Оформленное 2 задание, КР по квадратичным формам

Пак Александр

13 июня 2020 г.

1 Привести кв. форму f к кв. форме g, используя метод Лагранжа:

$$f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$$

$$g(x) = x_2^2 - 3x_4^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4$$

1.1 Приведем f к каноническому виду, найдем Q_f

$f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$

Сделаем замену

$y_1 + y_2 = x_1$
$y_1 - y_2 = x_2$
$y_3 = x_3$
$y_4 = x_4$

$\tilde{f}(y) = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_3y_4 + y_1y_4 + y_2y_4$

Занесем под один квадрат все множители с y_1

$\tilde{f}(y) = (y_1 + \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2})^2 - \frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4} - y_2^2 - y_2y_3 + \frac{y_3y_4}{2} + y_2y_4$

Занесем под квадрат все множители с y_2

$\tilde{f}(y) = (y_1 + \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2})^2 - (y_2 + \frac{y_3}{2} - \frac{y_4}{2})^2$

Сделаем замену

$t_1 = y_1 + \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2}$
$t_2 = y_2 + \frac{y_3}{2} - \frac{y_4}{2}$
$t_3 = y_3$
$t_4 = y_4$

$\tilde{\tilde{f}}(t) = t_1^2 - t_2^2 \qquad \sigma = (1, 1, 2)$

<u>Выразим x через t</u>

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 + \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2} & = & t_1 \\ y_2 + \frac{y_3}{2} - \frac{y_4}{2} & = & t_2 \\ y_3 & = & t_3 \\ y_4 & = & t_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & t_1 - \frac{t_3}{2} - \frac{t_4}{2} \\ y_2 & = & t_2 - \frac{t_3}{2} + \frac{t_4}{2} \\ y_3 & = & t_3 \\ y_4 & = & t_4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & t_1 + t_2 - t_3 \\ x_2 & = & t_1 - t_2 - t_4 \\ x_3 & = & t_3 \\ x_4 & = & t_4 \end{array}\right\} \Rightarrow Q_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Приведем g к каноническому виду, найдем Q_g^{-1}

$g(x) = x_2^2 - 3x_4^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4$

Занесем под квадрат все множители с x_2

$g(x) = (x_2 - x_3 + x_4)^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_3x_4 - 3x_4^2 - 6x_3x_4$

Занесем под квадрат все множители с x_3

$g(x) = (x_2 - x_3 + x_4)^2 - (x_3 + 2x_4)^2$

Сделаем замену

$t_1 = x_2 - x_3 + x_4$
$t_2 = x_3 + 2x_4$
$t_3 = x_1$
$t_4 = x_4$

$\tilde{g}(t) = t_1^2 - t_2^2 \qquad \sigma = (1, 1, 2)$

Получили $Q_g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3 Найдем Q

$\tilde{\tilde{f}}(t) = \tilde{g}(t)$

$$Q = Q_f \cdot Q_g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$G = Q^T F Q$ — верно.