Ordenação: MergeSort

Prof. Túlio Toffolo
http://www.toffolo.com.br

BCC202 – Aula 14
Algoritmos e Estruturas de Dados I

DIVISÃO E CONQUISTA

Motivação

- É preciso revolver um problema com uma entrada grande
- Para facilitar a resolução do problema, a entrada é quebrada em pedaços menores (**DIVISÃO**)
- Cada pedaço da entrada é então tratado separadamente (**CONQUISTA**)
- Ao final, os resultados parciais são combinados para gerar o resultado final procurado

A técnica de Divisão e Conquista

A técnica de divisão e conquista consiste de 3 passos:

- **Divisão**: Dividir o problema original em subproblemas menores
- **Conquista**: Resolver cada subproblema recursivamente
- **Combinação**: Combinar as soluções encontradas, compondo uma solução para o problema original

A técnica de Divisão e Conquista

- Algoritmos baseados em divisão e conquista são, em geral, **recursivos**.
- A maioria dos algoritmos de divisão e conquista divide o problema em a subproblemas da mesma natureza, de tamanho **n/b.**
- Vantagens:
  - Requerem um número menor de acessos à memória.
  - São altamente paralelizáveis. Se existirem vários processadores disponíveis, a estratégia propiciará eficiência.

Quando utilizar?

- Existem três condições que indicam que a estratégia de divisão e conquista pode ser utilizada com sucesso:
  - Deve ser possível decompor uma instância em sub-instâncias
  - A combinação dos resultados dever ser eficiente (trivial se possível)
  - As sub-instâncias devem ser mais ou menos do mesmo tamanho

Algoritmo Genérico

```
def divisao_e_conquista(x):
    if x é pequeno ou simples:
        return resolve(x)
    else:
        decompor x em n conjuntos menores x_0,x_1,...,x_n-1
        for i in [0,1,...,n-1]:
            y_i = divisao_e_conquista(x_i)
        combinar y_0,y_1,...,y_n-1 em y
        return y
```

ORDENAÇÃO POR INTERCALAÇÃO

MERGESORT

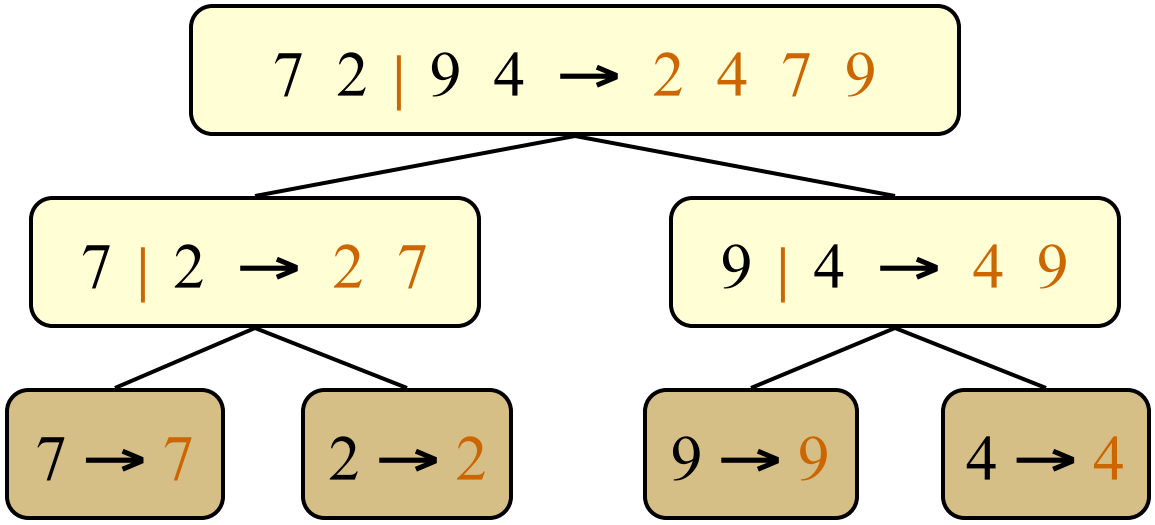
Abordagem com Balanceamento

- Métodos de ordenação que fazem divisão e conquista
  - QuickSort (pior caso?)
  - MergeSort

- Principal diferença:
  - QuickSort utiliza o conceito de elemento pivô para dividir o problema em subproblemas
  - MergeSort sempre divide o problema de forma balanceada (gerando subproblemas de mesmo tamanho)

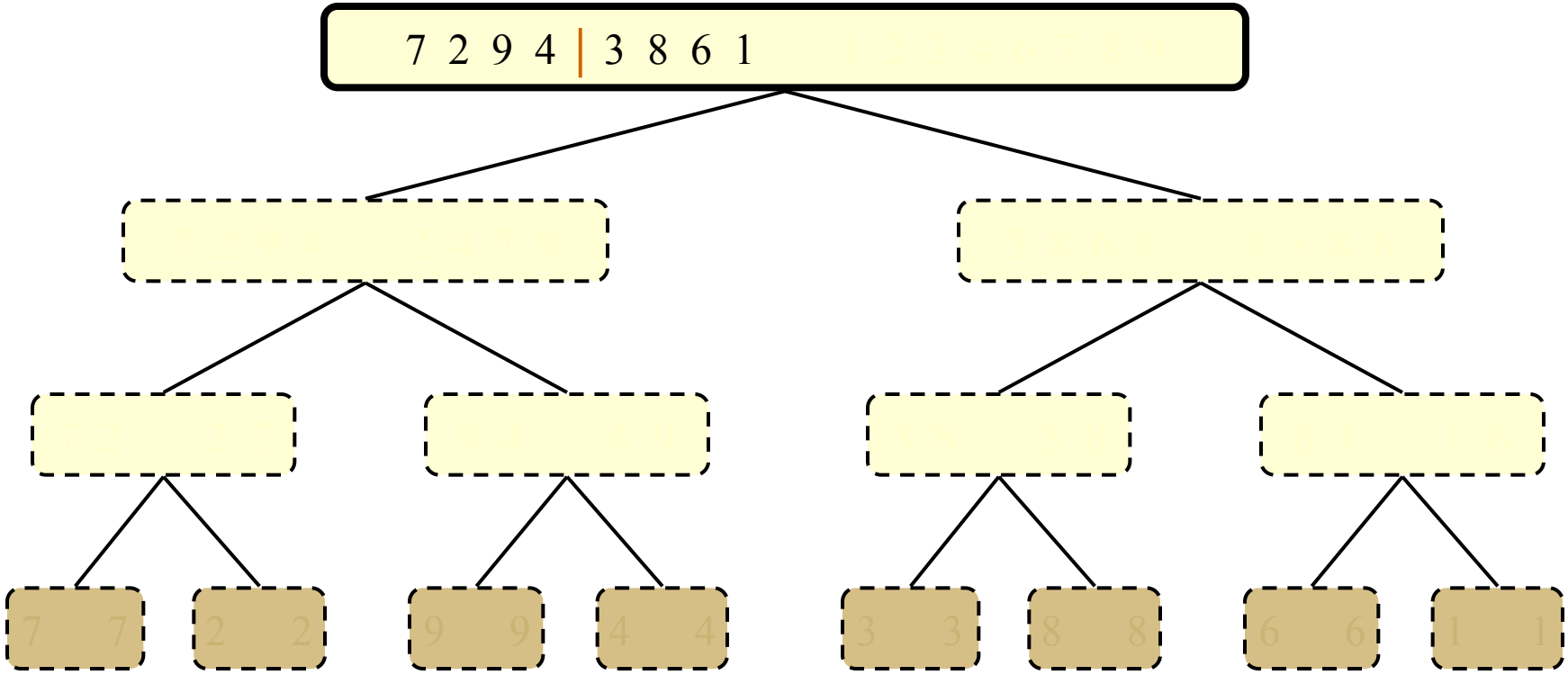
MergeSort: Execução

- A execução do MergeSort pode ser facilmente descrita por uma árvore binária
  - Cada nó representa uma chamada recursiva do MergeSort
  - O nó raiz é a chamada inicial
  - Os nós folhas são vetores de 1 ou 2 números (casos bases)



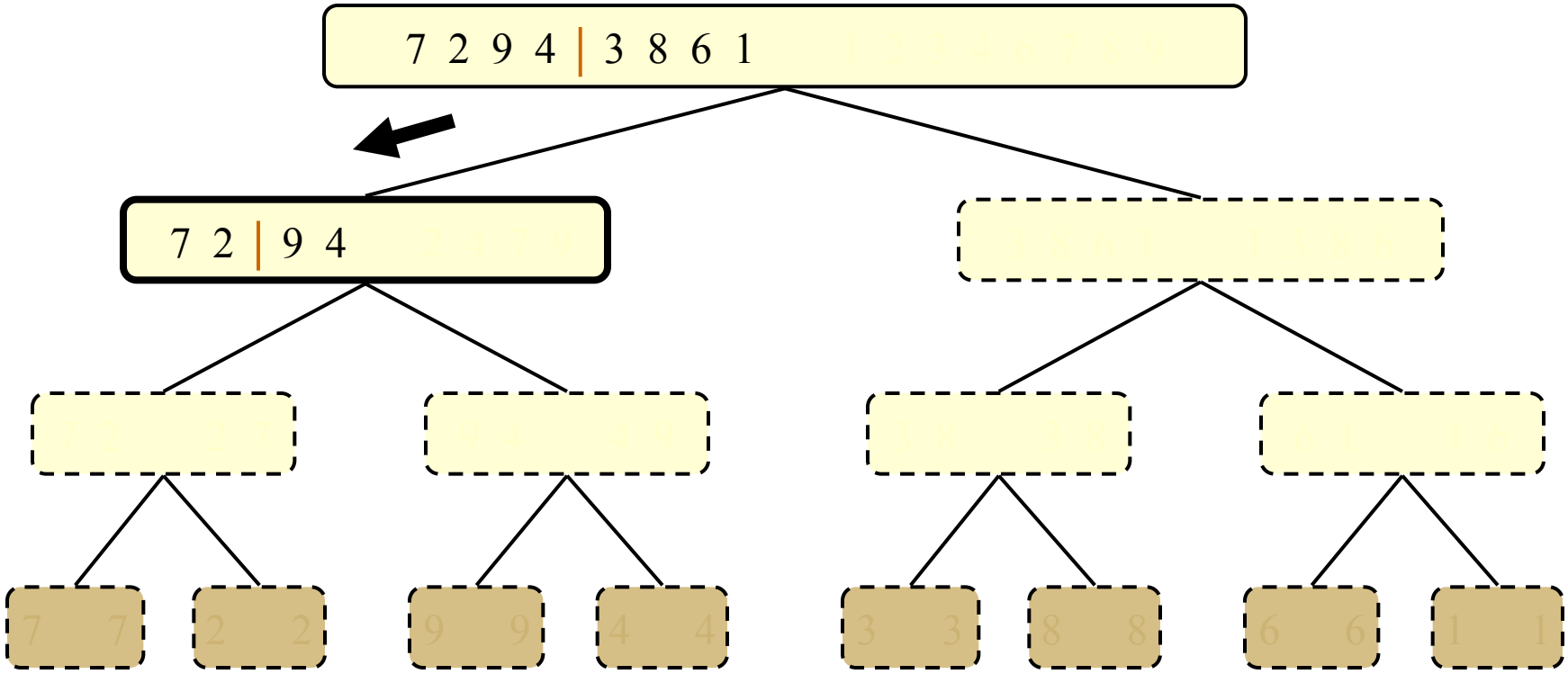
MergeSort: Exemplo de Execução

- Partição do problema (sempre no meio do vetor)



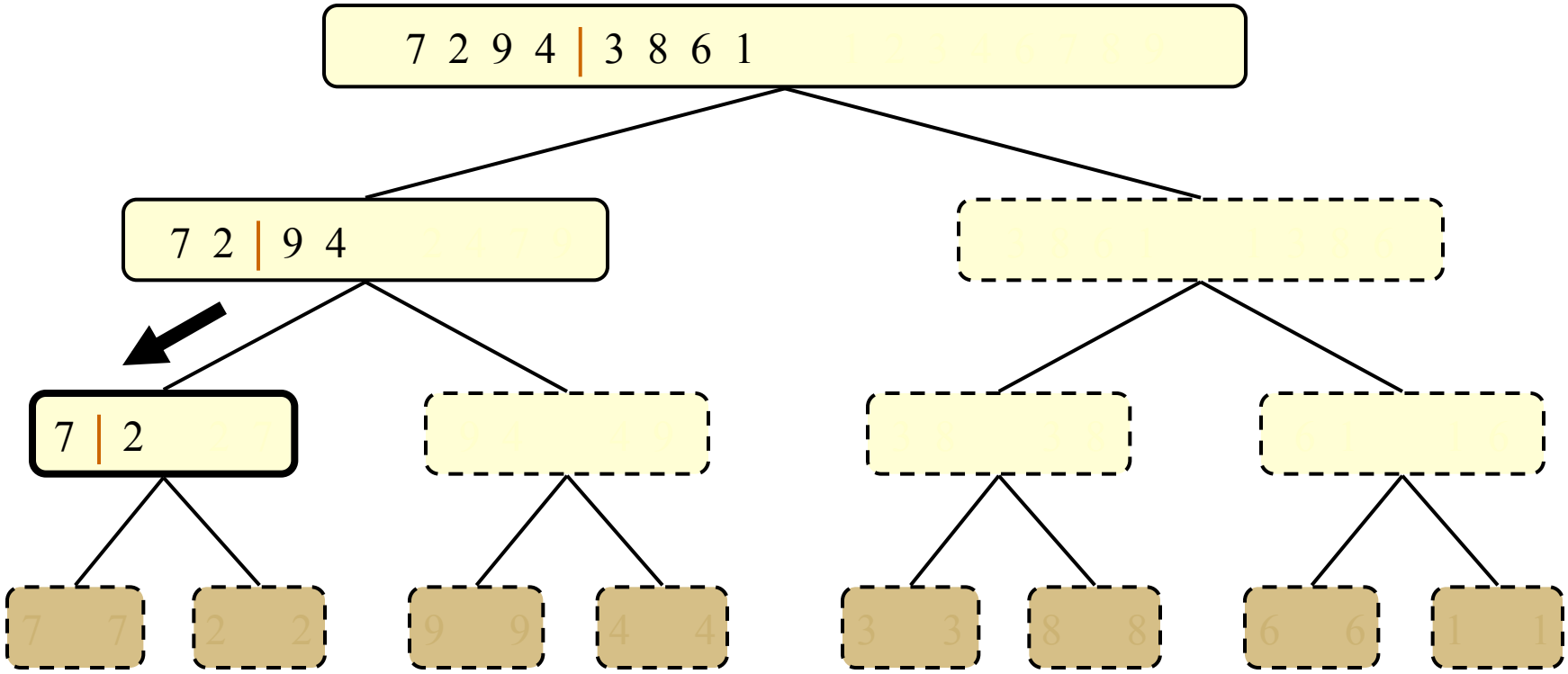
MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Chamada recursiva para primeira partição



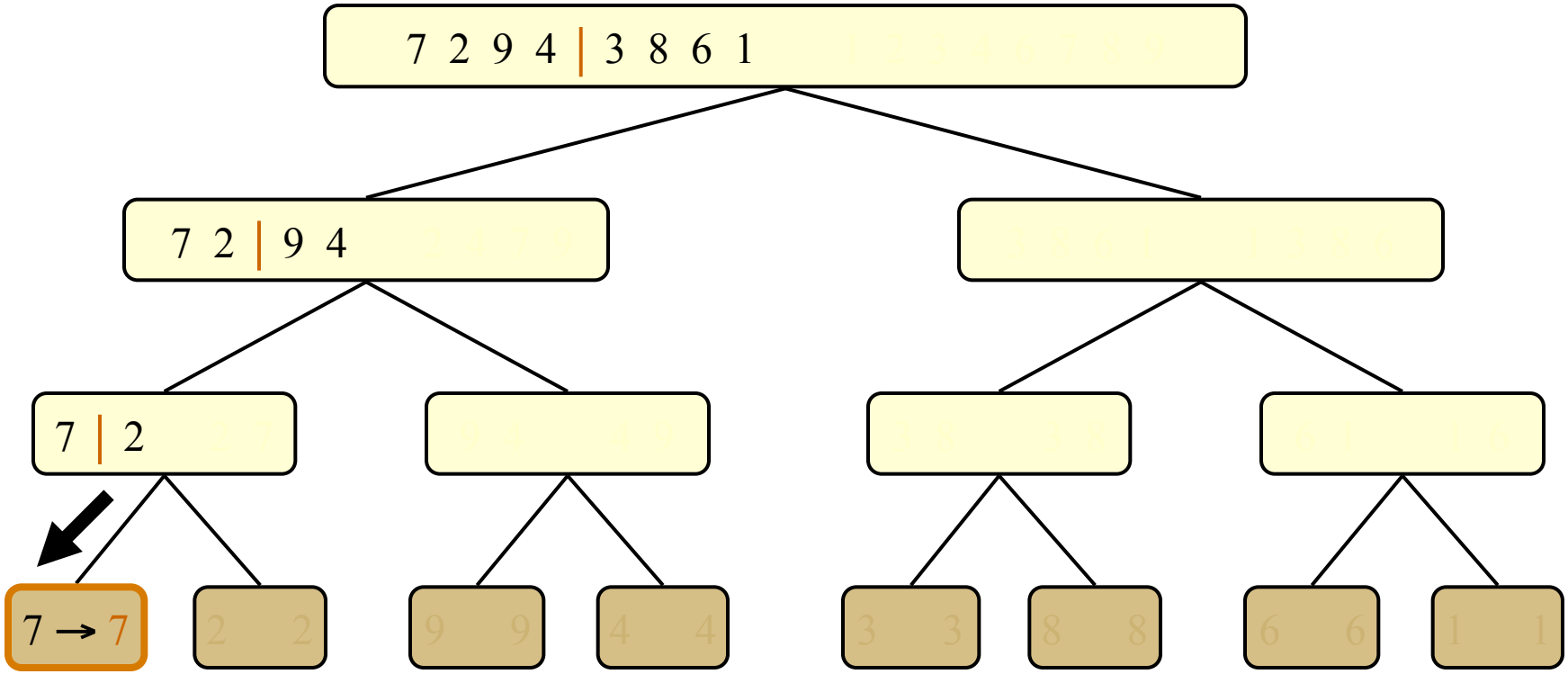
MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Chamada recursiva



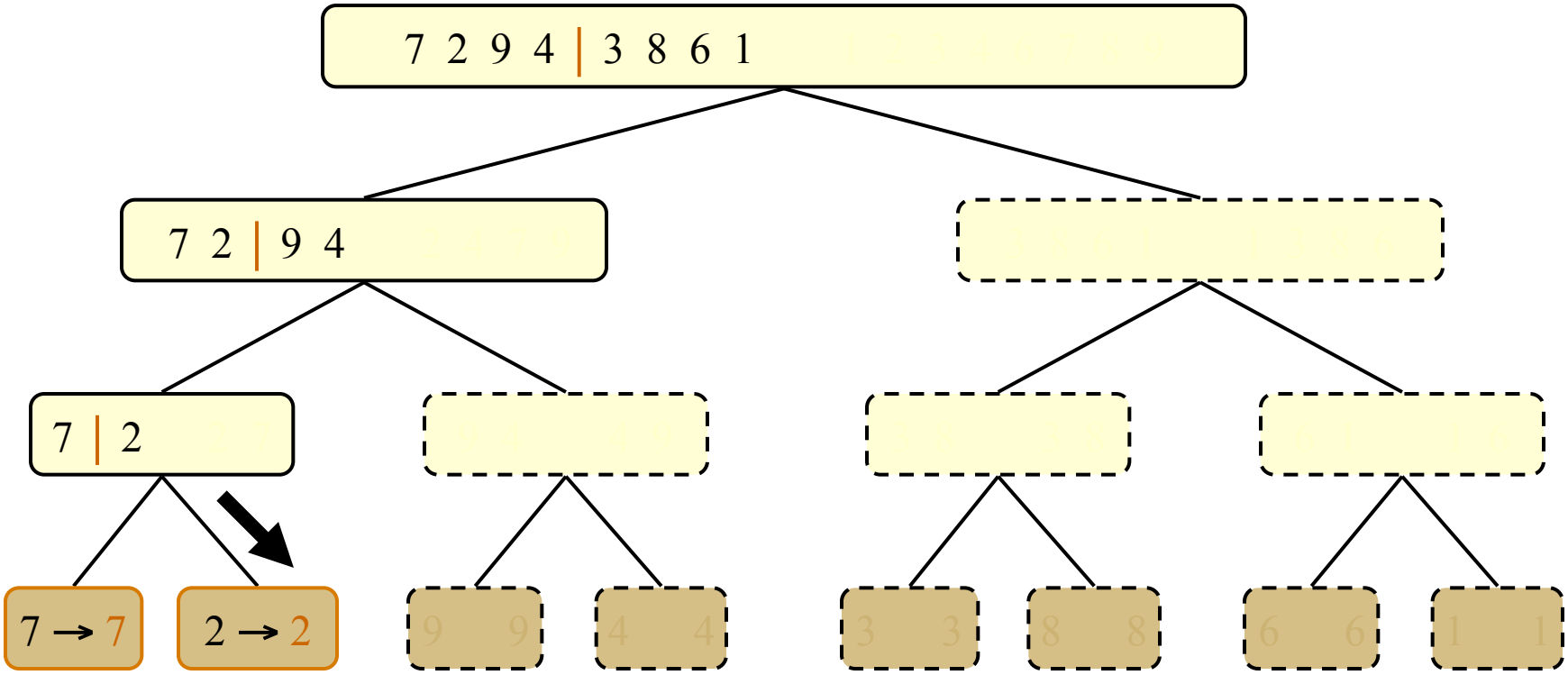
MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Chamada recursiva: caso base encontrado



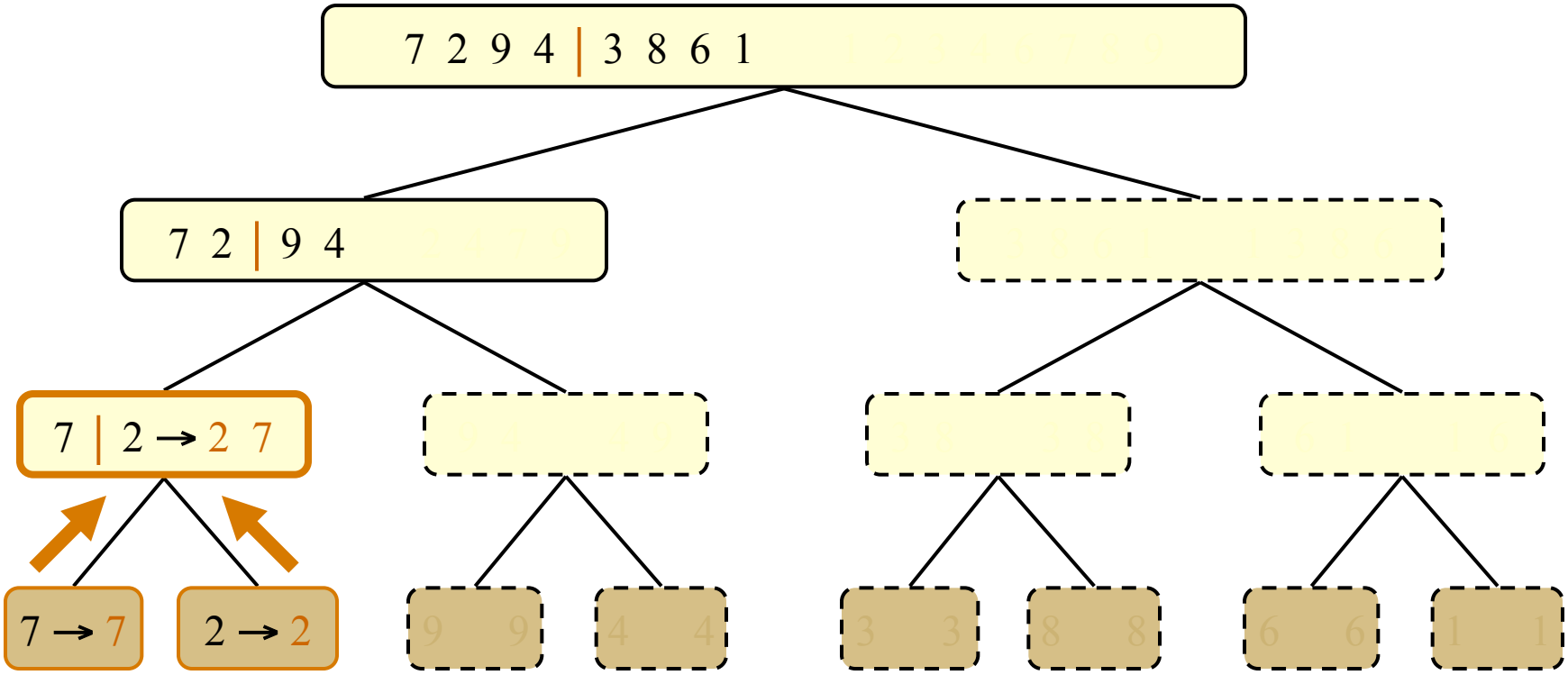
MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Chamada recursiva: caso base encontrado



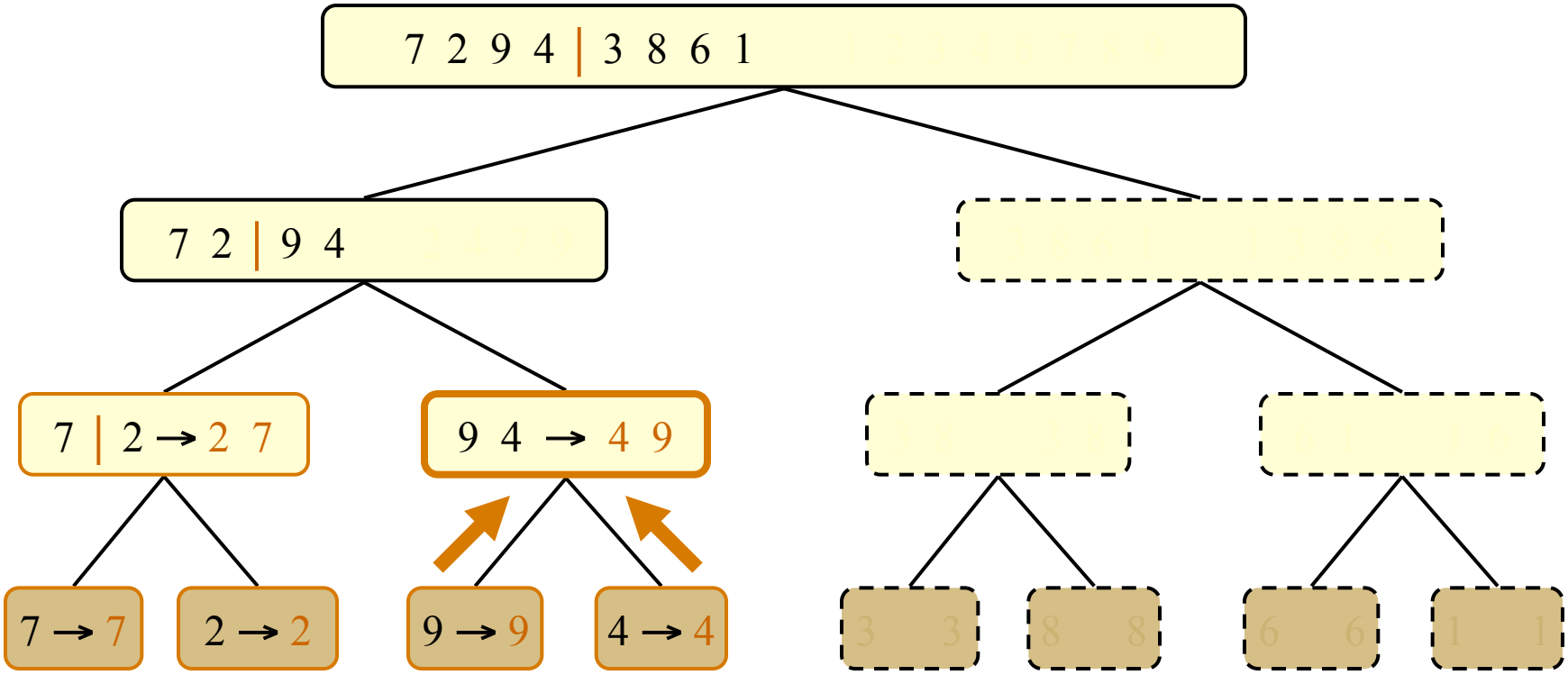
MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Operação de merge (intercalação)



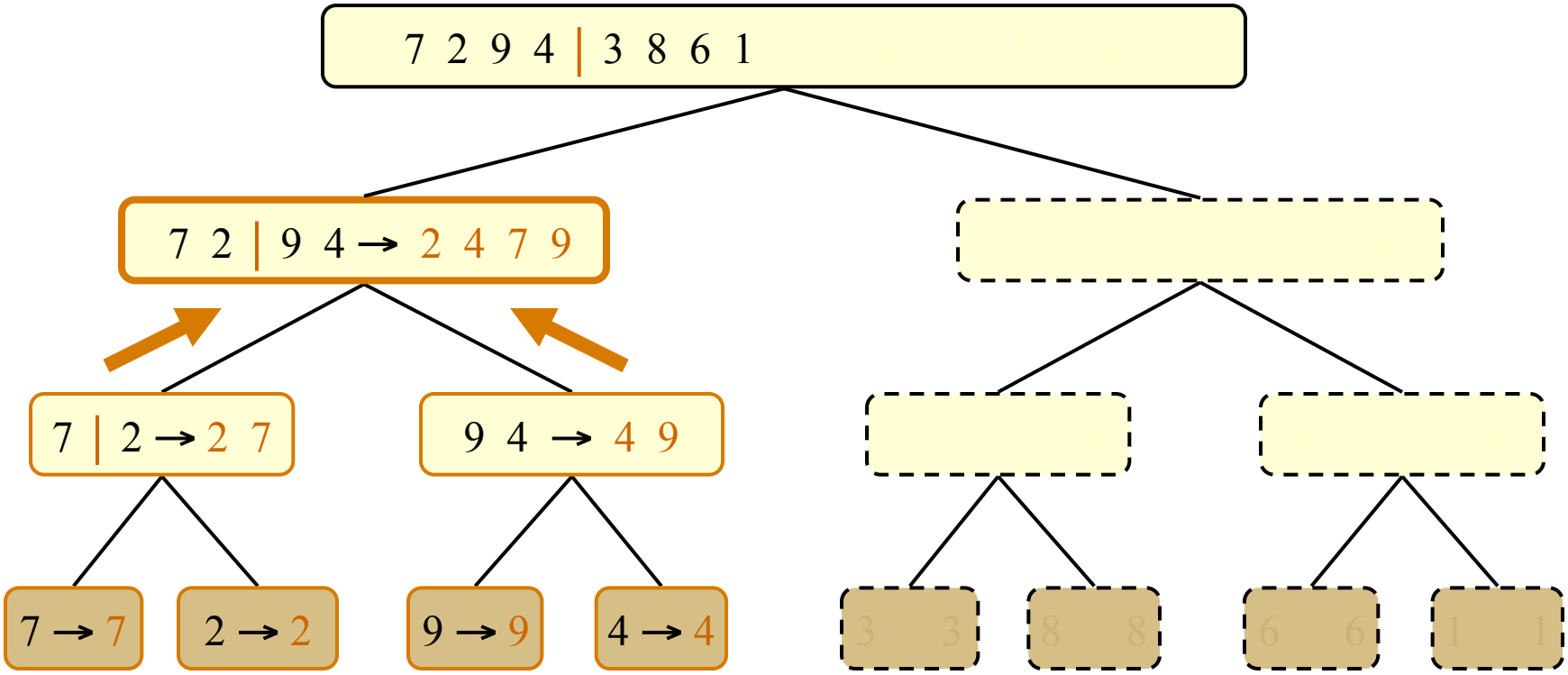
MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Chamadas recursivas, casos bases e merge (intercalação)



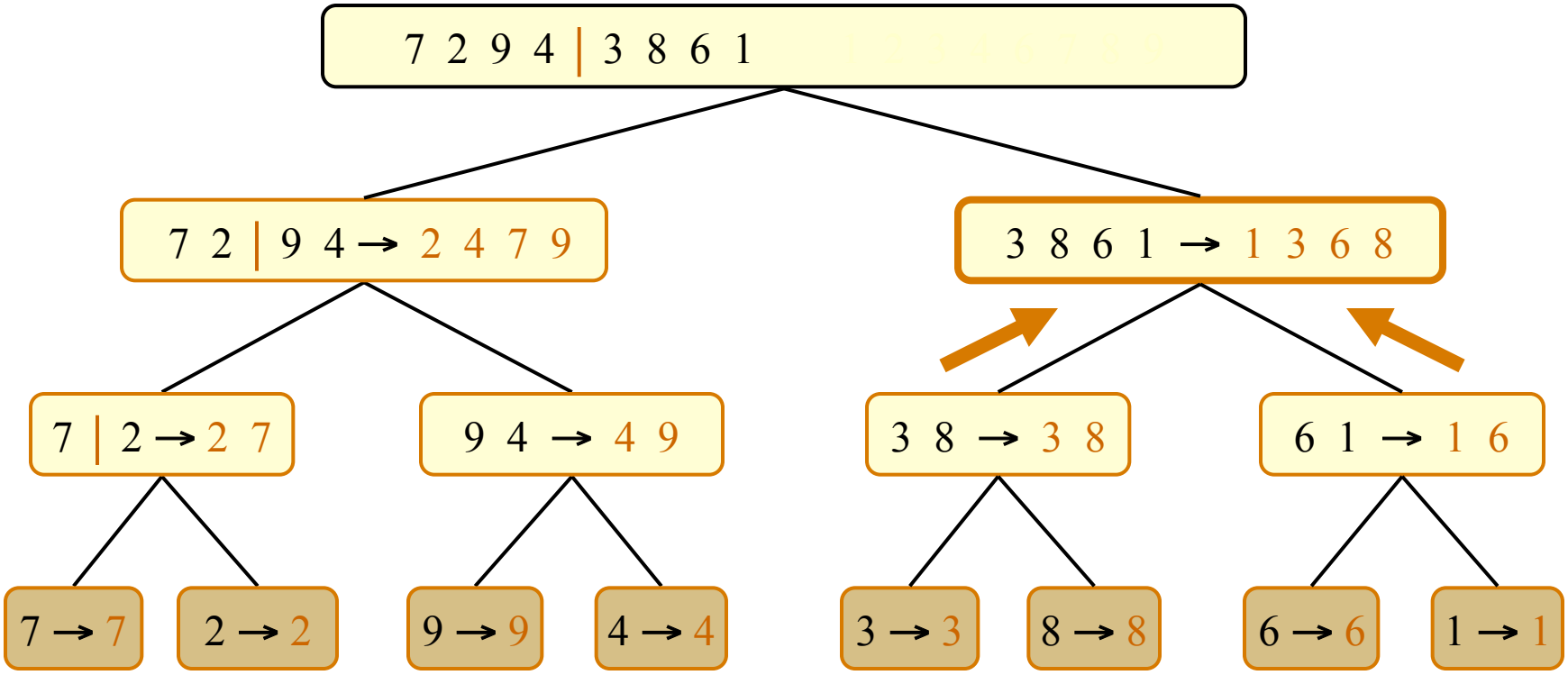
MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Operação de merge (intercalação)



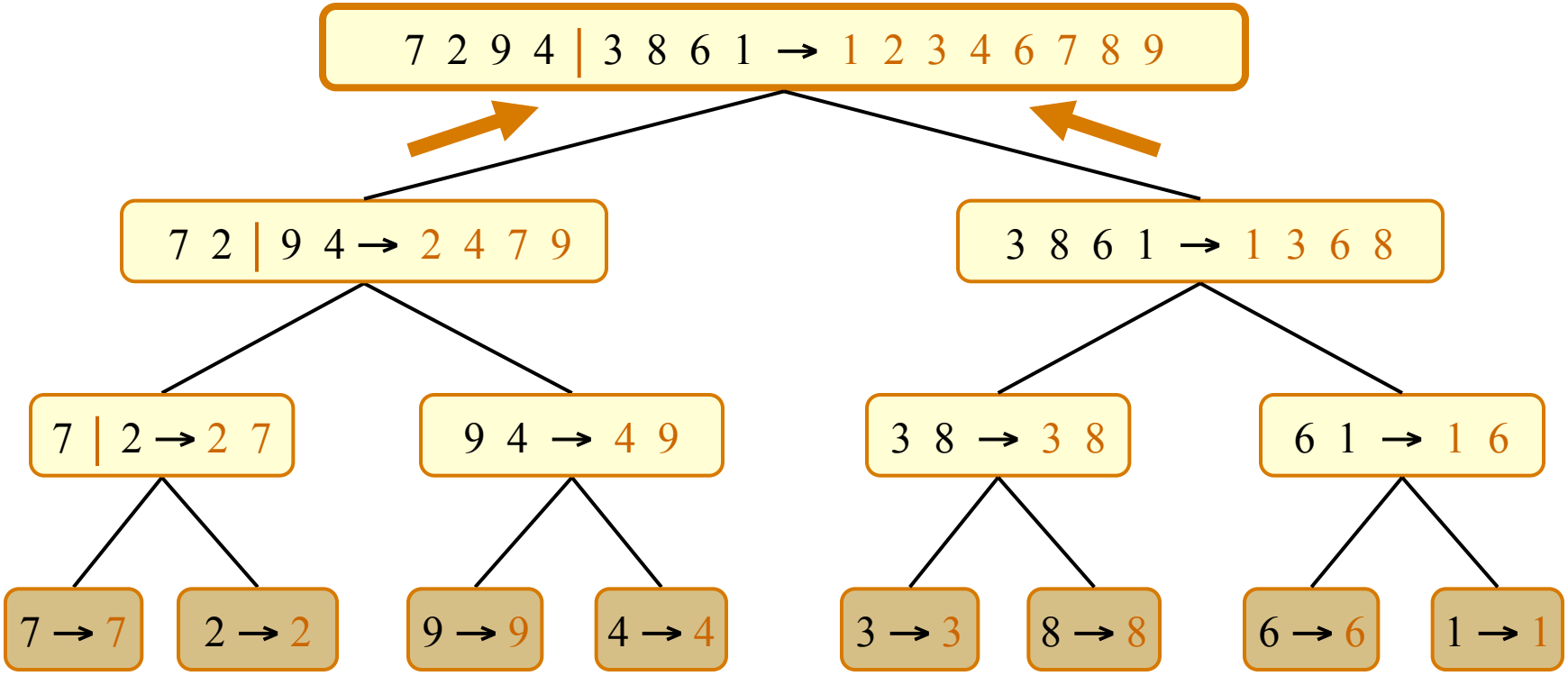
MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Execução do MergeSort para a outra partição



MergeSort: Exemplo de Execução (cont.)

- Finalmente o último merge (intercalação)

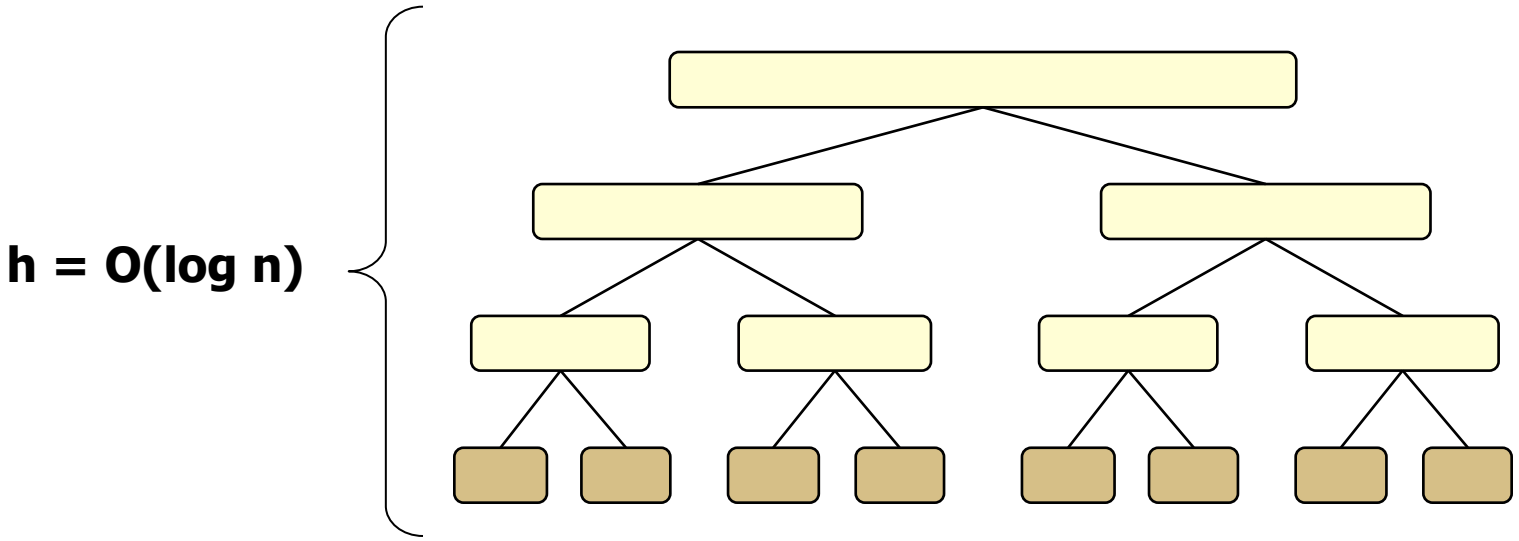


MERGESORT

ANÁLISE DO ALGORITMO

Análise do MergeSort

- A altura **h** da árvore de execução é **O(log n)**
- A quantidade de operações em cada nível da árvore é assintoticamente igual a **O(n)**
- Logo: algoritmo é **O(n log n)**



MERGESORT

IMPLEMENTAÇÃO RECURSIVA

Algoritmo MergeSort


```c
/* ordena o vetor v[0..n-1] */
void mergeSort(TItem *v, int n) {
    mergeSort_ordena(v, 0, n-1);
}

/* ordena o vetor v[esq..dir] */
void mergeSort_ordena(TItem *v, int esq, int dir) {
    if  (esq == dir)
        return;

    int meio = (esq + dir) / 2;
    mergeSort_ordena(v, esq, meio);
    mergeSort_ordena(v, meio+1, dir);
    mergeSort_intercala(v, esq, meio, dir);
    return;
}
```

Algoritmo MergeSort


```c
/* intercala os vetores v[esq..meio] e v[meio+1..dir] */
void mergeSort_intercala(TItem *v, int esq, int meio, int dir) {
    int i, j, k;
    int a_tam = meio-esq+1;
    int b_tam = dir-meio;
    TItem *a = (TItem*) malloc(sizeof(TItem) * a_tam);
    TItem *b = (TItem*) malloc(sizeof(TItem) * b_tam);

    for (i = 0; i < a_tam; i++) a[i] = v[i+esq];
    for (i = 0; i < b_tam; i++) b[i] = v[i+meio+1];

    for (i = 0, j = 0, k = esq; k <= dir; k++) {
        if (i == a_tam) v[k] = b[j++];
        else if (j == b_tam) v[k] = a[i++];
        else if (a[i].chave < b[j].chave) v[k] = a[i++];
        else v[k] = b[j++];
    }
    free(a); free(b);
}
```

Implementação do MergeSort

- O procedimento Intercala requer o uso de um segundo arranjo, B, para receber os dados ordenados.
- Note que no retorno de Mergesort com um arranjo de tamanho 1, a resposta encontra-se no arranjo A (o arranjo original de entrada).
- No próximo nível (arranjo de comprimento 2) o resultado da intercalação estará no arranjo B.

Implementação do MergeSort

- Podemos administrar este problema de duas maneiras:
  - Copiando a porção do arranjo referente ao resultado de volta para o arranjo A
  - Utilizando uma chave para indicar a "direção" dos movimentos de Intercala.

MERGESORT

VANTAGENS/DESVANTAGENS

MergeSort

- Vantagens
  - MergeSort é **O(n log n)**
  - Indicado para aplicações que tem restrição de tempo (executa sempre em um determinado tempo para n)
  - Passível de ser transformado em estável
    - Tomando certos cuidados na implementação da intercalação
  - Fácil Implementação
- Desvantagens
  - Utiliza memória auxiliar – O(n)
  - Na prática é mais lento que QuickSort no caso médio

MERGESORT

IMPLEMENTAÇÃO NÃO-RECURSIVA

MergeSort Não Recursivo

```
/* ordena o vetor v[0..n-1] - MergeSort iterativo */
void mergeSort_iter(TItem *v, int n) {
    int esq, dir;
    int salto = 1;
    while (salto < n) {
        esq = 0;
        while (esq + salto < n) {
            dir = esq + 2*salto;
            if (dir > n) dir = n;
            mergeSort_intercala(v, esq, esq+salto-1, dir-1);
            esq = esq + 2*salto;
        }
        salto = 2*salto;
    }
}
```

Perguntas?

MERGESORT

EXERCÍCIO

Exercício

- Dada a sequência de números:

3 4 9 2 5 1 8

Ordene em ordem crescente utilizando o algoritmo **MergeSort**, apresentado a sequência dos números a cada passo do algoritmo.