





#### Ordenação: MergeSort

**Prof. Túlio Toffolo** 

http://www.toffolo.com.br

**BCC202 - Aula 14** 

Algoritmos e Estruturas de Dados I

## **DIVISÃO E CONQUISTA**

#### Motivação



- É preciso revolver um problema com uma entrada grande
- Para facilitar a resolução do problema, a entrada é quebrada em pedaços menores (DIVISÃO)
- Cada pedaço da entrada é então tratado separadamente (CONQUISTA)
- Ao final, os resultados parciais são combinados para gerar o resultado final procurado

#### A técnica de Divisão e Conquista



A técnica de divisão e conquista consiste de 3 passos:

- <u>Divisão</u>: Dividir o problema original em subproblemas menores
- **Conquista**: Resolver cada subproblema recursivamente
- Combinação: Combinar as soluções encontradas, compondo uma solução para o problema original

#### A técnica de Divisão e Conquista



- Algoritmos baseados em divisão e conquista são, em geral, <u>recursivos</u>.
- A maioria dos algoritmos de divisão e conquista divide o problema em a subproblemas da mesma natureza, de tamanho n/b.
- Vantagens:
  - Requerem um <u>número menor de acessos à memória</u>.
  - São <u>altamente paralelizáveis</u>. Se existirem vários processadores disponíveis, a estratégia propiciará eficiência.

#### **Quando utilizar?**



- Existem três condições que indicam que a estratégia de divisão e conquista pode ser utilizada com sucesso:
  - Deve ser possível decompor uma instância em sub-instâncias
  - A combinação dos resultados dever ser eficiente (trivial se possível)
  - As sub-instâncias devem ser mais ou menos do mesmo tamanho

#### **Algoritmo Genérico**



```
def divisao_e_conquista(x):
    if x é pequeno ou simples:
        return resolve(x)
    else:
        decompor x em n conjuntos menores x<sub>0</sub>,x<sub>1</sub>,...,x<sub>n-1</sub>
        for i in [0,1,...,n-1]:
            y<sub>i</sub> = divisao_e_conquista(x<sub>i</sub>)
        combinar y<sub>0</sub>,y<sub>1</sub>,...,y<sub>n-1</sub> em y
        return y
```

# ORDENAÇÃO POR INTERCALAÇÃO MERGESORT

#### **Abordagem com Balanceamento**

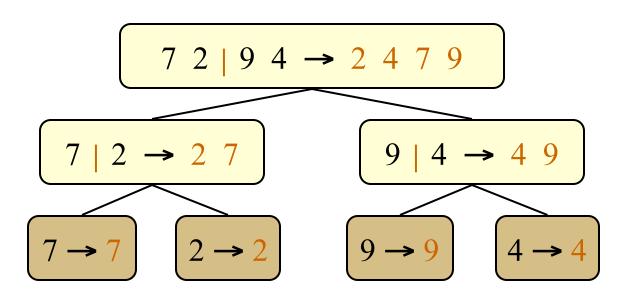


- Métodos de ordenação que fazem divisão e conquista
  - QuickSort (pior caso?)
  - MergeSort
- Principal diferença:
  - QuickSort utiliza o conceito de elemento pivô para dividir o problema em subproblemas
  - MergeSort <u>sempre divide o problema de forma balanceada</u> (gerando subproblemas de mesmo tamanho)

#### MergeSort: Execução



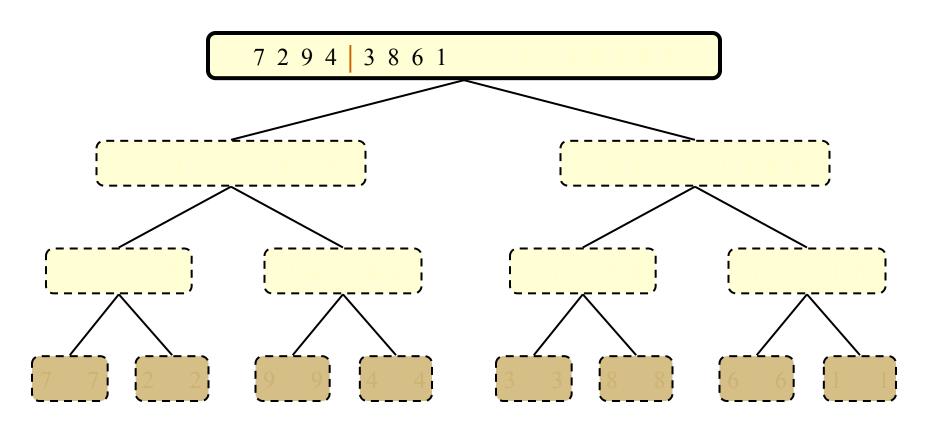
- A execução do MergeSort pode ser facilmente descrita por uma árvore binária
  - Cada nó representa uma chamada recursiva do MergeSort
  - O nó raiz é a chamada inicial
  - Os nós folhas são vetores de 1 ou 2 números (casos bases)



#### MergeSort: Exemplo de Execução

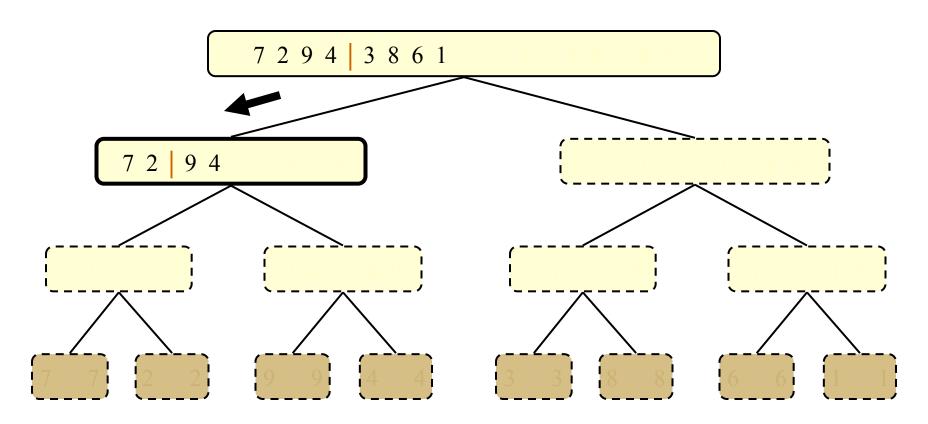


Partição do problema (sempre no meio do vetor)



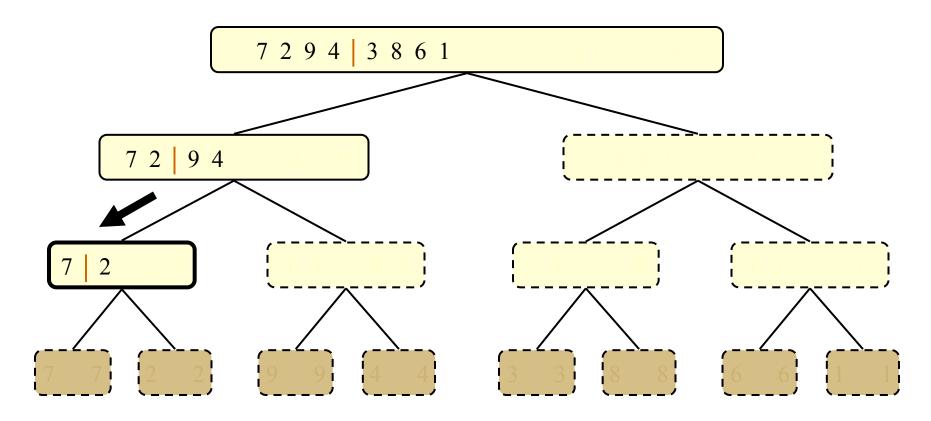


Chamada recursiva para primeira partição



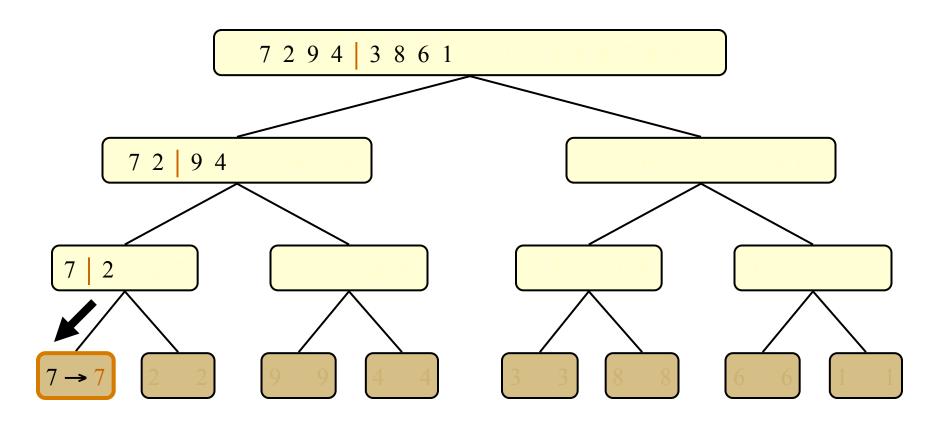


Chamada recursiva



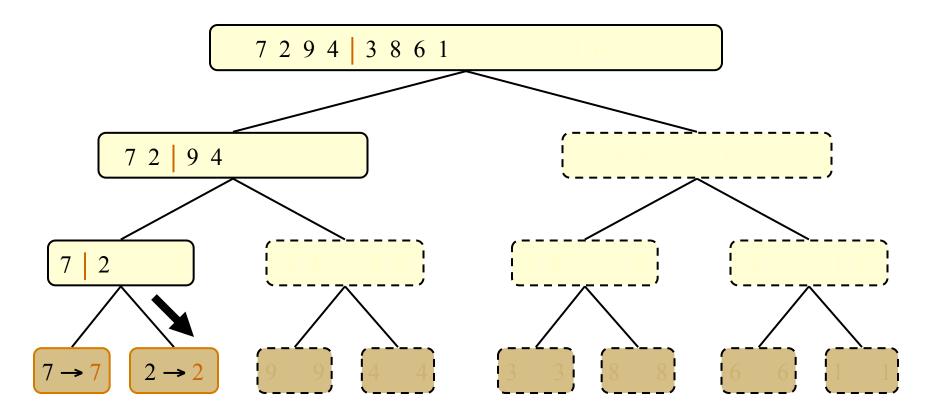


Chamada recursiva: caso base encontrado



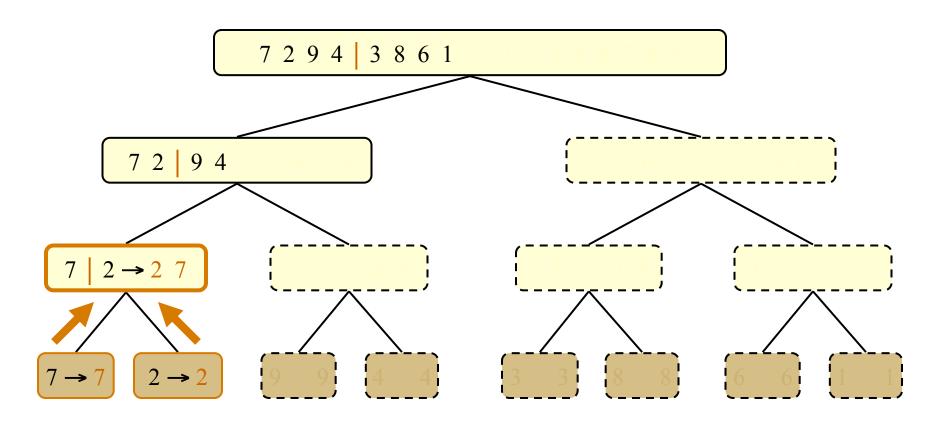


Chamada recursiva: caso base encontrado



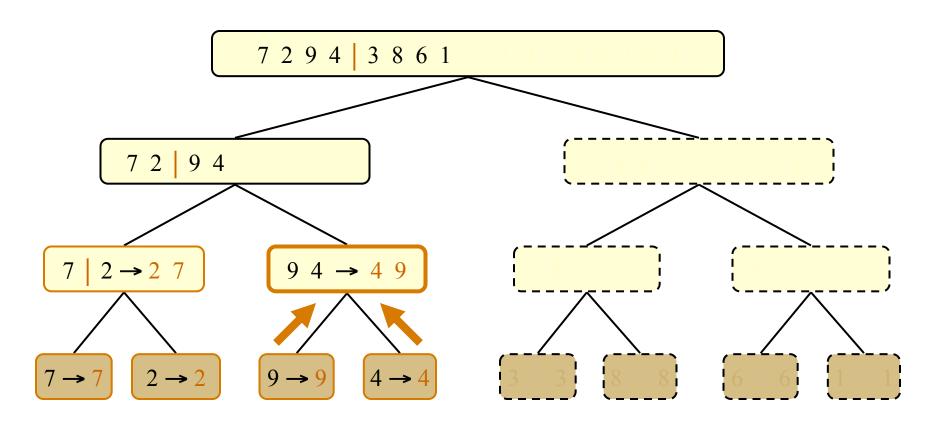


Operação de merge (intercalação)



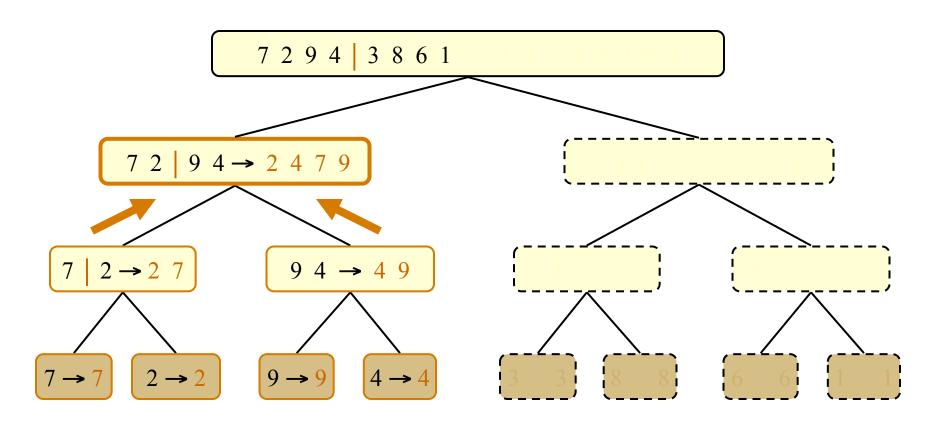


• Chamadas recursivas, casos bases e merge (intercalação)



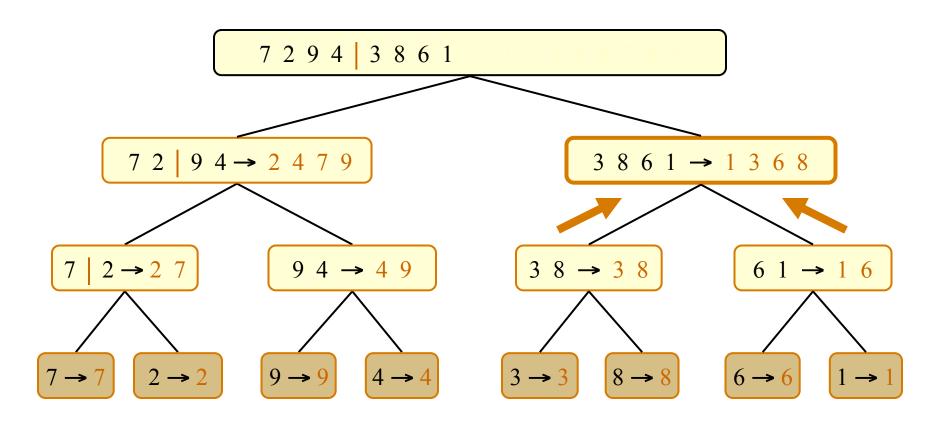


Operação de merge (intercalação)



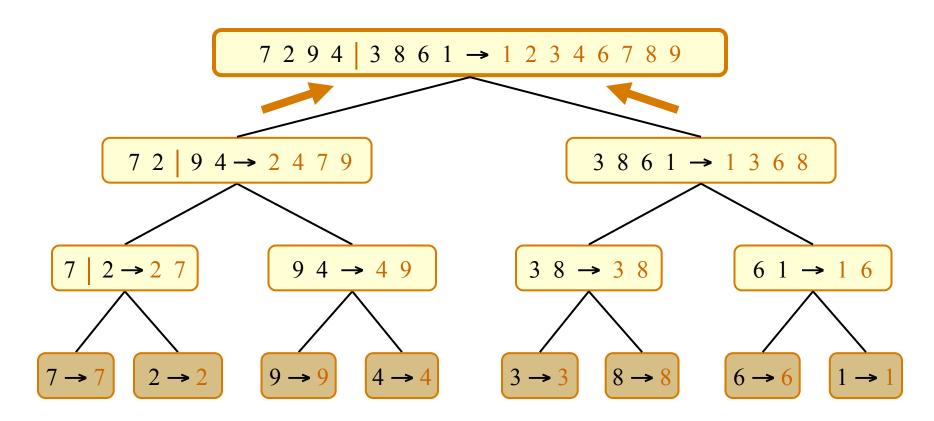


Execução do MergeSort para a outra partição





• Finalmente o último merge (intercalação)

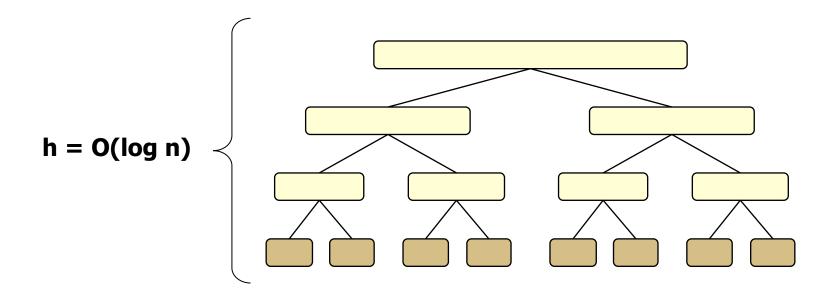


## MERGESORT ANÁLISE DO ALGORITMO

#### **Análise do MergeSort**



- A altura h da árvore de execução é O(log n)
- A quantidade de operações em cada nível da árvore é assintoticamente igual a O(n)
- Logo: algoritmo é O(n log n)



## MERGESORT IMPLEMENTAÇÃO RECURSIVA

#### **Algoritmo MergeSort**



```
/* ordena o vetor v[0..n-1] */
void mergeSort(TItem *v, int n) {
    mergeSort_ordena(v, 0, n-1);
}
/* ordena o vetor v[esq..dir] */
void mergeSort_ordena(TItem *v, int esq, int dir) {
    if (esq == dir)
        return;
    int meio = (esq + dir) / 2;
    mergeSort_ordena(v, esq, meio);
    mergeSort_ordena(v, meio+1, dir);
    mergeSort_intercala(v, esq, meio, dir);
    return;
```

#### **Algoritmo MergeSort**



```
/* intercala os vetores v[esq..meio] e v[meio+1..dir] */
void mergeSort_intercala(TItem *v, int esq, int meio, int dir) {
    int i, j, k;
    int a_tam = meio-esa+1;
    int b_tam = dir-meio;
    TItem *a = (TItem*) malloc(sizeof(TItem) * a_tam);
    TItem *b = (TItem*) malloc(sizeof(TItem) * b_tam);
    for (i = 0; i < a_{tam}; i++) a[i] = v[i+esq];
    for (i = 0; i < b_{tam}; i++) b[i] = v[i+meio+1];
    for (i = 0, j = 0, k = esq; k \le dir; k++) 
        if (i == a_{tam}) v[k] = b[j++];
        else if (j == b_tam) v[k] = a[i++];
        else if (a[i].chave < b[j].chave) v[k] = a[i++];
        else v[k] = b[j++];
    free(a); free(b);
```

#### Implementação do MergeSort



- O procedimento Intercala requer o uso de um segundo arranjo, B, para receber os dados ordenados.
- Note que no retorno de Mergesort com um arranjo de tamanho 1, a resposta encontra-se no arranjo A (o arranjo original de entrada).
- No próximo nível (arranjo de comprimento 2) o resultado da intercalação estará no arranjo B.

#### Implementação do MergeSort



- Podemos administrar este problema de duas maneiras:
  - Copiando a porção do arranjo referente ao resultado de volta para o arranjo A
  - Utilizando uma chave para indicar a "direção" dos movimentos de Intercala.

## MERGESORT VANTAGENS/DESVANTAGENS

#### MergeSort



- Vantagens
  - MergeSort é O(n log n)
  - Indicado para aplicações que tem restrição de tempo (executa sempre em um determinado tempo para n)
  - Passível de ser transformado em estável
    - Tomando certos cuidados na implementação da intercalação
  - Fácil Implementação
- Desvantagens
  - Utiliza memória auxiliar O(n)
  - Na prática é mais lento que QuickSort no caso médio

# MERGESORT IMPLEMENTAÇÃO NÃO-RECURSIVA

#### MergeSort Não Recursivo



```
/* ordena o vetor v[0..n-1] - MergeSort iterativo */
void mergeSort_iter(TItem *v, int n) {
    int esa, dir;
    int salto = 1;
    while (salto < n) {</pre>
        esq = 0;
        while (esq + salto < n) {</pre>
            dir = esq + 2*salto;
            if (dir > n) dir = n;
            mergeSort_intercala(v, esq, esq+salto-1, dir-1);
            esq = esq + 2*salto;
        salto = 2*salto;
```



## Perguntas?

### MERGESORT EXERCÍCIO

#### **Exercício**



• Dada a sequência de números:

3492518

Ordene em ordem crescente utilizando o algoritmo **MergeSort**, apresentado a sequência dos números a cada passo do algoritmo.