Numerische Analysis I

Prof. Dr. Arnold Reusken – Hauke Saß – Stephanie Schwab
WS 2022/23

Übungsblatt 1

Abgabe bis 18.10.2022, 12 Uhr (via Moodle von einem Gruppenmitglied).

Theorieaufgabe 1 [Matrixnormen]

Sei $\|\cdot\|$ eine gegebene (Vektor–)Norm des $\mathbb{R}^n$. Analog zur Vorlesung definieren wir die von ihr *induzierte Matrixnorm* für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n:\ x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ .$$

1. Zeigen Sie, dass $\|A\|$ wohldefiniert ist, also eine nichtnegative reelle Zahl ergibt.
2. Zeigen Sie, dass tatsächlich eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ vorliegt.
3. Zeigen Sie, dass $\|Ax\| \leq \|A\|\cdot\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
4. Zeigen Sie, dass $\|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
5. Die ∞-Norm für Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Zeigen Sie, dass für die von ihr induzierte Matrixnorm $\|A\|_\infty$ die Identität
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{1\leq j\leq n} |a_{ij}|\right\} \qquad \text{gilt.}$$
6. Zeigen Sie, dass die Maximumnorm für Matrizen, $\|A\|_{max} = \max\{|a_{ij}| : 1 \leq i,j \leq n\}$ von keiner Vektornorm induziert wird.
Hinweis: Finde einen Widerspruch mit Hilfe der bisher gefundenen Aussagen.

2 + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 = 10 Punkte

Theorieaufgabe 2 [Taylor-Entwicklung]

Wir verallgemeinern die mehrdimensionale Taylor-Entwicklung aus der Vorlesung. Für $f = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar gilt

$$f(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{x}) + R_k(\mathbf{x})$$

mit dem Taylorpolynom vom Grad k in $\mathbf{x_0} = ((x_0)_1, (x_0)_2, \ldots, (x_0)_n)^T$

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{x_0})}{\alpha!}(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})^\alpha$$

und dem Restglied nach Lagrange

$$R_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})^\alpha\,,$$

wobei für den Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ gilt

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n} f\,, \qquad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i\,, \qquad \alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!\,, \qquad \mathbf{x}^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\,,$$

und $\xi = \mathbf{x_0} + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})$ für ein $\theta \in (0,1)$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom und das Restglied nach Lagrange vom Grad 2 in (x_0, y_0) für die Funktion $f(x, y) = \sin(x) + x^2y^2 + 1$.

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus a), um den relativen Fehler in Abhängigkeit von ϵ und δ abzuschätzen, der entsteht, wenn f an der Stelle $\mathbf{x} = (\epsilon, 1 + \delta)$ statt an der Stelle $\mathbf{x_0} = (0, 1)$ ausgewertet wird.

3+3 = 6 Punkte

Theorieaufgabe 3 [Kondition]

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \sqrt{x^2 - 100}\,.$$

Bestimmen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_{\text{rel}}(f)$ an der Stelle $x_0 = 10.2$.

b) Es sei nun $x := 10.1$ als gestörtes Eingangsdatum gegeben. Wie groß ist einerseits die theoretische Schranke für den relativen Fehler und andererseits der tatsächliche relative Fehler r_f gegenüber dem exakten Wert $f(10.2)$. Was beobachten Sie und warum ist das möglich?

2 + 2 = 4 Punkte

Gesamt: 10 + 6 + 4 = 20 Punkte