \quad \begin{matrix} T = T_{e \to e'} \\ \boxed{\Gamma' = T^T\ \Gamma\ \overline{T}} \end{matrix} \quad \Gamma = ((e_i, e_j)) \quad \Gamma' = ((e'_i, e'_j))$

   Доказательство.

   $x \leftrightarrow x$ в базисе e

   $\leftrightarrow x'$ в базисе $e' \qquad x = Tx'$

   $(x,y) = x^T \Gamma \overline{y} = (x')^T T^T \Gamma \overline{T} \overline{y}'$

   $||$

   $(x')^T \Gamma' \overline{y}'$

   $\forall x, y \quad x = e'_i \quad y = e'_j$

   $\boxed{\Gamma' = T^T \Gamma \overline{T}}$ ■

   В частности, e и e' о.н.б. $V \quad \Gamma = \Gamma' = E$

   $E = T^T \overline{T} \Rightarrow \underbrace{\overline{T^T}}_{T^*} T = E \quad \boxed{T^* T = E}$

   $\boxed{e, e' \text{ о.н.б.} \Rightarrow T = T_{e \to e} \text{ унитарн.(ортог.)}}$

Определение 6. *Невырожд. комплекснозн. (веществ) матрица $Q_{n \times n}$ называется унитарной (ортогональной), если $Q^* = Q^{-1} (\Leftrightarrow Q^* Q = QQ^* = E)$*

Свойства унитарной (ортог.) матрицы

1. Q унитарн. (ортогог.) $\Leftrightarrow$ стр. (столб) попарно-ортагон. (в смысле станд. скал. про-я в пр-ве $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) \quad (x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$)

   Доказательство. $Q = (Q_1 \dots Q_n)$столбцы

   Q унит. (ортог.) $\Leftrightarrow Q^* = Q^{-1} \Leftrightarrow Q^* = \overline{Q^T} = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix}$

$Q^*Q = E$

$$E = Q^*Q = \begin{pmatrix} \overline{Q}_1^T Q_1 & \overline{Q}_1^T Q_2 & \overline{Q}_1^T Q_n \\ \dots & & \\ \overline{Q}_n^T Q_1 & \overline{Q}_n^T Q_2 & \overline{Q}_n^T Q_n \end{pmatrix} = ((\overline{Q_i, Q_j})) \leftrightarrow (Q_i, Q_j) = \delta_{ij} \text{ аналогично для строк} \quad \blacksquare$$

2. $|detQ| = 1$

Доказательство. $1 = detE = det(Q^*Q) = \underset{\overline{Q^T}}{\overset{det(Q^*)}{||}} \cdot det\ Q = \overline{det\ Q} \cdot det\ Q = |detQ|^2$ ■

$\boxed{\text{евкл.: } Q_{\text{ортогон.}} \to detQ = \pm 1}$

3. $Q^{-1} -$ унитарн.(ортогон.)

Доказательство. $(Q^{-1})^* = \overline{(Q^{-1})^T} = (\overline{Q^T})^{-1} = (Q^*)^{-1} = Q = (Q^{-1})^{-1}$ ■

4. Q, R унитарн.(ортог.) $\Rightarrow QR$ унит. (ортогон.)

Доказательство. $(QR)^* = (\overline{QR})^T = \overline{R}^T \overline{Q}^T = R^* Q^* = R^{-1} Q^{-1} = (QR)^{-1}$ ■

5. $\begin{matrix} e, e' \text{ о.н.б.} V \\ T = T_{e \to e'} \end{matrix} \Rightarrow T$ – унитарн.(ортог.) матрица.

Примеры. Матрицы поворота на плоскости или в пространстве

$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ортогональна.

9.4 Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Теорема Пифагора. Теорема о наилучшем приближении. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя.

Определение 1. $\underset{\text{лин. подпр.}}{L \subset V}$ $\quad L^\perp = \{y \in V | \ \forall x \in L (x, y) = 0\}$
– *ортогональое дополнение подпро-ва* L

Свойства $L^\perp$

1. $L^\perp$ линейное подпро-во

Доказательство. $\forall \lambda \in K, \ \forall u, v \in L^\perp : \forall x \in L (x, u) = 0, (x, v) = 0$

$(x, u + \lambda v) = \underset{=0}{(x, u)} + \overline{\lambda} \underset{=0}{(x, v)} = 0 \Rightarrow u + \lambda v \in L^\perp$ ■

2. $\boxed{V = L \bigoplus L^\perp}$

Доказательство. $L = span \underset{\text{лин. незав. н.у.о. попарно ортогон. (Г-Ш)}}{(a_1 \dots a_k)}$

$a_1 \dots a_k \underbrace{a_{k+1} \dots a_n}$

дополним до базиса V н.у.о. попарно ортогон. (Г-Ш)

$L^{\perp ?} = span(a_{k+1} \dots a_n) \quad V = L \bigoplus L^{\perp}$

$\forall x \in L: \quad x = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i$

$\forall y \in L^{\perp}: \quad y \quad \sum\limits_{j=k+1}^{n} c_j a_j$

$(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=k+1}^{n} c_i \overline{c}_j \underset{=0}{(a_i, a_j)} = 0 \Rightarrow L^{\perp}$ – ортогон. дополн. L ■

3. $(L^{\perp})^{\perp} = L$

   Доказательство. $\forall x \in L \ \ \forall y \in L^{\perp} : (x, y) = 0$

   $\Rightarrow L \subset (L^{\perp})^{\perp}$

   $(L^{\perp})^{\perp} \oplus L^{\perp} = V = L \oplus L^{\perp}$

   $\Rightarrow dim(L^{\perp})^{\perp} = dimL \Rightarrow L = (L^{\perp})^{\perp}$ ■

4. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

   $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$

   Похоже на правило Де Моргана, но не то же самое

   Доказательство. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

$$\begin{array}{ccc} \forall x \in L_1 + L_2 & & (x, y) = 0 \\ \| & \forall y \in (L_1 + L_2)^{\perp} & \| \\ \underset{\in L_1}{l_1} + \underset{\in L_2}{l_2} & & (l_1, y) + (l_2, y) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \sqsupset l_2 = 0 \ \ \underset{\forall l_1 \in L_1}{(l_1, y) = 0} \ \Rightarrow y \in L_1^{\perp} \\ \sqsupset l_1 = 0 \ \ \underset{\forall l_2 \in L_2}{(l_2, y) = 0} \ \Rightarrow L_2^{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow y \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$$

   $\Rightarrow \boxed{(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}}$

   <u>Обратно:</u> $\sqsupset y \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall l_1 \in L_1 \quad (l_1, y) = 0 \\ \forall l_2 \in L_2 \quad (l_2, y) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \forall x = l_1 + l_2 \in L_1 + L_2 \\ (x, y) = (l_1, y) + (l_2, y) = 0 \end{array}$

   $\Rightarrow y \in (L_1 + L_2)^{\perp} \Rightarrow \boxed{L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \subset (L_1 + L_2)^{\perp}} \Rightarrow (L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$

   $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$

   $(L_1^{\perp} + L_2^{\perp})^{\perp} \underset{\text{по доказ-му}}{=} (L_1^{\perp})^{\perp} \cap (L_2^{\perp})^{\perp} \underset{\text{св-во 3}}{=} L_1 \cap L_2$

   св-во 3 $\ L_1^{\perp} + L_2^{\perp} = (L_1 \cap L_2)^{\perp}$ ■

5. $V^{\perp} = \mathbb{0}$

   $\mathbb{0}^{\perp} = V$

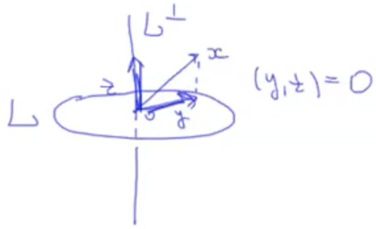
Определение 2. $\forall x \in V\ \exists! y \in L, \exists!\ z \in L^{\perp} : \boxed{x = y + z}$

из св-ва 2

y *– ортогон. проекция* x *на лин. подпро-во* L

z *– ортогон. составл.* x *относительно* L *– перпендикуляр, опущенный из* x *на* L

$(x, y) = 0$



Задача о перпендикуляре $z = ?$

$L = span(\underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{лин. независ.}})\ \ x \in V \quad x = y + z \quad y \in L \quad z \in L^{\perp} \quad z = ?$

$y \in L \quad y = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i$

$x = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i + z \quad | \cdot a_j$

$\forall j = 1 \dots k \qquad (x_i a_j) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i (a_i, a_j) + \underbrace{(z, a_j)}_{=0} \in L \underset{z \in L^{\perp}}{=} \sum\limits_{i=1}^{k} c_i (a_i, a_j) \qquad c_i = ?$

СЛНУ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_2, a_1) \dots \\ (a_1, a_2) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}}_{G^T(a_1 \dots a_k)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix}$$

$detG > 0 \rightarrow \exists!$ реш-е$c_1 \dots c_k$

$\rightsquigarrow y = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i \rightsquigarrow z = x - y.$

Примеры. $L = span(a_1 a_2 a_3)$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad z = ?$$

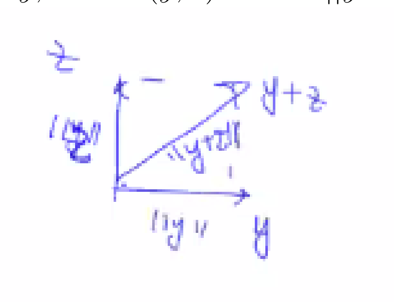
$a_3 = 2a_1 - a_2 \quad L = span(a_1, a_2)$

$$\underset{\text{вещ.}}{G^T} = G = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (x, a_1) = 4 \\ (x, a_2) = -8 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 4 \\ -8 \end{matrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -12 \end{matrix}\right)$$

$c_1 = 3 \ \ c_2 = -2$

$$y = 3a_1 - 2a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad z = x - y \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (y, z) = 0$$

Теорема 1 (Пифагора)**.**
$\forall y, z \in V \ \ (y, z) = 0 \Rightarrow ||y + z||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$



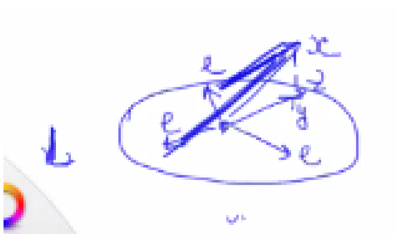
Доказательство. $||y + z||^2 = (y + z, y + z) = \underset{=||y||^2}{(y, y)} + \underset{=0}{(y, z)} + \underset{=0}{(z, y)} + \underset{=||z||^2}{(z, z)}$ ∎

Следствие 1. *$x_1 \dots x_k$ попарно-ортог.* $\Rightarrow ||x_1 + \ldots + x_k||^2 = ||x_1||^2 + \ldots + ||x_k||^2$

Доказательство. М.М.И. (упр.) ∎

Теорема 2 (О наилучш. приближении)**.**

$$V = L \oplus L^{\perp} \quad : x = \underset{\in L}{y} + \underset{\in L^{\perp}}{z} \Rightarrow \begin{matrix} \forall l \in L \\ l \neq y \end{matrix} \ \begin{matrix} ||x - y|| \\ || \\ ||z|| \end{matrix} < ||x - e||$$



длина любой наклонной больше, чем длина перпендикуляра

Доказательство. $\sqsupset l \in L \ \ l \neq y \qquad \|x - l\|^2 = \| \underbrace{x - y}_{=z \in L^{\perp}} + \underbrace{y - e}_{\in L} \|^2 \underset{\text{по т. Пифагора}}{=} ||x - y||^2 + \underset{>0 \ y \neq l}{||y - l||^2}$

$\Rightarrow ||x - l||^2 > ||x - y||^2 \Rightarrow$ все. ∎

Определение 3. $dist(x, L) = \min\limits_{l \in L} \|x - l\| = \underset{\textit{расстояние от } x \textit{ до } L}{\|x - y\|} = \|z\|$

Теорема 3 (о расстоянии до линейного подпространтсва)**.** $L = span(\underset{\textit{базис}}{a_1 \dots a_k}), x = y + z, y \in L, z \in L^{\perp} \Rightarrow dist^2(x, L) = \|z\|^2 = \dfrac{g(a_1 \dots a_k, x)}{g(a_1 \dots a_k)} \neq 0$

Доказательство. $\underset{\text{лин. нез.}}{\underline{a_1 \dots a_k}}\, x \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{попарно-ортог.}}{b_1 \dots b_k b_{k+1}} \qquad span(a_1 \dots a_k) = span(b_1 \dots b_k)$

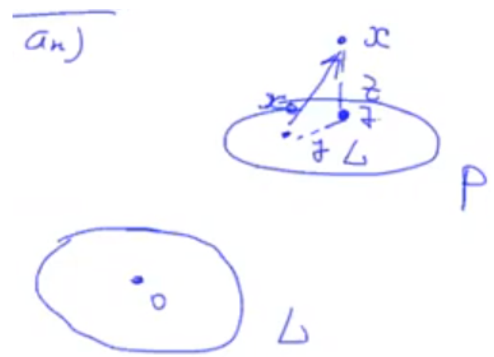
$$b_{k+1} = x - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} c_i b_i}_{\substack{\| \\ y \in L}} \Rightarrow b_{k+1} = x - y = z \underset{\text{Т-ма о } det \text{ матрицы } G(\text{следствие})}{\Rightarrow} \|b_{k+1}\|^2 = \|z\| = \frac{g(a_1 \dots a_k, x)}{g(a_1 \dots a_k)} \qquad \blacksquare$$

<u>Упражнения:</u>

1. $P = x_0 + L$ линейное многообразие

   $$dist(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| \overset{\text{доказать}}{=} \|z\| = \sqrt{\frac{g(a_1 \dots a_k, x - x_0)}{g(a_1 \dots a_k)}}$$

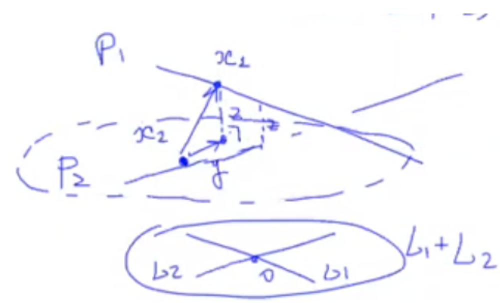
   $$L = span(a_1 \dots a_k) \qquad\qquad x - x_0 = \underset{\in L}{y} + z$$



2. $P_1, P_2 \qquad P_i = x_i + L_i \qquad i = 1, 2$

   $$dist(P_1, P_2) = \min_{\substack{u_1 \in P_1 \\ u_2 \in P_2}} \|u_1 - u_2\| \overset{\text{доказать}}{=} \|z\|$$

   $$x_2 - x_1 = \underset{\in L_1 + L_2}{y} + \underset{\in (L_1 + L_2)^{\perp}}{z}$$



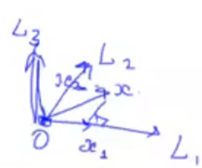
Определение 4. *$\underset{\text{Лин. подпр.}}{L_1 \dots L_k} \subset V$ называются <u>попарно-ортог.</u>, если $\forall x_i \in L_i \quad \forall x_j \in L_j \quad (x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j$*

Очевидно, $L_1 \dots L_k$ дизъюнктны.

$$\underset{x_i \in L_i}{x_1 + \ldots + x_k} = \mathbb{0} \qquad | \cdot x_j \;\; j = 1 \dots k \qquad \begin{array}{l} (\sum_{i=1}^{k} x_i, x_j) \qquad = 0 \\ \qquad \| \\ \sum_{i=1}^{k} (x_i, x_j) \;\; = (x_j, x_j) \;\; = 0 \Leftrightarrow x_j = \mathbb{0} \end{array}$$

Определение 5. *$L_1 \dots L_k$ попарно ортог. $\qquad V = \bigoplus_{i=1}^{k} L_i \qquad \underset{\text{проекторы}}{\mathcal{P}_i : V \to L_i}$ <u>операторы ортогонального проектирования</u>*

$$\forall x \in V \qquad x = \sum_{i=1}^{k} \underset{\in L_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i x \qquad \textit{(однозн. предст.)}$$



$\boxed{x_i = \mathcal{P}_i x}$ – *<u>ортог. проекция x</u> на подпространство L_i*

$\boxed{(x_i, x_j) = 0 \;\; i \neq j} \Rightarrow$ *по т-ме Пифагора* $\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2}$

$e_1 \dots e_n$ ортогональный базис. $\qquad L_i = span(e_i)$

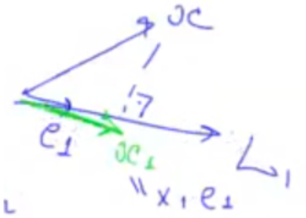
$$V = \bigoplus_{i=1}^n L_i \qquad \forall x \in V: \quad x = \sum_{i=1}^n \underset{\in L_i}{x_i} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$\updownarrow$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$\updownarrow$ ортог. проекция на e_i – вектор

x_i – координата относительно e_i, проекция элемента x на e_i



$$\forall j = 1 \dots n \qquad (x, e_j) = (\sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \underset{0\ i \neq j}{\underset{||}{(e_i, e_j)}} = x_j(e_j, e_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_j = \frac{(x, e_j)}{e_j, e_j}}$$ – коэфф–ты Фурье вектора x относительно базиса e (ортогон.)

$x \overset{?}{\leftrightarrow} \sum x_j e_j$
$x = \sum x_j e_j$ – в бесконечномерных пространствах не все так просто, но мы этим и не занимаемся.

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \|e_i\|^2}$$ Тождество Парсеваля

$$\boxed{1 \leq k \leq n \qquad \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2}$$ Неравенство Бесселя

"Квадрат длины вектора не меньше суммы квадратов длины его проекций"

$e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \qquad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$

$\boxed{x_i = (x, e_i)}$ – коэффициенты x относительно e
– коэффициенты Фурье
– проекция на e_i

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$ – тождество Парсеваля $\qquad \sum_i^k |x_i|^2 \leq \|x\|^2$ – неравенство.

$V = \bigoplus_{i=1}^k L_i \qquad L_i$ попарно-ортогональны $\qquad \mathcal{P}_i : V \to L_i$

$V = span(\underbrace{e_1}_{L_1} \dots \underbrace{e_n}_{L_k})$ о.н.б.

$$\Rightarrow \forall x \in V \ \boxed{x_i = \mathcal{P}_i x = \sum_{e_j \in L_i} (x, e_j) e_j}$$

9.5 Изометрия унитарных (евклидовых) пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидового пространства и сопряженного к нему.

Определение 1. *Изометрией называется изоморфизм линейных пространств с сохранением скалярного (псевдоскалярного) произведения.*

$(V, (\cdot,\cdot)_V)$ $\quad (V', (\cdot,\cdot)_{V^*})$ *унит. (евкл.)* $\quad V \cong V^*$

$$\begin{array}{lll} & x, \quad y & \in V \\ \forall & \updownarrow \quad \updownarrow & \qquad \boxed{(x,y)_V = (x',y')_{V'}} \\ & x', \quad y & \in V' \end{array}$$

Очевидно, при изометрии сохраняется расстояние:

$\|x-y\|_V^2 = (x-y, x-y)_V = (x'-y', x'-y')'_V = \|x-y\|_V^2$

"Изометрия $\equiv$ сохраняет метрику"

Теорема 1 (об изометрии)**.**
Любые 2 унитарных (евкл.) пространства одной размерности изометричны.

Доказательство. $\forall$ 2 лин. пространства одной размерности изоморфны $\quad V \cong V'$

См. 1 семестр. $\quad$ $e_1 \dots e_n$ V базис о.н.б. $\quad$ $e'_1 \dots e'_n$ V' базис о.н.б. $\quad$ $\underset{\in V}{x} = \sum x_i e_i \leftrightarrow \underset{\in V'}{x'} = \sum x_i e'_i$ было доказано, что это изоморфизм

$(x,y)_V = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = (x',y')_{V'} \Rightarrow$ изометричны. ■

$(V, (\cdot,\cdot))$ $\quad V^*$ – сопряженное к V

Фиксируем $y \in V \Rightarrow \forall x \in V$ $\quad \boxed{f(x) := (x,y)}$ $\quad \underset{\text{линейное отображение}}{f : V \to K}$ $\quad \Rightarrow f \in V^*$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall y \in V \rightsquigarrow f \in V^* \\ \leftsquigarrow ? \end{array}}$$

Теорема 2 (Рисса $(V(\cdot,\cdot))$)**.**
$\forall f \in V^* \ \exists! y \in V : \forall x \in V \ f(x) = (x,y)$ $\quad$ y – *присоединенный вектор к f*

Теорема 3.
Единственность: $\ \sqsupset y' : f(x) = (x,y) \ \forall x \in V$

$\Rightarrow \{\forall x \in V \quad \mathbb{0} = f(x) - f(x) = (x,y) - (x,y') = (x, y-y')\} \Leftrightarrow y - y' = \mathbb{0} \Leftrightarrow y = y'$

Существование: $\ \sqsupset e_1 \dots e_n$ *о.н.б.* V $\quad f \in V^*$ $\quad \forall x \in V \ \ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \qquad y_i = \overline{f(e_i)} \qquad y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$

$\Rightarrow \forall x \in V \quad f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \underset{\substack{\updownarrow \\ \text{скал.(псевдоск.) про. в о.н.б.}}}{=} (x,y)$

$$\boxed{\begin{array}{c} V \leftrightarrow V^* \\ \text{те-ма Рисса} \\ \text{будет ли изоморфизм? Будет ли изометрия?} \end{array}}$$

$$V \underset{\text{т-ма Рисса}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} \underline{\text{изоморфизм}}, \text{ если } V \text{ евклидово пространство,} \\ \underline{\text{не изоморфизм}}, \text{ если } V \text{ унитарное пространство.} \end{cases}$$

Изоморфизм именно в смысле теоремы Рисса!

$y_1, y_2 \in V \underset{\text{т-ма Рисса}}{\leftrightarrow} f_1, f_2 \in V^* \qquad f_i(x) \underset{\forall x \in V}{=} (x, y_i)\ i = 1, 2$

$y_1 \underset{\lambda \in K}{+} \lambda y_2 \in V \leftrightsquigarrow (x, y_1 + \lambda y_2) = \underbrace{(x, y_1)}_{f_1(x)} + \overline{\lambda} \underbrace{(x, y_2)}_{f_2(x)}$

$y_1 + \lambda y_2 \leftrightsquigarrow f_1 + \overline{\lambda} f_2$

$$\boxed{\begin{array}{c} V \text{ евклидово пространство} \qquad V \cong V^* \Leftrightarrow \begin{array}{c} y \in V \leftrightarrow f \in V^* \\ \forall x \in V : f(x) = (x, y) \end{array} \\ \underline{\text{Естественный изоморфизм}} \end{array}}$$

V^* дадим определение $(f, g)_{V^*} := (y, z)$ 1-4 скал. произведения вып. $\Rightarrow$ Изометрия

$V^* \ni f \leftrightarrow y \in V$

$V^* \ni g \leftrightarrow z \in V$

$$\boxed{\begin{array}{c} V \cong V^* \\ (\cdot, \cdot) \qquad (\cdot, \cdot)_{V^*} \end{array}}$$

$e_1 \ldots e_n$ о.н.б. $V \underset{\text{т-ма Рисса}}{\leftrightarrow} \omega^1 \ldots \omega^n$ сопряженный базис V^*

Действительно, $\omega^i(x) = x^i = (x, e_i) \underset{\text{т-ма Рисса}}{\leftrightarrow} e_i \leftrightarrow \omega^i$

9.6 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический тензор. Взаимные базисы. Операции поднятия и опускания индексов.

V линейное вещ. про-во $\quad (\cdot, \cdot)$ скалярное про-е $\quad V$ евклидово пространство

$e_1 \ldots e_n$ базис $\qquad \Gamma = \underset{\text{матрица Грама}}{G(e_1 \ldots e_n)} = ((e_i, e_j))_{n \times n} = (g_{ij})_{n \times n}$

$\Gamma \in T_{(2,0)}$ – метрический ковариантный тензор

$e'_1 \ldots e'_n$ базис. $\qquad \Gamma' = ((e'_i, e'_j))_{n \times n} = (g'_{ij}) \qquad T = T_{e \to e'} = (t^i_j) \Rightarrow$

$\underset{\text{было док-во}}{\Rightarrow} \Gamma' = T^T \Gamma T \Leftrightarrow g'_{ij} = t^k_{ij} = t^k_i g_{kl} t^l_j = g_{kl} t^k_i t^l_i \Rightarrow \Gamma$ – $(2, 0)$ тензор.

Утверждение. Γ^{-1} *тензор типа* $(0, 2)$

Доказательство. $\sqsupset\ \Gamma^{-1} = (g^{ij})_{n \times n} \qquad S = T^{-1} = (S^k_l)_{n \times n}\ T_{e \to e'}$

$(\Gamma^{-1})' = (g'^{ij})_{n \times n} \qquad (\Gamma^{-1})' = (\Gamma')^{-1} = (T^T \Gamma T)^{-1} = T^{-1} \Gamma^{-1} (T^{-1})^T = S \Gamma^{-1} S^T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'^{ij} = S^i_k g^{kl} S^j_l = g^{kl} S^i_k S^j_l \Rightarrow \Gamma^{-1}$ 2 контрвариантный тензор. ∎

Определение 1. Γ^{-1} *тензор типа (0, 2) называется* *контрвариантным метрическим тензором*

Свойства Γ, Γ^{-1} :

1. $\boxed{g_{ij}g^{jk} = \delta_j^k = g_{ji}g^{kj}}$ $\qquad (\Gamma\Gamma^{-1} = E = \Gamma^{-1}\Gamma)$
2. Γ и Γ^{-1} <u>симметр. тензоры</u> $\qquad (\Gamma = \Gamma^T \Rightarrow (\Gamma^{-1})^T = (\Gamma^T)^{-1} = \Gamma^{-1})$
3. $\forall x, y \in V$ $\qquad \boxed{(x,y) = g_{ij}x^iy^j}$, причем $\boxed{\underset{(x,x)}{\underset{||}{g_{ij}\,x^iy^j}} > 0, \text{ если } x \neq 0}$

$G = (g_{ij})$ ковариантный метр. тензор

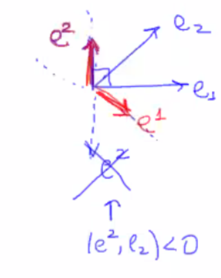
$G^{-1} = (g^{ij})$ контрвариантный метр. тензор

Определение 2. *$e_1 \dots e_n$ базис V евклидово пространство. $e^1 \dots e^n$ незывается <u>взаимным</u> для базиса $e_1 \dots e_n$, если* $\boxed{(e^i, e_j) = \delta_j^i = (e_j, e^i)}$

$e_1 \dots e_n$ <u>взаимный</u> для базиса $e^1 \dots e^n$

<u>Взаимные базисы $e_1 \dots e_n$ и $e^1 \dots e^n$</u>

Примеры.



$$(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, \neq j \end{cases}$$

Теорема 1. *$\forall$ базиса $e_1 \dots e_n$ пространства V $\exists!$ взаимный базис $e^1 \dots e^n$*

Доказательство. $e_1 \dots e_n$

$e^j = t_j^i e_i \quad t_j^i \leftrightarrow T_j \quad (e_i, e^j) = \delta_i^j \qquad T_{e_i \to e^j} = (T_1 \dots T_j \dots T_n)$

$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \quad \delta_i^j = (e_i, e^j) = \underset{E_i^T}{\underset{\updownarrow}{x}}^T\Gamma \underset{T_j}{\underset{\updownarrow}{y}} \Leftrightarrow E = E\Gamma T \Leftrightarrow \underset{T=\Gamma^{-1} \Rightarrow \exists! \text{ взаимный базис } e^j}{\underset{\Updownarrow}{\Gamma T}} = E$ ■

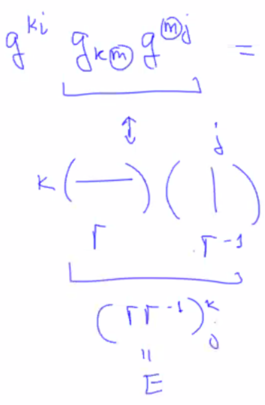
Следствие 1. *e_i, e^j взаимные базисы V*

$\Gamma = G(e_1 \dots e_n) \Rightarrow G(e^1 \dots e^n) = \Gamma^{-1}$, при этом

$$\boxed{\begin{array}{c}(e^1 \dots e^n) = (e_1 \dots e_n)\Gamma^{-1} \\ (e_1 \dots e_n) = (e^1 \dots e^n)\Gamma\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}e^j = g^{ij}e_i = g^{ji}e_i \\ e_i = g_{ij}e^j = g_{ji}e^j\end{array}}$$

Доказательство. $(e^j, e^i) = \underset{\text{скал. пр. в } V}{\underset{\updownarrow}{(\underset{x = T_i = (\Gamma^{-1})_i}{\underset{\updownarrow}{e^i}}, \underset{y = T_j = (\Gamma^{-1})_j}{\underset{\updownarrow}{e^j}})}} = x^T\Gamma y = g^{ki}g_{km}g^{mj} =$

$= g^{ki}\delta_k^j = g^{ji} = g^{ij} \Rightarrow G(e^1 \dots e^n) = \Gamma^{-1}$

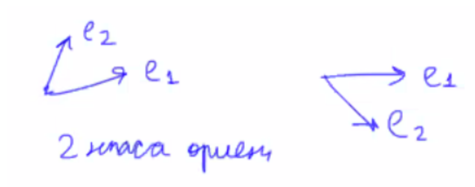


■

Отступление:

$\begin{matrix} e_1 \dots d_n \\ e'_1 \dots e'_n \end{matrix}$ базисы V

Говорят, что базисы принадлежат одному классу ориентации, если $detT_{e \to e'} > 0$



В $\forall$ пространстве $\exists$ 2 класса ориентации на плоскости:

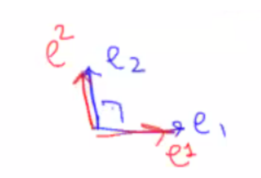
в пространстве: $\begin{matrix} \text{правая тройка} \\ \text{левая тройка} \end{matrix}$

В нашем случае, <u>взаимные базисы</u> всегда $\in$ <u>одному классу ориентации</u>,

т.к. $T_{e_i \to e^j} = \Gamma^{-1} = G(e^1 \dots e^n) > 0$

Следствие 2. *$e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \Rightarrow \underbrace{e^i = e_i}_{\text{взаимные совпадают с исходными}} \quad \forall i = 1 \dots n$*

Доказательство. e о.н.б. $\Rightarrow G(e_1 \dots e_n) = E = \Gamma \Rightarrow \Gamma^{-1} = E = T_{e_i \to e^j} \Rightarrow e^i = e_i$ ■



Теорема 2.

$V \cong V^*$ из Теоремы Рисса ($\forall y \in V \leftrightarrow f \in V^* : \forall x \in V \; f(x) = (x, y)$)

$e_1 \dots e_n$ базис V

$w^1 \dots w^n$ сопряженный базис V^*

$V^* \ni \omega^i \underset{\text{изоморф.}}{\leftrightarrow} e^i \in V \;\Rightarrow e^i$ взаимные базисы к e_j

Доказательство. $\omega^i \overset{\text{Т-ма Рисса}}{\leftrightarrow} e^i$

$\forall x \in V : \omega^i(x) = (x, e^i)$

$\forall e_j : \underbrace{\omega^i(e_j)}_{\delta^i_j \text{ т.к. сопряж. базисы}} = (e_j, e^i) \Rightarrow e^i$ взаимный к e_j ■

Примеры.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{Найти взаимный базис!}$$

Координаты e_i заданы относительно о.н.б. $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$

1 сп. $\Gamma = G(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 65 & 18 & 23 \\ 18 & 38 & 53 \\ 23 & 53 & 74 \end{pmatrix}$

$(e^1 e^2 e^3) = (e_1 e_2 e_3)\Gamma^{-1}$

$e^1\ e^2\ e^3$ ← координаты векторов взаимного базиса в исходном о.н.б.

$$(e^1 e^2 e^3) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 65 & 17 & 23 \\ 18 & 38 & 53 \\ 23 & 53 & 74 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} 3 & -113 & 80 \\ -113 & 4201 & -3031 \\ 80 & -3031 & 2146 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -38 & 27 \\ -1 & 41 & -29 \\ 1 & -34 & 24 \end{pmatrix}$$

$e^1\ e^2\ e^3$ координаты базиса относительно базиса $e_1\ e_2\ e_3$

$\Gamma^{-1} = T_{e_i \to e^j}$

2 сп.

$\omega^1 \omega^2 \omega^3$ сопряж. к $e_1 e_2 e_3$

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = E \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \omega^1 \\ \to \omega^2 \\ \to \omega^3 \end{matrix}$$

По теореме 2: $(\mathbb{R}^3)^* \equiv \mathbb{R}_3 \underset{\text{изоморф. т-ма 2}}{\cong} \mathbb{R}^3$

$\omega^i \leftrightarrow e^i$

$\omega^i(x) = (x, e^i)$

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e^2 = \begin{pmatrix} -38 \\ 41 \\ -34 \end{pmatrix} \quad e^3 = \begin{pmatrix} 27 \\ -29 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Определение 3. *e^i и e_j взаимные базисы V*

$\forall x \in V \ \ x = x^i e_i = x_j e^j$

x^i – *контрвариант.* *координаты вектора*

x_j – *ковариант.* *координаты вектора*

$e^j \leftrightarrow \underset{\text{сопряж. к } e_i}{\omega^j} \in V^*$

$$\boxed{\begin{aligned}x^i &= \omega^i(x) = (x, e^i)\\ x_j &= e_j(x) = (x, e_j)\end{aligned}}$$

$T = T_{e\to e'}$ $S = T^{-1}$ $\boxed{\begin{aligned}x'^i &= s^i_j x^j\\ x'_j &= t^i_j x_i\end{aligned}}$

$e_1 \dots e_n$ $e'_1 \dots e'_n$
$e^1 \dots e^n$ $e'^1 \dots e'^n$

$\boxed{\begin{aligned}x = x^i e_i = (x, e^i) e_i\\ x = x_j e^j = (x, e_j) e^j\end{aligned}}$ формулы Гибса

Определение 4. $\begin{matrix}(x^i) \text{ контрвар. координаты вектора } x \text{ – тензор типа } (0,1)\\ (x_j) \text{ ковар. координаты вектора } x \text{ – тензор типа } (1,0)\end{matrix}$

Сверткой этих тензоров с метрическими тензорами Γ и Γ^{-1}, соответственно, называются следующие операции:
$\boxed{g_{ji}x^i = g_{ij}x^i}$ *и* $\boxed{g^{ij}x_i = g^{ji}x_i}$ *($\Leftrightarrow$ свертка произв. тензоров)*

$\boxed{\begin{aligned}g_{ij}x^i = g_{ij}(x, e^i) = (x, g_{ij}e^i) = (x, e_j) = x_j\\ g^{ij}x_i = g^{ij}(x, e_i) = (x, g^{ij}e_i) = (x, e^j) = x^J\end{aligned}}$ *операции поднятия и опускания индекса тензора*

Примеры. $\forall x, y \in V$ $(x,y) = \underbrace{g_{ij}x^i}_{x_j} y^j = x_j \underbrace{y^j}_{\substack{\| \\ g^{ij}y_i}} = g^{ij}x_j y_i = \xi^T\Gamma^{-1}\eta = (x,y)$

$x^T\Gamma y$	$\Gamma^{-1} = G(e^1 \dots e^n)$
$\Gamma = G(e_1 \dots e_n)$	$\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$
$x = x^i e_i$	$x = \xi_i e^i$
$y = y^j e_j$	$y = \eta_j e^j$

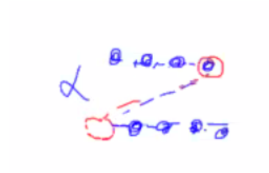
V Евклидово пространство, Γ, Γ^{-1} метр. тензоры.

Определение 5. $\alpha \in T(p,q)$ $q \geq 1$ *опусканием верхнего индекса тензора α называется его свертка с ковариантн. метр. тензором (Γ) по тому верхнему индексу, который следует опустить. В результате, получаем тензор $\in T_{(p+1,q-1)}$*

Определение 6. $\alpha \in T(p,q)$ $p \geq 1$ *поднятием нижнего индекса α называется его свертка с контрвариантн. метр. тензором (Γ^{-1}) по тому нижнему индексу, который следует поднять. В результате, получаем тензор $\in T(p-1, q+1)$*

При опускании верхнего индекса он всегда записывается нижними левым. Если опускаются несколько индексов, то они записываются в том же порядке, в котором стояли сверху.

При поднятии нижнего индекса он всегда записывается правым верхним. Если поднимаются несколько индексов, то они записываются в том же порядке, в котором стояли внизу.



$g_{j_0 s}\alpha^{i_1\dots i_{q-1}s}_{j_1\dots j_p} \in T(p,q) = \alpha^{i_1\dots i_{q-1}}_{j_0 j_1\dots j_p} \in T(p+1,q-1)$

$g^{s i_{q+1}}\alpha^{j_1\dots j_q}_{s j_2\dots j_p} \in T(p,q) = \alpha^{i_1\dots i_q i_{q+1}}_{j_2\dots j_p} \in T(p-1,q+1)$

Стандартный порядок следования индексов (сначала верхние, потом нижние)

В остальных случаях, дополнительно прежнее место индекса отмечается точкой.

Например, $\begin{array}{l} g_{is}\alpha^{sj}_{k} = \alpha^{\cdot j}_{ik} \\ g^{sk}\alpha^{i}_{js} = \alpha^{ik}_{j\cdot} \end{array}$

$g_{is}g_{kr}\alpha^{sjrl}_{m} = \alpha^{\cdot j \cdot l}_{ikm}$ i стр, j стол., k слой, l срез, m след. слой

$\alpha^{\cdot 3 \cdot 1}_{242}$ элемент расположен во 2 стр. 3 стол. 4 слое 1 срезе 2...

Примеры.

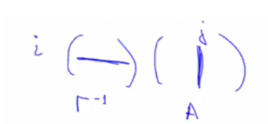
1. $\alpha \in T(2,0) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

   $\Gamma = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (g_{ij})$

   (a) найти матрицу тензора с поднятым 1-м индексом
   (b) ... с 2-м индексом
   (c) ... с 2-мя индексами

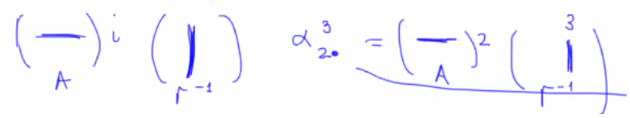
   $\Gamma^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

   (a) $\alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha^{i}_{j} = g^{\boxed{ik}}_{\ ki}\alpha_{kj} = g^{ik}\alpha_{kj} \leftrightarrow \Gamma^{-1}A$

   $(\alpha^{i}_{j}) = \Gamma^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 9 & 25 \end{pmatrix}$

   (b) $\alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha^{\ j}_{i\cdot} = g^{jk}_{\boxed{kj}}\alpha_{ik} = \alpha_{ik}g^{kj} \leftrightarrow A\Gamma^{-1}$ $(\alpha^{\ j}_{i\cdot}) = A\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 8 & 9 & 19 \\ 13 & 7 & 25 \end{pmatrix}$



(c) $\alpha_{ij} \rightsquigarrow \alpha^{ij} = g^{ik}g^{mj}\alpha_{km} \leftrightarrow \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$

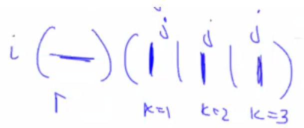
$$(\alpha^{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & 17 & 51 \\ 18 & 9 & 71 \\ 49 & 69 & 87 \end{pmatrix}$$

2. $\alpha \in T(2,1)$ Γ та же

$$\alpha^i_{jk} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\qquad\qquad A_1 \qquad\qquad\qquad A_2 \qquad\qquad\qquad A_3$$

(a) Найти матр. с опущенным верхним индексом

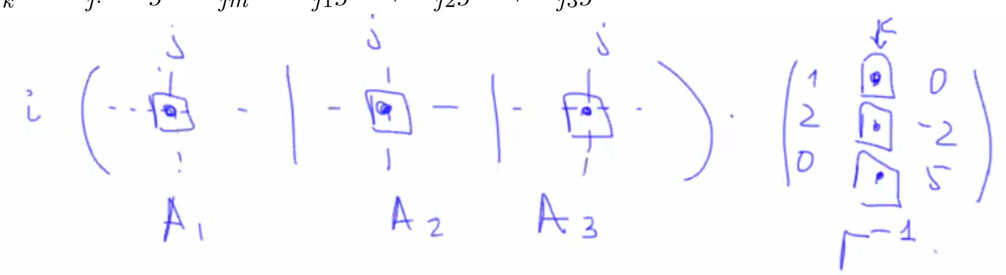
(b) С поднятым 2-м нижним



(a) $\alpha^i_{jk} \rightsquigarrow \alpha_{ijk} = g_{im}\alpha^m_{jk} = (\Gamma A_k)^i_j$

$$(\alpha_{ijk}) = (\Gamma A_1|\Gamma A_2|\Gamma A_3) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} -6 & -25 & 31 & & \\ 3 & 12 & -15 & \dots & \dots \\ 1 & 5 & -5 & & \end{array}\right)$$

(b) $\alpha^i_{jk} \rightsquigarrow \alpha^{ik}_{j\cdot} = g^{mk}\alpha^i_{jm} = \alpha^i_{j1}g^{1k} + \alpha^i_{j2}g^{2k} + \alpha^i_{j3}g^{3k} =$

$=$  $=$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \cdot A_1 + 2A_2 + 0A_3 & 2A_1 + 5A_2 - 2A_3 & 0A_1 - 2A_2 + 5A_3 \\ k=1 & k=2 & k=3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 3 & -3 & & \\ -3 & 0 & 3 & \dots & \dots \\ 3 & -3 & 0 & & \end{array}\right)$$

$\sqsupset$ о.н.б. V $\quad \Gamma = E = \Gamma^{-1} \Rightarrow$ все тензоры, которые получены сверткой с такими метр. тензорами будут отличаться друг от друга только расположением верхних и нижних индексов.

Например, $\alpha^{\cdot j}_{ik} = \underbrace{g_{is}}_{=\delta_{is}}\alpha^{si}_{k} = \alpha^{ij}_{k}$ Элементы в обеих матрицах одинаковые.

e, e' о.н.б. V

$T = \underset{\text{ортог.}\to}{T_{e\to e'}}$ $\boxed{T^{-1} = S = T^T}$

$$\alpha'^{i'_1\dots i'_q}_{j'_1\dots j'_p} = \alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\ t^{j_1}_{j'_1}\dots t^{j_p}_{j'_p}\ \overset{t^{i_1}_{i'_1}}{\overset{||}{s^{i'_1}_{i_1}}}\dots \overset{t^{i_q}_{i'_q}}{\overset{||}{s^{i'_q}_{iq}}} = \sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_q=1}^{n}\alpha^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\ t^{j_1}_{j'_1}\dots t^{j_p}_{j'_p}\ t^{i_1}_{i'_1}\dots t^{i_q}_{i'_q}$$

Определение 7. *Все тензоры, которые после преобразования к одному о.н.б. евкл. пр-ва, отличающиеся только расположением верхних и нижних индексов, считаем равными и называем евклидовыми тензорами.*

r *–* $\underset{\overset{||}{p+q}}{\textit{валентность}}$ $\quad \alpha_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q} \qquad T(p,q) \leftrightarrow$ *определяет* $(p+q)$ *евкл. тензор*

$$\boxed{\alpha'_{i'_1\dots i'_r} = \alpha_{i_1\dots i_r} t^{i_1}_{i'_1}\dots t^{i_r}_{i'_r}}$$

10 Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах

10.1 Сопряженный оператор в унитарном и евклидовом пространствах

U, V линейные пространства над полем K

U^*, V^* соответственно, сопряженные пространства к U и V

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U, V)$ линейное отображение.

Определение 1. $\mathcal{A}^* : V^* \longrightarrow U^*$ *называется сопряженным к* $\mathcal{A}$*, если*
$\forall f \in V^* \qquad \boxed{\underbrace{\mathcal{A}^* f}_{g\in U^*}(x) = f(\mathcal{A}x)} \qquad \forall x \in U$

g *линейн. очев., т.к.* $\mathcal{A}$ *и* f *линейны.*

$x \in U \xrightarrow{\mathcal{A}} V \ni \mathcal{A}x \qquad \underset{\text{лин.}}{f} : V \to K$

$\underset{=\mathcal{A}^* f}{g} \in U^* \xleftarrow{\mathcal{A}^*} V^* \ni f \qquad \underset{\text{лин.}}{g} : U \to K$

$\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(U^*, V^*)$ т.е. лиинейное отображение:

$$\begin{matrix}\forall f_1, f_2 \in U^* \\ \forall \lambda \in K\end{matrix} \qquad A^*(\lambda \underset{\forall x\in U}{f_1} + f_2)(x) = (\lambda f_1 + f_2)(\mathcal{A}x) = \underbrace{\lambda f_1(\mathcal{A}x)}_{\lambda(\mathcal{A}^* f_1)(x)} + \underbrace{f_2(\mathcal{A}x)}_{(\mathcal{A}^* f_2)(x)}$$

$$\mathcal{A}^*(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \mathcal{A}^* f_1 + \mathcal{A}^* f_2$$

$\sqsupset U = V \qquad (V, (\cdot,\cdot))$ унит (евклидово пространство) $\qquad \mathcal{A} \in End(V)$

$\mathcal{A}^* \in End(V^*)$

По теореме Рисса: $\forall f \in V^* \leftrightarrow y \in V : \qquad f(x) = (x, y)\ \forall x \in V$

$\sqsupset \quad g = \mathcal{A}^* f \in V^* \leftrightarrow z \in V : \qquad g(x) = (x, z)\ \forall x \in V$

$\Rightarrow \forall x \in V \qquad \underset{(x,z)}{\overset{||}{g(x)}} = \mathcal{A}^* f(x) = f(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, y)$

Т.к. $V \leftrightarrow V^*$ $\qquad \begin{array}{c} \mathcal{A}^* : V \to V \\ g = \mathcal{A}^* f \leftrightarrow z = \mathcal{A}^* y \end{array}$

$g(x) = (x, z)$

$(x, \mathcal{A}^*, y) = (x, z) = (\mathcal{A}x, y)$

Определение 2. $(V, (\cdot, \cdot))$ *унит. (евкл.) пространство,*

$\mathcal{A} \in End(V)$,
$\mathcal{A}^* \in End(V^*)$ – *сопряженный к* $\mathcal{A}$,

$\forall x, y \in V$ $\boxed{(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y)}$

Замечание.

1. В силу теоремы Рисса $\mathcal{A}^*$ $\exists$ и определен единственным образом
2. $\mathcal{A}^*$ определяется операцией $(\cdot, \cdot)$, т.е. поменяем $(\cdot, \cdot) \rightsquigarrow$

поменяется $\mathcal{A}^*$ (в этом случае неоднозначно)

Свойства сопряженного оператора

1. $e_1 \dots e_n$ базис V, $\qquad \mathcal{A}, \mathcal{A}^* \longleftrightarrow \underset{\text{матрицы операторов в базисе } e}{A, A^{*}}$

   $\Gamma = G(e_1 \dots e_n)$ матрица Грама

   $\Rightarrow \boxed{A^{*} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma}}$, где $\underset{\text{сопряж. матрица}}{A^* = \overline{A^T}}$

   Доказательство. $\forall x, y \in V$

   $x, y \leftrightarrow \underset{\text{столбцы координат в базисе } e}{x, y}$ $\qquad (x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y) = (Ax)^T \Gamma \overline{y} = x^T A^T \Gamma \overline{y}$ ∎

   $$\begin{array}{l} || \\ \overline{x^T \Gamma (A^{*} y)} = x^T \Gamma \overline{A^{*}}\,\overline{y} \Leftrightarrow A^T \Gamma = \Gamma \overline{A^{*}} \\ \overline{A^{*}} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma \\ A^{*} = \overline{\Gamma^{-1}}\ \underset{A^*}{\overline{A^T}}\ \overline{\Gamma} \end{array}$$

   Следствие 1. $e_1 \dots e_n$ *о.н.б.* $V \Rightarrow \boxed{A^{*} = A^*}$

   (Очевидно, т.к. $\Gamma = E$*)*

2. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ (т.е. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ взаимно-сопряженные операторы)

   Доказательство. $\forall x, y :$ $\qquad \underset{(y,\mathcal{A}x)}{\overset{||}{(\mathcal{A}x, y)}} = \underset{(\mathcal{A}^* y, x)}{\overset{||}{(x, \mathcal{A}^* y)}} \Leftrightarrow (y, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* y, x) \Rightarrow (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ ∎

3. $\forall \lambda \in K \qquad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$ $\qquad \boxed{(\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \overline{\lambda} \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*}$ (упр.)

4. $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$ $\boxed{(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*}$

Доказательство.
$\forall x, y \in V \qquad (x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^* y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* y) \Leftrightarrow (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}*$ ■

5. $\boxed{\begin{array}{l} Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp \\ Ker\mathcal{A}^* = (Im\mathcal{A})^\perp \end{array}}$

Доказательство.

(a) $\forall x \in Ker\mathcal{A} \;\; \forall y \in V$

$$(x, \underbrace{\mathcal{A}^* y}_{\in Im\mathcal{A}^*}) = (\underset{\underset{\mathbb{0}}{||}}{\mathcal{A}x}, y) = \mathbb{0} \Rightarrow Im\mathcal{A}^* \subseteq (Ker\mathcal{A})^\perp$$

$$dimIm\mathcal{A}^* = rgA^{*} = rg(\overline{\underbrace{\Gamma^{-1}}_{\text{невырожд}} A^T \underbrace{\Gamma}})= rg\overline{A^T} \underset{\substack{\text{комплексифик. вещ. про-ва} \\ rg(v_1 \dots v_k) = rg(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_k) \\ \text{см. глава 7}}}{=} rgA = dimImA =$$

$$= n - \underbrace{defA}_{dimKerA} \underset{L \oplus L^\perp = V}{=} dim(KerA)^\perp \Rightarrow Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp$$

(b) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ вз. сопр. по а) $\begin{array}{l} Im\mathcal{A} = (Ker\mathcal{A}^*)^\perp \\ (Im\mathcal{A})^\perp = Ker\mathcal{A}^* \end{array}$

■

6. Если $\exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow \exists (\mathcal{A}^*)^{-1}$, причем $\boxed{(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*}$

Доказательство.
$\exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \underset{5}{\Leftrightarrow} Im\mathcal{A}^* = (Ker\mathcal{A})^\perp = V \Leftrightarrow Ker\mathcal{A}^* = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow \exists (\mathcal{A}^*)^{-1}$

$$\forall x, y \in V \qquad (x, (\mathcal{A}^*)^{-1} y) = (\underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}}_{\mathcal{E}} x, (\mathcal{A}^*)^{-1} y) = (\mathcal{A}^{-1}x, \underbrace{\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^*)^{-1}}_{\mathcal{E}} y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y)$$

$\underset{\text{по def}}{\Rightarrow} (\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$ ■

7. $\boxed{\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda}) = 0}$

Доказательство. $\sqsupset e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \underset{1}{\Rightarrow} A^{*} = A^*$

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \chi_{A^*}(t) = det(A^* - tE) = det(\overline{A^T} - tE) = \overline{det(A^T - \overline{t}E)} =$$

$$= \overline{det(A - \overline{t}E)} = \overline{\chi_A(\overline{t})} = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\overline{t})} \qquad \begin{array}{c} \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \\ || \\ \overline{\chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda})} \end{array} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda}) = 0$$ ■

8. $\boxed{\begin{array}{ll} \lambda \text{ с.ч., } u \text{ с.в.}\mathcal{A} & \\ & \lambda \neq \overline{\mu} \Rightarrow u \perp v \\ \overline{\lambda} \text{ с.ч., } v \text{ с.в.}\mathcal{A}^* & \end{array}}$

Доказательство.

$$\begin{array}{lllll} & (\mathcal{A}u, v) & & = (u, \mathcal{A}^* v) = (u, \mu v) = \overline{\mu}(u, v) & \\ \mathcal{A}u = \lambda u & & & & \\ & \| & & & \\ \mathcal{A}^* v = \mu v & & & & \\ & (\lambda u, v) & = \lambda(u, v) & \underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{(\lambda - \overline{\mu})}(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0 & \end{array}$$

■

9. $\boxed{\underset{\text{лин. подпр-во}}{L \subset V} \text{ инвариантно относительно } \mathcal{A} \Rightarrow L^{\perp} \text{ инвариантно относительно } \mathcal{A}^*}$

Доказательство. $\forall x \in L \Rightarrow \mathcal{A}x \in L$

$\forall y \in L^{\perp} : (x, y) = 0 \Rightarrow (x, \mathcal{A}^* y) = (\underset{\in L}{\mathcal{A}x}, \underset{\in L^{\perp}}{y}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^* y \in L^{\perp} \Rightarrow L^{\perp}$ инвариантно отн. $\mathcal{A}^*$ ■

10.2 Нормальные опператоры в евклидов. и унит. пространствах

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V) \qquad (V, (\cdot, \cdot))$

Оператор $\mathcal{A}$ называется нормальным, если $\mathcal{A}$ и A^* перестановочны.

$\boxed{\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}} \Leftrightarrow \forall x, y \in V \qquad \boxed{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^* x, \mathcal{A}^* y)}$

Действительно: $\qquad \forall x, y \ \ (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \underset{\leftrightarrow}{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}y) = (x, \mathcal{A}\mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}^* x, \mathcal{A}^* y)$

Свойства нормального оператора:

1. $\mathcal{A}$ нормальный оператор $\Leftrightarrow$ в некотором базисе матрица A(оператор $\mathcal{A}$) перестановчна с матрицой A^{*} (опер. $\mathcal{A}^*$): $AA^{*} = A^{*}A$

   Доказательство. ($\Rightarrow$) очевидно $\qquad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A} * \mathcal{A} \leftrightarrow AA^{*} = A^{*}A$

   ($\Leftarrow$) $\qquad \exists\, e'_1 \ldots e'_n$ базис $V \qquad T_{e \to e'} = T$

   $A' \cdot (A^{*})' = T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}_{E}A^{*}T = T^{-1}A^{*}AT = \underbrace{T^{-1}A^{*}T}_{(A^{*})'}\underbrace{T^{-1}AT}_{A'}$

   $\Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ ■

2. $\boxed{\begin{array}{c} Ker\mathcal{A} = Ker\mathcal{A}^* \\ (Ker\mathcal{A})^{\perp} = Im\mathcal{A} \\ Ker\mathcal{A}^2 = Ker\mathcal{A} \end{array}} \Rightarrow \boxed{V = Ker\mathcal{A} \oplus Im\mathcal{A}}$

   Доказательство.

   (a) $x \in Ker\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \mathbb{0} \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0$

   $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \underset{\text{Норм. опер.}}{=} (\mathcal{A}^* x, \mathcal{A}^* x) \Leftrightarrow \mathcal{A}^* x = \mathbb{0} \Leftrightarrow x \in Ker\mathcal{A}^*$

   (b) 5 свойство сопряж. $\qquad (\underset{\substack{\|\text{св-во 1} \\ Ker\mathcal{A}}}{Ker\mathcal{A}^*})^{\perp} = Im\mathcal{A}$

   (c) $x \in Ker\mathcal{A}^2 \Leftrightarrow \mathcal{A}^2 x = \mathbb{0} \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2 x, \mathcal{A}^2 x) = 0 \overset{\text{норм. оператор}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{A}^* \underbrace{\mathcal{A}x}, \mathcal{A}^* \underbrace{\mathcal{A}x}) = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \mathcal{A}^*(\underset{\in Im\mathcal{A}}{\mathcal{A}x}) = \mathbb{0} \Leftrightarrow \underset{\in Im\mathcal{A}}{\mathcal{A}x} \in Ker\mathcal{A}^* = Ker\mathcal{A}, \ \ Im\mathcal{A} \cap Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \mathbb{0} \Leftrightarrow x \in Ker\mathcal{A}$

$\blacksquare$

3. $\mathcal{A}$ норм. опер. $\Leftrightarrow \forall\lambda \in K \quad \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ норм.

   Доказательство. $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} \qquad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E} \qquad \mathcal{E}^* = \mathcal{E}$

   $$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E}) = \underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}_{\mathcal{A}^*\mathcal{A}} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\mathcal{E}$$

   $$|| \qquad \Rightarrow \mathcal{B} \text{ нормальный оператор} \qquad \blacksquare$$

   $$\mathcal{B}^*\mathcal{B} = (\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\mathcal{E}$$

4. $\boxed{\lambda \text{ с.ч., } u \text{ с.в. } \mathcal{A} \Rightarrow u \text{ с.в. для } \overline{\lambda} \text{ с.ч. } \mathcal{A}^*}$

   Доказательство.

   $\mathcal{A}u = \lambda u \qquad \mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} \qquad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E}$

   $\Updownarrow$

   $\mathcal{B}u = \mathbb{0} \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{B}u, \mathcal{B}u}_{\substack{\text{3 св-во норм. опер.}\\ =(\mathcal{B}^*u, \mathcal{B}^*u)}} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{B}^*u = \mathbb{0} \Leftrightarrow u$ с.в. для $\overline{\lambda}$ опер. $\mathcal{A}^*$ $\blacksquare$

5. $\boxed{\begin{matrix}\lambda \text{ с.ч. } u \text{ с.в. } \mathcal{A} \\ \mu \text{ с.ч. } v \text{ с.в. } \mathcal{A}\end{matrix} \quad \lambda \neq \mu \quad \Rightarrow \quad u \perp v}$, т.е. $\boxed{\underset{\lambda\neq\mu}{V_\lambda \perp V_\mu}}$ для норм. опер.

   Доказательство.

   λ с.ч., u с.в. $\mathcal{A} \qquad \lambda \neq \mu$

   μ с.ч, v с.в. $\mathcal{A}$

   $\Downarrow$ по св-ву сопряж. опер. 4

   $\overline{\lambda}, \overline{\mu}$ с.ч. $\mathcal{A}^*$

   u, v с.в.

   $(\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \overline{\mu}v) = \mu(u, v)$

   $||$

   $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$

   $(\underset{\neq 0}{\lambda - \mu})(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

   $\blacksquare$

Напоминание: $\mathcal{A}$ нормальный оператор $\qquad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$\forall x, y \in V \qquad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$

Теорема 1 (Канонический вид матрицы нормального оператора в унитарном пространстве)**.**

$\mathcal{A} \in End(V), (V(\cdot,\cdot))$ *<u>унитарное пространство</u>*

$\mathcal{A}$ нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ <u>о.н.б.</u> V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь диагональный вид.

$$\Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}, \text{ *при этом*}$$

матрица оператора $\mathcal{A}^*$, очевидно, также будет иметь диагональный вид

$$\overline{\Lambda} = diag(\overline{\lambda_1}, \dots \overline{\lambda_n}) = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Замечание.

1. Очевидно, что о.н.б. состоит из с.в. (попарно-ортог. и нрмиров.) λ соотв. с.ч.
2. $\forall$ нормальный оператор в унитарном пр-ве является о.п.с. Обратное, вообще говоря, неверно. Не всякий о.п.с. имеет именно о.н.б., в котором матрица опер. диагона.

Доказательство.

($\Leftarrow$) очевидно, в о.н.б. $\begin{array}{c} A^{\circledast} = A^* = \overline{A^T} = \overline{\Lambda^T} = diag(\overline{\lambda}_1 \dots \overline{\lambda}_n) \\ A^{\circledast} = AA^{\circledast} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ нормальный оператор} \end{array}$

($\Rightarrow$) $\quad v_1$ с.в. $\mathcal{A}$ соотв. с.ч. $\lambda_1 \Rightarrow v_1$ с.в. $\mathcal{A}^*$ с.ч. $\overline{\lambda}_1$

$L := span(v_1)$ инвариант. отн-но $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^* \Rightarrow L^\perp$ инвар. отн-но $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$

$\Rightarrow \mathcal{A}|_{L^\perp}$ и $\mathcal{A}^*|_{L^\perp}$ останутся взаимно-сопряж. и нормальн.

Докажем м.м.и.: (по $dimV = n$)

1. база: $n = 1$ утв. очев.
2. инд. предпол. $\sqsupset$ верно для $n = k$
3. инд. переход докаэем что тогда верно $n = k + 1$?

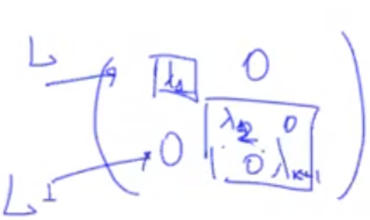
   $L = span(v_1) \qquad V = L \oplus L^\perp \qquad dimL^\perp = k \Rightarrow$ по инд. предпол.

   ($\mathcal{A}|_{L^\perp}$ и $\mathcal{A}^*|_{L^\perp}$ тоже нормальные) $\qquad \exists$ о.н.б. $v_2, v_3, \dots, v_{k+1}$ т.ч.

   матрица $\mathcal{A}$ будет иметь вид $diag(\lambda_1 \dots \lambda_{k+1})$,
   а матрица $\mathcal{A}^*$ – $diag(\overline{\lambda}_2 \dots \overline{\lambda}_{k+1})$

   $L \oplus L^\perp = V = span(\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}}_{\text{попарно ортог. и нормир.}}) \qquad \mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1$

   $\Rightarrow$ матрица будет иметь блочно-диагональный вид



$$= \Lambda = diag(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1})$$
$$A^{\circledast} = \overline{A^T} = \overline{\Lambda}$$

■

Следствие 1.
$\mathcal{A}$ нормальный оператор в унитарном пр-ве $V \Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ \text{с.ч.}}} V_\lambda$ собств. подпр. $\qquad V_\lambda \underset{\lambda \neq \mu}{\perp} V_\mu$

Доказательство. Очевидно из теоремы. ■

Следствие 2. $A_{n \times n}$ $\; a_{ij} \in \mathbb{C} \qquad A^* = \overline{A^T}$

$\forall$ <u>*норм.*</u> *матрицы* A $(AA^* = A^*A)$ $\exists$ <u>*унитарн.*</u> *матрица* T $(T^* = T^{-1})$,

т.ч. $\boxed{T^{-1}AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)}$, *где* λ_i *с.ч. матрицы* A

Доказательство. A в канонич. $\overset{e}{\text{базисе}}$ $\mathbb{C}^n$ – матрица оператора $\mathcal{A}$

$$A^{*} = A^* = \overline{A^T}$$

матрица соотв. $\mathcal{A}^*$

$A^*A = AA^* \Rightarrow \mathcal{A}$ нормальн. $\Rightarrow$ применяем теорему

$\exists$ о.н.б. $v_1 \dots v_n \rightsquigarrow T = T_{e\to v}$

т.к. о.н.б. $\overline{T^T} = T^* = T^{-1}$, т.е. T <u>унитарн.</u> $\Rightarrow$ по формуле преобр. матрицы в новом базисе

$$A' = T^{-1}AT = \underbrace{\overline{T^T}}_{T^*}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$ ∎

$\sqsupset V(\cdot,\cdot)$ <u>евклидово про-во</u>

не все корни хар. мн-на вещ. $\Rightarrow$ не все корни это с.ч. оператора

(<u>см. 7.6</u>) $\quad V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация V $\qquad \forall x, y \in V \leftrightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}}$

$e_1 \dots e_n$ базис $V \to e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$v_1 \dots v_k$ лин. нез. $\Leftrightarrow \overline{v}_1 \dots \overline{v}_k$ лин. нез.

$\overline{z} = x - iy$

Определение 2. *Определим скалярное (псевдоскал.) пр-ве на* $V_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{matrix} \forall x, y \in V & (\leftrightarrow z = x + iy) \\ \forall u, v \in V & (\leftrightarrow \omega = u + iv) \end{matrix} \qquad (z, \omega) = (x + iy, u + iv) \overset{def}{=} (x, u) + (y, v) + i((y, u) - (x, v))$$

<u>Упр.</u>: удовлетворить 1-4 свойства псевдоскал. пр-я $(V_{\mathbb{C}}, (\cdot,\cdot))$ <u>унит. пр-во</u>

<u>Упр.</u>: $\overline{(z_1, z_2)} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2) \qquad \forall z_1, z_2 \in V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \in End(V) \qquad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V)$ $\quad$ <u>продолжение вещ. опер.</u> $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$

$\forall x + iy \in V_{\mathbb{C}} \qquad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

$x, y \in V \qquad e_1 \dots e_n$ базис $V \rightsquigarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A_{\text{вещ.}} \qquad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\text{вещ.}}$

Утверждение. $\boxed{(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}}$

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ о.н.б. $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$(e_k, e_j)_{\mathbb{C}} = (e_k + i \cdot \mathbb{0}, e_j + i \cdot \mathbb{0}) = (e_k, e_j) = \delta_{kj} \Rightarrow$ о.н.б. в $V_{\mathbb{C}}$

в V :	в $V_{\mathbb{C}}$:
$\mathcal{A} \leftrightarrow A$	$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A$
$\mathcal{A}^* \leftrightarrow A^T = A^*$	$(\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A^* = A^T$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A$ в о.н.б. $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* \leftrightarrow \underset{\text{вещ.}}{\overline{A^T}} = A^T = A^*$

$\Rightarrow$ матрицы операторов $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^*$ и $(\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$ совпадают в о.н.б. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ совпадают в любом базисе $\Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$ ∎

Следствие: $\mathcal{A}$ норм. опер. в евклид. $V \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ норм. опер. в $V_{\mathbb{C}}$ (очевидно).

Теорема 2 (Канонический вид матрицы нормального оператора в евклидовом пр-ве).
$\mathcal{A} \in End(V), (V, (\cdot,\cdot))$ *евкл. пр-во*

$\mathcal{A}$ норм. опер. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & & 0 \\ & \begin{pmatrix} \Phi_1 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{pmatrix} \Phi_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \text{ где } \quad \lambda_s \in \mathbb{R} \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$$

При этом матрица оператора $\mathcal{A}^*$, очевидно, также будет иметь блочно-диаг. вид: Λ^T

Замечание. Очевидно, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ собств. ч. $\mathcal{A}$ и первые k векторов базиса – это о. н. с. в.

Доказательство. $(\Leftarrow)$

$$\Lambda\Lambda^T = \Lambda^T\Lambda \text{ (упр.)} \quad \Updownarrow \quad AA^* = A^*A \qquad \text{о.н.б. } A \overset{*}{=} A^* = A^T \text{ т.к. евкл.} \qquad \Rightarrow \mathcal{A} \text{ норм. опер.}$$

$(\Rightarrow)$ $\quad \mathcal{A}$ норм. опер. $\rightarrow \underset{\text{норм. опер.}}{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ продолж. $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}} \underset{\text{сле-вие 1}}{\Leftrightarrow} V_{\mathbb{C}} = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}} V_\lambda \qquad \underset{\lambda \neq \mu}{V_\lambda \perp V_\mu}$

т.е. все корни $\chi_{A_{\mathbb{C}}}$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \qquad$ (см. 7.6)

1. $\underset{\lambda \text{ с.ч.} \mathcal{A}}{\lambda \in \mathbb{R}}$ корень $\underset{u \text{ – с.в.}}{\chi_{\mathcal{A}}}$ $\quad (\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0) \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ с.в. $\omega = \underset{u, v \text{ с.в. для } \mathcal{A}\ (u, v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}))}{u + iv}$?

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\omega = \mathcal{A}u + i\mathcal{A}v = \lambda u + i\lambda v = \lambda(u + iv) = \lambda\omega$

   $\underset{\text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}}{V_\lambda} = (Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}))_{\mathbb{C}} \qquad V_\lambda = \underset{\mathbb{C}}{\overset{}{span}}(v_1 \dots v_k) \qquad v_j$ попарно-орт. и норм.

   $Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \underset{\mathbb{R}}{span}(v_1 \dots v_k)$

2. $\underset{\text{корень } \chi_{\mathcal{A}}}{\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ (\beta \neq 0) \qquad \underset{\text{мн-н с вещ. коэф.}}{\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = 0} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\overline{\mu}) = 0 \qquad \overline{\mu}$ тоже корень, причем той же кр-ти

   $$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \alpha \pm i\beta \text{ с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \alpha + i\beta \text{ с.ч. } z \text{ с.в. } \Rightarrow \alpha - i\beta \ \ \overline{z} \text{ с.в.} \end{array}} \ (7.6)$$

   $u, v \in V \qquad \begin{array}{l} z = u + iv \\ \overline{z} = u - iv \end{array} \underset{\text{св-ва норм. опер.}}{\Rightarrow} (z, \overline{z})_{\mathbb{C}} = 0 \qquad$ т.к. с.в. различных с.ч.

$$(z,\overline{z})_{\mathbb{C}} = (u+iv, u-iv) = (u,u) - (v,v) + i(\overbrace{(u,v) + \underset{\substack{\text{т.к. евкл.}\\ =(u,v)}}{(v,u)}}^{2(u,v)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u,u) &= (v,v) \\ (u,v) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \|u\| = \|v\| \\ u \perp v \end{cases}} \quad \boxed{\begin{matrix} u = Re\ z \\ v = Im\ z \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} u = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ v = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \end{matrix}}$$

$$L = \underset{\text{в } V,\ \mathbb{R}}{span}(\underset{\text{вещ. базис}}{u,v}) \rightsquigarrow L_{\mathbb{C}} = \underset{\text{в } V_{\mathbb{C}},\ \mathbb{C}}{span}(\underset{\text{вещ. базис}}{u,v}) = \underset{\mathbb{C}}{span}(z,\overline{z})$$

$$L_{\mathbb{C}} = (\underset{\mathbb{R}}{span}(u,v))_{\mathbb{C}} = \underset{\mathbb{C}}{span}(z,\overline{z})$$

Т.к. z и $\overline{z}$ с. в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, то $L_{\mathbb{C}}$ и $L_{\mathbb{C}}^{\perp}$ инвар. отн-но $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$

3. $$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\substack{\lambda \text{ вещ.}\\ \text{корни } \chi_{\mathcal{A}}}} V_\lambda \quad \bigoplus_{\substack{(\mu_j,\overline{\mu}_j)\\ \text{пара сопряж.}\\ \text{компл. корней } \chi_{\mathcal{A}}}} L_{\mathbb{C}}^j, \qquad \underset{\text{с.ч. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}}{\mu_j = \alpha_j + i\beta_j} \rightsquigarrow \underset{\text{с.в. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}}{z_j = u_j + iv_j} \qquad \begin{matrix} u_j = Re\ z_j \\ v_j = Im\ z_j \end{matrix}$$

$$L_{\mathbb{C}}^j = \underset{\mathbb{C}}{span}(u_j, v_j)$$

$$\Rightarrow V_{\mathbb{C}} = \underset{\mathbb{C}}{span}\left(\begin{matrix} \text{попарно ортог. } V_\lambda \perp V_\mu \quad \lambda \neq \mu \\ \dots \quad \underset{\substack{\text{св-ва вещ. } \mathcal{A}\\ \text{для } \lambda \text{ вещ.}}}{v_\lambda} \quad \dots, \dots u_j, v_j, \dots \\ \text{попарно-ортог. } (u_j \perp v_j) \end{matrix} \right)$$

$\Rightarrow$ матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в этом базисе имеет блочно-диагон. вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & & 0 \\ & \boxed{\Phi_1} & & \\ 0 & & \boxed{} & \\ & & & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix} \qquad \Phi_j : \mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_{L_{\mathbb{C}}^j} \overset{\text{н.у.о. } \mu_j = \mu}{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(u) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)$$

$$= 1/2\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\ z + 1/2\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\ \overline{z} = 1/2\mu\ z + 1/2\overline{\mu}\ \overline{z} = Re(\mu z) = Re((\alpha+i\beta)(u+iv)) = \alpha u - \beta v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) = \frac{\mu z - \overline{\mu z}}{2i} = Im\ \mu z = \beta u + \alpha v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Phi$

$$\rightsquigarrow \Phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \left(\text{н.у.о. } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad z \leftrightsquigarrow \overline{z} \right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_{L_{\mathbb{C}}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Базис у нас получился ортогональный, теперь осталось его отнормировать.

$\|u\| = \|v\|$
$1 = \|z\|^2 = (z,z) = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = \|v\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

z и $\overline{z} \rightsquigarrow \sqrt{2}z$ и $\sqrt{2}\overline{z} \rightsquigarrow \begin{matrix} u \rightsquigarrow \sqrt{2}u \\ v \rightsquigarrow \sqrt{2}v \end{matrix} \to \begin{matrix} \|u\| = 1 \\ \|v\| = 1 \end{matrix}$

Матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в этом базисе вез. $\Rightarrow$ то и у $\mathcal{A}$ такая же матрица

■

Следствие 1. $A_{n\times n}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $A^* = A^T$

$\forall$ норм. матрицы A $(AA^T = A^TA)$ $\exists$ ортог. матрица T $(T^T = T^* = T^{-1})$

$$\textit{т.ч.} \qquad T^{-1}AT = T^TAT = \Lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} & & 0 & \\ & \boxed{\Phi_1} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_s \text{ с.ч. } \mathcal{A}$$
$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$
$$\mu_j = \alpha_j + i\beta_j \quad \text{компл. сопряж.}$$
$$\overline{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j \quad \text{корни хар. мн-на } A$$

Доказательство. См. док-во следствия 2 к т-ме о кан. виде в унит. пр-ве

$T = T_{e\to v}$ v о.н.б. в евкл. пр-ве T – ортогон. $T^{-1} = T^T$ ■

10.3 Самосопряженные операторы. Изометрические операторы

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V)$ $(V, (\cdot,\cdot))$ *Унит. (евкл.)*

$\mathcal{A}$ называется самосопряженными, если $\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}^*}$

т. е. $\forall x, y \in V$ $\boxed{(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)}$

Унит. пространство – эрмитов оператор
Евклидово пространство – симметричный оператор

Очевидно, $\mathcal{A}$ – самосопр., то $\mathcal{A}$ – нормальный
$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

Свойства:

1. $\mathcal{A}$ самосопр. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., т.ч. $A = \overline{A^T} = A^* \begin{pmatrix} A \text{ – эрмитова матрица (компл.)} \\ A \text{ – симм. матрица (вещ.)} \end{pmatrix}$

Доказательство. Свойство 1 (?) для сопряж. опер.

$\forall$ о.н.б. $\begin{matrix} \mathcal{A}^* \leftrightarrow \mathcal{A}^* = \overline{A^T} \\ \mathcal{A} \leftrightarrow A \end{matrix} \Leftrightarrow A = A^* = \overline{A^T}$ ■

2. $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}$ самосопр. $\Rightarrow \underset{\text{самосопр. опер.}}{(\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B})} \quad \forall \underline{\underline{\lambda \in \mathbb{R}}}$ (упр.)

3. $\left. \begin{matrix} \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ самосопр.} \\ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \underset{\text{перестанов.}}{\mathcal{B} \circ \mathcal{A}} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ самосопр. (упр.)

4. $\mathcal{A}$ самосопр. $\Leftrightarrow$ все корни характер. многочлена χ веществ. (!)

   Доказательство.

   (a) $(V(\cdot,\cdot))$ унитарн. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow$ нормальн. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., т.ч.
   матрица оператора $\mathcal{A} = \quad \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ λ_i с.ч. $\mathcal{A}$

   $\mathcal{A}^* \leftrightarrow \overline{\Lambda} = diag(\overline{\lambda}_1 \dots \overline{\lambda}_n)$

   $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \Lambda = \overline{\Lambda} \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda_i} = \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$ с.ч. $\mathcal{A} \underset{\text{унит.}}{\Leftrightarrow}$ все с.ч. λ_i корни χ

   (b) $(V, (\cdot,\cdot))$ евклид. $\quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ продолж. $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$

   $\Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \underset{\mathcal{A}=\mathcal{A}^*}{\overset{}{=}} \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ самосопр. $\Leftrightarrow$ по п. а) Все корни $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ вещ., $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow$

   $\Rightarrow$ все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещ.

■

5. $\underset{\text{лин. подпр.}}{L} \subset V$ инвар. отн. $\mathcal{A} \Rightarrow L^{\perp}$ инвар. отн. $\mathcal{A}$

   Доказательство. см. свойства сопряж. опер. ■

Теорема 1 (Канонич. вид матрицы самосопряж. оператора)**.**
$\mathcal{A} \in End(V)$, $V(\cdot,\cdot)$ *унит. (евкл.)*

$\mathcal{A}$ самосопр. опер. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. V такой, что матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ будут иметь в нем диагональынй вид $\Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Очевидно, что базис состоит из о.н. с. в. A $(\mathcal{A}^*), \lambda_i \in \mathbb{R}$ соотв. с.ч. $\mathcal{A}$ $(\mathcal{A}^*)$

Доказательство. Т.к. $\mathcal{A}$ самосопр. $\Rightarrow \mathcal{A}$ норм. $\Rightarrow$ по теореме о кан. виде матрицы норм. опер.

Унит: $\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) \qquad \lambda_i$ с.ч. ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ св-во 4)

Евкл: $\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) \qquad \lambda_i$ с.ч. ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ св-во 4), блоков Φ_j не будет

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ матрицы опер. совпад. ■

Следствие 1. *$\mathcal{A}$ самосопр. опер. $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} V_\lambda \quad \begin{matrix} \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ V_\lambda \perp V_\mu \ \lambda \neq \mu \end{matrix} \qquad V_\lambda$ собств. подпр.*

Следствие 2. *$\forall$ симм. (эрмит.) матрицы A $(A = A^*)$*

$\exists$ ортог. (унит.) матрица T $(T^* = T^{-1})$, т.ч.

A симм. $(A = A^T)$: $\qquad T^{-1}AT = T^TAT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

A эрмитова $(A = \overline{A^T})$: $\qquad T^{-1}AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots {}_n) \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$ с.ч.A

Доказательство. $T = T_{e\to v}$ $\begin{matrix} e - \text{канон. базис } \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \\ v - \text{о.н.б. из с.в.} \end{matrix} \Rightarrow T$ ортог. (унит.) ■

Определение 2. *Невырожденный линейный оператор $Q \in End(V)$, $(V, (\cdot,\cdot))$ унит. (евкл.) называется изометрическим, если $\boxed{Q^* = Q^{-1}}$, т.е.*

$\forall x, y \in V$ $\boxed{(Qx, Qy) = (x, y)}$

$((Qx, Qy)) = (x, \underbrace{Q^*Q}_{\mathcal{E}}\, y) = (x, y)$

"Сохраняет расстояние и углы"

унитар. – Q унитарный оператор
евкл. – Q ортогон. оператор.

Очевидно, что Q изометрич. $\Rightarrow Q$ нормальный: $QQ^* = QQ^{-1} = \mathcal{E} = Q^{-1}Q = Q^*Q$

Свойства изометр. оператора:

1. Q изометр. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. $\boxed{Q^{-1} = \overline{Q^T} = Q^*}$, где Q матрица оператора $\mathbb{Q}$ в этом базисе

   (т.е. Q унит. (компл.) ортог. (вещ.) матрица)

   Доказательство. Свойство матрицы сопряж. опер.

   $\forall$ о.н.б. $Q^* = \overline{Q^T} = Q^{-1}$ ■

2. $\mathbb{Q}$ изометр. $\Leftrightarrow \mathbb{Q}$ переводит о.н.б. в о.н.б.

   Доказательство. $(\Rightarrow)$ e о.н.б. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$
   $\sqsupset v_i = \mathbb{Q}e_i$ $i = 1 \dots n$

   $(v_i, v_j) = (\mathbb{Q}e_i, \mathbb{Q}e_j) \underset{\text{изометр.}}{=} (e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow v$ о.н.б

   $(\Leftarrow)$$e$ и e' о.н.б. V, т.ч. $e'_i = \mathbb{Q}e_i$ $\forall x, y \in V$ $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i$ $y = \sum\limits_{y=1}^n y_j e_j$

   $(\mathbb{Q}x, \mathbb{Q}y) = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n x_i \overline{y}_j\, (\mathbb{Q}e_i, \mathbb{Q}e_j) = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n x_i \overline{y}_j \overset{=\delta_{ij}}{(e'_i, e'_j)} = \sum\limits_{i=1}^n x_i \overline{y}_i = (x, y) \Rightarrow \mathbb{Q}$ изометр. ■

3. $\mathbb{Q}, R$ – изометр. $\Rightarrow \mathbb{Q} \circ R$ изометр. (упр.)
4. $\mathbb{Q}$ изометр. $\Rightarrow \mathbb{Q}^{-1}$ изометр. (упр.)
5. $\boxed{\mathbb{Q} \text{ изометр.} \Leftrightarrow \text{ все корни } \chi \text{ по модулю равны } 1}$

   Доказательство.

   (a) $(V, (\cdot,\cdot))$ унит. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^{-1} \Rightarrow \mathbb{Q}$ норм. опер. $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., т.ч. матрица $\mathbb{Q}$ имеет диагон. вид $\Lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ λ_i с.ч. (все корни χ)

   причем матрица $\mathbb{Q}^* = \overline{\Lambda} = (\overline{\lambda}_1 \dots \overline{\lambda}_n)$

   $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^{-1} \Leftrightarrow \overline{\Lambda} = \Lambda^{-1} \Leftrightarrow \underbrace{\overline{\Lambda}\Lambda} = \underbrace{E}$

   $\underbrace{\lambda_i \overline{\lambda}_i}_{|\lambda_i|^2} = 1 \Leftrightarrow |\lambda_i| = 1$

(b) $(V,(\cdot,\cdot))$ евклидово про-во

$\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ продолж. $\mathbb{Q}$ на $V_{\mathbb{C}}$ $\quad (\chi_{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathbb{Q}})$

$\Rightarrow (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^* = (\mathbb{Q}^*)_{\mathbb{C}} = (\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}$
$(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}} = (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1}$ $\quad$? Можно ли переставить?

$\mathbb{Q}$ невырожд. $\Leftrightarrow \underset{\neq 0}{det}\ \mathbb{Q} = \chi_{\mathbb{Q}}(0) = \chi_{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}}(0) = det\ \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ невырожд.

Проверим, что $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \cdot (Q^{-1})_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}$ $\quad$?

$\forall x, y \in V \quad \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}(x+iy) = \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}(\underset{\text{вещ.}}{\mathbb{Q}^{-1}x} + i\underset{\text{вещ.}}{\mathbb{Q}^{-1}y}) =$

$= \underbrace{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}}_{\mathcal{E}} x + i \underbrace{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}}_{\mathcal{E}} y = x + iy \Rightarrow (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1} = (\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}$
Аналогично: $(\mathbb{Q}^{-1})_{\mathbb{C}}\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}$

$(\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^* = (\mathbb{Q}_{\mathbb{C}})^{-1} \Rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ изометр. на $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow$ по a) все корни χ по модулю $= 1$

∎

Замечание. V евкл. $\qquad$ $\mathbb{Q}$ – ортог. оператор $\Rightarrow$ все с.ч. $\mathbb{Q} = \pm 1$

6. $\underset{\text{лин. подпр.}}{L} \subset V$ инвар. отн. $\mathbb{Q} \Rightarrow L^{\perp}$ инвар. отн. $\mathbb{Q}$

Доказательство. $\forall x \neq \mathbb{0} \in L$, т.к. $\mathbb{Q}$ невырожд. $\Rightarrow \exists \underset{\neq \mathbb{0}}{z} \in L : x = \mathbb{Q}z$

$\forall y \in L^{\perp}$ $(x, \mathbb{Q}y) = (\mathbb{Q}z, \mathbb{Q}y) \underset{\text{изометр.}}{=} (\underset{\in L}{z}\ \underset{\in L^{\perp}}{y}) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}y \in L^{\perp} \Rightarrow L^{\perp}$ инвариант отн. $\mathbb{Q}$ ∎

Теорема 2 (канонич. вид матрицы унитарного оператора)**.**
$(V,(\cdot,\cdot))$ унит. $\mathbb{Q} \in End(V)$, невырожд.

$\mathbb{Q}$ унитарный оператор (изометр.) $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б., т.ч. матрица оператора $\mathbb{Q}$ в этом базисе будет иметь диагональный вид: $\Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, где $\lambda_j \in \mathbb{C}$ и $|\lambda_j| = 1$ $\forall j = 1 \dots n$

при этом матрица $\mathbb{Q}^*$ будет иметь также диагон. вид: $\Lambda^{-1} = diag(1/\lambda_1 \dots 1/\lambda_n) = \overline{\Lambda^T} = \Lambda^*$

Доказательство. См. теорему о канон. виде матрицы норм. опер.
$\mathbb{Q}$ унит. (норм. + все корни хар. мн. χ по модулю $= 1$) $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. матрица $\mathbb{Q}$ $= \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

λ_i с.ч. $\mathbb{Q}$ (корни хар. мн-на)

$\forall i$ $\lambda_i \neq 0$ (т.к. $\mathbb{Q}$ невырожд. $\overset{\neq 0}{det}\ \mathbb{Q} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \cdot (-1)^n$) $\qquad \Lambda^* \underset{\text{т.к. } \mathbb{Q} \text{ унит.}}{=} \Lambda^{-1} = diag(\frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_n})$ ∎

Следствие 1. *$\mathbb{Q}$ унит. опер. $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \underset{\text{собств. подпр.}}{V_\lambda}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda| = 1$ $\qquad V_\lambda \perp V_\mu$ $\lambda \neq \mu$*

Следствие 2. *$\forall$ унит. матрицы Q $(Q^* = Q^{-1})$ $\exists$ унит. матрица T $(T^* = T^{-1})$*

т.ч. $T^{-1}QT = \overline{T^T}QT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

где $\lambda_i \in \mathbb{C}$ с.ч. Q, причем $|\lambda_i| = 1$

Все док-ва см. раньше (для самосопр., для норм.)

Теорема 3 (Канонич. вид матрицы ортог. оператора)**.**
$(V,(\cdot,\cdot))$ <u>*евклидово*</u> $\qquad \mathbb{Q} \in End(V)$, <u>*невырожд.*</u>

$\mathbb{Q}$ ортог. оператор (изометр.) $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. V такой, что матрица оператора $\mathbb{Q}$ в этом базисе будет иметь блочно-диагон. вид.

где $\lambda_i = \pm 1$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\Phi_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\Phi_m} \end{pmatrix} \qquad \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1 \end{matrix}$$

Причем, матрица оператора $\mathbb{Q}^*$ будет тоже иметь блочно диагон. вид

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} & & & \\ & \boxed{\Phi_1^T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\Phi_m^T} \end{pmatrix} = \Lambda^T \qquad \Phi_j \Phi_j^T = E \quad (\Phi_j^{-1} = \Phi_j^T)$$

Доказательство. см. теорему о канон. виде матрицы норм. опер. в евкл. про-ве

$\mathbb{Q}$ ортог. $\Leftrightarrow \mathbb{Q}$ (нормал. + все корни хар. мн-на χ по модулю $= 1$) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{с.ч. } \lambda_s = \pm 1 \\ \text{компл. корни } |\alpha_j + i\beta_j| = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} = 1 \end{matrix} \Rightarrow \Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

■

Замечание. $\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1 \qquad \alpha_j = \cos\phi \quad \beta_j = \sin\phi$

$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \leftrightarrow$ поворот соотв. коорд пл-ти на угол $\;'' - \phi''$

$\boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \leftrightarrow$ поворот на угол π

$-1 \leftrightarrow$ "отражение" относительно соотв. коорд. пл-ти

$\mathbb{Q}$ ортог. преобразование $\equiv$ послеовательные повороты и отражения относительно коорд. осей

Следствие 1. $\forall$ <u>*ортог.*</u> *матрицы Q $(Q^T = Q^{-1})$*

$\exists$ ортог. матрица T $(T^T = T^{-1})$, т.ч.

$$T^{-1}QT = T^TQT = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{smallmatrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\Phi_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\Phi_{n_1}} \end{pmatrix}$$

где ± 1 *с.ч.* Q

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \qquad \alpha_j \pm i\beta_j \text{ компл. корни } \chi_{\mathbb{Q}} \qquad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$$

10.4 Разложения матриц: LU, Холецкого, QR и полярное

Определение 1.

$\underset{\text{'low'}}{L} = (l_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$ *называется* <u>*нижняя (левая) треугольная матрица*</u>

Если $l_{ii} = 1\ \forall i = 1 \dots n$, *то добавляют* <u>*унитреугольная*</u>

$\underset{\text{'up'}}{U} = (u_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix}$ *называется* <u>*верхняя (правая)*</u> *треуг. матрица.*

Если $u_{ii} = 1\ \ \forall i = 1 \dots n$, *то добавляют* <u>*унитреугольная*</u>.

Определение 2. $A_{n\times n} = (A_{ij})$ $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ & \dots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$ <u>*угловая матрица*</u>

$\triangle_k = det A_k$ – <u>*угловой минор*</u> A $\qquad \triangle_1 = a_{11} \qquad \triangle_n = det A$

Теорема 1 (LDU – разложение $A_{n\times n}$)**.**

$\forall k = 1 \dots n-1 \qquad \triangle_k \neq 0 \Leftrightarrow$ $\exists! L$ *унитреугольная*

$\exists! U$ *унитреуг.*

$\exists! D = diag(d_1 \dots d_n),\ d_i \neq 0\ \ i = 1 \dots n-1$

$$\boxed{A = LDU}$$

$$A = \overset{\text{унитреуг.}}{LDU} \quad = \quad \left.\begin{matrix} \underbrace{LD}_{\tilde{L}\text{ нижнетреуг.}}U = \tilde{L}U \\ L\underbrace{DU}_{\tilde{U}\text{ верхнетреуг.}} = L\tilde{U} \end{matrix}\right\} \text{ – } LU \text{ разложение (не единств. образом определяется)}$$

Теорема 2 (LDU – разложение)**.**

$\forall k = 1 \dots n-1 \qquad \triangle_k \neq 0 \Leftrightarrow$ $\exists! L$ *унитарная нижняя матрица*

$\exists! U$ *унитарная верхняя матрица*

$$\exists! D = diag(\alpha_1 \dots \alpha_k)$$

$$\boxed{A = LDU} \qquad \alpha_i \neq 0 \;\; i = 1 \dots n-1$$

$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{нижнетр.}}}{L} \;\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{верхнетр.}}}{U}$ *неоднозначн. (не обязательно унитреугольные)*

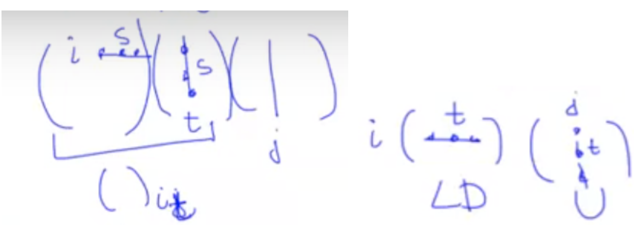
Доказательство. $(\Leftarrow)$

$A = LDU$

$$detA = \underset{=1}{detL}\; detD\; \underset{=1}{detU} = d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n$$

Докажем: $\begin{matrix} A_k = L_k D_k U_k \\ \triangle_k = detA_k \end{matrix}$ $\qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$

$$A = LDU \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \underset{\substack{|| \\ 0 \\ s > i}}{l_{is}} \; d_{st} \; \underset{\substack{|| \\ 0 \\ t > j}}{u_{tj}} = \underset{\substack{1 \le i, j \le k \\ \Updownarrow \\ (L_k D_k U_k)_{ij}}}{\sum_{s=1}^{i} \sum_{t=1}^{j} l_{is} d_{st} u_{tj}}$$



$$\triangle_k = detA_k = \underset{=1}{detL_k}\; detD_k\; \underset{=1}{detU_k} = detD_k = d_1 \dots d_k$$

$\triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \qquad d_k \neq 0$

$\boxed{d_k = \dfrac{\triangle_k}{\triangle_{k-1}}}$ $k = 1 \dots n$ $\quad \triangle_0 = 1$

$(\Rightarrow) \underset{\neq 0}{\triangle_1} \dots \underset{\neq 0}{\triangle_{n-1}}$

<u>М.м.и.</u>

1. база $n = 1$ $\triangle_1 \neq 0 \qquad a_{11} = \underset{=L}{1} \cdot \underset{=d_1}{a_{11}} \cdot \underset{=U}{1}$
2. Инд. предпол: $\sqsupset$ верно для $n = k \qquad \triangle_1 \neq 0 \dots \triangle_k \neq 0$

   $A_k = L_k D_k U_k$ единств. образом $D_k = diag(d_1 \dots d_k)$

   $d_i \neq 0 \;\; i = 1 \dots k$
3. Инд. переход: $n = k+1$?

   $A_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_k & b_{k+1} \\ \hline C_{k+1} & d_{k+1\;k+1} \end{array}\right) \qquad L_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} L_k & 0 \\ \hline x & 1 \end{array}\right) \qquad U_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} U_k & y \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

   $D_{k+1} = diag(d_1 \dots d_k d_{k+1})$

$\underline{A_{k+1} = L_{k+1}D_{k+1}U_{k+1}}$ $\quad x, y, d_{k+1}$? и единств?

$$A_{k+1} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} L_k & 0 \\ \hline x & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} D_k & 0 \\ \hline 0 & d_{k+1} \end{array}\right)}_{\left(\begin{array}{c|c} L_kD_k & 0 \\ \hline xD_k & d_{k+1} \end{array}\right)}\left(\begin{array}{c|c} U_k & y \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{L_kD_kU_k} & L_kD_ky \\ \hline xD_kU_k & xD_ky + d_{k+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{A_k} & b_{k+1} \\ \hline c_{k+1} & a_{k+1\ k+1} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{L_kD_k}^{\text{невырожд}}\ y = b_{k+1} \\ x\ \underbrace{D_kU_k}_{\text{невырожд}} = c_{k+1} \\ xD_ky + d_{k+1} = a_{k+1k+1} \end{cases}$$

$detD_k = d_1 \dots d_k$

$$d_k = \frac{\triangle_k}{\triangle_{k-1}} \neq 0 \qquad \Rightarrow \begin{array}{c} \exists! y = (L_kD_k)^{-1}b \\ \exists! x = c_{k+1}(D_kU_k)^{-1} \end{array} \rightsquigarrow \exists! d_{k+1} = a_{k+1\ k+1} - xD_ky$$

$$\underbrace{\triangle_1\triangle_2 \dots \triangle_{n-1}}_{\neq 0} \ \underset{?}{\triangle_n} \qquad \text{проще } d_{k+1} = \frac{\triangle_{k+1}}{\triangle_k}$$

■

Следствие 1. $\boxed{A_{n\times n} = A^*}$ *самосопряженная матрица (симметр., эрмит)*

$\forall k = 1 \dots n-1 \ \ \triangle_k \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists! L$ *унитреуг. нижняя матрица:* $\boxed{A = LDL^*}$

$\exists! U$ *унитреугольная верхняя матрциа:* $\boxed{A = U^*DU}$ $\qquad \boxed{B^* = \overline{B}^T}$

где $D = diag(d_1 \dots d_n)$ $\quad \begin{array}{c} d_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \\ d_k \neq 0 \ \ k = 1 \dots n-1 \end{array}$

Доказательство.

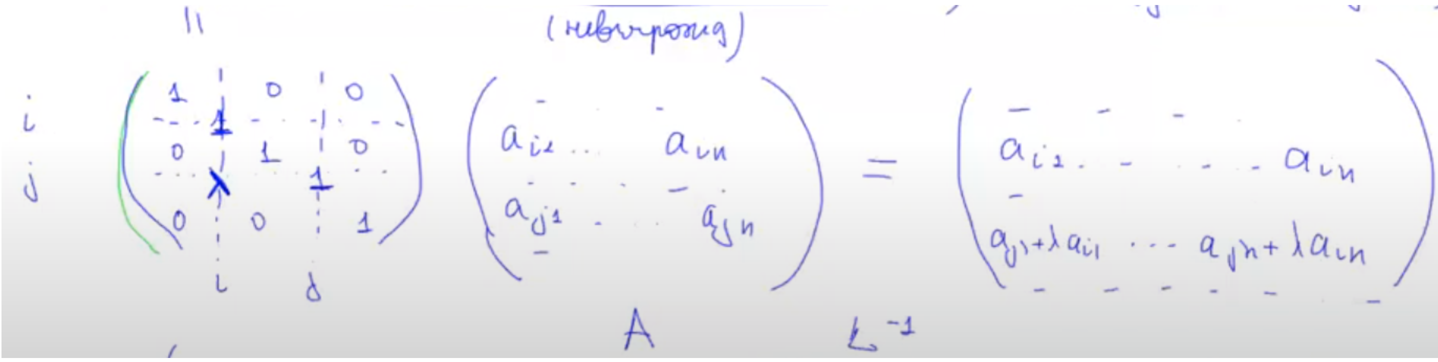
$$\begin{array}{ccl} A & = & LDU \\ \| & & \\ A^* & = & U^*D^*L^* = \underbrace{\overline{U}^T}_{\text{нижняя унитреуг.}} \ \overline{D} \ \underbrace{\overline{L}^T}_{\text{верхняя унитр.}} \end{array}$$

Т.к. разложение единственно $\begin{array}{c} L = \overline{U}^T = U^* \\ U = \overline{L}^T = L^* \end{array}$ $\quad D = \overline{D} \Rightarrow d_k \in \mathbb{R}$ ■

Алгоритм построения LU – разложения

$$\triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \qquad (A|E) \quad \underset{\substack{\text{метод} \\ \text{гаусса} \\ \text{"прямой ход"}}}{\rightsquigarrow} \quad \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{matrix}}_{DU} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}} \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \text{покажем: } L, D, U \\ \text{из теоремы} \end{array}$$

$L_{ij}(\lambda)$ $\underline{\text{элемент нижней унитреуг}}$; $L_{ij}^{-1}(\lambda) = L_{ij}(-\lambda)$
$\|$



$\underbrace{(L_m \dots \underbrace{L_1 A}}_{\text{"прямой ход"}} = DU \quad \Big| \quad \overbrace{L_m \dots L_1 E}^{L^{-1}})$

$L_m \dots L_1 = L^{-1}$

$(L_m \dots L_1)^{-1} = L$

$\boxed{L_1^{-1} \dots L_m^{-1} = L}$

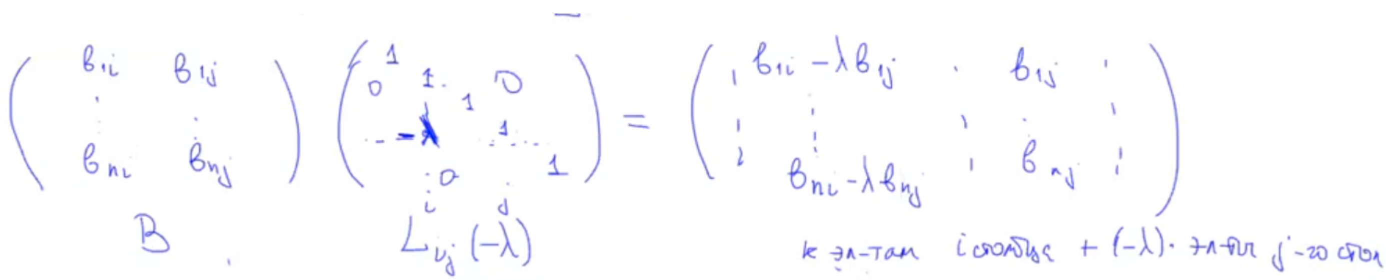
L_i – элемент нижнетреугольн.

$L_m \dots L_1 A = DU$

$L = L_1^{-1} \dots L_m^{-1}$

$$\boxed{LDU = L_1^{-1} \underbrace{\dots \underbrace{L_m^{-1} L_m}_{E} \dots}_{E} L_1 A = A}$$

$(A|E) \rightsquigarrow (\underbrace{L_m \dots L_1}_{DU} A | \underbrace{E L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_m^{-1}}_{L})$



Алгоритм: (к j-й стр. $A + (\lambda) \cdot i$ стр. A | i столб. $+(-\lambda) \cdot j$ столб)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad LDU?(LU)$

$\triangle_1 = 3 \qquad \triangle_2 = 5 \qquad \triangle_3 = -4 - 4 - 12 - 3 = -23 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & -23/5 \end{matrix}}_{DU} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -7/5 & 1 \end{matrix}}_{L} \end{array}\right)$$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = diag(\underset{=\triangle_1}{3}, \underset{=\frac{\triangle_2}{\triangle 1}}{5/3}, \underset{=\frac{\triangle_3}{\triangle_2}}{-23/5})$

$$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -7/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & -23/5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=U} = LDL^* = U^*DU$$

$A = A^*$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$ $\quad V$ *унит. (евкл.)* $\quad (\cdot, \cdot)$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ *самосопр.*

— *положит.(отрицат.) определен*, *если* $\forall u \neq \mathbb{0} \quad (\mathcal{A}u, u) \underset{(<0)}{>} 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \underset{(<0)}{>} 0$

— *положит. (отриц.) полуопред.*, *если* $\forall u \neq \mathbb{0} \quad (\mathcal{A}u, u) \underset{\leq 0}{\geq} 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \underset{\leq 0}{\geq} 0$

— *неопредел.*, *если* $\exists u, v : \quad \begin{matrix} (\mathcal{A}u, u) > 0 \\ (\mathcal{A}v, v) < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \mathcal{A} <> 0$

Замечание.

1. $\mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}u, u) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow u = 0$

   если $u = 0$, то очевидно, $(\mathcal{A}u, u) = 0$
2. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \quad (\mathcal{A}u, u) = (u, \mathcal{A}u)$
3.

   Утверждение.
   $\mathcal{A} \underset{(<0)}{>} 0 \Leftrightarrow$ *все с.ч.* $\lambda \underset{(<0)}{>} 0$

   $\mathcal{A} \underset{(\leq 0)}{\geq} 0 \Leftrightarrow$ *все с.ч.* $\lambda \underset{(\leq 0)}{\geq} 0$

   $\mathcal{A} <> 0 \Leftrightarrow \exists$ *с.ч.* $\lambda, \mu : \begin{matrix} \lambda > 0 \\ \mu < 0 \end{matrix}$

   Доказательство. $\mathcal{A}$ самосопр. $\Leftrightarrow \underset{\lambda \text{ вещ.}}{\mathcal{A}}$ о.п.с. $\quad V = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ \text{вещ. с.ч.}}} \underset{\text{собств. подпр.}}{V_\lambda} \quad \underset{\lambda \neq \mu}{V_\lambda \perp V_\mu}$

   $\forall u \in V : u = \sum\limits_\lambda \overset{\in V_\lambda}{v_\lambda}$

   $(\mathcal{A}u, u) = (\sum\limits_\lambda \mathcal{A}v_\lambda, \sum\limits_\mu v_\mu) = \sum\limits_\lambda \sum\limits_\mu (\lambda v_\lambda, v_\mu) = \sum\limits_\lambda \sum\limits_\mu \lambda \underset{=0 \ \lambda \neq \mu}{(v_\lambda, v_\mu)} = \sum\limits_\lambda \lambda \underset{>0 \text{ если } v_\lambda \text{ с.в.}}{(v_\lambda, v_\lambda)}$

   $(\Leftarrow) \quad \sqsupset$ все $\lambda > 0 \underset{u \neq \mathbb{0}}{\Rightarrow} (\mathcal{A}u, u) = \sum \lambda \overset{\geq 0}{(v_\lambda, v_\lambda)} > 0 \qquad$ т.к. $\exists \lambda_0 : \quad \underset{>0}{\lambda_0} \underset{>0}{(v_{\lambda_0}, v_{\lambda_0})} > 0 \quad v_{\lambda_0}$ с.в. $\neq \mathbb{0}$

   $(\Rightarrow) \quad \underset{\mathcal{A}>0}{\overset{\neq \mathbb{0}}{v_\lambda}}$ с.в. $\quad \underset{>0}{(\mathcal{A}v_\lambda, v_\lambda)} = \lambda \underset{>0}{(v_\lambda, v_\lambda)} > 0 \Rightarrow \lambda > 0$ ∎
4. Все def из замечаний 1, 2, 3 переносятся на самосопряженные матрицы (симм., эрмитовы) $A = A^*$

   $\forall x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

   $$\begin{matrix} (Ax, x) & = & x^T A^T \overline{x} \\ || & & \\ (x, Ax) & = & x^T \, \overline{A} \, \overline{x} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A > 0 \ \ \forall x \neq 0 \\ x^T A^T \overline{x} > 0 \\ || \\ x^T \overline{A} \overline{x} \text{ и т.д.} \end{matrix}$$

Теорема 3 (разложение Холецкого или метод квадратного корня).

$\forall A > 0$, *т.ч.* $\triangle_k \neq 0\ \ \forall k = 1 \dots \underline{\underline{n}}$ $\quad \begin{matrix} \exists! L \text{ нижнетреуг. (причем } l_{ii} > 0) \\ \exists! U \text{ верхнетруг. (причем } u_{ii} > 0) \end{matrix}$

$\boxed{A = L^* = U^* U}$

Доказательство. $A = A^* \underset{\text{по следствию}}{\Rightarrow} \exists!\ \ A = \underset{\text{унитреуг. нижн.}}{\overset{}{L_0}} \quad DL_0^* = U_0^* D \quad \underset{\text{унитр. верх.}}{U_0}$

$\forall x \neq \mathbb{0} \qquad 0 < (Ax, x) = (L_0 D L_0^*, x) = (D \underbrace{L_0^*}_{y}, \underbrace{L_0^* x}_{y}) = \underset{D = diag(d_1 \dots d_n)}{(Dy, y)} = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$

$$\left.\begin{matrix} L_0 \text{ невырожд.} \\ \Rightarrow\ L_0^* \text{ невыр.} \\ x \neq \mathbb{0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{=y}{L_0^* x} \neq \mathbb{0}$$

Будем брать $y = e_j$ канон. базиса $\Rightarrow d_j > 0 \quad j = 1 \dots n \Rightarrow$

$\Rightarrow D = \sqrt{D}\sqrt{D} \qquad \sqrt{D} := diag(\sqrt{d_1} \dots \sqrt{d_n})$

$A = \underbrace{L_0\sqrt{D}}_{L}\underbrace{\sqrt{D}L_0^*}_{L^*} = \underbrace{U_0^*\sqrt{D}}_{U^*}\underbrace{\sqrt{D}U_0}_{U} \qquad L^* = (L_0\sqrt{D})^* = (\sqrt{D})^* L_0 = \sqrt{D}L_0^*$

$l_{ii} = \sqrt{d_i} > 0 \qquad u_{ii} = \sqrt{d_i} > 0 \qquad$ Аналогично U^*

$$(\sqrt{D}U_0)^* = U_0^*\sqrt{D}$$

■

Теорема 4 (QR разложение).

$\forall$ *невырожд* $\underset{a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})}{A_{n\times n}}$ $\exists$ *унитарн (ортог)* Q *и верхн треугольн. матрица* $\underset{\text{(правая "Right")}}{R}$: $\quad \boxed{A = QR}$

Доказательство. A невырожд. $\Leftrightarrow rg(\underset{\text{лин. нез. столбцы}}{A_1 \dots A_n}) = n \qquad A_k \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

$A_1 \dots A_n \underset{\text{Г-Ш нормируем}}{\rightsquigarrow} \underbrace{q_1 \dots q_n}_{\text{попарно-ортог. и нормир.}} \qquad q_k \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

$$\left[\begin{array}{lcl} q_1 & = & u_{11}A_1 \\ q_2 & = & u_{12}A_1 + u_{22}A_2 \\ q_3 & = & u_{13}A_1 + u_{23}A_2 + u_{33}A_3 \\ \dots & & \\ q_n & = & u_{1n}A_1 + u_{2n}A_2 + \dots + u_{nn}A_n \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} Q = \underset{\text{очевидно, унит. (ортог)}}{(\overbrace{q_1 \dots q_n}^{\text{о.н.с.}})} \\ U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{21} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(q_1 \dots q_n) = \underbrace{Q}_{\text{невыр}} = \underbrace{A}_{\text{невыр}} U = (A_1 \dots A_n)\left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}\right) \Rightarrow U \text{ невыр.} \Rightarrow \exists U^{-1} = \underset{\text{верхн. треуг.}}{R}$$

$\boxed{A = QR}$

■

Следствие 1. $\forall$ *невырожд.* $A \quad \exists Q$ *унит. (ортог.),* L *нижн. треугол.* $\underset{\text{(левая)}}{}$: $\boxed{A = LQ}$

Доказательство. A^T невыр. $\Rightarrow \begin{matrix} \exists R \text{ верх. треуг.} \\ \exists Q_1 \text{ унит. (ортог.)} \end{matrix}$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ A}}{(A^T)^T} = (Q_1R)^T = \underset{\text{нижн.}\uparrow\text{треуг.}}{\underbrace{R^T}} \cdot \underset{\text{унит.} \overset{\uparrow}{\text{(ортог.)}}}{Q_1^T} = LQ$$ ■

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = QR\ ?$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = b_1 = \underset{\substack{\shortparallel \\ b_1}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}} \tfrac{1}{5} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = A_2 - c_1A_1 \qquad c_1 = \frac{(A_2, A_1)}{(A_1, A_1)} = 0$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = b_3 = A_3 - c_1b_1 - c_2b_2 \qquad\qquad c_1 = \frac{(A_3, A_1)}{(A_1, A_1)} = \tfrac{15}{25} = \tfrac{3}{5}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9/5 \\ 0 \\ 12/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} \qquad\qquad c_2 = \frac{(A_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = 2$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}A_1 \qquad q_2 = A_2 \qquad q_3 = -3/5A_1 - 2A_2 + A_3$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = U^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (q_1\ q_2\ q_3) = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{Q}{\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}} \overset{R}{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Теорема 5 (полярное разложение)**.**
$A = (A_{ij})_{n\times n} \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$\forall A \quad \begin{array}{l} \exists U \text{ унит. (}Q\text{ ортогональная) матрица} \\ \exists! H \text{ эрмитова (}S\text{ - симметр.) матрица} \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{c} \boxed{A = HU} \\ \boxed{A = SQ} \end{array}}$$

Если, кроме того, A невырожденная, то и матрица $U(Q)$ определяется единственным образом

Мы будем доказывать теорему для операторов, матрицы из теоремы будут матрицами этих операторов в о.н.б.

Теорема 6 (полярное разложение линейного оператора)**.**
$\mathcal{A} \in End(V) \qquad (V, (\cdot,\cdot))$ *унит. (евкл)*

$\forall \mathcal{A}\ \ \exists U \in End(V)$ *изометрич*, $\exists! H \in End(V)$ *самосопряж*, *т.ч.*

$$\boxed{\mathcal{A} = HU}$$

Если, кроме того, $\mathcal{A}$ невырожд, то U определяется однозначно.

Утверждение. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$ *о.п.с, т.ч. все с.ч.* $\lambda \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists! \mathcal{B} \in End(V) : \boxed{\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}}$, *т.ч. все с.ч. $\mathcal{B}$ неотриц.*

$\boxed{\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{A}}}$

Доказательство. (утверждения) $\mathcal{A}$ о.п.с. $\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} \underset{\text{собств. подпр.}}{V_\lambda} \qquad \lambda \geq 0$

$$\begin{array}{l} \qquad\downarrow \text{ базис} \\ V = span(\underset{\text{с.в. } \mathcal{A}}{v_1 \dots v_n}) : \quad \mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \end{array}$$

Определим: $\mathcal{B}v_i = \sqrt{\lambda_i}v_i \Rightarrow$ очевидно, $\sqrt{\lambda_i}$ с.ч. $\mathcal{B}$ и v_i с.ч. $\qquad \underset{\text{все с.ч. } \mathcal{B}}{\sqrt{\lambda_i}} \geq 0$

$\forall$ базисн. $v_i \quad \mathcal{B}^2 v_i = \lambda_i v_i = \mathcal{A}v_i \Leftrightarrow \mathcal{B}^2 v = \mathcal{A}v \quad \forall v \in V \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}}$

Единственность: $\sqsupset \underset{\text{о.п.с.}}{C} \in End(V)$ т.ч. $C^2 = \mathcal{A}$ и все с.ч. $C \geq 0$

$C\mathcal{A} = C \cdot C^2 = C^2 \cdot C = \mathcal{A}C \qquad \mathcal{A}$ и C перестановочны $\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ и C перестановнчны

$V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda \qquad V_\lambda = \underset{\text{собств. подпр. } \mathcal{A}}{Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})}$ инвариантно отн-но C : $\qquad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(CV_\lambda) = C\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})V_\lambda}_{\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

Сужение: $C|_{V_\lambda} \stackrel{?}{=} \mathcal{B}|_{V_\lambda}$

$\chi_C(t) \vdots \chi_{C|_{V_\lambda}}(t) \Rightarrow$ все с.ч. $C|_{V_\lambda}$ неотриц.

т.к. $\underset{\exists \text{ базис из с.в.}}{C \text{ о.п.с.}} \Rightarrow V_\lambda = span(\omega_1 \dots \omega_k)$

$V = \bigoplus\limits_{\mu \text{ с.ч. } C} \underset{\text{собств. подпр. } C}{W_\mu} = span(\underset{\text{с.в. } C}{\omega_1 \dots \omega_n})$

ω_j с.ч. C отвеч. $\mu_j \Rightarrow C\omega_j = \mu_j \omega_j \quad \mu_j \geq 0$

ω_j с.в. $\mathcal{A}$ отвеч. λ

$\lambda\omega_j = \mathcal{A}\omega_j = C^2\omega_j = \mu_j^2\omega_j \Rightarrow \lambda = \mu_j^2 \Rightarrow \mu_j = \sqrt{\lambda}$

$C\omega_j = \sqrt{\lambda}\omega_j = \mathcal{B}\underset{\in V_\lambda}{\omega_j} \Rightarrow C|_{V_\lambda} = B|_{V_\lambda} \Rightarrow C = B$ на V ■

Доказательство. (Теоремы)

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ $\quad$ $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен.

$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = (\mathcal{A}^*)^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$ $\quad$ аналогично $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0 \quad \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$

$\forall u \neq \mathbb{0} \quad (\mathcal{A}\mathcal{A}^*u, u) = (\mathcal{A}^*u, \mathcal{A}^*u) \geq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0$

Аналогично все с.ч. $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$

$\begin{matrix} \mathcal{A}^*\mathcal{A} \text{ самосопр.} \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow$ о.п.с., все с.ч. $\lambda \geq 0$

$\underset{\lambda \neq \mu}{V_\lambda \perp V_\mu} \qquad V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}^*\mathcal{A}} V_\lambda = span(\underset{\text{о.н.б. из с.в. } \mathcal{A}\mathcal{A}^*}{v_1 \dots v_n})$

$$\begin{matrix} (\mathcal{A}^*Av_i, v_j) & = (\mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j) \\ || & \\ (\lambda_i v_i, v_j) & = \lambda_i \underset{\delta_{ij}}{\underset{||}{(v_i, v_j)}} = \lambda_i\delta_{ij} \end{matrix}$$

$\lambda_i > 0 \to \mathcal{A}v_i \perp \mathcal{A}v_j \;\; i \neq j$

$\lambda_i = 0 \to (\mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j) = 0$

$(\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_n)$ дополним до о.н.б. V

Какие-то векторы – $\mathbb{0}(\lambda_i = 0)$, остальные попарно-ортогон.

$z_1 \dots z_n$ о.н.б. $V \qquad \mathcal{A}v_i = \sqrt{\lambda_i}z_i \qquad (z_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathcal{A}v_i)$

<u>Определим:</u>

$Hz_i := \sqrt{\lambda_i}z_i \quad i = 1 \dots n$

$\begin{matrix} Uv_i = z_i \\ \text{о.н.б. } v \rightsquigarrow \text{ о.н.б. } z \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{A}v_i = \sqrt{\lambda_i}z_i = Hz_i = HUv_i$

$V = span(\underbrace{v_1 \dots v_n}_{\text{базис}}) \Rightarrow \mathcal{A} = HU$

U : о.н.б. $\rightsquigarrow$ о.н.б. $\underset{\text{(св-ва изометр.)}}{\Rightarrow}$ U <u>изометр.</u>, т.е. $U^* = U^{-1}$

H : о.п.с. $\qquad \underbrace{H = H^*}_{\text{самосопр.}}$ из $def \qquad \sqrt{\lambda_i}$ с.ч. $H \geq 0, z_i$ о.н.с.в. H

$\boxed{\mathcal{A} = HU}$

$\mathcal{A}^* = U^*H^* = U^{-1}H \qquad \mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = HUU^{-1}H = H^2 \Rightarrow \boxed{H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}}$, все с.ч. ≥ 0, определяется единственным образом из утверждения.

$\sqsupset \mathcal{A}$ невырожд. $\Rightarrow \mathcal{A}^*$ невырожд. $\Rightarrow H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ невырожд. $H^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A} = HU \Rightarrow U = H^{-1}\mathcal{A} \Rightarrow U$ ед. образом. ■

Следствие 1. $\forall \mathcal{A} \in End(V)$ $\begin{matrix} \exists U \in End(V) \ \underline{\text{изометр.}} \\ \exists! H \in End(V) \ \underline{\text{самосопр.}} \end{matrix}$, *т.ч.* $\boxed{\mathcal{A} = UH}$

Кроме того, если $\mathcal{A}$ невырожд, то U определяется единственным образом.

Доказательство. $\mathcal{A}^* = \underset{\text{самосопр.}}{\underset{\uparrow}{H_1}} \cdot \underset{\text{изометр.}}{\underset{\uparrow}{U_1}}$ $\qquad \underset{\text{самосопр.}}{H_1} = \sqrt{\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^*)^*} = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^* = (H_1U_1)^* = U_1^*H_1^* = \underbrace{U_1^{-1}}_{\text{изометр.}} H_1 = UH$, где $\begin{matrix} U = U_1^{-1} \\ \boxed{H = H_1 = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}} \end{matrix}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ невыр. $\Rightarrow U = \mathcal{A}H^{-1}$ единств. обр. ■

Определение 4.
$\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ *<u>левый модуль</u> оператора $\mathcal{A}$*

$\sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$ *<u>правый модуль</u> оператора $\mathcal{A}$*

Замечание. $A_{n\times n}$ $\qquad \mathcal{A}\mathcal{A}^*$ диагонализируемая матрица, самосопряж.

$v_1 \dots v_n$ о.н.с.в. $\qquad T = (v_1 \dots v_n) \leftarrow$ унит. (ортог.)

$T^{-1}(AA^*)T = \overline{T^T}(AA^*)T = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) \qquad \lambda_i \geq 0$

$AA^* = T\Lambda T^{-1} \qquad \sqrt{\Lambda} = diag(\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n})$

$\sqrt{AA^*} = T\sqrt{\Lambda}T^{-1} = T\sqrt{\Lambda}T^T$

11 Квадратичные формы

11.1 Основные понятия

Определение 1. *$f : \mathbb{R}^n \to R$, т.ч.*

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j}$, *где $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ — <u>Квадратичная форма</u>*

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j}$$

<u>Матричная форма записи</u>: $A = \underset{\textit{симметр.}}{(a_{ij})_{n\times n}} \qquad a_{ij} = a_{ji} \qquad A^* = A^T = A$

$\boxed{f(x) = x^TAx} = (x, Ax) = (A^*x, x) = (Ax)^Tx = x^TA^Tx$

$\Gamma = E$ *канонический базис.*

Замечание.

1. Другой подход к def кв. ф.

   $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$ <u>билинейная форма</u>

$e_1 \dots e_n$ базис V $\quad \begin{matrix} x \in V \leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n \\ y \in V \leftrightarrow y \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$

$\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$ симметр. $\forall x, y \in V$

$\alpha(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad a_{ij} = \alpha(e_i, e_j) = \alpha(e_j, e_i) = a_{ji} \qquad \alpha$ симметрична

Определение 2. Квадратичная форма $\qquad f(x) = \alpha(x, x) \quad \forall x \in V$

2. В комплексном линейном пр-ве вводится объект подобный кв. ф. в $\mathbb{R}^n$

   Определение 3. Эрмитова форма:

   $\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \boxed{f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x_j}, \text{ где } a_{ij} = \overline{a_{ji}}}$

   Очевидно $\overline{f(x)} = f(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n \quad f(x) \in \mathbb{R} \quad \boxed{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}}$

   $A = (a_{ij}) \qquad A^* = \overline{A^T} = A \qquad A$ *эрмитова матрица.*

   Или $\begin{matrix} \alpha : V \times V \to \mathbb{C} \\ e_1 \dots e_n \end{matrix}$

   α полуторалинейная эрмитова форма

   α линейна по 1 аргументу
   α аддитивна по 2 аргументу
   α псевдооднородна по 2 аргументу

   $\forall x, y \in V \qquad \alpha(x, y) = \overline{\alpha(x, y)} \qquad \alpha(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j$

   $a_{ij} = \alpha(e_i, e_j) = \overline{\alpha(e_j, e_i)} = \overline{a_{ji}}$

   $\forall x, y \in V \quad \alpha(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$

   Определение 4. Эрмитова форма:

   $\forall x \in V \quad f(x) = \alpha(x, x)$

   $\forall x, y \in V \quad \alpha(x, y) = x^T A \overline{y} = (x, \overline{A} y) = (A^T x, y)$

   $\forall$ скал. пр-е в Евклидовом пространстве $\leftrightsquigarrow$ билинейная форма

   $\forall$ псевдоскалярное пр-е в унитарном пространстве $\leftrightsquigarrow$ полуторалинейная форма.

$\underline{\underline{\mathbb{R}}} \qquad \underline{f(x) = x^T A x \qquad A^T = A}$ — Мы занимаемся такими.

Определение 5. $rgf = rgA$ *ранг квадратичной формы*

Определение 6. *Будем говорить, что к кв. ф. применено линейное преоб.* Q*, если* $x_i \rightsquigarrow y_i$ *по следующему правилу*

$$x = Qy \qquad Q_{n\times n}$$

$\boxed{\textit{Будем рассматривать только } \underline{\textit{невырожд}}\ Q}$

$$f(x) = x^T A x = (Qy)^T A Q y = y^T \boxed{Q^T A Q} y = y^T B y = \underset{\text{кв. ф.}}{g(y)}$$

$B^T = Q^T A^T Q = Q^T A Q = B \qquad B$ *симметр.*

$\underset{\text{кв. ф.}}{f} \overset{Q}{\rightsquigarrow} \underset{\text{кв. ф.}}{g} \qquad \boxed{B = Q^T A Q} \quad Q$ *невыр.*

$rgB = rgA \qquad$ *rgf инвариант относительно невыр. лин. преобр. Q*

Определение 7. *Кв. ф. f называется приведенной к каноническому виду, если все $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$*

$A = diag(a_{11} \dots a_{nn})$

Число $a_{ii} > 0$ называется положительным индексом инерции кв. ф.

$$\sigma^+(f) = \sigma^+$$

Число $a_{ii} < 0$ называется отрицательным индексом инерции кв. ф.

$$\sigma^-(f) = \sigma^-$$

Число $a_{ii} = 0$ обозначим за $\sigma^0(f) = \sigma^0$

$\sigma(f) = (\sigma^+, \sigma^-, \sigma^0)$ *сигнатура кв. ф. ($\sigma^+ - \sigma^-$ тоже сигнатура)*

$rgf = (\sigma^+ + \sigma^-)$ *инвариант* $\rightsquigarrow \sigma^0 = n - rg\ f$ *инвариант относительно Q.*

Определение 8. *Канонический вид кв. ф. f называется нормальным, если все ненулевые $a_{ii} = \pm 1$*

Очевидно, всегда $\exists Q \qquad \underset{x}{\text{канонич}} \overset{Q}{\rightsquigarrow} \underset{y}{\text{нормальн.}}$

$$Q = diag\underset{\text{невырожд}}{(q_1 \dots q_n)} \qquad \begin{array}{ll} q_i = \dfrac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}} & a_{ii} \neq 0 \\ q_i = 1 & a_{ii} = 0 \end{array}$$

$x = Qy$

Канонич. вид $\dots + \underbrace{a_{ii}}_{>0} x_i^2 + \dots + \underbrace{a_{jj}}_{<0} x_j^2 + \dots \underset{x_i = \frac{y_i}{\sqrt{|a_{ii}|}}}{\rightsquigarrow} \dots + 1 \cdot y_i^2 \dots - y_j^2 - \dots$

Основная задача теории кв. форм: Найти линейное невырожд. преобр. $Q : x = Qy$, т.ч. кв. ф. f будет приведена к канонич. (норм.) виду $(g(y))$

Т.е. $\underset{\text{невырожд.}}{\exists\, Q?} \quad Q^T A Q = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$?

11.2 Методы приведения кв. ф. к канонич. виду

I. Ортогональное преобразование: (канонич. вид симм. м-цы)

$x \in \mathbb{R}^n \qquad x = Qy \qquad y \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = x^T A x \qquad A = A^T$

A – матрица оператора в о.н.б. (канонич. базис $\mathbb{R}^n$)

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{в исходном}\\ \text{канон. базис } e}}{x} \quad \text{и} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{в новом}\\ \text{о.н.б. } \mathbb{R}^n\ e'}}{y} \quad \text{координаты в разных базисах.} \qquad Q = \underset{\substack{\text{ортогон.}\\ \text{т.к. } e, e' \text{ о.н.б.}}}{T_{e\to e'}} \quad (Q^T = Q^{-1})$$

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = B \qquad \underset{\text{кв. ф.}A}{f} \overset{x=Qy}{\rightsquigarrow} \underset{\text{кв. ф. } B}{g}$$

$\exists?\ e'$, т.ч. $B = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \Lambda$

—Да

$A = A^T$ симметр. матр. (матр. самосопр. опер.) $\Rightarrow$ канонич. вид симм. матрицы (см. соотв. следствие)

все с.ч. λ_i вещ. и $\exists$ базис из о.н.с.в. $A:\ \ v_1 \ldots v_n \qquad Q = (v_1 \ldots v_n) \rightsquigarrow \Lambda = diag(\underbrace{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{\text{собств. ч.}})$

II. Метод Лагранжа (метод выделения полного квадрата)

1. $\forall i\ a_{ii} = 0 \Rightarrow \exists a_{ij} \neq 0\ \ i \neq j$

$$x = Qy \qquad \left[\begin{array}{l} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \quad \begin{array}{l} k \neq i \\ k \neq j \end{array} \end{array}\right. \qquad Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & -1 & \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \ \text{Очевидно, невырожд.}$$

$$f(x) = x^TAx = y^TBy = g(y) = \ldots + \underset{\neq 0}{\overset{b_{ii}}{a_{ij}}}y_i^2 + \ldots - \underset{\neq 0}{\overset{b_{jj}}{a_{ij}}}\,y_j^2 + \ldots$$

$$a_{ij}x_ix_j = a_{ij}(y_i^2 - y_j^2)$$

2. $\exists a_{ii} \neq 0$

Выпишем все слагаемые из f, которые содержат x_i

$$\frac{a_{ii}}{a_{ii}}(\underset{\neq 0}{a_{ii}}x_i^2 + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n a_{ij}x_ix_j) = \frac{1}{a_{ii}}(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)^2 - \overset{\text{нет переменной } x_i}{\boxed{\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n x_j^2a_{ii}^2 - \frac{2}{a_{ii}}\sum_{\substack{1\leq k\leq j\leq n\\ k\neq i\\ j\neq i}} a_{ik}a_{ij}x_kx_j}}$$

Поместим обратно в форму f

$$f(x) = f(x_1 \ldots x_i \ldots x_n) = \frac{1}{a_{ii}}(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)^2 + \tilde{f}(\ x_1 \ldots \underset{\substack{\uparrow\\ \text{кв. ф. не содержит}}}{\hat{x}_i} \ldots x_n\ )$$

$$Q^{-1}; \qquad \left[\begin{array}{l} y_i = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ y_k = x_k \quad k \neq i \end{array}\right. \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ a_{i1} & & a_{ii} & \ldots & a_{1n} \\ & & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0$$

Очевидно, невыр. $\Rightarrow Q$ невыр. $x = Qy$

Далее повторяем алгоритм для $\hat{f}$, пока не исчерпаем все переменные.

III метод Якоби (унитреугольное преобразование)

LU разложение матрицы.

$$A = A^T \qquad \triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1 \;\Rightarrow \begin{matrix} \exists!\, U \overset{\text{невырожд.}}{\text{унитреуг.}} \text{ верхн. матр: } A = U^T D U \\ \exists!\, L \text{ унитреуг. нижн. матр: } A = LDL^T \end{matrix}$$

$$Q = U^{-1} \quad \underbrace{(U^T)^{-1}}_{=Q^T} A \underbrace{U^{-1}}_{=Q} = D$$

Замечание. Метод Якоби не является универсальным, т.е. применим не для всех кв. ф., а только для форм, у которых $\triangle_k \neq 0 \; \forall k = 1 \dots n-1$ (т.е. $rgf \geq n-1$)

Теорема 1 (Якоби)**.** $A = A^T, \; \triangle_k \neq 0 \;\; k = 1 \dots n-1$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} & \dots & \boxed{a_{1n}} \\ a_{12} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \dots & \boxed{a_{2n}} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & \boxed{a_{3n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\exists!$ унитреуг. верхняя матрица Q, т.ч.

$$Q^T A Q = D = diag(\triangle_1, \tfrac{\triangle_2}{\triangle_1}, \dots, \tfrac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}})$$

При этом:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} & q_2 & q_3 & & q_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{q_{12}} & \boxed{q_{13}} & \dots & \boxed{q_{1n}} \\ 0 & 1 & \boxed{q_{23}} & \dots & \boxed{q_{2n}} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \boxed{\dots} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \boxed{q_{n-1\;n}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \text{ где } \boxed{\begin{matrix} A_{k-1} q_k = -b_k \\ k = 2 \dots n \end{matrix}} \;\; \left(\begin{matrix} \triangle_k = |A_k| \neq 0 \;\; k = 1 \dots n-1 \\ \Rightarrow \text{ все системы имеют един. реш.} \end{matrix} \right)$$

Доказательство. $\exists$ и еди. следует из LU разложения для $A = A^T$

Остается только доказать формулу (в рамке сверху).

1. База индукции, $n = 2$. $$\triangle_1 = a_{11} \neq 0 \qquad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & b_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} \quad Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} & q_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{q_{12}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{matrix} a_{11} q_{12} = -a_{12} \\ q_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \end{matrix}$$

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \underbrace{-a_{12} + a_{12}}_{=0} & -\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22} a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle_1 & 0 \\ 0 & \frac{\triangle_2}{\triangle_1} \end{pmatrix} = diag(\triangle_1, \tfrac{\triangle_2}{\triangle_1})$$

2. Индукционное предположение. $\sqsupset$ верно для k, $\sqsupset \triangle_1 \neq 0 \dots \triangle_k \neq 0$

   Q_k определяется по формуле $A_{j-1} q_j = -b_j$

   $Q_k^T A Q_k = diag(\triangle_1, \frac{\triangle_2}{\triangle_1}, \dots, \frac{\triangle_k}{\triangle_{k-1}}) \;\; j = 2 \dots k$

$diag(\triangle_1, \triangle_2/\triangle_1, \ldots, \triangle_k/\triangle_{k-1}) = diag(d_1 \ldots d_k) = D$

3. Индукционный переход. Докажем, что верно для Q_{k+1}

$$Q_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} Q_k & q_{k+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \qquad q_{k+1} \text{ определяется: } \begin{array}{c} A_k q_{k+1} = -b_{k+1} \\ (q_{k+1}^T A_k^T = -b_{k+1}^T) \end{array}$$

$$Q_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} Q_k^T & 0 \\ \hline q_{k+1}^T & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_k & b_{k+1} \\ \hline b_{k+1}^T & a_{k+1\ k+1} \end{array}\right)}_{\left(\begin{array}{c|c} Q_k^T A_k & Q_k^T b_{k+1} \\ \hline \underbrace{q_{k+1}^T A_k + b_{k+1}^T}_{=0 \text{ (по формуле подставили)}} & q_{k+1}^T b_{k+1} + a_{k+1\ k+1} \end{array}\right)} \cdot \left(\begin{array}{c|c} Q_K & q_{k+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} Q_k^T A_k Q_k & \overbrace{Q_k^T A_k q_{k+1} + Q_k^T b_{k+1}}^{\overset{=0}{Q_k^T(A_k q_{k+1} + b_{k+1})}} \\ \hline 0 & \underbrace{q_{k+1}^T b_{k+1} + a_{k+1\ k+1}}_{d_{k+1}} \end{array}\right) = diag(d_1 \ldots d_k, d_{k+1}) = D$$

$d_{k+1} = \frac{\triangle_{k+1}}{\triangle_k}$ (по теореме об LU-разложении).

■

Замечание (о методе Гаусса (модификация метода Лагранжа)).
Алгоритм приведения матрицы к LU.

$\triangle_k \neq 0 \quad k = 1 \ldots n-1$

$$(A|E) \underset{\text{метод Гаусса}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{matrix}}_{DU} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}} \end{array}\right)$$

$A = LDU \qquad A = A^T$

$A = LDL^T \qquad \underset{Q^T}{\overset{||}{L^{-1}}} A \underset{Q}{\overset{||}{(L^T)^{-1}}} = D \qquad \boxed{Q = (L^{-1})^T}$

$\triangle_k \neq 0 \ \ k = 1 \ldots n-1$ – условия для метода Якоби.

$$(A|E) \underset{\text{м. Гаусса}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{matrix}}_{Q^T} \end{array}\right)$$

$D = (d_1 \ldots d_n)$

$f \rightsquigarrow d_1 y_1^2 + \ldots + d_n y_n^2 \qquad x = Qy$

Подвох в том, что для многих матриц, у которых $\triangle_k = 0$ для $1 \leq k \leq k-1$ приходится производить переобозначения переменных.

В методе Лагранжа, мы говорили, что $\exists\ a_{ii} \neq 0 \rightsquigarrow$ н.у.о. скажем, что $a_{11} \neq 0$. Таким образом формула в методе Лагранжа $\sim$ 1 шагу алгоритма Гаусса.

В итоге:

2 универсальных метода (т.е. $\forall$ кв. ф.) – ортогональное преобразование и метод Лагранжа.

2 метода, которые позволяют найти канонический вид кв. ф., не находя самого преобр. Q.

– ортог. преобр. $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, где λ_i с.ч. A

– м. Якоби $\triangle_1 y_1^2 + \frac{\triangle_2}{\triangle_1} y_2^2 + \ldots + \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} y_n^2$, где $\triangle_k = det A_k$

11.3 Закон инерции кв. формы. Критерий Сильвестра

Теорема 1 (Закон инерции кв. формы)**.**
Каким бы лин. невыр. преобразованием Q ни была приведена к каноническому виду кв. ф. f, её сигнатура будет одинаковой.

$$f = x^T A x \qquad x = Qy \quad i = 1,2 \quad f(x) \rightsquigarrow g_i(y)$$

$$\sigma(f) = \sigma(g_1) = \sigma(g_2)$$

Доказательство. $x = Q_1 y \qquad x = Q_2 z \qquad Q_{1,2}$ невырожд, приводят f к канонич. виду.

$f(x) = x^T A x = \underbrace{y^T B y}_{g(y)} = \underbrace{z^T C z}_{t(z)}$

$g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_p y_p^2 - \lambda_{p+1} \cdot y_{p+1}^2 - \ldots \lambda_{p+k} \cdot y_{p+k}^2$

$t(z) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_s z_s^2 - \mu_{s+1} z_{s+1}^2 - \ldots \mu_{s+l} z_{s+l}^2$

$p + k = s + l = rgf = n - \sigma \leq n \qquad \lambda_i, \mu_i > 0$

С.Л.У: $\underbrace{Q_1^{-1}}_{\text{невыр.}} x = y$ (1) $\qquad \underbrace{Q_2^{-1}}_{\text{невыр.}} x = z$ (2)

$$\begin{array}{l} \sqsupset y \text{ такой столбик, что: } y_1 = y_2 = \ldots = y_p = 0 \\ \sqsupset z \text{ такой столбик, что: } z_{s+1} = \ldots = z_{s+l} = 0 \end{array} \overset{\text{новая с.л.о.у.}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} \text{первые } p \text{ строк (1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{последние } l \text{ строк (2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

$\sqsupset p < s \qquad$ уравнений в системе: $p + l < s + l = rgf \leq n \Rightarrow$ число уравнений меньше, чем число неизвестных $\Rightarrow \exists$ нетривиальное СЛОУ решение x_0 ■