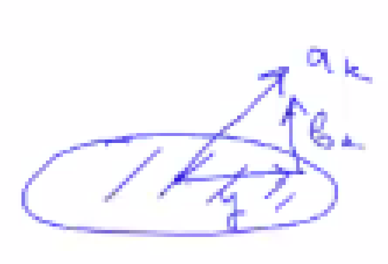
$G(A_1 \dots a_k) = ((a_i, a_j))_{k\times k}$

$g(a_1 \dots a_k) = det\ G = ||b_1||^2 \dots ||b_k||^2$

$a_1 \dots a_k \underset{\text{Г-Ш}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{попарно-ортог}}{b_1 - b_k}$



$L = span(a_1 \dots a_{k-1}) = span(b_1 \dots b_{k-1})$

$a_k = y + b_k$

b_k- ортогон. сост. a_k относит. L

Определение 1. $(V, (\cdot,\cdot))$ $a_1 \dots a_k \in V$

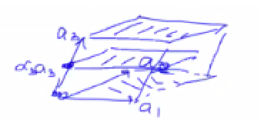
$\prod(a_1 \dots a_k) = \{x \in V | x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \ \ \underset{\forall i=1,k}{\alpha_i \in [0,1]}\}$

k-мерный параллелепипед, построенный на векторах $a_1 \dots a_k$

$V = V_3 \cong \mathbb{R}^3$

$k = 1 \quad x = \alpha_1 a_1 \quad \alpha_1 \in [0,1] \quad 0 \longrightarrow a_1$ отрезок

$k = 2$  $\begin{matrix} x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \\ \alpha_{1,2} \in [0,1] \end{matrix}$ параллелограмм

$k = 3$  $\begin{matrix} x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \\ \alpha_i \in [0,1] \end{matrix}$ параллелиипед

Определение 2. $V(\prod(a_1\ ldoa_k)) = (g(a_1 \dots a_k))^{1/2}$*обьем к-мерного пар-да*

$\boxed{V(\prod(a_1 \dots a_k)) = V(\prod(a_1 \dots a_{k-1})) \cdot ||b_k||}$ *см. следствие к т-ме о $det\ G$*

$a_1 \dots a_k \rightsquigarrow b_1 \dots b_k$

1. $k = 1 \quad V(\longrightarrow a_1) = \sqrt{g(a_1)} = \sqrt{(a_1, a_1)} = ||a_1|| ==$ длина отрезка
2. $k = 2 \quad V($ рисунок$) = \sqrt{f(a_1, a_2)} = sqrtg(a_1) \cdot ||b_2|| = ||a_1|| \cdot ||b_2|| = \underset{\text{основание высота}}{||b_1|| \cdot ||b_k||} = S$ площадь пар. рисунок
3. $k = 3$ рисунок $V($ рисунок$) = sqrtg(a_1, a_2, a_3) = \underset{\substack{|| \\ S \text{ основания}}}{\overset{\substack{||b_1||||b_2|| \\ ||}}{\sqrt{g(a_1, a_2)}}} \cdot \underset{h \text{ высота}}{\overset{||b_3||}{||}} = V_{\text{пар-да}}$

$a_1 \dots a_k$ линейно зав. $\leftrightarrow g(a_1 \dots a_k) = 0$

$k = 2 \quad a_1, a_2$ компл. $\leftrightarrow S_{\text{пар.}} = 0$

$k = 3 \quad a_1 a_2 a_3 \quad$ компл. $\leftrightarrow V = 0$

Бля, я пропустил много чего. Вот тут надо пересмотреть.

Определение 3. *невырожд. комплекснозн. (веществ) матрица* $Q_{n\times n}$ *называется* *унитарной (ортогональ*
если $Q^* = Q^{-1}(\leftrightarrow Q^*Q = QQ^* = E)$

Свойства унитарной (ортог.) матрицы

1. Q унитарн. (ортогог.) $\leftrightarrow$ стр. (столб) попарно-ортагон. (в смысле станд. скал. про-я в пр-ве $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)(x,y)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$)

   Доказательство. $Q = (Q_1 \dots Q_n)$столбцы

   $$Q \text{ унит. (ортог.)} \leftrightarrow Q^* = Q^{-1} \leftrightarrow Q^* = \overline{Q^T} = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix}$$

   $$E = Q^*Q = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T}Q_1 & \overline{Q_2^T}Q_2 & \overline{Q_1^T}Q_n \\ \overline{Q_n^T}Q_1 & \overline{Q_n^T}Q_2 & \overline{Q_n^T}Q_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} Q^*Q = E \\ ((\overline{Q_i, Q_j})) \leftrightarrow (Q_i, Q_j) = \delta_{ij} \text{ отн-но для строк} \end{matrix}$$ □

2. $|detQ| = 1$

   Доказательство. $$1 = detE = det(Q^*Q) = \begin{matrix} det(Q^*) \\ || \\ \overline{Q^T} \end{matrix} \cdot detQ = \overline{detQ} = |detQ|^2$$ □

   $\boxed{\text{евкл.: } Q_{\text{ортогон.}} \to detQ = +-1}$

3. $Q^{-1}-$ унитарн.(ортогон.)
   Пизда вот тут не успел

0.1 Это 9.4 Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Теорема Пифагора. Теорема о наилучшем приближении. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя.

Определение 1. $\underset{\text{лин. подпр.}}{L \subset V} \quad L^{\perp} = \{y \in V | \forall x \in L (x,y) = 0\}$
– *ортогональое дополнение подпро-ва* L

Свойства $L^{\perp}$

1. $L^{\perp}$ линейное подпро-во

   Доказательство. $\forall \lambda \in K, \forall u, v \in L^{\perp} : \forall x \in L (x,u) = 0, (x,v) = 0$

   $$(x, u + \lambda v) = \underset{=0}{(x,u)} + \overline{\lambda} \underset{(x,v)}{=} 0 = 0 \to u + \lambda v \in L^{\perp}$$ □

2. $\boxed{V = L \bigoplus L^{\perp}}$

Доказательство. $L = \underset{\text{лин. незав. н.у.??? попарно ортогон. (г.ш.)}}{span}(a_1 \dots a_k)$

$a_1 \dots a_k \underbrace{a_{k+1} \dots a_n}$

дополним до базиса V .у. в??? попарно ортогон. (г.ш.)

$L^{\perp ?} = span(a_{k+1} \dots a_n) \quad V = L \bigoplus L^{\perp}$

$\forall x \in L: \quad x = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i$

$\forall y \in L^{\perp}: \quad y \quad \sum\limits_{j=k+1}^{n} c_j a_j$

$(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=k+1}^{n} c_i \overline{c}_j \underset{=0}{a_i, a_j)} = 0 \to L^{\perp}$ – ортогон. дополн. L ☐

3. $(L^{\perp})^{\perp} = L$

   Доказательство. $\forall x \in L \ \ \forall y \in L^{\perp} : (x, y) = 0$

   $\to L \subset (L^{\perp})^{\perp}$

   $(L^{\perp})^{\perp} \oplus L^{\perp} = V = L \oplus L^{\perp}$

   $\to dim(L^{\perp})^{\perp} = dim L \to L = (L^{\perp})^{\perp}$ ☐

4. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

   $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

   Похоже на правило Де Моргана, но не то же самое

   Доказательство. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$

   $$\begin{array}{c} \forall x \in L_1 + L_2 \\ || \\ e_1 + e_2 \\ \in L_1 \ \ \in L_2 \end{array} \quad \forall y \in (L_1 + L_2)^{\perp} \quad \begin{array}{c} (x, y) = 0 \\ || \\ (e_1, y) + (e_2, y) \end{array}$$

   $$\left.\begin{array}{r} \sqsupset e_2 = 0 \ \ \underset{\forall e_1 \in L_1}{(e_1, y) = 0} \forall y \in L_1^{\perp} \\ \sqsupset e_1 = 0 \ \ \underset{\forall e_2 \in L_2}{(e_2, y) = 0} \to L_2^{\perp} \end{array}\right\} \to y \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$$

   бля вот тут опять пропустил

   $L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$

   $(L_1^{\perp} + L_2^{\perp})^{\perp} \underset{\text{по доказ-му}}{=} (L_1^{\perp})^{\perp} \cap (L_2^{\perp})^{\perp} \underset{\text{св-во 3}}{=} L_1 \cap L_2$

   св-во 3 $\ L_1^{\perp} + L_2^{\perp} = (L_1 \cap L_2)^{\perp}$ ☐

5. $V^{\perp} = \mathbb{0}$

   $\mathbb{0}^{\perp} = V$

Определение 2. $\forall x \in V \ \exists! y \in L, \exists! z \in L^{\perp} : \boxed{x = y + z}$

из св-в 2

y – ортогон. проекция x на лин. подпро-во L

z – ортогон. составл. x относительно L – перпендикуляр, опущенный из x на L

$(x, y) = 0$

рисуночек

Задача о перпендикуляре $z =?$

$L = span(\underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{лин. независ.}})\ \ x \in V \quad x = y + z\ \ y$

$L\ z \in L^{\perp}\ \ z =?$

$y \in L\ \ y \in \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i + z \quad | \cdot a_j$

$\forall j = 1 \dots k\ \ (x_i a_j)\ \ \sum\limits_{i=1}^{k} c_i(a_i, a_j) + \underbrace{(z, a_j)}_{=0} \in L \underset{z \in L^{\perp}}{=} \sum\limits_{t=1}^{k} c_i(a_i, a_j)\ \ c_i =?$

СЛНУ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_2, a_1) \dots \\ (a_1, a_2) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}}_{G^T(a_1 \dots a_k)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix}$$

$detG > 0 \to \exists!$реш-е$c_1 \dots c_k$

$\rightsquigarrow y = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i \rightsquigarrow z = x - y.$

Примеры. $L = span(a_1 a_2 a_3)$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad z =?$$

$a_3 = 2a_1 - a_2 \quad L = span(a_1, a_2)$

$$\underset{\text{вещ.}}{G^T} = G = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (x, a_1) = 4 \\ (x, a_2) = -8 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & | & 4 \\ 4 & 10 & | & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 6 & | & -12 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 3\ \ e_2 = -2$

$$y = 3a_1 - 2a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad z = x - y \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (y, z) = 0$$

Теорема 1 (Пифагора)**.**
$\forall y, z \in V\ \ (y, z) = 0 \to ||y + z||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$

рисуночек

Доказательство. $||y + z||^2 = (y + z, y + z) = \underbrace{(y, y)}_{=||y||^2} + \underbrace{(y, z)}_{=0} + \underbrace{(z, y)}_{=0} + \underbrace{(z, z)}_{=||z||^2}$ □

Следствие 1. $x_1 \dots x_k$ *попарно-ортог.* $\to ||x_1 \dots + x_k||^2 = ||x_1||^2 + \dots + ||x_k||^2$

Доказательство. М.М.И. (упр.) $\square$

Теорема 2 (О наилучш. приближении)**.** $V = L \oplus L^{\perp} \quad : x = \underset{\in L}{y} + \underset{\in L^{\perp}}{z} \to \begin{matrix} \forall e \in L \\ e \neq y \end{matrix} \begin{matrix} ||x-y|| \\ || \\ ||z|| \end{matrix} < ||x-e||$

рисуночек

длина любой наклонной больше, чем длина перпендикуляра

Доказательство. $\sqsupset e \in L \ \ e \neq y \ \ ||x-e||^2 = ||\underbrace{x-y}_{=z \in L^{\perp}} + \underbrace{y-e}_{\in L}||^2 \underset{\text{по . Пифагора}}{=} ||x-y||^2 + ||\underset{>0}{y-e}||^2 \ \ y \neq e$

$\to ||x-e||^2 > ||x-y||^2 \to$ $\square$

Определение 3.