①

b) z.z. $f(x) , o(x^2)$ für $x \mapsto 0$

falsche Aussage:

$\exists\, c_2 > 0 \;\; \forall\, \varepsilon_2 > 0 \;, \exists\, x \in \{x \mid d(x, x_0) < \varepsilon_2\}$

$$|f(x)| > c_2 |g(x)|$$

Ang. $f(x) = x^2 + x$, und $\exists\, c_2 = 1$, $0 < x < \varepsilon_2$

$$|f(x)| = |x^2 + x| = |x^2| + |x| > |x^2| = |x^2|$$

$\Rightarrow f(x) \neq o(x^2)$ ⚡ ☒

c) z.z. $f(x) \cdot g(x) = O(x^5)$ für $x \mapsto 0$

$\exists\, c_1 > 0 \;\; \forall, \exists\, \varepsilon_1 > 0 \;, \exists\, x \in \{x \mid d(x, x_0) < \varepsilon_1\}$

$$|f(x) \leq c_1 |g(x)|$$

wahre Aussage:

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \tilde{c}_1 |x^5|$$

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq c_1 |x^2| \cdot c_2 |x^3|$$
$$= c_1 \cdot c_2 |x^2| \cdot |x^3|$$
$$= \tilde{c}_1 |x^5|$$

d) z.z. $f(x) + g(x) = O(x^3)$ for $x \to 0$

$f(x) = O(x^2)$, $g(x) = O(x^3)$

Def:= $f(x) := x^2$; $g(x) := x^3$, $c_1 = c_2 = 1$

$|f(x)| = |x^2| \leq 1 |x^3|$

$|g(x)| = |x^3| \nleq 1 |x^2|$

$f(x) + g(x) = x^2 + x^3 \neq O(x^3)$

e) z.z. $g(x) - h(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x^3 \in O(x^3)\ ,\ c_1 = 1$

$h(x) = 4x^3 \in (x^3)\ ,\ c_2 = 4$

$g(x) - h(x) = x^3 - 4x^3 \neq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ falsche Aussage

Auf. 2

a) z.z. $\|A\|_2^2 = \max\{\lambda : \lambda$ ist EW von $A^T \cdot A\}$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A^T \cdot A$ z. symmetrische Matrix, daher gibt es eine Matrix B nach der Definition der Spektralnorm, die aus den EW von $A^T \cdot A$ besteht.

$\Rightarrow$ $D = B^T \cdot A^T \cdot B \cdot A$ $\Rightarrow$ Diagonalmatrix mit den EW von $A^T \cdot A$. Mit Substitution $y = B^T \cdot x$

Daraus folgt:

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|By\|_2 = 1} \underbrace{\langle A^T \cdot A \cdot By, By \rangle}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \max_{\|y\|_2 = 1} \langle Dy, y \rangle$$

$$= \max_{\|y\|_2 = 1} (\lambda_1 |y_1|^2 + \dots \lambda_n |y_n|^2) = \lambda_{max}$$

$\square$

2b)

z.z. mit $\|\cdot\|_2$-Norm $\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

$$\kappa_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2$$

$$= \max_{i=1,\dots,n} \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2}} \right| \cdot \sqrt{\lambda_{max}^2} \quad , \quad \frac{1}{\lambda_{1 \dots n}} = \text{EW von } A^{-1}$$

$$= \frac{1}{\min_{i=1,\dots,n} \sqrt{\lambda_i}} \cdot \sqrt{\lambda_{max}^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}^2}} \cdot \sqrt{\lambda_{max}^2} = \sqrt{\frac{\lambda_{max}^2}{\lambda_{min}^2}} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Es gilt weiter:

$$A^T \cdot A = A^2 \quad \text{(Symmetrisch)}$$

Also

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\|x\|=1} \langle Ax, Ax \rangle}$$

$$= \sqrt{\max_{\|x\|_2=1} \langle A^T \cdot A x, x \rangle} \quad = \text{analog für } \|A^{-1}\|$$

$$= \sqrt{\max_{\|x\|_2=1} \langle A^2 x, x \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda_{max}^2} = \lambda_{max}$$

☒

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\min \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}^2}}} = \frac{1}{\lambda_{min}}.$$

3 b) z.z. $eps = \inf\{\delta>0 \mid fl(1+\delta)>1\}$

Sei $eps = \frac{b^{1-n}}{2}$, $b>1$, n:= Mantise

eps ist die kleinste nicht-negative Zahl

Also: $1+eps>1$

Sei $eps(1) = f(x)-1$, $f(1) = \inf\{y\in\mathbb{F}, y>x\}$

Sei weiter $\varepsilon = eps(1)$, $0<\delta<\varepsilon$

$$\Rightarrow fl(1+\delta)\in \underbrace{(1, 1+\varepsilon)}_{\text{Umgebung}}.$$

Definiere $\delta = \varepsilon/2$, $fl(1+\delta)=1$

$$\Rightarrow M = \inf\{\delta>0 \mid fl(1+\delta)>1\}$$

$$= \inf\underbrace{\{\delta>0 \mid \delta>\tfrac{\varepsilon}{2}\}}_{>1} = \frac{\varepsilon}{2}$$

3c) ~~z.z.~~ Ans: $x_{min} = b^{r-1}$

$1\cdot b^{r-1} = 0{,}1\, b^r$, $0, \underbrace{(b-1)}_{d_1}\underbrace{(b-2)}_{d_2}\ldots\underbrace{(b-1)\cdot b^R}_{d_n}$

z.z. $x_{max} = (1-b^{-m})\,b^R$

~~Zeige~~ Sei $\Rightarrow x_{min} = b^{r-1}$

$0{,}n\, b^n < 0.1\, b^n$ $n\neq 0,1$, $n\in\{0,1,..b-1\}$

$\Leftrightarrow 0.n\, b^r - 0{,}1\, b^r < 0$

$\Rightarrow 0\,(n-1)\,b^r < 0$

$\Leftrightarrow n-1<0$ $n\neq 0$ ↯

Also $x_{max} = (1-b^{-r})\cdot b^R$

3d) z.B. $fl(110) = \mathbb{M}(\overset{b}{2}, \overset{m}{5}, -6\overset{r}{4}, 6\overset{R}{3})$

$$fl(110) \overset{!}{=} 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1$$

$$= 2^7 (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot$$

$$fl(110) = 108$$