Antwoorden tentamen Digitale Signaalverwerking
21 december 2016

Opgave 1

Geef aan of de volgende beweringen goed of fout zijn, en beargumenteer waarom:

1. In een spectrum representeren we een signaal door zijn frequentiecomponenten. klopt
2. Continue signalen zijn periodiek in het tijddomein. fout
3. Een even periodiek signaal heeft alleen Fouriercoëfficiënten $a_k \neq 0$ voor k is even. fout
4. Het spectrum van een reëel niet-periodiek discreet signaal is een lijnenspectrum. fout
5. Digitale filters hebben een periodieke frequentierespons. klopt
6. Systemen met begrensde invoer zijn stabiel. fout
7. Een discreet signaal heeft altijd een continu spectrum. fout
8. Een discrete complexe e-macht is periodiek in het frequentiedomein. klopt
9. Continue signalen kunnen harmonische componenten van elke frequentie bevatten, discrete signalen daarentegen kunnen frequenties bevatten tussen 0 en $f_s/2$. klopt
10. De nulpunten van een stabiel systeem bevinden zich altijd binnen de eenheidscirkel. fout

Opgave 2

$x(t) = 1 + \cos 2\pi t + \sin 5\pi t$

1. Frequentie cos is $\omega_1 = 2\pi$ en frequentie sin is $\omega_2 = 5\pi$.
   Fundamentele frequentie is $ggd(2\pi, 5\pi) = \pi$.
   Periode cos is $T_1 = 1$ en periode sin is $T_2 = 2/5$.
   Fundamentele periode is $kgv(1, 2/5) = 2$.
2. $x(t) = 1+\cos 2\pi t+\sin 5\pi t = 1+\dfrac{1}{2}\left(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}\right)+\dfrac{1}{2j}\left(e^{j5\pi t}-e^{-j5\pi t}\right)$
   $a_0 = 1, a_{\pm 1} = 0, a_{\pm 2} = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}j, a_{-5} = \frac{1}{2}j$
   $a_k = 0$ voor overige k.

Opgave 3

Gegeven het volgende periodieke discrete signaal:

$$x[n] = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

1. Schrijf $x[n]$ als de som van complexe e-machten.

   $x[n] = \left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}n}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}n}$

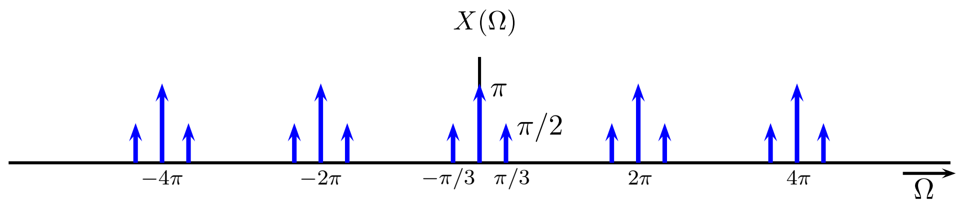
2. Wat is de periode N? $N = 6$

3. Wat is dan de fundamentele frequentie? $\Omega_0 = \pi/3$

4. Bepaal de Fourier-coëfficiënten a_k voor $k = 0, \dots, N$.

   $a_0 = 1/2$, $a_1 = a_5 = 1/4$, rest a_n gelijk aan 0.

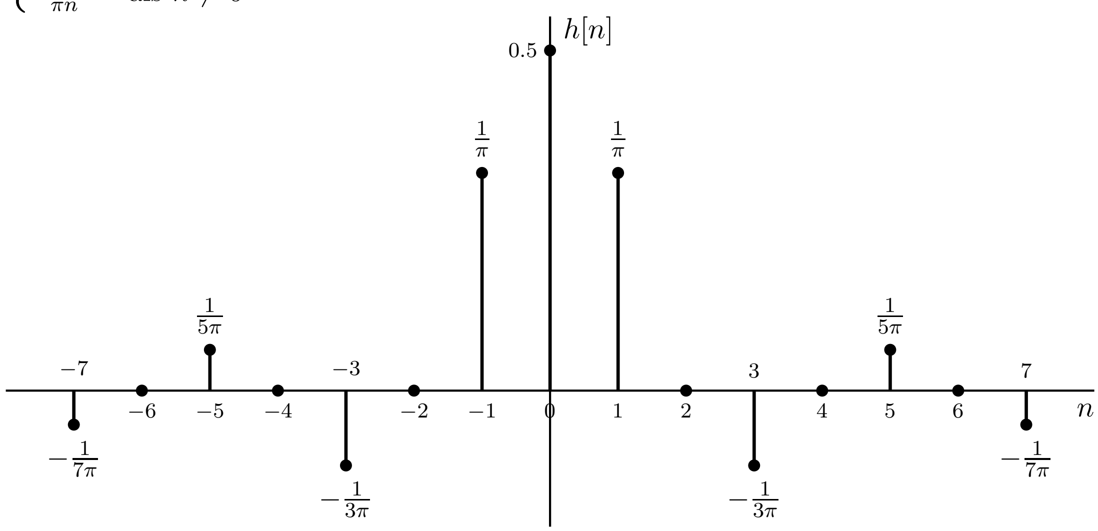
5. Teken de Fouriertransformatie $X(\Omega)$ van $x[n]$ voor $-5\pi < \Omega < 5\pi$.



Opgave 4

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j\Omega n}\,d\Omega = \left.\frac{e^{j\Omega n}}{j2\pi n}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{j2\pi n} =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } n = 0 \\ \frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\pi n} & \text{als } n \neq 0 \end{cases}$$



Opgave 5

1. $2y'''(t) + 12y''(t) + 13y'(t) = 12x'(t) + 40x(t)$

   $Y(s)\Big(2s^3 + 12s^2 + 13s\Big) = X(s)\Big(12s + 40\Big)$

   $$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{12s + 40}{2s^3 + 12s^2 + 13s}$$

2. $Y(s) = \dfrac{1}{s}X(s) = \dfrac{1}{s}\dfrac{12s + 40}{2s^2 + 12s + 13}$

3. nulpunten $12s + 40 = 0, s = -\frac{40}{12} = -3.33$

   polen $s = 0$ of $2s^2 + 12s + 13 = 0$

   $$s^2 + 6s + 6.5 = 0$$
   $$s_{1,2} = \tfrac{-6\pm\sqrt{36-26}}{2} = -3 \pm 0.5\sqrt{10} = -3 \pm 1.58$$
   $$s = -1.42 \text{ of } s = -4.58$$

   $$H(s) = \frac{1}{s}\frac{12s + 40}{2s^2 + 12s + 13} = \frac{1}{s}\frac{12(s + 3.33)}{2(s + 1.42)(s + 4.58)} = 6\frac{s + 3.33}{s(s + 1.42)(s + 4.58)}$$

   Dus $K_{pn} = 6$

Opgave 6

1. nulpunten $z = \pm 1$, polen $z = 0.9e^{\pm j\pi/3}$

2. Gebruik
   $$(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta}) = z^2 - 2rzcos(\theta) + r^2.$$

   $$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z - 0.9e^{j\pi/3})(z - 0.9e^{-j\pi/3})} = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 0.9z + 0.81} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

3. $Y(z)(1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}) = X(z)(1 - z^{-2})$

   $y[n] - 0.9y[n-1] + 0.81y[n-2] = x[n] - x[n-2]$

   $y[n] = 0.9y[n-1] - 0.81y[n-2] + x[n] - x[n-2]$

4. $\Omega = 0 \leftrightarrow z = 1\text{: } H(1) = 0$

   $\Omega = \pi \leftrightarrow z = -1\text{: } H(-1) = 0$

   $\Omega = \pi/2 \leftrightarrow z = j\text{: } H(j) = \frac{j^2-1}{j^2-0.9j+0.81} = \frac{-2}{-0.19-0.9j} = \frac{2}{0.19+0.9j}$

   $|H(j)| = \frac{2}{|0.19+0.9j|} = \frac{2}{\sqrt{0.19^2+0.9^2}} = \frac{2}{0.85} = 2.36$

   $arg(H(j)) = 0.43\pi$

5. $y[n] = H(0)1 + H(j)\cos(\frac{\pi}{2}n) + H(-1)\cos(-\pi n) = 2.36\cos(\frac{\pi}{2}n + 0.43\pi)$

Opgave 7

1. $y[n] = 0.9y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$
   $Y(z) - 0.9z^{-1}Y(z) = \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$
   $Y(z)(1 - 0.9z^{-1}) = X(z)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1})$
   $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}(z+1)}{z - 0.9} \quad \text{plotje 2}$$

2. $y[n] = -0.9y[n-1] + 9x[n] + 10x[n-1]$
   $Y(z) + 0.9z^{-1}Y(z) = 9X(z) + 10z^{-1}X(z)$
   $Y(z)(1 + 0.9z^{-1}) = X(z)(9 + 10z^{-1})$
   $$H(z) = \frac{9z + 10}{z + 0.9} = \frac{9(z + \frac{10}{9})}{z + 0.9} \quad \text{plotje 3}$$

3. $$H(z) = \frac{\frac{1}{2}(1 - z^{-1})}{1 + 0.9z^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}(z-1)}{z + 0.9} \quad \text{plotje 6}$$

4. $y[n] = \frac{1}{4}x[n] + x[n-1] + \frac{3}{2}x[n-2] + x[n-3] + \frac{1}{4}x[n-4]$
   $Y(z) = X(z)(\frac{1}{4} + z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2} + z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-4})$
   $$H(z) = \frac{1}{4} + z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2} + z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-4} = \frac{\frac{1}{4}z^4 + z^3 + \frac{3}{2}z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^4}$$
   plotje 5

5. $$y[n] = \sum_{k=0}^{3} x[n-k]$$
   $y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3]$
   $Y(z) = X(z)(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$
   $$H(z) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3} \quad \text{plotje 4}$$

6. $y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + x[n-5]$
   $Y(z) = X(z)(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5})$
   $$H(z) = \frac{z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^5}$$
   $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1}{1-z} - z^6(1 + z + z^2 + \ldots) = \frac{1-z^6}{1-z}$
   $$H(z) = \frac{1 - z^6}{z^5(1-z)} \quad \text{plotje 1}$$