Übungsblatt 3

Abgabe bis 02.11.2022 (Mittwoch), 12 Uhr (via Moodle von einem Gruppenmitglied).

Theorieaufgabe 1 [Stabilität geschachtelter Funktionsauswertungen]

Sei $f : I \to J$ ($I \subseteq \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$) eine Funktion und $f(x) = g_k \circ g_{k-1} \circ \dots g_1(x)$ eine Zerlegung dieser Funktion in skalarwertige Teilfunktionen. Sei ferner $\widetilde{f}(x,\varepsilon) = \widetilde{g}_k \circ \widetilde{g}_{k-1} \circ \dots \circ \widetilde{g}_1(x)$, wobei $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)^T \in \mathbb{R}^k$ mit $\|\varepsilon\|_\infty <$ eps und $\widetilde{g}_i(y) = \mathrm{fl}(g_i(y)) = (1+\varepsilon_i)g_i(y)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ sind. Die kleinste reelle Zahl $\sigma_{\text{rel}} \geq 0$ mit

$$\frac{|f(x) - \widetilde{f}(x,\varepsilon)|}{|f(x)|} \dot{\leq} \sigma_{\text{rel}} \|\varepsilon\|_\infty$$

wird als relativer Stabilitätsindikator bezeichnet.

Hinweis: Erinnerung: "$\dot{\leq}$" bedeutet "kleinergleich bis auf Terme höherer Ordnung". Im Folgenden sind ebenfalls nur Abschätzungen bis auf Terme höherer Ordnung gefordert. Insbesondere können Terme in eps^2 vernachlässigt werden.

(a) Sei $x \in \pm[x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$ und $\widetilde{x} = \mathrm{fl}(x)$. Leiten Sie eine Abschätzung für den relativen Gesamtfehler

$$\frac{|f(x) - \widetilde{f}(\widetilde{x},\varepsilon)|}{|f(x)|}$$

in Abhängigkeit von der relativen Konditionszahl κ_{rel}, des relativen Stabilitätsfaktors σ_{rel} und der Maschinengenauigkeit eps her.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $\frac{|x-\widetilde{x}|}{|x|} \leq c \cdot \text{eps}$ für eine Konstante $c > 0$ gilt (bzw. $\frac{|x-\widetilde{x}|}{|x|} \dot{\leq} \text{eps}$).

(b) Zeigen Sie, dass für beliebiges $k \in \mathbb{N},\ k > 1$ die Abschätzung $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_k \sigma_{k-1}$ gilt, wobei κ_k die relative Konditionszahl von g_k und σ_{k-1} der relative Stabilitätsindikator von $f_{k-1} := g_{k-1} \circ g_{k-2} \circ \dots \circ g_1$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\sigma_{\text{rel}} \leq \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=j+1}^{k} \kappa_i$$

gilt.

Hinweis: Für beliebige skalare Funktionen f gilt $\prod_{i \in \emptyset} f(i) = 1$.

3 + 4 + 2 = 9 Punkte

Theorieaufgabe 2 [Funktionsauswertung]

Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} - 1 = -\frac{2x}{2x+1}$$

soll bei $x \approx 0$ ausgewertet werden.

(a) Bestimmen Sie die relative Konditionszahl κ_{rel} des Problems. Ist das Problem gut oder schlecht konditioniert?

(b) Zur Auswertung der Funktion werden die beiden Algorithmen $f(x) = (g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1)(x)$ und $f(x) = h_3(h_1(x), h_2(h_1(x)))$ mit

$$\begin{aligned} g_1(y_0) &= 2y_0 \\ g_2(y_1) &= y_1 + 1 \\ g_3(y_2) &= \tfrac{1}{y_2} \\ g_4(y_3) &= y_3 - 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h_1(z_0) &= 2z_0 \\ h_2(z_1) &= z_1 + 1 \\ h_3(z_1, z_2) &= -\tfrac{z_1}{z_2} \end{aligned}$$

in Betracht gezogen. Geben Sie eine Abschätzung für die Stabilitätsindikatoren der beiden Algorithmen an. Welchen dieser beiden Algorithmen würden Sie wählen, um die Funktion bei $x \approx 0$ auszuwerten? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Nutzen Sie die Aussage aus Aufgabe 1, um die Stabilität zu untersuchen. Dabei lässt sich dies direkt auf den vektorwertigen Fall übertragen:
Es sei $f : I \to J$ ($I \subseteq \mathbb{R}^n$, $J \subseteq \mathbb{R}^m$) eine Funktion und $f(x) = g_k \circ g_{k-1} \circ \ldots g_1(x)$ eine Zerlegung dieser Funktion in wohldefinierte Teilfunktionen. Es sei ferner $\widetilde{f}(x, \varepsilon) = \widetilde{g}_k \circ \widetilde{g}_{k-1} \circ \cdots \circ \widetilde{g}_1(x)$, wobei $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)^T \in \mathbb{R}^k$ mit $\|\varepsilon\|_\infty <$ eps und $\widetilde{g}_i(y) = \mathrm{fl}(g_i(y)) = (1 + \varepsilon_i) g_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sind. Die kleinste reelle Zahl $\sigma_{\mathrm{rel}} \geq 0$ mit

$$\frac{\|f(x) - \widetilde{f}(x, \varepsilon)\|}{\|f(x)\|} \dot{\leq} \sigma_{\mathrm{rel}} \|\varepsilon\|_\infty$$

wird als relativer Stabilitätsindikator bezeichnet. Es bezeichne κ_k die relative Konditionszahl von g_k. Dann gilt

$$\sigma_{\mathrm{rel}} \leq \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=j+1}^{k} \kappa_i.$$

2 + 5 = 7 Punkte

Programmieraufgabe 3 [Maschinengenauigkeit]

Laden Sie sich das mlx-File `approx-exp.mlx` aus dem zugehörigen Moodle herunter und bearbeiten Sie die darin gestellten Aufgaben. Dabei wird Nachstehendes betrachtet:
Im Folgenden wollen wir uns drei verschiedene Algorithmen zur Approximation der Zahl e anschauen. Bekanntlich gilt

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

und folglich gilt

$$e = \exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Man kann zeigen, dass die Zahl e ebenso durch

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ausgedrückt werden kann. Dementsprechend kann man mit

$$e_N = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!}$$

und

$$\tilde{e}_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

Approximationen der Zahl e finden. Es werden zwei Algorithmen zur Berechnung von e_N und ein Algorithmus zur Berechnung von $\tilde{e}_N$ implementiert, um diese anschließend zu untersuchen. 3 + 2 + 2 = 7 Punkte

Gesamt: 10 + 6 + 7 = 23 Punkte