

गणित

कक्षा १०



नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

गणित

कक्षा - 10

लेखकहरू

रमेशप्रसाद अवस्थी

नरहरि आचार्य

कृष्ण गोसाईं

नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

विषय सूची

एकाइ	शीर्षक	पृष्ठ सङ्ख्या
1.	समूह	1 - 10
2.	कर र मुद्रा विनिमय	11 - 22
3.	चक्रीय ब्याज	23 - 32
4.	जनसङ्ख्या वृद्धि र मिश्रहास	33 - 43
5.	समतलीय सतह	44 - 54
6.	बेलना र गोला	55 - 74
7.	प्रिज्म र पिरामिड	75 - 98
8.	महत्तम समापवर्तक र लघुत्तम समापवर्त्य	99 - 107
9.	साधारण मूलक र सर्ड	108 - 119
10.	घाताङ्क	120 - 125
11.	बीजीय भिन्न	126 - 130
12.	समीकरण	131 - 141
13.	त्रिभुज र चतुर्भुज	142 - 148
14.	रचना	149 - 154
15.	वृत्त	155 - 166
16.	त्रिकोणमिति	167 - 181
17.	तथ्याङ्क शास्त्र	182 - 194
18.	सम्भाव्यता	195 - 206
	उत्तर माला	207 - 215

1.0. पुनरावलोकन (Review)

तल दिइएका विषय वस्तुहरू समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

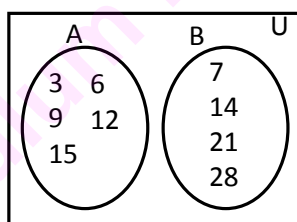
- (क) समूहको परिभाषा र प्रकारहरू
- (ख) समूहहरूको संयोजन तथा प्रतिच्छेदन
- (ग) समूहको पूरक तथा समूहहरूको फरक
- (घ) भेनचित्र
- (ङ) समूहको गणनात्मकता

सबै समूहहरूको निष्कर्षलाई पालैपालो कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

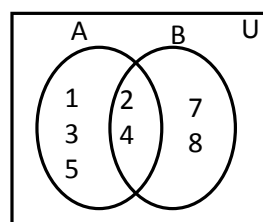
माथिका विषय वस्तुहरूका बारेमा हामीले अगिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौं । अब हामी भेनचित्रको प्रयोग गरी समूह सम्बन्धी शाब्दिक समस्याहरूको समाधान कसरी गर्ने भन्ने बारे अध्ययन गर्दछौं ।

1.1 दुई ओटा समूहहरू सम्मिलित शाब्दिक समस्याहरू (Problems Including Two Sets)

तल दिइएका दुई ओटा भेनचित्रहरूको अवलोकन गर्नुहोस् र विभिन्न भागहरूको टिपोट गर्नुहोस् :



चित्र (क)



चित्र (ख)

माथिको चित्र (क) मा सर्वव्यापक समूह U का उपसमूहहरू A र B आपसमा अलगिएका समूहहरू हुन् । समूह $A \cup B$ मा रहने सदस्यहरूको सङ्ख्या समूह A र समूह B का सदस्यहरूको सङ्ख्याको योगफलसँग बराबर हुन्छ । तसर्थ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ हुन्छ ।

त्यसै गरी भेनचित्र (ख) मा A र B आपसमा खट्टिएका समूहहरू हुन्, जहाँ $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$ को मान बराबर हुँदैन, किन ?

त्यस कारण $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ लेखिन्छ ।

माथिका दुई भेनचित्रहरूमा निम्नानुसारका सम्बन्धहरू लेख्न सकिन्छ :

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ (अलग्गएका समूहमा) (ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (खट्टिएका समूहमा)

(iii) $n_0(A) = n(A) - n(A \cap B)$

(iv) $n(A \cup B) = n_0(A) + n_0(B) + n(A \cap B)$

(v) $n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B})$

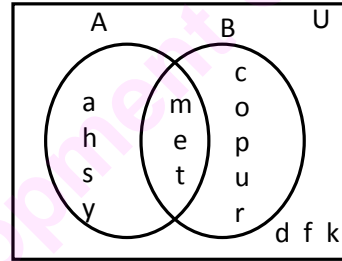
$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(\overline{A \cup B})$

उदाहरण 1

सँगैको भेनचित्र अध्ययन गरी तल दिइएका समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् :

(i) $n(A)$ (ii) $n(B)$ (iii) $n(A \cap B)$

(iv) $n_0(A)$ (v) $n(\overline{A \cup B})$



समाधान

सँगैको भेनचित्रको अवलोकन गर्दा,

(i) $A = \{m, e, t, a, h, s, y\}$

तसर्थ, $n(A) = 7$

(ii) $B = \{m, e, t, c, o, p, u, r\}$

$\therefore n(B) = 8$

(iii) $A \cap B = \{m, e, t\}$

$\therefore n(A \cap B) = 3$

(iv) A मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको समूह $= \{a, h, s, y\}$

$\therefore n_0(A) = 4$

(v) $\overline{A \cup B} = A \cup B$ मा नपर्ने सदस्यहरूको समूह $= \{d, f, k\}$

$\therefore n(\overline{A \cup B}) = 3$

उदाहरण 2

भारती भवन उच्च मा.वि.का कक्षा 10 का 52 जना विद्यार्थीहरूमा गरिएको एक सर्वेक्षणमा 28 जनाले क्रिकेट खेल्न, 24 जनाले फुटबल खेल्न र 18 जनाले दुवै खेल खेल्न मन पराउँदा रहेछन् । तर 6 जनाले यी दुवै खेल खेल्न मन पराउँदैनन् भने,

(क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) एउटा मात्र खेल खेल्न मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

प्रश्नानुसार , $n(U) = 52$

मानौं क्रिकेट मन पर्ने विद्यार्थीहरूको समूह C र फुटबल मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह F छ ।

$$\text{अब, } n(C) = 28$$

$$n(F) = 24$$

$$n(C \cap F) = 18$$

$$n(\overline{C \cup F}) = 6$$

(क) यसलाई भेनचित्रमा दायीतर्फ देखाइएअनुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

(ख) भेनचित्र अवलोकन गर्दा क्रिकेट मात्र

मन पराउने विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या = $28 - 18 = 10$

$$n_0(C) = 10$$

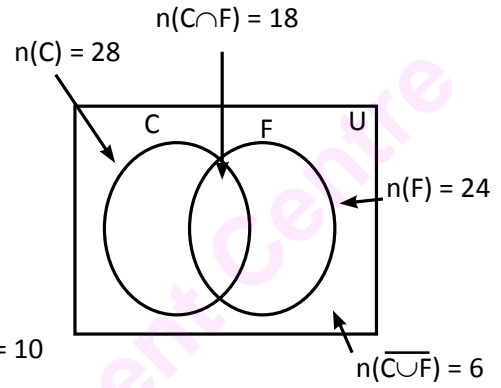
र त्यस्तै फुटबल मात्र मन पराउने विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या = $24 - 18 = 6$

$$\therefore n_0(F) = 6$$

एउटा मात्र खेल खेल्न मन पराउने विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या

= क्रिकेट मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या + फुटबल मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या

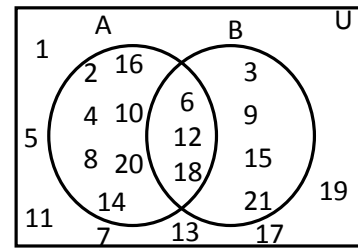
$$= n_0(C) + n_0(F) = 10 + 6 = 16$$



अभ्यास 1.1

1. दिइएको भेनचित्रबाट तल दिइएका समूहहरू तथा समूहहरूको गणनात्मक सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

- | | | |
|--------------------------------|--|-------------------------------|
| (i) $n(A)$ | (ii) $n(B)$ | (iii) $n(A \cap B)$ |
| (iv) $n_0(A)$ | (v) $n_0(B)$ | (vi) $n(\overline{A})$ |
| (vii) $n(\overline{A \cap B})$ | (viii) $n(\overline{A} \cap \overline{B})$ | (ix) $n(\overline{A \cup B})$ |
| (x) $n(U)$ | | |



2. (a) यदि $n(A) = 70$, $n(B) = 60$ र $n(A \cap B) = 50$ भए $n(A \cup B)$ र $n_0(A)$ पत्ता लगाएर भिन्ना भिन्नै भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(b) समूहहरू A र B सर्वव्यापक समूहहरू U का उपसमूहहरू हुन्, जसमा $n(U) = 70$, $n(A) = 40$, $n(B) = 30$ र $n(\overline{A \cup B}) = 15$ छ भने भेनचित्र बनाएर $n(A \cup B)$ र $n(A \cap B)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

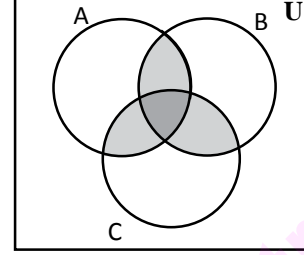
- (c) यदि समूह $P = \{3 \text{ का } 30 \text{ सम्मका अपवर्त्यहरू}\}$, $Q = \{4 \text{ का } 30 \text{ सम्मका अपवर्त्यहरू}\}$ र $U = \{1 \text{ देखि } 30 \text{ सम्मका पूर्णाङ्कहरू}\}$ का समूह भएमा P र Q को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । समूह P मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) यदि $n(X) = 45$, $n(Y) = 65$ र $n(X \cup Y) = 85$ छ भने $n(X \cap Y)$ र $n_0(Y)$ भेनचित्रका माध्यमबाट पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. (a) कृषकहरूको एउटा समूहमा गरिएको सर्वेक्षणमा 60% ले भैंसी पालन, 55% ले गाई पालन र 35% ले भैंसी र गाई दुवै पाल्दा रहेछन् । यसलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी भैंसी र गाई कुनै पनि नपाल्ने किसानहरूको प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) शान्ति उच्च मा.वि.का 200 जना विद्यार्थीहरूमा गरिएको एक सर्वेक्षणमा 65% ले दसैं मन पराए र 45% ले ल्होसार मन पराए तर 20% ले दसैं र ल्होसार दुवै मन पराए । उपर्युक्त तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी दसैं र ल्होसार बाहेकमा चाड मन पराउने विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) 300 जना विद्यार्थीहरूमा गरिएको एक सर्वेक्षणमा 120 जनाले टेबल टेनिस र 205 जनाले बास्केट बल खेल मन पराउँछन् । यदि सबै विद्यार्थीहरूले कम्तीमा पनि एउटा खेल मन पराउँदोरहेछन् भने भेनचित्रको निर्माण गरी (क) दुवै खेल मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् । (ख) एउटा मात्र खेल मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) मतदान पूर्व गरिएको एउटा नमुना सर्वेक्षणमा 65% जनताले नेता A लाई र 60% जनताले नेता B लाई मन पराएको पाइयो । यदि 15% जनताहरू कतै पनि खुल्न चाहैनन् भने भेनचित्रको प्रयोग गरी दुवै नेतालाई मन पराउने जनताको प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. गौरीशङ्कर उच्च मा.वि.मा गरिएको एउटा सर्वेक्षणमा 300 जनाले भविष्यमा सरकारी जागिर गर्ने, 250 जनाले व्यवसाय सञ्चालन गर्ने र 110 जनाले दुवै काम गर्न सक्ने इच्छा जाहेर गरे । यदि सबै जनामा कम्तीमा एउटा काम गर्ने इच्छा भएको पाइयो भने भेनचित्रको प्रयोग गरी (क) सरकारी जागिर मात्र गर्ने इच्छा हुने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् । (ख) व्यवसाय मात्र गर्ने इच्छा हुने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् । (ग) जम्मा कति जना विद्यार्थीमा उक्त सर्वेक्षण गरिएको रहेछ पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. पाँच पाँच जना विद्यार्थीहरूको समूह निर्माण गरी आफ्नो समुदायका विभिन्न अभिभावकहरूलाई निम्न प्रश्न सोध्नुहोस् :
- तपाईंहरू आफ्नो सन्तानले कुन पेसा अँगालेको हेर्न चाहनुहुन्छ ?
- (क) शिक्षण (ख) चिकित्सा (ग) दुवै (घ) अन्य सेवा

माथिका प्रश्नको उत्तर प्राप्त गरिसकेपछि उक्त तथ्याङ्कहरूलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी नतिजालाई कक्षाकोठामा छलफल गर्नुहोस् ।

1.2 तिन ओटा समूहहरू सम्मिलित समस्याहरू (Problems Including Three Sets)

सँगैको भेनचित्रको अवलोकन गरी प्रत्येकले आफ्ना कापीमा यसका विभिन्न भागहरूको वा उपसमूहहरूको सूची तयार पार्नुहोस् ।

त्यसपछि आफ्ना समूहमा आपसमा छलफल गरी ती उपसमूहहरूको सम्बन्धहरूका बारेमा साझा निष्कर्ष बताउनुहोस् ।



दिइएको भेनचित्रमा तिन ओटा समूहहरू A, B र C आपसमा प्रतिच्छेदन भएका छन्, जसमा सर्वव्यापक समूह U का केही उपसमूहहरूलाई निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ :

A, B, C, $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$, $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, र $\overline{A \cup B \cup C}$ यसमा $A \cup B \cup C$ लाई भेनचित्रमा कसरी प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

हामीलाई थाहा छ, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ ।

तसर्थ $n(A \cup B \cup C) = n[A \cup (B \cup C)] = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$ हुन्छ ।

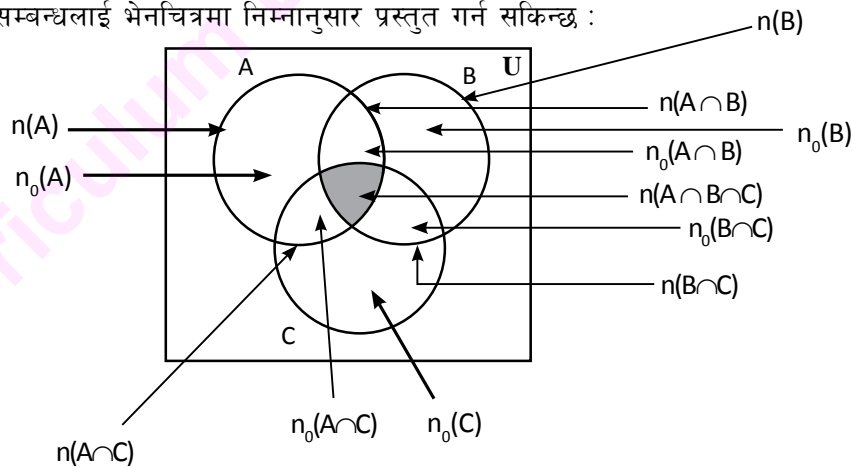
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ हुन्छ, किन ?

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$ हुन्छ, किन ?

अर्थात् $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ हुन्छ, कसरी ?

तसर्थ $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ हुन्छ ।

माथिको सम्बन्धलाई भेनचित्रमा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

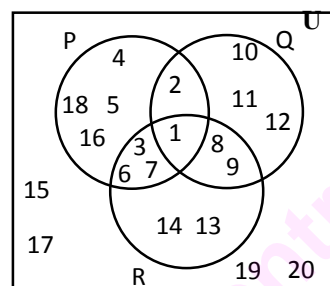


माथिको भेनचित्रको सहायताले $n_0(A)$, $n_0(B)$ र $n_0(C)$ को मान पत्ता लगाउने सूत्र पत्ता लगाएर समूहमा छलफल गरी सबैका साझा निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

संगैको भेनचित्रको अवलोकन गरी दिइएका समूहहरूको गणनात्मक सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

- (i) $n(P)$ (ii) $n_0(R)$ (iii) $n_0(P \cap Q)$
 (iv) $n(Q - R)$ (v) $n(P \cup Q \cup R)$
 (vi) $n(\overline{P \cup Q \cup R})$



समाधान

यहाँ दिइएको भेनचित्रको अवलोकन गर्दा,

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 16, 18\}$$

$$Q = \{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$R = \{1, 3, 6, 7, 8, 9, 13, 14\}$$

तसर्थ

(i) $n(P) = 9$ हुन्छ ।

(ii) $n_0(R) = R$ मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको सङ्ख्या = 2

(iii) $P \cap Q = \{1, 2\}$ $n(P \cap Q) = 2$

$$\therefore n_0(P \cap Q) = 2 - 1 = 1$$

(iv) $Q - R = \{2, 10, 11, 12\}$

$$\therefore n(Q - R) = 4$$

(v) $P \cup Q \cup R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18\}$

$$\therefore n(P \cup Q \cup R) = 16$$

(vi) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$$n(U) = 20$$

$$\begin{aligned} \therefore n(\overline{P \cup Q \cup R}) &= n(U) - n(P \cup Q \cup R) \\ &= 20 - 16 = 4 \end{aligned}$$

उदाहरण 2

अर्मलाका 140 घर परिवारमा गरिएको सर्वेक्षणमा 70 घर परिवारले खेतीपाती, 60 घर परिवारले पशु पालन र 45 घर परिवारले व्यापार व्यवसाय सञ्चालन गरेको पाइयो । यी मध्ये 17 घर परिवारले खेतीपाती र पशु पालन दुवै गरेको, 16 घर परिवारले पशु पालन र व्यापार व्यवसाय सञ्चालन गरेको, 18 घर परिवारले खेतीपाती तथा व्यापार व्यवसाय सञ्चालन गरेको र 7 घर परिवारले यी कुनै पनि व्यवसाय नगरेको बताए । भेनचित्रको निर्माण गरी तिन ओटै व्यवसाय सञ्चालन गर्ने घर परिवारको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, खेतीपाती गर्नेहरूको समूह A,

पशु पालन गर्नेहरूको समूह B र व्यापार व्यवसाय गर्नेहरूको समूह C हो ।

प्रश्नानुसार यसलाई निम्नानुसार भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

अब, भेनचित्रअनुसार

जम्मा घर परिवार सङ्ख्या $n(U) = 140$

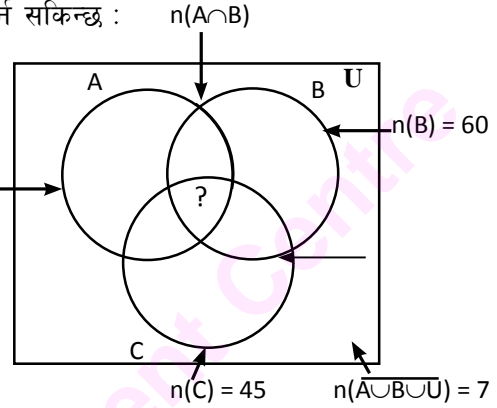
$$n(\overline{A \cup B \cup C}) = 7$$

$$n(A) = 70$$

तसर्थ, $n(A \cup B \cup C) = n(U) - n(\overline{A \cup B \cup C})$

$$= 140 - 7$$

$$= 133$$



$n(A \cap B \cap C)$ = तिन ओटै व्यवसाय सञ्चालन गर्ने घर परिवारको सङ्ख्या = ?

हामीलाई थाहा छ,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

तसर्थ, $n(A \cap B \cap C) = n(A \cup B \cup C) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$

$$= 133 - 70 - 60 - 45 + 17 + 16 + 18$$

$$= 133 - 175 + 51$$

$$= 184 - 175$$

$$= 9$$

अतः 9 घर परिवारले दिइएका मध्ये तिन ओटै पेसा व्यवसाय सञ्चालन गरेका रहेछन् ।

उदाहरण 3

एउटा जिल्लाका 160 विद्यालयहरूमा सर्वेक्षण गर्दा 70% मा पुस्तकालय, 50% मा कम्प्युटर प्रयोगशाला र 30% मा विज्ञान प्रयोगशाला भएको पाइयो । त्यस्तै 30% विद्यालयमा पुस्तकालय र कम्प्युटर प्रयोगशाला, 20% मा कम्प्युटर प्रयोगशाला र विज्ञान प्रयोगशाला, 15% मा पुस्तकालय र विज्ञान प्रयोगशाला एवम् 10% विद्यालयमा तिनै प्रकारका सुविधाहरू उपलब्ध रहेछन् । यसलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी (क) तिन ओटै सुविधाहरू नभएका विद्यालय सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् । (ख) एउटा मात्र सुविधा भएका विद्यालय सङ्ख्या कति होलान्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, पुस्तकालय सुविधा भएका विद्यालयको समूह L ,
कम्प्युटर प्रयोगशाला भएका विद्यालयको समूह C र
विज्ञान प्रयोगशाला भएका विद्यालयको समूह S हुन् ।

प्रश्नानुसार, दिइएका तथ्याङ्कहरूलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्दा
भेनचित्रको अवलोकनबाट विवरणलाई प्रतिशतको रूपमा लिँदा,

$$n(U) = 100, n(L) = 70, n(C) = 50, n(S) = 30, n(L \cap C \cap S) = 10$$

$$n(L \cup C \cup S) = 35 + 20 + 10 + 5 + 10 + 10 + 5 = 95$$

तसर्थ कम्तीमा एउटा मात्र सुविधा भएका विद्यालय सङ्ख्या = 160 को 95% = 152 ओटा (पुनः प्रतिशतलाई सङ्ख्यामा व्यक्त गर्दा ।)

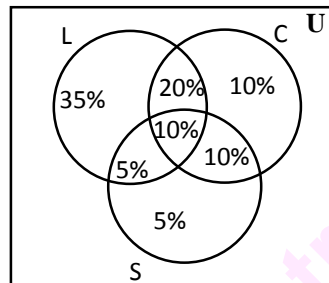
(क) उपर्युक्त कुनै पनि सुविधा नभएका विद्यालय सङ्ख्या = $n(U) - n(L \cup C \cup S) = 160 - 152 = 8$ ओटा

(ख) यसै भेनचित्रबाट कुनै एउटा मात्र सुविधा भएको विद्यालय

$$\begin{aligned} &= \text{पुस्तकालय मात्र भएका} + \text{कम्प्युटर प्रयोगशाला मात्र भएका} + \text{विज्ञान प्रयोगशाला मात्र भएका} \\ &= 35\% + 10\% + 5\% = 50\% \end{aligned}$$

\therefore एउटा मात्र सुविधा भएका विद्यालय सङ्ख्या = 160 को 50%

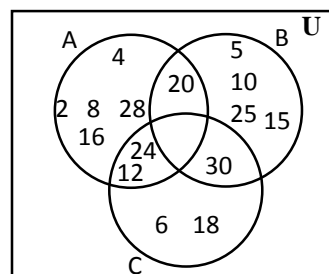
$$= \frac{160 \times 50}{100} = 80 \text{ ओटा}$$



अभ्यास 1.2

1. सँगैको भेनचित्रको अवलोकन गरी निम्न समूहको गणनात्मक सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

- | | | |
|---------------------------|-------------------|---------------------------|
| (i) $n(A)$ | (ii) $n(B)$ | (iii) $n(C)$ |
| (iv) $n(A \cap B)$ | (v) $n(B \cap C)$ | (vi) $n(A \cap B \cap C)$ |
| (vii) $n(A - B)$ | (viii) $n(C - A)$ | (ix) $n(A \cup B \cup C)$ |
| (x) $n\{A \cup (B - C)\}$ | | |



2. यदि $U = \{30 \text{ भन्दा साना धनात्मक पूर्णाङ्कहरू}\}$

$P = \{2 \text{ का } 30 \text{ भन्दा साना अपवर्त्यहरू}\}$

$Q = \{3 \text{ का } 30 \text{ भन्दा साना अपवर्त्यहरू}\}$

$R = \{5 \text{ का } 30 \text{ भन्दा साना अपवर्त्यहरू}\}$ भएमा P, Q, R को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी तलका सम्बन्धहरू प्रमाणित गर्नुहोस् :

(i) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$

(ii) $n(P \cup Q \cup R) = n(P) + n(Q) + n(R) - n(P \cap Q) - n(Q \cap R) - n(R \cap P) + n(P \cap Q \cap R)$

(iii) $n(P \cup Q \cup R) = n(P - Q) + n(Q - R) + n(R - P) + n(P \cap Q \cap R)$

3.(a) यदि $n(A) = 14, n(B) = 13, n(C) = 22, n(A \cap B \cap C) = 4$ र $n(A \cap B) = 7, n(B \cap C) = 9, n(C \cap A) = 11, n(\overline{A \cup B \cup C}) = 4$ भए भेनचित्रको प्रयोग गरी $n(U)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) समूहहरू P, Q, R सर्वव्यापक समूह U का उपसमूहहरू हुन्, जसमा $n(P) = 100, n(Q) = 90, n(R) = 110, n(P \cap Q) = 60, n(Q \cap R) = 40, n(P \cap R) = 45$ र $n(P \cup Q \cup R) = 180$ भए $n(P \cap Q \cap R)$ कति होला ?

(c) यदि X, Y, Z सर्वव्यापक समूह U का उपसमूहहरू हुन्, जहाँ $n(X) = 48, n(Y) = 51, n(Z) = 40, n(X \cap Y) = 11, n(Y \cap Z) = 10$ र $n(Z \cap X) = 9, n(X \cap Y \cap Z) = 4$ र $n(U) = 120$ भए $n(X \cup Y \cup Z)$ र $n(\overline{X \cup Y \cup Z})$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) 100 जना विद्यार्थीहरूमा गरिएको सर्वेक्षणमा 60 जना फुटबल, 48 जनाले भलिबल र 40 जनाले क्रिकेट खेल मन पराउँछन् । त्यस्तै 32 जनाले फुटबल र भलिबल, 22 जनाले फुटबल र क्रिकेट र 20 जनाले भलिबल र क्रिकेट खेल मन पराए । 5 जनाले तिन ओटै खेल खेल मन पराए भने भेनचित्रको प्रयोग गरी यी कुनै पनि खेल मन नपराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एउटा संस्थाले गरेको सर्वेक्षणअनुसार एचआइभी सन्ने कारणहरूमध्ये 110 जनाले असुरक्षित यौन सम्पर्कका कारणले, 75 जनाले सिरिन्जको प्रयोगले र 60 जनाले सङ्क्रमित आमाबाबुबाट उनीहरूका सन्तानमा सन्ने कुरा बताए । त्यस्तै 25 जनाले असुरक्षित यौन सम्पर्क र सिरिन्जको प्रयोगले, 10 जनाले सिरिन्ज तथा सङ्क्रमित आमाबाट एवम् 10 जनाले असुरक्षित यौन सम्पर्क र सङ्क्रमित आमाबाट बच्चामा सन्ने बताए भने 5 जनाले तिन ओटै कारणहरू औल्याए । यदि प्रत्येकले कम्तीमा एउटा उत्तर दिए भने :

(क) माथिको तथ्याङ्कलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) जम्मा कति जना मानिसहरूमा सर्वेक्षण गरिएको रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) सिरिन्जको प्रयोगबाट मात्र एचआइभी सङ्क्रमित भन्नेहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) एउटा विज्ञापनमा दरखास्त दिनेहरूमध्ये 70 जना तथ्याङ्क शास्त्रमा, 60 जना कम्प्युटरमा, 50 जना अङ्ग्रेजीमा, 30 जना तथ्याङ्क शास्त्र र कम्प्युटरमा, 20 जना कम्प्युटर र अङ्ग्रेजीमा, 25

- जना अङ्ग्रेजी र तथ्याङ्क शास्त्रमा र 20 जना तिन ओटै विषयमा दक्ष भएको पाइयो । यदि सबै जना कम्तीमा एउटा विषयमा दक्ष भएको भए यसलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी
- (क) कम्प्युटरमा मात्र दक्ष भएका उमेदवारको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) जम्मा कति जनाले दरखास्त दिएका रहेछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) एउटा सर्वेक्षणमा बिहान चिया पिउने 60 जना, कफी पिउने 45 जना, दुध पिउने 40 जना, कफी र दुध दुवै पिउने 13 जना, कफी र चिया पिउने 25 जना, चिया र दुध पिउने 20 जना एवम् चिया, कफी र दुध तिन ओटै पिउने 10 जना रहेछन् । यदि 5 जनाले यी तिनै पेय पदार्थ पिउँदैनन् भने
- (क) माथिको तथ्याङ्कलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- (ख) कम्तीमा एउटा पेय पदार्थ पिउने कति जना होलान् ?
- (ग) जम्मा कति जनामा सर्वेक्षण गरिएको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) एउटा मात्र पेय पदार्थ लिने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. (a) एउटा विद्यालयका 200 विद्यार्थीहरूमध्ये 60% अङ्ग्रेजी, 32% गणित र अङ्ग्रेजी, 20% विज्ञान र गणित, 22% विज्ञान र अङ्ग्रेजी, 15% ले गणित मात्र, 10% ले विज्ञान मात्र र 5% ले तिन ओटै विषयहरू रुचाउँछन् भने, भेनचित्रको प्रयोग गरी गणित रुचाउने र अङ्ग्रेजी मात्र रुचाउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) एउटा परीक्षामा सम्मिलित परीक्षार्थीहरूमध्ये 40% ले विज्ञानमा, 45% ले गणितमा 55% ले र सामाजिक अध्ययनमा A⁺ ग्रेड हासिल गरे । त्यस्तै 10% ले गणित र विज्ञानमा, 20% ले विज्ञान र सामाजिक अध्ययनमा, 15% ले सामाजिक अध्ययन र गणितमा A⁺ ग्रेड प्राप्त गरे यदि प्रत्येकले कम्तीमा एउटा विषयमा A⁺ ग्रेड प्राप्त गरे भने
- (क) माथिको तथ्याङ्कलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- (ख) तिन ओटै विषयमा A⁺ ग्रेड प्राप्त गर्ने विद्यार्थीहरूको प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) यदि जम्मा 300 जनामा सर्वेक्षण गरिएको भए कति जनाले एउटा मात्र विषयमा A⁺ ग्रेड हासिल गरे होलान् ।
6. दुई दुई जनाको समूह निर्माण गरी सबै समूहहरूले आफ्नो विद्यालयका फरक फरक कक्षामा गई प्रत्येक विद्यार्थीहरूलाई तल दिइएका प्रश्न सोधी उत्तर सङ्कलन गर्नुहोस् :
- तपाईंलाई मनपर्ने फलफुल कुन हो ?
- (क) स्याउ (ख) मेवा (ग) आँप (घ) स्याउ र मेवा (ङ) आँप र मेवा
- (च) स्याउ र आँप (छ) स्याउ, आँप र मेवा (ज) यी बाहेक अन्य फलफुल
- सबै विद्यार्थीहरूको उत्तर सङ्कलन गरेर प्राप्त तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी एउटा मात्र फलफुल मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् र समूहको कार्यलाई पालैपालो कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

2.0 पुनरावलोकन (Review)

तल दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् र सामूहिक निष्कर्ष पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

- (क) कति रुपियाँको 15% कर तिरेपछि जम्मा रु.5950 प्राप्त हुन्छ होला ?
- (ख) कुनै सामान रु x मा किनेर 10% नाफा गरी रु. 12000 मा बिक्री गरियो भने x को मान कति होला ?
- (ग) एउटा सामानको क्रय मूल्य रु.2500 थियो । व्यापारीले लामो समयसम्म उक्त सामान पसलमा बाँकी रहेकाले 5% नोक्सान सहेर पनि बिक्री गर्ने निर्णय गर्‍यो भने यसको विक्रय मूल्य कति होला ?
- (घ) आस्था सहकारी संस्थाले आफ्ना सदस्यहरूलाई उपलब्ध सेयरहरूको 19% लाभांश वितरण गर्दा रविनले रु.15,200 प्राप्त गरे भने उनको जम्मा रु. 100 बराबरको कति कित्ता सेयर रहेछ ?

सबै समूहले एक आपसमा पृष्ठपोषण आदान प्रदान गर्नुहोस् र सबैको साझा निष्कर्ष निकाल्नुहोस् । माथि उल्लिखित विभिन्न विषयहरूको बारेमा हामीले अगिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौं । अब हामी मूल्य अभिवृद्धि कर र मुद्रा विनिमयका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

2.1 मूल्य अभिवृद्धि कर (Value Added Tax)

एक जना व्यापारीले एउटै किसिममा मोबाइल बिक्री गर्दाका दुई ओटा फरक बिलहरूको अध्ययन तथा अवलोकन गरी दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् ।

आचार्य मोबाइल हाउस पोखरा			
मिति : २०७२-११-५			
ग्राहकको नाम : रामकली			
क्र.स.	सामानको नाम	परिणाम	मूल्य रु.
1	Mobile set	2	16000/-
		जम्मा	16000/-
		छुट 5 %	800/-
		तिर्नुपर्ने रकम रु.	15,200/-

ABC मोबाइल हाउस पोखरा				
ग्राहकको नाम : फुर्वा			मिति : २०७२-१२-८	
क्र.सं.	सामानको नाम	परिणाम	दर	जम्मा मूल्य (रु.)
1.	Mobile set	2	8000	16000.00
		जम्मा		16000.00
		छुट 5%		800.00
		कर योग्य रकम रु.		15200.00
		VAT 13% रु.		1976.00
		तिर्नुपर्ने रकम रु.		17176.00

(क) दुई बिलमा मोबाइलको बिक्री दर के कति छ ?

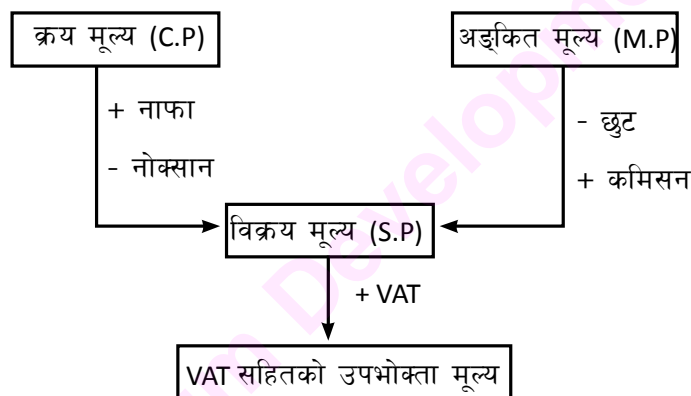
(ख) दुई ओटा बिलमा समानता र भिन्नताहरू के के छन् ?

(ग) कुन बिलमा तिर्नुपर्ने मूल्य बढी छ र किन ?

(घ) पहिलो बिलमा र दोस्रो बिलमा कुन शीर्षकमा बढी रकम तिर्नुपरेको छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

सबै समूहमा छलफल गरिसकेपछि निष्कर्ष प्रस्तुत गर्न लगाउनुहोस् । माथिका प्रश्नहरूको आधारमा निम्नानुसार निष्कर्ष पत्ता लगाउन सकिन्छ । कुनै पनि वस्तु वा सेवाको बिक्री मूल्यमा केही प्रतिशत थप रकम उपभोक्ताले तिर्नुपर्छ, त्यस्तो थप रकम नै मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) हो ।

कुनै पनि वस्तु वा सेवाको आपूर्ति गर्दा लाग्ने करलाई मूल्य अभिवृद्धि कर भनिन्छ । आयात गरिएका वस्तु वा सेवामा हुवानी, बिमा, कमिसन स्थानीय तथा अन्य करहरू र नाफासमेत जोडेर छुट रकम घटाएर आउने मूल्यमा मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) लाग्ने गर्दछ । यसलाई निम्नानुसार फ्लो चार्टमा देखाउन सकिन्छ ।



त्यस्तै गरी कुनै पनि बिलको रकम अध्ययन गर्दा सेवाशुल्क जोडेर आएको अन्तिम मूल्यमा तोकिएको दरमा VAT लगाउने गरिन्छ ।

फेरि $VAT \text{ रकम} = VAT \text{ सहितको वि.मू} - \text{वि.मू}$

र $VAT\% = \frac{VAT \text{ रकम}}{\text{विक्रय मूल्य}} \times 100\%$ हुन्छ ।

प्रत्येक आर्थिक वर्षमा VAT लाग्ने वस्तुहरू र VAT दर फरक फरक पर्न सक्छ । यसलाई सरकारले प्रत्येक आर्थिक वर्षको सुरुमा आर्थिक विधेयकद्वारा प्रस्तुत गर्दछ ।

नेपालको बजारमा मू.अ.क. लाग्ने र नलाग्ने वस्तु तथा सेवाहरू के के होलान् ? नजिकैको कर कार्यालयको भ्रमण गरी तथा अन्य व्यक्तिहरूसँग अन्तरक्रिया गरी पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त तथ्याङ्कलाई सूचीकरण गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

तल दिइएका मूल्यहरूमा मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) रकम पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) विक्रय मूल्य रु. 6000 र मू.अ.क = 13%

(ख) अङ्कित मूल्य रु. 5500, छुट 10% र मू.अ.क. = 13%

समाधान

(क) यहाँ, विक्रय मूल्य (SP) = रु. 6000

मू.अ.क (VAT) दर = 13%

मू.अ.क. (VAT) रकम = ?

मू.अ.क रकम = रु. 6000 को 13%

$$= \frac{6000 \times 13}{100}$$

$$= \text{रु. } 780$$

∴ मू.अ.क. रकम = रु. 780

(ख) अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 5500

छुट = 10%

मू.अ.क. = 13%

मू.अ.क. रकम = ?

हामीलाई थाहा छ,

छुट रकम = रु. 5500 को 10%

$$= \frac{5500 \times 10}{100} = \text{रु. } 550$$

फेरि मू.अ.क. लाग्ने मूल्य = MP – छुट रकम

$$= \text{रु. } 5500 - \text{रु. } 550$$

$$= \text{रु. } 4950$$

मू.अ.क. रकम = रु. 4950 को 13%

$$= \frac{4950 \times 13}{100}$$

$$= \text{रु. } 643.50$$

उदाहरण 2

एउटा विद्युतीय चुलोको अङ्कित मूल्य रु. 7,000 छ। यदि उक्त चुलो बिक्री गर्दा 5% छुट दिएर 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाइयो भने उक्त चुलोको वास्तविक बिक्री मूल्य कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, चुलोको अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 7000

छुट = 5%

VAT = 13%

वास्तविक मूल्य = ?

अब, छुट रकम = रु. 7000 को 5%

$$= \frac{7000 \times 5}{100} = \text{रु. } 350$$

फेरि, चुलोको छुटपछिको मूल्य = रु. 7000 - रु. 350 = रु. 6650

मु.अ.क. रकम = रु. 6650 को 13%

$$= \frac{6650 \times 13}{100} = \text{रु. } 864.50$$

तसर्थ, मु.अ.क. (VAT) सहितको वास्तविक मूल्य = रु. 6650 + 864.50 = रु. 7514.50

उदाहरण 3

एउटा मोबाइल सेटमा 10% छुट दिई 13% VAT लगाउँदा क्रेताले रु. 15,255 तिर्नुपर्छ भने उक्त मोबाइलको अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, दिइएको छुट = 10%

मूल्य अभिवृद्धि कर = 13%

वास्तविक मूल्य = रु. 15,255

अङ्कित मूल्य (MP) = ?

अब, मानौं अङ्कित मूल्य = x

प्रश्नानुसार, छुट रकम = MP को 10% = $\frac{x \times 10}{100} = \frac{10x}{100} = \frac{x}{10}$

फेरि छुटपछिको मूल्य = MP - छुट रकम = $x - \frac{x}{10} = \frac{9x}{10}$

∴ VAT लाग्ने रकम = $\frac{9x}{10}$

VAT रकम = $\frac{9x}{10}$ को 13% = $\frac{9x \times 13}{10 \times 100} = \frac{117x}{1000}$

हामीलाई थाहा छ, वास्तविक मूल्य = रु. 15255

अथवा, $\frac{9x}{10} + \frac{117x}{1000} = \text{रु. } 15255$

अथवा, $\frac{900 + 117x}{1000} = 15255$

अथवा, $1017x = 15255000$

∴ $x = \frac{15255000}{1017} = 15,000$

तसर्थ, अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 15000

उदाहरण 4

आचार्य सप्लायर्सले एउटा मेसिन रु. 1,50,000 मा 13% VAT बाहेक अवस्थी सप्लायर्सलाई बिक्री गर्‍यो । अवस्थी सप्लायर्सले उक्त मेसिनको मूल्यमा रु. 4,000 ढुवानी खर्च, रु. 7,000 नाफा र रु. 1500 स्थानीय करसहित उपभोक्तालाई बिक्री गर्‍यो । अब उपभोक्ताले 13% VAT तिर्दा जम्मा VAT रकम कति तिर्नुपर्ला ?

समाधान

आचार्य सप्लायर्सका लागि

$$\text{क्रय मूल्य (CP)} = \text{रु. } 1,50,000$$

$$\text{मू.अ.क. (VAT)} = 13\%$$

$$\text{VAT सहितको बिक्री मूल्य} = \text{रु. } 1,50,000 + \text{रु. } 1,50,000 \text{ को } 13\%$$

$$= \text{रु. } 1,50,000 + \frac{1,50,000 \times 13}{100}$$

$$= \text{रु. } 1,50,000 + \text{रु. } 19,500$$

$$= \text{रु. } 1,69,500$$

अवस्थी सप्लायर्सका लागि

$$\text{क्रय मूल्य (CP)} = \text{रु. } 1,69,500$$

$$\text{नाफा} = \text{रु. } 7,000$$

$$\text{ढुवानी खर्च} = \text{रु. } 4,000$$

$$\text{स्थानीय कर} = \text{रु. } 1,500$$

$$\text{जम्मा VAT लाग्ने रकम} = \text{रु. } 1,69,500 + \text{रु. } 7,000 + \text{रु. } 4,000 + \text{रु. } 1,500$$

$$= \text{रु. } 1,82,000$$

$$\text{अब, उपभोक्ताले तिर्नुपर्ने VAT रकम} = \text{रु. } 1,82,000 \text{ को } 13\%$$

$$= \frac{1,82,000 \times 13}{100}$$

$$= \text{रु. } 23,660$$

अभ्यास 2.1

1. तल दिइएको तालिकाबाट प्रत्येक अवस्थामा मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

क्र.स.	अङ्कित मूल्य	छुट %	VAT%	भ्याटसहितको मूल्य
(a)	रु. 3200	-	13 %	?
(b)	रु. 52,100	10 %	13 %	?
(c)	रु. 60,000	15 %	13 %	?
(d)	रु. 85,000	13 %	13 %	?
(e)	रु. 2,50,000	15 %	13 %	?

2. तल दिइएको तालिकाबाट अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

क्र.स.	छुट %	VAT %	भ्याटसहितको मूल्य (रु)	अङ्कित मूल्य
(a)	5 %	13 %	रु. 5763	?
(b)	10 %	10 %	रु. 30510	?
(c)	25 %	13 %	रु. 3390	?
(d)	15 %	13 %	रु. 57630	?
(e)	12 %	13 %	रु. 1,19,328	?

- 3.(a) कुनै एउटा वस्तुको अङ्कित मूल्यमा 25 % छुट दिएर 13 % मूल्य अभिवृद्धि कर लगाई बेचियो । यदि छुट रकम रु. 2000 भएमा उक्त सामानको मूल्य अभिवृद्धि करसहितको विक्रय मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) एउटा टेलिभिजन 20 % छुट दिएर 13 % मू.अ.क. लगाएर बिक्री गरियो । यदि छुट रकम रु. 1500 भए मू.अ.क. रकम कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) एउटा पसलेले रु. 60,000 अङ्कित मूल्य भएको वस्तुमा 15 % छुट दिएर मूल्य अभिवृद्धि कर लगाएर रु. 57,630 मा बिक्री गर्‍यो भने मूल्य अभिवृद्धि करको दर कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) अङ्कित मूल्य रु. 64,000 भएको ल्यापटपमा 12 % छुट दिएर केही प्रतिशत VAT जोड्दा रु. 63641.50 तिर्नुपर्दछ भने VAT रकम र प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (e) एउटा क्याल्कुलेटरमा 20 % छुट गरी 13 % मूल्य अभिवृद्धि कर लगाउँदा क्रेताले रु. 520 मूल्य अभिवृद्धि कर तिरेका रहेछन भने कति रकम छुट पाएका होलान् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 4.(a) एउटा डिलरले एउटा फोटोकपी मेसिनलाई रु. 4,20,000 मा 13 % मू.अ.क. लगाएर खुद्रा पसलेलाई बिक्री गर्‍यो । खुद्रा पसलेले उक्त मेसिनको ढुवानी खर्च रु. 2500 स्थानीय कर रु. 4,000 र रु. 20,000 नाफासहित फोटोकपी सेन्टरमा आपूर्ति गर्‍यो भने फोटोकपी सेन्टरले हालको दर रेटमा उक्त मेसिनको जम्मा कति रकम र मूल्य अभिवृद्धि कर तिर्नुपर्ला ?

- (b) अन्नपूर्ण सप्लायर्सले रु. 4,40,000 बराबरको निर्माण सामग्री 10% नाफा र 13 % मू.अ.क. सहित एन्जल सप्लायर्सलाई बिक्री गर्‍यो । एन्जल सप्लायर्सले उक्त सामग्रीको मूल्यमा ढुवानी खर्च रु. 5000 आफ्नो क्रय मूल्यमा 10 % नाफा र स्थानीय कर रु. 2500 सहित निर्माण कर्तालाई बिक्री गर्‍यो । अब, निर्माण कर्ताले कति रकमको कति मूल्य अभिवृद्धि कर तिर्नुपर्ला ?
5. दुई दुई जनाको समूह निर्माण गर्नुहोस् । तपाईंको आफ्नो परिवार तथा छर छिमेक, विद्यालय वा सङ्घ संस्थाले विभिन्न समयमा फरक फरक शीर्षकमा (जस्तै : बिजुली, पानी, टेलिफोन, टि.भि, रिचार्ज आदि) तिरेका बिलहरू सङ्कलन गर्नुहोस् । ती बिलहरूको अध्ययन तथा अवलोकन गरी तिनीहरूमा अङ्कित मूल्य, छुट दर, कर, करको दर, मू.अ.क दर तथा रकम वा अन्य कुनै कर लगाइएको भए त्यसको प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

2.2 मुद्रा विनिमय (Money Exchange)

तल दिइएका प्रश्नहरू तथा अवस्थाहरूको बारेमा आफ्नो विचार लेखी समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

- (क) अरविन्दलाई अमेरिकामा एउटा कार्यशालामा भागलिन जानु छ । उहाँले आफूसँग भएको नेपाली रुपियाँ नै लिएर गए के होला ?
- (ख) भरतले जापानबाट रेमिट्यान्स कम्पनीमार्फत् जापानी येन 2,50,000 पठाएछन् । उनको परिवारले उक्त रकम जापानी येन वा नेपाली रुपियाँ कुनमा निकाल्नु हुन्छ होला, किन ?
- (ग) फ्रान्सबाट आयात गरिएको एउटा सामग्रीको मूल्य 22.50 मार्क अङ्कित रहेछ भने उक्त सामग्रीलाई कम्तीमा कति रुपैयाँमा बिक्री गर्दा नोक्सान बेहोर्नु पर्दैन होला ?

माथिका प्रश्नहरूको बारेमा छलफल गर्दा के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ भने सबै देशहरूमा आफ्ना आफ्नै मुद्राहरू हुन्छन् र तिनीहरूको नाम पनि फरक हुन्छ । जस्तै : रुपियाँ, डलर, येन, फ्रेन्क, लिरा आदि । फरक फरक देशहरूका मुद्राको मूल्य (मान) पनि फरक फरक हुन्छ । जस्तै : भारतीय रुपैयाँ 100 को नेपाली रुपैयाँ 160 हुन्छ ।

कुनै एक देशको मुद्रा अर्को देशको मुद्रामा रुपान्तरण गरेमा मात्र कारोबार गर्न सकिन्छ वा कारोबार सहज हुन्छ । त्यसकारण कुनै आर्थिक कारोबार गर्नका लागि एक देशको मुद्राको मूल्य अर्को देशमा कति हुने भनी सरकारले वा सरकारको केन्द्रीय बैङ्कले निश्चित दर निर्धारण गरेको हुन्छ । उक्त दरलाई नै विदेशी मुद्रा विनिमय दर भनिन्छ । यो दर सरकारको आर्थिक स्थिति वा कारोबारअनुसार निर्धारण गरिन्छ । यो सधैं चलायमान हुन्छ ।

नेपाल राष्ट्र बैङ्कले मिति 2072 पुस 20 गतेका लागि निर्धारण गरेको केही राष्ट्रहरूको मुद्राको विनिमय दर निम्नानुसार रहेको छ :

नेपाल राष्ट्र बैंक				
पुस २० गते, २०७२ (जनवरी ४, २०१६) (रुपैयाँमा)				
मुद्रा	एकाइ	खरिद दर (रु.)	विक्री दर (रु.)	
भारतीय रुपियाँ	१०० को	१६०।००	१६०।१२	
अमेरिकी डलर	१ को	१०५।५२	१०६।१२	
युरो	१ को	११४।६०	११५।२५	
पाउन्ड स्टर्लिङ	१ को	१५५।६३	१५३।५१	
स्विस फ्रैंक	१ को	१०५।३७	१०५।९७	
अस्ट्रेलियन डलर	१ को	७७।०२	७७।४५	
क्यानेडियन डलर	१ को	७६।१९	७६।६३	
सिङ्गापुर डलर	१ को	७४।४२	७४।८४	
जापानी येन	१० को	८।७७	८।८२	
चिनियाँ युआन	१ को	१६।२५	१६।३४	
साउदी अरब रियाल	१ को	२८।१२	२८।२८	
कतारी रियाल	१ को	२८।९८	२९।९५	
थाई भाट	१ को	२।९३	२।९४	
संयुक्त अरब इमिरेट दिराम	१ को	२८।७३	२८।९४	
दक्षिण कोरियन वन	१०० को	८।९८	९।०३	
खरिद दर मात्र				
स्विडिस क्रोनर	१ को	१२।४९		
डेनिस क्रोनर	१ को	१५।३५		
हङ्कङ डलर	१ को	१३।६२		
कुवेती दिनार	१ को	३४७।४६		
बहराइन दिनार	१ को	२८०।०९		

प्रस्तुत तालिकाको आधारमा माथि दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर खोजी समूहमा छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उदाहरण १

माथि दिइएको विनिमय दरका आधारमा २५० युरोको खरिद दर र विक्रीदर रुपैयाँमा कति फरक पर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको युरो २५०

विनिमय तालिकाअनुसार १ युरोको खरिद दर = रु. ११४.६० हुन्छ भने

$$२५० \text{ युरोको खरिद मूल्य रु. } ११४.६० \times २५०$$

$$= \text{रु. } २८६५० \text{ हुन्छ ।}$$

फेरि 1 युराको बिक्रीदर = रु. 115.25 हुन्छ ।

250 युरोको बिक्री मूल्य = रु. 115.25 x 250

= रु. 28812.50 हुन्छ ।

तसर्थ खरिद मूल्य र बिक्री मूल्यको फरक = रु. (28812.50 – 28650)

= रु. 162.50

उदाहरण 2

दिइएको विनिमय दर तालिकाअनुसार 1 क्यानेडियन डलरको कति जापानी येन हुन्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, 1 क्यानेडियन डलर = रु. 76.19

अर्थात् रु. 76.19 = 1 क्यानेडियन डलर हुन्छ ।

अर्थात् रु. 1 = $\frac{1}{76.19}$ क्यानेडियन डलर हुन्छ । (i)

फेरि, 10 जापानी ऐनको रु. 8.77 पर्दछ ।

अर्थात्, रु. 8.77 = 10 जापानी येन

रु. 1 = $\frac{10}{8.77}$ जापानी येन (ii)

(i) र (ii) लाई हेर्दा

$\frac{1}{76.19}$ क्यानेडियन डलर = $\frac{10}{8.77}$ जापानी येन

अथवा 1 क्यानेडियन डलर = $\frac{10 \times 76.19}{8.77}$ जापानी येन

= 86.88 जापानी येन

अर्थात् तसर्थ 1 क्यानेडियन डलर = 86.88 जापानी येन हुन्छ ।

उदाहरण 3

एक जना व्यक्तिलाई विदेश भ्रमणमा लागि \$4,000 आवश्यकता पर्‍यो । यदि बैङ्कले उक्त रकम साट्दा 2% कमिसन लिने गर्दछ भने उनलाई जम्मा कति नेपाली रुपियाँ आवश्यक पर्दछ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, चाहिने रकम = \$4,000

कमिसन = 2%

हामीलाई थाहा छ, \$1 = रु. 105.52

$$\text{\$4,000} = \text{रु. } 105.52 \times 4000$$

$$= \text{रु. } 4,22,080$$

फेरि, कमिसन = रु. 4,22,080 को 2 %

$$= \text{रु. } \frac{422080 \times 2}{100} = \text{रु. } 8441.60$$

तसर्थ आवश्यक नेपाली रुपियाँ = रु. (422080 + 8441.60) = रु. 430521.60

उदाहरण 4

एन्जलले रु. 1,50,000 मा केही अस्ट्रेलियन डलर किने । चार दिनपछि अस्ट्रेलियन डलरको तुलनामा नेपाली मुद्रा 5% ले अवमूल्यन भयो । उक्त दिनमा पुनः नेपाली रुपियाँ साट्दा एन्जललाई कति नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

समाधान

यहाँ, एन्जलसँग भएको नेपाली रुपियाँ = रु. 1,50,000

दिइएको विनिमय दर अनुसार 1 अस्ट्रेलियन डलर = रु. 77.02

तसर्थ रु. 77.02 को 1 अस्ट्रेलियन डलर पाइन्छ ।

रु. 1 को $\frac{1}{77.02}$ अस्ट्रेलियन डलर पाइन्छ ।

रु. 1,50,000 को $\frac{1}{77.02} \times 150,000$

$$= 1947.55 \text{ अस्ट्रेलियन डलर पाइन्छ ।}$$

फेरि, चार दिनपछिको नेपाली रुपियाँ 5% ले अवमूल्यन भयो ।

तसर्थ चार दिनपछिको विनिमय दर,

1 अस्ट्रेलियन डलर = रु. 77.02 + 77.02 को 5%

$$= \text{रु. } (77.02 + 3.851) = \text{रु. } 80.871$$

तसर्थ 1 अस्ट्रेलियन डलर = रु. 80.871

$$1947.55 \text{ अस्ट्रेलियन डलर} = \text{रु. } 80.871 \times 1947.55 = 157500.32$$

$$\begin{aligned}\text{तसर्थ एन्जललाई नाफा भयो र उनको नाफा रकम} &= \text{रु.}(1,57,500.32 - 150,000) \\ &= \text{रु. } 7500.32\end{aligned}$$

अभ्यास 2.2

- माथि दिइएको विदेशी मुद्रा विनिमय दर प्रयोग गरी तलका मुद्राहरूलाई नेपाली रुपियाँमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।
 - खरिद दर प्रयोग गरी
 - भा.रु. 1250
 - (अमेरिकी डलर) 1400
 - पाउन्ड स्टर्लिङ 4752
 - सिङ्गापुर डलर 2340
 - कतारी रियल 2000
 - दक्षिण कोरियाली वन 5,76,000
 - थाई भाट 3600
 - जापानी ऐन 6840
 - स्विडिस फैन्क 450
 - मलेसियन रिङ्गेट 5250
 - विक्रीदर प्रयोग गरी प्रश्न नं. (a) का विदेशी मुद्रालाई नेपाली रुपियाँमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।
 - अमेरिकामा माध्यमिक शिक्षकको तलब \$10.05 देखि \$30.89 प्रति घण्टा भएमा उक्त दरमा नेपाली मुद्रामा कति रुपैयाँ प्रति घण्टा होला ?
 - उपर्युक्तअनुसार यदि एक दिनमा बढीमा 8 घण्टा र हप्तामा 5 दिन काम गर्दछन् भने एक जना शिक्षकको प्रति हप्ताको औसत आमदानी कति होला ? नेपाली रुपियाँमा पत्ता लगाउनुहोस् ।
- माथि दिइएको मुद्रा विनिमय दरअनुसार तलका मुद्रा विनिमय पत्ता लगाउनुहोस् (खरिद दर मात्र प्रयोग गर्ने) :
 - 1 अमेरिकी डलरको कति कतारी रियल हुन्छ ?
 - 1 जापानी येनको कति पाउन्ड स्टर्लिङ हुन्छ ?
 - कति मलेसियन रिङ्गेटको 50 चिनियाँ युआन हुन्छ ?
 - कति कोरियन वन भएमा 2000 युरो हुन्छ ?
 - 1 कुवेती दिनारको कति थाई भाट हुन्छ ?
- रु. 2,50,000 लाई पाउन्ड स्टर्लिङमा साट्दा 2% कमिसन तिर्नुपर्छ भने कति पाउन्ड स्टर्लिङ प्राप्त गर्न सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (b) विदेश घुम्नका लागि अब्दुललाई \$3,500 साट्नु छ । यदि बैङ्कले उक्त मुद्रा सटहीमा 2% कमिसन लिने गर्दछ भने जम्मा कति रुपियाँ आवश्यक पर्ला ?
- (c) माथि दिइएको विनिमय दरअनुसार \$4750 किन्न पुग्ने नेपाली रुपियाँको 10% अवमूल्यनपछि 3% कमिसन सहित किन्दा कति पाउन्ड किन्न सकिन्छ ?
4. (a) अमेरिकी बजारबाट प्रति तोला \$ 553 मा किनिएको 10 तोला सुनलाई नेपाली बजारमा 20 % भन्सार शुल्क र 13% VAT सहित बिक्री गर्दा कम्तीमा कति रुपैयाँमा बिक्री गर्नुपर्ला ?
- (b) यूरो 120 मा बिक्री गर्दा 35% नाफा हुने सामानलाई कति रुपियाँमा बिक्री गर्दा 40% नाफा होला ?
- (c) नेपालको बजारमा भादगाउँले टोपी रु. 400 प्रतिगोटा किनेर निर्यात कर 5% तिरेर बेलायतमा 5000 ओटा बिक्री गर्दा 150% नाफा हुन्छ भने प्रत्येक टोपीको बिक्री मूल्य कति पाउन्ड स्टर्लिङ होला ?
- (d) नेपाल वायुसेवा निगमबाट काठमाडौँ लन्डन काठमाडौँको हवाई टिकट रु. 90,000 पर्दछ । पुनः लन्डनमा लन्डन काठमाडौँ लन्डनको टिकट लिँदा यूरो 800 पर्दछ भने कुन ठाउँबाट कति प्रतिशत सस्तो पर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. पत्र पत्रिका तथा सञ्चार माध्यमहरूबाट आजको दिनका विदेशी मुद्रा विनिमय दर पत्ता लगाउनुहोस् । साथै उक्त दिनको अन्तर्राष्ट्रिय बजारमा (क) तेल प्रति ब्यारेल (ख) सुन प्रति के.जी वा प्रति 10 ग्राम को मूल्य टिपोट गर्नुहोस् ।
- वर्तमान आर्थिक ऐनअनुसार उक्त वस्तुमा लाग्ने कर, भन्सार महसुल, मू.अ.क. तथा कमिसनसमेतको हिसाब गरी नेपाली बजारमा उक्त वस्तुहरूको बिक्री मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. पाँच पाँच जनाको समूह बनाई प्रत्येक समूहलाई फरक फरक देशको लागि एक एक ओटा भ्रमण प्याकेज निर्माण गर्न लगाउनुहोस् । जसमा निम्न लिखित कुराहरू समावेश गर्न लगाउनुहोस् :
- (क) उक्त देशको मुद्रा र भ्रमण समयको विनिमय दर
- (ख) त्यस देशका लागि पारवहन, खाना तथा आवास, अन्य स्थानीय खर्च र किनमेलको खर्च
- प्रत्येक समूहले माथिको प्याकेजमा आफ्नो समूहलाई परेको देशको मुद्रामा तयार गरी जम्मा नेपाली रुपियाँ कति लाग्दो रहेछ । प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3.0 पुनरावलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) साधारण ब्याज भनेको के हो ?

(ख) P, T, R, I ले के के जनाउँछन् ? तिनीहरूको सम्बन्धलाई सूत्रको रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ग) मिश्रधन र मूलधनमा के फरक छ ? मिश्रधन निकाल्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।

माथिका प्रश्नहरूको उत्तरका आधारमा तलका (दुई ओटा) समस्याहरूको समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

विपिनले एक जना व्यक्तिबाट वार्षिक 10% ब्याजदरमा 2 वर्षका लागि रु. 5000 ऋण लिए भने दुई वर्षपछि उनले कति ब्याज तिर्नुपर्ला ?	विपनाले कृषि विकास बैङ्कबाट वार्षिक 10% ब्याजदरमा 2 वर्षका लागि वार्षिक ब्याज गणना गर्ने गरी रु. 5000 ऋण लिइन् र उनले पहिलो वर्षको ब्याजको समेत दोस्रो वर्षमा ब्याज तिर्नुपर्ने गरी ऋण लिँदा 2 वर्षपछि जम्मा कति ब्याज तिर्नुपर्ला ?
--	--

माथिको पहिलो समस्या साधारण ब्याजको समस्या हो जसमा ब्याज एकमुष्ट रूपमा दोस्रो वर्षको अन्त्यमा गणना गरेर तिरिन्छ । यसका बारेमा हामीले कक्षा 8 मा अध्ययन गरिसकेका छौ । दोस्रो समस्यामा ब्याज प्रत्येक वर्षमा गणना गरिन्छ र मूलधनमा जोडिन्छ । यसलाई चक्रीय ब्याज भनिन्छ । अब हामी यसको बारेमा अध्ययन गर्दछौ ।

3.1 चक्रीय ब्याज (Compound Interest)

माथिको दोस्रो समस्यामा विपनाले लिएको ऋण रु. 5000 हो । जसको 10% ब्याजदरमा 1 वर्षको ब्याज कति होला हेरौ ।

$$\text{विपनाको पहिलो वर्षको ब्याज } I = \frac{PTR}{100} = \frac{5,000 \times 1 \times 10}{100} = \text{रु. 500 भयो}$$

दोस्रो वर्षका लागि विपनाको मूलधन $(P_1) = P + I = 5000 + 500 = \text{रु. 5500}$ हुन्छ ।

$$\text{तसर्थ, दोस्रो वर्षको ब्याज } (I_1) = \frac{P_1 T \times R}{100} = \frac{5500 \times 1 \times 10}{100} = \text{रु. 550 हुन्छ ।}$$

त्यस कारण विपनाले तिर्नुपर्ने चक्रीय ब्याज $= I + I_1 = 500 + 550 = \text{रु. 1050}$

अतः कुनै मूल धन प्रत्येक वर्ष वा निश्चित समय अवधि (वार्षिक वा अर्ध वार्षिक) पश्चात् व्याज गणना गरी व्याजलाई मुलधनमा जोडेर पुनः व्याज निकालिन्छ भने त्यसलाई चक्रीय व्याज (Compound interest) भनिन्छ । चक्रीय व्याज र मूल धनको योगफललाई चक्रीय मिश्रधन (Compound amount) भनिन्छ ।

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गरौं :

रु. 10000 को 10% प्रतिवर्ष व्याजदरमा 3 वर्षका लागि लगानी गर्दा र जहाँ प्रत्येक वर्षको व्याज पुनः अर्को वर्षका लागि लगानी गरिन्छ भने,

वर्षको अन्त्यमा	व्याज आम्दानी	वर्षको अन्त्यमा मिश्रधन
पहिलो वर्ष	$I_1 = \frac{PTR}{100} = \frac{10000 \times 10}{100} = 1000$	$A_1 = P_1 + I_1 = \left(10000 + 10000 \times \frac{10}{100} \right)$ $= \text{रु. } 10000 (1 + 0.1)$ $= \text{रु. } 10000 \times 1.1$
दोस्रो वर्ष	$I_2 = \frac{10000 \times 1.1 \times 1 \times 10}{100}$ $= 1000 \times 1.1 \times 0.1$	$A_2 = \text{रु. } 10,000 \times 1.1 + \text{रु. } 10000 \times 1.1 \times 0.1$ $= \text{रु. } 10000 \times 1.1 (1 + 0.1)$ $= \text{रु. } 10000 \times (1.1)^2$ $= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2$
तेस्रो वर्ष	$I_3 = 10000 \times (1.1)^2 \times 1 \times \frac{10}{100}$ $= 10000 \times (1.1)^2 \times 0.1$	$A_3 = \text{रु. } 10000 \times (1.1)^2 + \text{रु. } 10000 \times (1.1)^2 \times 0.1$ $= \text{रु. } 10000 (1.1)^2 [1 + 0.1]$ $= \text{रु. } 10000 (1.1)^3$ $= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3$
T वर्षमा	$I_T \dots\dots\dots$	$A_T = 10,000 \times (1.1)^T$ हुन्छ । $= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$

माथिको तालिकाबाट अवलोकन गर्दा लगानीमा व्याजमात्र नभएर व्याजको पनि व्याज लगाइएको छ । त्यसलाई नै चक्रीय व्याज (Compound Interest) भनिन्छ ।

तसर्थ यदि मुलधन P लाई वार्षिक R% व्याजदरमा T वर्षका लागि लगानी गरिन्छ भने T वर्षको अन्त्यमा जम्मा रकम S प्राप्त गर्दछौं जसलाई चक्रीय मिश्रधन (CA) वा Sum (S) लेखिन्छ र $S = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$ हुन्छ ।

अथवा, चक्रीय मिश्रधन (CA) $= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$ हुन्छ ।

र चक्रीय व्याज (C.I) = चक्रीय मिश्रधन (CA) - मूलधन (P) = CA - P

$$\text{or, C.I.} = \left[P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - P \right]$$

$$\text{or, C.I.} = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] \text{ हुन्छ।}$$

त्यसै गरी यही व्याज अर्ध वार्षिक रूपमा गणना गरिन्छ भने व्याजदर R% लाई $\frac{R}{2}\%$ र समय T लाई 2T लेखिन्छ।

यो अवस्थामा चक्रीय मिश्रधन (CA) = $P \left(1 + \frac{R}{2 \times 100} \right)^{2T}$ हुन्छ।

चक्रीय व्याज (CA) = $P \left[\left(1 + \frac{R}{200} \right)^{2T} - 1 \right]$ हुन्छ।

त्यस्तै यदि व्याज एक चौथाई वर्ष (3 महिना)मा गणना गर्ने गरिएको भएमा व्याजदर R/4% र समय 4T हुन्छ।

$$CA = P \left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T} \text{ र } CI = P \left[\left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T} - 1 \right] \text{ हुन्छ।}$$

यदि प्रत्येक वर्षको व्याजदर फरक फरक भएमा के होला ? समूहमा छलफल गर्नुहोस्।

उदाहरण 1

रु. 1,500 को वार्षिक 5% व्याजदरमा 2 वर्षपछि चक्रीय व्याज कति हुन्छ ? सूत्र प्रयोग नगरी पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ मूलधन (P) = रु. 1500

व्याजदर (R) = 5 % प्रतिवर्ष

समय (T) = 2 वर्ष

अब, पहिलो वर्षमा व्याज (T_1) = $\frac{P \times T \times R}{100} = \frac{1500 \times 1 \times 5}{100} = \text{रु. 75}$

तसर्थ, दोस्रो वर्षको मूलधन = रु. 1500 + रु. 75 = रु. 1575

फेरि दोस्रो वर्षको व्याज (I_2) = $\frac{1575 \times 1 \times 5}{100} = \text{रु. 78.75}$

अतः चक्रीय व्याज (CI) = $I_1 + I_2 = \text{रु. 75} + \text{रु. 78.75}$
= रु. 153.75

अर्को तरिका

पहिलो वर्षको व्याजदर (A) = 5%

दोस्रो वर्षको व्याजदर (b) = 5%

चक्रीय व्याजदर (R)

प्रभावकारी व्याजदर (I) =

$$= a + b + \frac{ab}{100}$$

$$= 5 + 5 + \frac{5 \times 5}{100} = 10.25\%$$

चक्रीय व्याज = रु. 1500 को 10.25%

$$= 1500 \times \frac{10.25}{100}$$

$$= \text{रु. 153.75}$$

उदाहरण 2

रु. 4500 लाई 5% प्रतिवर्ष ब्याजदरमा लगानी गर्दा 3 वर्षमा प्राप्त हुने चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मूलधन (P) = रु. 4,500

ब्याजदर (R) = 5% प्रतिवर्ष

समय (T) = 3 वर्ष

चक्रीय मिश्रधन (CA) = ?

चक्रीय ब्याज (CI) = ?

$$\begin{aligned}\text{हामीलाई थाहा छ, चक्रीय मिश्रधन (CA)} &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T = 4500 \left(1 + \frac{5}{100} \right)^3 \\ &= 4500 \times 1.156725 \\ &= \text{रु. 5209.31}\end{aligned}$$

पुनः चक्रीय ब्याज (CI) = चक्रीय मिश्रधन (CA) - मूलधन (P)

$$= \text{रु. 5209.31} - 4500$$

$$= \text{रु. 709.31}$$

उदाहरण 3

रु. 7500 को वार्षिक 10% ब्याजदरले 2 वर्षमा प्राप्त हुने साधारण ब्याज र चक्रीय ब्याजबिचको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मूलधन (P) = रु. 7500

ब्याजदर (R) = 10%

समय (T) = 2 वर्ष

साधारण ब्याज (I) = ?

चक्रीय ब्याज (CI) = ?

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{साधारण ब्याज S.I.} = \left(\frac{PTR}{100} \right) = \frac{7500 \times 2 \times 10}{100} = 1500$$

फेरि,

$$\text{चक्रीय ब्याज (CI)} = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] = 1500 \left[\left(1 + \frac{10}{100} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= 7500[(1+0.1)^2 - 1]$$

$$= 7500 \times 0.21 = \text{रु. } 1575$$

$$\text{ब्याजमा फरक} = \text{C.I.} - \text{S.I.} = \text{रु. } 1575 - \text{रु. } 1500$$

$$= \text{रु. } 75$$

उदाहरण 4

एक जना व्यक्तिले रु. 48,000 वार्षिक 12% ब्याजदरमा आस्था सहकारी संस्थाबाट ऋण लिए। यदि ब्याज अर्ध वार्षिक रूपमा गणना हुन्छ भने 1 वर्ष 6 महिनापछि उनले जम्मा कति रुपियाँ तिर्नुपर्ला ?

समाधान

यहाँ, मूलधन (P) = रु 48000

वार्षिक ब्याजदर (R) = 12%

समय (T) = 1 वर्ष 6 महिना = 1.5 वर्ष

चक्रीय ब्याज (CI) = ?

अब हामीलाई थाहा छ, ब्याज अर्ध वार्षिक रूपमा गणना गरिन्छ भने,

$$\text{चक्रीय ब्याज (CI)} = P \left[\left(1 + \frac{R}{2 \times 100} \right)^{2T} - 1 \right] = 48000 \left[\left(1 + \frac{12}{200} \right)^{2 \times 1.5} - 1 \right]$$

$$= \text{रु. } 48,000 [1.191016 - 1] = \text{रु. } 9168.77$$

तसर्थ अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याज (CI) = रु. 9168.77

∴ 1 वर्ष 6 महिनापछि तिर्नुपर्ने रकम = रु. (48000 + 9168.77)

$$= \text{रु. } 57168.77$$

उदाहरण 5

12% ब्याजदरले 2 वर्षमा कुनै रकमको साधारण ब्याज वार्षिक चक्रीय ब्याज भन्दा रु. 36 ले कम हुन्छ भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, ब्याजदर (R) = 12%

समय (T) = 2 वर्ष

चक्रीय ब्याज र साधारण ब्याजको फरक = C.I. - S.I. = रु. 36

मूलधन (P) = ?

अब, मानौं मूलधन (P) = रु. x

$$\text{तसर्थ, S.I.} = \frac{P.T.R}{100} = \frac{x.2.12}{100} = \frac{24x}{100}$$

$$\text{फेरि, C.I.} = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] = x \left[\left(1 + \frac{12}{100} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= x[(1 + 0.12)^2 - 1]$$

$$= x[1.2544 - 1]$$

$$= 0.2544x$$

अब, हमीलाई थाहा छ, C.I. - S.I. = रु. 36

$$0.2544x - 0.24x = 36$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{36}{0.0144}$$

$$\text{अथवा, } x = \text{रु. 2500}$$

तसर्थ मूलधन (P) = रु 2500

उदाहरण 6

कुनै धन निश्चित वार्षिक चक्रीय ब्याजदरमा 3 वर्षमा रु. 66550 र 4 वर्षमा रु. 73205 हुन्छ भने ब्याजदर र मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो 3 वर्षका लागि

मूलधन (P) = x मानौं

समय (T) = 3 वर्ष

चक्रीय मिश्रधन (CA) = रु. 66550

$$\text{हामीलाई थाहा छ, CA} = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 66550 = x \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{66550}{\left(1 + \frac{R}{100} \right)^3} \dots\dots\dots (i)$$

फेरि, चार वर्षका लागि

मूलधन (P) = x

समय (T) = 4 वर्ष

चक्रीय मिश्रधन (CA) = रु. 73205

हामीलाई थाहा छ,

चक्रीय मिश्रधन = रु. 73205

अथवा, $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T = \text{रु. 73205}$

अथवा, $x \left(1 + \frac{R}{100}\right)^4 = \text{रु. 73205}$

अथवा, $x = \frac{73205}{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^4} \dots\dots\dots (ii)$

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$\frac{66550}{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^3} = \frac{73205}{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^4}$$

अथवा, $\frac{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^4}{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^3} = \frac{73205}{66550}$

अथवा, $\left(1 + \frac{R}{100}\right) = 1.10$

अथवा, $\frac{R}{100} = 1.10 - 1$

अथवा, $\frac{R}{100} = 0.10$

अथवा, $R = 0.10 \times 100 = 10\%$

तसर्थ ब्याजदर (R) = 10% प्रतिवर्ष

फेरि, समीकरण (i) बाट $x = \frac{66550}{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^3} = \frac{66550}{(1.1)^3} = \frac{66550}{1.33} = 50,000$

अतः मूलधन (P) = रु. 50,000

वैकल्पिक विधि

तिन वर्षको मिश्रधन = रु. 66550

अथवा, $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3 = 66550 \dots\dots (i)$

त्यस्तै 4 वर्षको मिश्रधन = रु. 73205

अथवा, $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^4 = 73205 \dots\dots\dots (ii)$

अथवा, $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 73205$

अथवा, $66550 \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 73205$

अथवा, $\left(1 + \frac{R}{100}\right) = \frac{73205}{66550}$

अथवा, $1 + \frac{R}{100} = 1.10$

अथवा, $\frac{R}{100} = 1.10 - 1$

$R = 0.10 \times 100 = 10\%$ प्रतिवर्ष

R को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$P \times (1.1)^3 = 66550$

$P = \frac{66550}{1.33} = 50,000$

\therefore मूलधन (P) = रु. 50,000

अभ्यास 3

1. सूत्र प्रयोग नगरी हिसाब गर्नुहोस् ।

- वार्षिक 12% ब्याजदरमा रूपकले विदुरसँग रु. 14000 कर्जा लिएछ भने 2 वर्षपछि रूपकले विदुरलाई जम्मा कति चक्रीय ब्याज तिर्नुपर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- मूलधन रु. 10,000 को वार्षिक 6% ब्याजदरमा ब्याज हिसाब गर्दा 2 वर्षपछिको वार्षिक चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।
- रु. 64,000 लाई 3 वर्षका लागि ब्याजदर 4% प्रतिवर्ष पहिलो वर्षका लागि, 5% प्रतिवर्ष दोस्रो वर्षका लागि र 6% तेस्रो वर्षकालागि निर्धारण गरी लगानी गर्दा तिन वर्षपछिको चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. सूत्र प्रयोग गरेर हिसाब गर्नुहोस् ।

- रु. 20,000 लाई वार्षिक 5% प्रतिवर्ष ब्याजदरमा 3 वर्षका लागि बैङ्कमा राख्दा 3 वर्षपछिको वार्षिक चक्रीय ब्याज र वार्षिक चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - पेम्बाले वार्षिक 10% ब्याजदरमा एउटा सहकारीबाट रु. 48,000 कर्जा लिएछन् । 4 वर्षपछि चक्रीय ब्याज र मिश्रधन कति कति तिर्नुपर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - सार्थकले रु. 20,000 बैङ्कमा जम्मा गरे । यदि बैङ्कले वार्षिक 8% चक्रीय ब्याज प्रदान गर्दछ भने 2 वर्ष 6 महिनापछिको चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. (a) अरविन्दले रु. 80,000 एउटा बैङ्कमा जम्मा गरे । यदि बैङ्कले वार्षिक 8% ब्याजदर प्रदान गर्दछ भने 2 वर्षपछिको साधारण ब्याज र चक्रीय ब्याजको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) रु. 7,500 को वार्षिक 12% ब्याजदरले 3 वर्षमा हुने साधारण ब्याज तथा वार्षिक चक्रीय ब्याजको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) निमाले एउटा वाणिज्य बैङ्कबाट 12.5% साधारण ब्याजका दरले 3 वर्षका लागि रु. 24,000 कर्जा लिएछ । उसले सोही ब्याजदरले चक्रीय ब्याज पाउने गरी सङ्गीतालाई कर्जा दिएछ भने 3 वर्षपछिको उसलाई हुने फाइदा रकम पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. (a) रूपाले वार्षिक चक्रीय ब्याज 8% ले रु. 50,000 एउटा बैङ्कमा जम्मा गरिन् । यदि बैङ्कले अर्ध वार्षिक हिसाबले चक्रीय ब्याज दिने रहेछ भने 2 वर्षपछि उनले पाउने मिश्रधन र चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) एउटा बैङ्कले अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याज दिन्छ जसमा मञ्जुले रु. 1,00,000 वार्षिक 8% ब्याज पाउने गरी जम्मा गरिन् भने 3 वर्षपछि उनले प्राप्त गर्ने मिश्रधन र चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (c) रु. 14,000 को 3 वर्षमा 12% प्रतिवर्ष ब्याजदरले हुने वार्षिक चक्रीय ब्याज र अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याजबिचको अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) प्रतिभाले एउटा बैङ्कमा रु. 1,50,000 प्रतिवर्ष 10% ब्याज पाउने गरी रकम जम्मा गरिन् । प्रमिलाले उक्त बैङ्कमा रु. 1,50,000 प्रतिवर्ष 12% ब्याजदरमा रकम जम्मा गरिन् । यदि प्रतिभाले अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याज प्राप्त गर्छिन् र प्रमिलाले वार्षिक चक्रीय ब्याज प्राप्त गर्दछिन् भने 3 वर्षपछि कसको ब्याज कतिले बढी हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. (a) रोशनले 5% साधारण ब्याजदरमा 4 वर्षका लागि केही रुपियाँ कर्जा लियो र तुरुन्तै उसले सोही दरको चक्रीय ब्याज पाउने गरी रामकलीलाई दियो र 4 वर्षपछि उसले रु. 30 नाफा गन्यो भने रोशनले कति रुपियाँ कर्जा लिएको रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) प्रतिवर्ष 15% ब्याजदरले 2 वर्षमा कुनै रकमको चक्रीय ब्याज साधारण ब्याजभन्दा रु. 180 ले बढी हुन आउँछ भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) एक जना व्यापारीले 3% प्रतिवर्ष साधारण ब्याजदरले केही रकम सापट लिएछ र वार्षिक 5% प्रतिवर्ष चक्रीय ब्याजदरले पुनः लगानी गरेछ । यदि 3 वर्षपछि उसले रु. 1082 लाभ गरेछ भने उसले कति रकम सापटी लिएको हो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) वार्षिक 10% का दरले एक वर्षमा हुने धनराशिको अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याज सोही अवधिमा उही दरले हुन आउने वार्षिक चक्रीय ब्याजभन्दा रु. 40 ले बढी हुन्छ भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. (a) वार्षिक मिश्रित ब्याजदरअनुसार कुनै रकमको मिश्रधन 2 वर्षमा रु. 14,520 र 3 वर्षमा रु. 15,972 हुन्छ भने मूलधन र ब्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) वार्षिक चक्रीय ब्याजदरमा कुनै रकमको 2 वर्षको र 3 वर्षको मिश्रधन क्रमशः रु. 10,580 र रु. 12,167 भए मूलधन र ब्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) वार्षिक चक्रीय ब्याजदरले कुनै रकमको 3 वर्ष र 4 वर्षको अन्तमा मिश्रधन क्रमशः रु. 79,860 र रु. 87,846 हुन्छ भने चक्रीय ब्याजदर र मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) कुनै रकमको वार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार एक वर्ष र दुई वर्षको चक्रीय ब्याज क्रमशः रु. 1800 र रु. 3816 हुन्छ भने चक्रीय ब्याज दर र मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. (a) रु. 50,000 को वार्षिक 10% ब्याजदरमा 2 वर्ष 6 महिनाको अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) 8% प्रतिवर्ष चक्रीय ब्याजदरमा रु. 3000 को 1 वर्ष 6 महिनाको अर्ध वार्षिक चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (c) 2 वर्षपछि सबै रकम निकाल्ने गरी कुनै बैङ्कमा रु. 80,000 जम्मा गर्दा तलका मध्ये कुन विकल्प उपयुक्त होला ? कारण दिनुहोस् ।
- (i) 12% वार्षिक चक्रीय ब्याजदरमा (ii) 10% अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याजदरमा
- (d) कुनै रकम प्रत्येक 6 महिनामा त्यसको 0.10 का दरले ब्याज बढ्दै जान्छ भने कति समयपछि रु. 4000 को वार्षिक चक्रीय ब्याज रु. 1324 हुन्छ ?
8. पाँच पाँच जनाको समूह निर्माण गरी नजिकैको फरक फरक बैङ्क, वित्तीय संस्था वा सहकारीमा जानुहोस् । त्यहाँको प्रबन्धक वा प्रमुखलाई भेटी विभिन्न किसिमका योजनाहरूका बारेमा जानकारी लिनुहोस् वा उक्त बैङ्किङ संस्थाको ब्रोसर लिएर त्यसमा भएका विभिन्न योजनाहरूका बारेमा अध्ययन गर्नुहोस् । त्यहाँका योजनाहरूमध्ये तपाईंहरूका लागि निश्चित रकम जम्मा गर्न कुनचाहिँ उपयुक्त रह्यो र किन ? साथै बोर्डले किन यस्ता योजनाहरू बनायो होला ? प्रबन्धकसँग छलफल गरी उक्त संस्थाले लिने मुनाफा कसरी आउँदो रहेछ टिपोट गर्नुहोस् । समूहमा प्रतिवेदन तयार गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4.0 पुनरावलोकन (Review)

तलका दुई अवस्थाका बारेमा समूहमा अध्ययन र छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

अमृतले एउटा वाणिज्य बैङ्कमा 2.8% प्रतिवर्ष ब्याजदरमा रु. 25,000 जम्मा गरेछन् । यदि बैङ्कले प्रत्येक वर्ष ब्याजको हिसाब गरी पुनः मूलधनमा समावेश गर्ने रहेछ भने 4 वर्षपछिको अमृतको जम्मा मिश्रधन कति होला ?

माथिको अवस्थामा रकमको सट्टा कुनै सहरको एउटा समयको जनसङ्ख्या दिइएको भएमा 4 वर्षपछिको उक्त सहरको जनसङ्ख्यामा कति फरक आउला ?

हामीले अगिल्लो पाठमा चक्रीय वा मिश्रित ब्याजका बारेमा अध्ययन गर्‍यौं, जसमा T समयपछिको चक्रीय मिश्रधन $(CA) = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$ हुन्छ । अब हामी कुनै निश्चित समयमा कुनै वस्तु, सेवा वा अन्यको परिणाममा आउने गिरावट तथा वृद्धिका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

हाम्रो वरिपरि वा दैनिक जीवनमा, के लगानीमा मात्र वृद्धि वा ह्रास हुन्छ ? के अन्य वस्तु वा सेवामा पनि वृद्धि वा ह्रास भइरहेको हुन्छ होला ? समूहमा छलफल गरी समयसँगै मान बढ्ने र घट्ने वस्तुहरूको सूची तयार गर्नुहोस् । यसको वृद्धि वा ह्रासको प्रकृति र दरका बारेमा पनि छलफल गर्नुहोस् ।

4.1 जनसङ्ख्या वृद्धि (Population Growth)

हामीले हाम्रो दैनिक जीवनमा विभिन्न समयमा जनसङ्ख्या, ब्याक्टेरिया, बोट बिरुवा तथा पशुपक्षीहरूको सङ्ख्यामा वृद्धि भइरहेको कुरा देखिरहेका र सुनिरहेका हुन्छौं । यदि बाहिरी कुनै अवस्थाले असर नगरेमा यो एउटा निश्चित दरमा निश्चित समयसम्म वृद्धि भइरहेको हुन्छ । जनसङ्ख्या वृद्धि प्रायः गरेर सजीवको हुन्छ । सजीवहरू कुनै निश्चित समयपछि आफैं पुनः उत्पादन गर्न योग्य हुन्छन् र जनसङ्ख्या वृद्धि पनि साधारण नभई मिश्रित तरिकाले भइरहेको हुन्छ । यसलाई जनसङ्ख्या वृद्धि भनिन्छ । तसर्थ जनसङ्ख्या वृद्धिका समस्याहरूलाई पनि चक्रीय ब्याजका समस्यहरूसँग तुलना गरेर समाधान गर्न सकिन्छ । जस्तै : कुनै गाउँको जनसङ्ख्या 2068 सालमा P_0 थियो । यदि पछि उक्त गाउँको जनसङ्ख्या $R\%$ प्रतिवर्ष वृद्धि भैरहे को भए उक्त गाउँको जनसङ्ख्या 2072 सालमा कति भयो होला ? यदि 2072 सालको भुक्म्पमा सो गाउँमा केही मानिसहरूको मृत्यु भएछ भने 2072 को अन्त्यमा उक्त गाउँको जनसङ्ख्या कति भयो होला ?

यहाँ, P_0 = सुरुको जनसङ्ख्या (Initial population)

$R\%$ = जनसङ्ख्या वृद्धिदर (Population growth rate) (प्रतिशत प्रतिवर्ष)

T = समय (वर्षमा)

P_T = T वर्षपछिको जनसङ्ख्या

यसलाई चक्रीय मिश्रधनको सूत्रसँग तुलना गर्दा

$$P_T = P_0 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \text{ हुन्छ र बढेको जनसङ्ख्या } P = P_T - P_0 = P_0 \left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T - 1 \right] \text{ हुन्छ।}$$

यदि प्रत्येक वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर फरक फरक भएमा

$$T \text{ वर्षपछिको जनसङ्ख्या } (P_T) = P_0 \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{R_T}{100}\right) \text{ हुन्छ।}$$

जहाँ R_1, R_2, \dots, R_T ले क्रमशः प्रथम वर्ष, दोस्रो वर्ष, गर्दै T औं वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर जनाउँछ।

यदि जनसङ्ख्याका ठाउँमा कुनै वस्तुको मूल्य, बिरुवाको उचाइ आदि भएको खण्डमा के होला ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस्।

उदाहरण 1

एउटा सहरको जनसङ्ख्या 2068 को अन्त्यमा 30,000 थियो। यदि वार्षिक वृद्धिदर 2.5% भए 2071 को अन्त्यमा उक्त सहरको जनसङ्ख्या कति भयो होला ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, 2068 को जनसङ्ख्या $P_0 = 30,000$

वार्षिक वृद्धिदर (R) = 2.5%

समय $T = 2068$ देखि 2071 सम्म = 3 वर्ष

2071 को अन्तिमको जनसङ्ख्या (P_T) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, } P_T &= P_0 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \\ &= 30,000 \left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^3 \\ &= 30,000 \times 1.0769 \\ &= 32306.71 = 32307 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$

उदाहरण 2

एउटा सहरको हालको जनसङ्ख्या 97,65,625 रहेको छ । यदि उक्त सहरको जनसङ्ख्या वृद्धिदर 4% प्रतिवर्ष भएमा 2 वर्षपछि उक्त सहरको जनसङ्ख्या कतिले वृद्धि होला ?

समाधान

यहाँ, सुरुको जनसङ्ख्या (P_0) = 9765625

जनसङ्ख्या वृद्धिदर (R) = 4%

समय (T) = 2 वर्ष

बढेको जनसङ्ख्या = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, बढेको जनसङ्ख्या } P &= P_0 \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] \\ &= P_0 \left[\left(1 + \frac{4}{100} \right)^2 - 1 \right] \\ &= 97,65,625 \times 0.0816 \\ &= 796875 \end{aligned}$$

तसर्थ, उक्त सहरको जनसङ्ख्या 7,96,875 ले वृद्धि हुन्छ ।

उदाहरण 3

एउटा गाउँको हालको जनसङ्ख्या 17,640 छ । यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर 5% प्रतिवर्ष भएमा 2 वर्षअगाडि उक्त गाउँको जनसङ्ख्या कति थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, हालको जनसङ्ख्या (P_T) = 17640

समय (T) = 2 वर्ष

वृद्धिदर (R) = 5%

2 वर्ष अगाडिको जनसङ्ख्या (P_0) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ, } P_T = P_0 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 17640 = P_0 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2$$

$$\text{अथवा, } 17640 = P_0 (1 + 0.05)^2$$

$$\text{अथवा, } P_0 = \frac{17640}{1.1025} = 16,000$$

तसर्थ, 2 वर्षअगाडि उक्त गाउँको जनसङ्ख्या 16,000 थियो ।

उदाहरण 4

एउटा नगरपालिकाको जनसङ्ख्या 2 वर्षमा 1,00,000 बाट बढेर 1,21,000 भयो भने जनसङ्ख्या वृद्धिदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, सुरुको जनसङ्ख्या (P_0) = 1,00,000

समय (T) = 2 वर्ष

हालको जनसङ्ख्या P_T = 1,21,000

वृद्धिदर (R) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ, } P_T = P_0 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 1,21,000 = 1,00,000 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2$$

$$\text{अथवा, } \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 = \frac{12,10,000}{10,00,000}$$

$$\text{अथवा, } \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 = \left(\frac{11}{10} \right)^2$$

$$\text{अथवा, } \left(1 + \frac{R}{100} \right) = \frac{11}{10}$$

$$\text{अथवा, } \frac{100 + R}{100} = \frac{11}{10}$$

$$\text{अथवा, } 100 + R = \frac{1100}{10}$$

$$R = 110 - 100 = 10\%$$

अतः जनसङ्ख्या वृद्धिदर 10% प्रतिवर्ष रहेछ ।

उदाहरण 5

एउटा गाउँको जनसङ्ख्या 26,000 थियो । उक्त गाउँको जनसङ्ख्या वृद्धिदर 5% छ । यदि 1 वर्षपछि उक्त गाउँमा अन्यत्रबाट 700 जना बसाइँ सरेर आए भने 3 वर्षपछि उक्त गाउँको जनसङ्ख्या कति होला ?

समाधान

यहाँ, सुरुको जनसङ्ख्या (P_0)=26,000 जना, समय (T) = 1 वर्ष, वृद्धिदर (R) = 5%

$$\begin{aligned}\text{अब, 1 वर्षपछिको जनसङ्ख्या } (P) &= P_0 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^1 && [\text{बसाइँ सर्नुअघि}] \\ &= 26,000 \left(1 + \frac{5}{100} \right) \\ &= 26,000(1.05) = 27,300 \text{ जना}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{फेरि, 1 वर्षपछिको कुल जनसङ्ख्या } (P_1) &= 27,300 + \text{बसाइँ सरी आएको जनसङ्ख्या} \\ &= 27,300 + 700 = 28,000 \text{ जना}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{अब, 3 वर्षपछिको जनसङ्ख्या } (P_2) &= P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \\ &= 28,000 \left(1 + \frac{5}{100} \right)^2 \\ &= 28,000 \times 1.1025 \\ &= 30,870 \text{ जना}\end{aligned}$$

अतः 3 वर्षपछि उक्त गाउँको जनसङ्ख्या 30,870 जना पुग्छ ।

अभ्यास 4.1

- 1(a) एउटा सहरको हालको जनसङ्ख्या 1,85,220 छ, यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर प्रतिवर्ष 5% भएमा 3 वर्षपछि उक्त सहरको जनसङ्ख्या कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) 2 वर्षअगाडि एउटा गाउँको जनसङ्ख्या 1250 थियो, यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर 2.5% प्रतिवर्ष छ भने अहिलेको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) वि.सं. 2070 मा प्रकाशित एक तथ्याङ्कअनुसार वि.सं. 2069 मा माध्यमिक तहमा छात्राहरूको भर्ना सङ्ख्या लगभग 4,37,000 थियो । यदि उक्त वृद्धिदर लगभग 4% भए वि.सं. 2071 मा माध्यमिक तहमा कति जना छात्राहरू भर्ना भए होलान् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (d) एउटा घर धनीले वार्षिक 15% प्रतिवर्षका दरले घर भाडा वृद्धि गर्ने सम्झौता गरेको छ, यदि उक्त घरको हालको भाडा रु. 7500 भएमा 3 वर्षपछि उक्त घरको घर भाडा कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 2(a) दुई वर्ष पहिले एउटा सहरको जनसङ्ख्या 254000 थियो, यदि उक्त सहरको जनसङ्ख्या वृद्धिदर 3% प्रतिवर्ष रहेछ भने दुई वर्षमा कतिले वृद्धि भयो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) एउटा बिरुवाको वृद्धिदर प्रति महिना 2% छ । यदि 2072 पुसको सुरुमा यसको उचाइ 4m छ भने 2072 चैतको सुरुमा उक्त बिरुवाको उचाइ कतिले वृद्धि होला ? (दुई दसमलव स्थानसम्म निकाल्नुहोस् ।)
- (c) 2068 सालको जन गणनाअनुसार नेपालको जनसङ्ख्या लगभग 2 करोड 65 लाख थियो । यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर प्रतिवर्ष लगभग 1.5% भएमा 2071 सालको अन्त्यसम्म जनसङ्ख्या लगभग कतिले वृद्धि भयो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 3(a) एउटा गाउँको जनसङ्ख्या प्रत्येक वर्ष 4% ले बढ्दै जान्छ । यदि उक्त गाउँको हालको जनसङ्ख्या 15,000 भएमा 3 वर्षअगाडि कति थियो होला ?
- (b) एउटा जग्गाको हालको मूल्य रु. 6,00,000 प्रतिआना रहेको छ । यदि उक्त जग्गाको वार्षिक मूल्य वृद्धिदर 10% भए 4 वर्षअगाडि उक्त जग्गाको मूल्य प्रति आना कति थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) दही जमाउने ब्याक्टेरियाको वृद्धिदर 5% प्रति घण्टा रहेको छ, यदि बेलुकी 7 बजे ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या 10.12×10^{11} रहेको छ भने 4 घण्टाअगाडि उक्त सङ्ख्या कति थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 4(a) 2068 सालको जन गणनाअनुसार पोखराको जनसङ्ख्या लगभग 2 लाख 80 हजार थियो । यदि 2071 सालको अन्त्यमा उक्त सहरको जनसङ्ख्या 2 लाख 90 हजार भएमा वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) एउटा सहरको जनसङ्ख्या इ.सं. 2012 को अन्त्यमा 40,000 थियो । इ.सं. 2014 को अन्त्यमा उक्त सङ्ख्या बढेर 44,100 भयो भने जनसङ्ख्या वृद्धिदर कति होला ?
- (c) एउटा सहरको जनसङ्ख्या 24400 छ, यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर प्रतिवर्ष 5% भए कति वर्षपछि उक्त सहरको जनसङ्ख्या 26901 होला ?
- (d) वार्षिक 30% का दरले वृद्धि भएको एउटा सहरको जनसङ्ख्या कति वर्षपछि 40,000 बाट बढेर 87,880 हुन्छ ?
- 5(a) एउटा गाउँको जनसङ्ख्या 2 वर्षअगाडि 31,250 थियो, यदि उक्त गाउँको जनसङ्ख्या वृद्धिदर 6% छ । एक वर्षअगाडि 625 जनाले अर्कै गाउँमा बसाइँ सराइ गरे भने उक्त गाउँको हालको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) एउटा सहरको जनसङ्ख्या वृद्धिदर 10% प्रतिवर्ष छ । दोस्रो वर्षको अन्त्यमा उक्त सहरको जनसङ्ख्या 30,000 थियो । ती मध्ये 5800 मानिसहरू अर्कै ठाउँबाट बसाइँ सराइ गरेर आएका थिए भने 2 वर्षअगाडि उक्त सहरको जनसङ्ख्या कति थियो होला ?

- (c) 3 वर्षअगाडि 3,75,000 जनसङ्ख्या भएको एउटा जिल्लाको वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर 2% छ । यदि दोस्रो वर्षको अन्त्यमा 1480 जना मानिस बसाइ सराई गरेर आए र प्राकृतिक प्रकोपका कारण 2750 जनाको मृत्यु भयो भने उक्त जिल्लाको हालको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. चार चार जनाको समूह निर्माण गरी प्रत्येक समूहले आफ्नो वडाका विभिन्न टोलहरूको भ्रमण गरी अहिलेको जनसङ्ख्या सङ्कलन गर्नुहोस् । गाउँपालिका वा वडा कार्यालयबाट वा अन्य किताब तथा स्मारिकाहरू प्रयोग गरी 2068 सालको जन गणनाबाट प्राप्त तथ्याङ्कको टिपोट गरी आफ्नो वडाको वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

4.2 मिश्रह्रास (Compound Depreciation)

तलका उदाहरणहरूको अध्ययन गरी समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

- (क) कमलले एउटा मोटरसाइकल 2 वर्षअगाडि रु. 1,60,000 मा किनेर अहिले रु. 1,10,000 मा बिक्री गरे भने मूल्यमा किन फरक भयो होला ?
- (ख) एउटा ल्यापटपलाई सेकेन्डहेन्ड पसलबाट खरिद गर्दा नयाँको भन्दा रु. 10,000 सस्तोमा खरिद गर्न पाइयो, किन ?
- (ग) एउटा प्रिन्टिङ मेसिन केही वर्षअगाडि रु. 3,40,000 मा किनिएको थियो । यसको हालको बिक्री मूल्य रु. 2,20,000 छ, किन ?

माथिको (क) मा एउटा मोटरसाइकलको मूल्य 60,000 ले घटेको छ । त्यस्तै (ख) मा सेकेन्डहेन्ड पसलमा खरिद गर्दा कुनै वस्तुको मूल्य केही प्रतिशत घटाएर पाइने कुरा थाहा भयो । (ग) मा मेसिनको प्रयोगपछि मूल्य कम हुन्छ भन्ने देखाउन खोजिएको छ ।

यसरी माथिका सबै उदाहरणहरूबाट के थाहा हुन्छ भने कुनै सामग्री निश्चित अवधिका लागि तयार गरिएको हुन्छ । यसको क्षमता पनि सञ्चालन अवधि बढ्दै जाँदा क्रमशः कम हुँदै जान्छ । तसर्थ कुनै पनि मेसिनरी सामग्रीहरूको प्रयोगपछि निश्चित दरमा तिनीहरूको मूल्यमा गिरावट आउँछ । यसलाई नै मूल्यमा भएको ह्रास भनिन्छ । यसरी कुनै निश्चित समय अवधिमा घटेको मूल्यलाई मिश्रह्रास (Compound depreciation) भनिन्छ ।

यदि, V_0 = सुरुको मूल्य (initial value), $R\%$ = ह्रासदर, T = समय अवधि (वर्षमा)

V_T = T समयपछिको मूल्य (value after T years) भएमा $V_T = V_0 \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$ हुन्छ र ह्रास भएको मूल्य $V_D = V_0 - V_T$

$$= V_0 \left(1 - \frac{R}{100} \right)^T - V_0$$

$$= V_0 \left[\left(1 - \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] \text{ हुन्छ ।}$$

यदि हिसाबदर प्रत्येक वर्ष फरक फरक भएको अवस्थामा $V_T = V_0 \left(1 - \frac{R_1}{100} \right) \left(1 - \frac{R_2}{100} \right) \left(1 - \frac{R_3}{100} \right) \dots \left(1 - \frac{R_T}{100} \right)$ हुन्छ । जहाँ, R_1, R_2, \dots, R_T ले पहिलो, दोस्रो, T औं वर्षको हिसाबदर जनाउँछ ।

उदाहरण 1

एउटा कारको हालको मूल्य रु. 8,00,000 पर्दछ, यदि यसको मूल्य प्रतिवर्ष 10% ले घट्दै जान्छ भने 3 वर्षपछि यसको मूल्य कति पर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, कारको हालको मूल्य (V_0) = रु. 8,00,000

मिश्रह्रास दर (R) = 10%

समय (T) = 3 वर्ष

3 वर्षपछिको मूल्य (V_3) = ?

हामीलाई थाहा छ, $V_T = V_0 \left(1 - \frac{R}{100} \right)^T$

$$\begin{aligned} \text{अथवा, } V_3 &= 8,00,000 \left(1 - \frac{10}{100} \right)^3 \\ &= 8,00,000(0.9)^3 = 8,00,000(0.7290) \\ &= \text{रु. } 583200 \end{aligned}$$

अतः 3 वर्षपछिको मूल्य = रु. 5,83,200

वैकल्पिक तरिका

$$\text{पहिलो वर्षको मिश्रह्रास } (D_1) = \frac{V_0 \times 1 \times R}{100} = \frac{8,00,000 \times 1 \times 10}{100} = \text{रु. } 80,000$$

$$\text{दोस्रो वर्षका लागि कारको मूल्य} = 80,00,000 - 80,000 = \text{रु. } 7,20,000$$

$$\text{दोस्रो वर्षको अन्त्यमा मिश्रह्रास } (D_2) = \frac{V_2 \times 1 \times R}{100} = \frac{7,20,000 \times 10}{100} = \text{रु. } 72,000$$

तेस्रो वर्षका लागि कारको मूल्य (V_2) = $7,20,000 - 72,000 = \text{रु. } 6,48,000$

तेस्रो वर्षको अन्त्यमा मिश्रद्वारास (D_3) = $\frac{V_2 \times 1 \times R}{100} = \frac{6,48,000 \times 1 \times 10}{100} = \text{रु. } 64,800$

तसर्थ, 3 वर्षपछि कारको मूल्य = रु. $6,48,000 - 64,800 = \text{रु. } 5,83,200$

उदाहरण 2

यदि एउटा दराजको मूल्य रु 60,000 बाट घटेर 3 वर्षमा रु. 7,500 भयो भने मिश्रद्वारास दर पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, दराजको खरिद मूल्य (V_0) = रु. 60,000

दराजको 3 वर्षपछिको मूल्य (V_3) = रु. 7,500

मिश्रद्वारास दर (R) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ, } V_T = V_0 \left(1 - \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 7500 = 60000 \left(1 - \frac{R}{100} \right)^3$$

$$\text{अथवा, } \left(1 - \frac{R}{100} \right)^3 = \frac{7500}{60000}$$

$$\text{अथवा, } \left(1 - \frac{R}{100} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{अथवा, } \left(1 - \frac{R}{100} \right) = \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{अथवा, } \left(1 - \frac{R}{100} \right) = 0.50$$

$$\text{अथवा, } \frac{R}{100} = 1 - 0.5$$

$$\text{अथवा, } R = 100 \times 0.5 = 50\%$$

उदाहरण 3

कुनै रोगको भाइरसको सङ्ख्या औषधी प्रयोगपछि 5% प्रतिघण्टाका दरले कम भइरहेको छ। यदि 11:00 am मा यसको सङ्ख्या 2.3×10^7 भएमा सोही दिनको 1:00 pm मा भाइरसको सङ्ख्या कति बाँकी रहला ?

समाधान

यहाँ, 11:00 am मा भाइरसको सङ्ख्या $V_0 = 2.3 \times 10^7$

भाइरस कम हुने दर (R) = 5% प्रतिघण्टा

समय (T) = 11:00 देखि 1:00 pm सम्म = 2 घण्टा

$V_2 = ?$

$$V_2 = V_0 \left(1 - \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } V_2 = 2.3 \times 10^7 \left(1 - \frac{R}{100} \right)^2$$

$$\text{अथवा, } V_2 = 2.3 \times 10^7 \left(\frac{95}{100} \right)^2$$

$$= 2.076 \times 10^7$$

अतः 1:00 pm मा भाइरसको सङ्ख्या $= 2.076 \times 10^7$ बाँकी रहन्छ ।

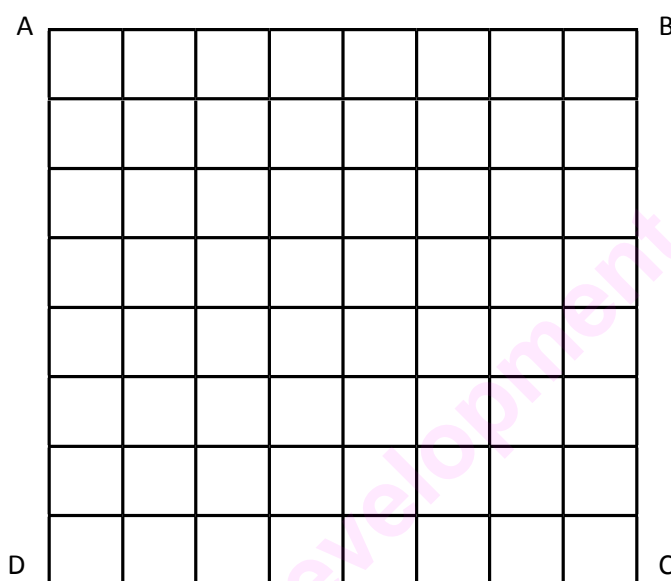
अभ्यास 4.2

- 1.(a) एउटा मोटरसाइकलको हालको मूल्य रु. 1,25,000 छ, यदि उक्त मोटरसाइकलको मूल्य 4% प्रतिवर्षका दरले घट्दै जान्छ भने 3 वर्षपछि यसको मूल्य कति होला ?
- (b) एउटा मेसिनको हालको मूल्य रु. 90,000 छ । उक्त मेसिनको मूल्य 10% प्रतिवर्षका दरले घट्दै जान्छ भने 2 वर्षपछि उक्त मेसिनको मूल्य कति होला ?
- (c) एउटा फाइनान्स कम्पनीको सेयरको मूल्यमा लगातार 2 वर्षसम्म 10% मिश्रह्रासका दरले कमी आएपछि कोपिलाले केही सेयर रु. 2430 मा बिक्री गरिन् भने उनले रु. 100 दरका कति ओटा सेयरहरू बिक्री गरिन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) एउटा कम्पनीले 3 वर्षअगाडि रु. 2,80,000 मा 5 रोपनी जग्गा खरिद गर्‍यो । देशको राजनीतिक तरलताको स्थितिले गर्दा उक्त जग्गाको मूल्य घट्न गयो । यदि उक्त जग्गाको मूल्य 5% प्रतिवर्ष मिश्रह्रास दरमा घट्दै गएको भए अहिले प्रतिरोपनी सो जग्गाको मूल्य कति होला ?
- (e) फुर्वाले रु. 7,20,000 मा एउटा ट्याक्टर किने । उनले 3 वर्षमा रु. 2,20,000 आम्दानी गरे र 3 वर्षपछि 10% प्रतिवर्ष मिश्रह्रास दरले मूल्य निर्धारण गरी बिक्री गरे भने उनलाई कति नाफा वा नोक्सान भयो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

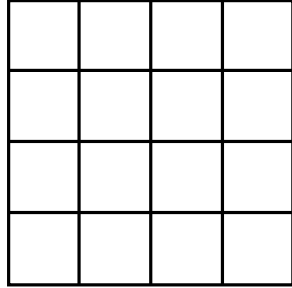
- 2(a) 3 वर्षअगाडि प्रकाशित एउटा किताबको मूल्य रु. 3000 थियो । उक्त किताबलाई हरेक वर्ष निश्चित दरमा छुटमा दिँदै बिक्री गरी हाल उक्त किताबलाई रु. 1536 मा बिक्री गरियो भने कति प्रतिशतका दरले मूल्यमा ह्रास आयो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) एक जना किसानले रु. 2,50,000 मा किनेको थ्रेसर मेसिन 2 वर्षपछि रु. 1,60,000 मा बिक्री गरे भने उक्त मेसिनको मिश्रह्रास दर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) एउटा घरको हालको मूल्य रु. 20,48,000 छ । यदि वार्षिक 15% का दरले मिश्रह्रास हुने भए कति वर्षपछि उक्त घरको मूल्य रु. 12,57,728 होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) एउटा धानकुट्ने मेसिन केही वर्षअगाडि रु. 4,00,000 मा किनिएको थियो । अहिले यसको मूल्य रु. 1,96,000 पर्छ । उक्त मेसिनको मूल्य 30% प्रतिवर्ष ह्रास भइरहेको भए उक्त मेसिन कति वर्षअगाडि किनिएको रहेछ ?
- 3.(a) एउटा सामुदायिक जङ्गलमा लगभग 20,000 ठुला रुखहरू थिए । उर्जा सङ्कटका कारण वार्षिक रूपमा उपभोक्ताहरूले इन्धनका लागि 8% रुखहरू काट्ने गरेका भए 2 वर्षसम्म जम्मा कति ओटा रुख काटिएलान् ? यस्ता समस्याहरूको समाधानका वैकल्पिक उपायहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् ।
- (b) एउटा मेसिनको हालको मूल्य रु. 5,00,000 छ । उक्त मेसिनको मूल्य पहिलो वर्ष 15% र त्यसपछिका वर्षहरूमा क्रमशः 10% र 5% ले ह्रास हुँदै जान्छ भने 3 वर्षपछि उक्त मेसिनको मूल्य कति होला ?
- (c) एउटा विद्युतीय सामग्री उत्पादन उद्योगले आफ्नो बजार खस्कदै गएका कारण प्रतिवर्ष 10% कामदार कटौती गर्दै लैजाने घोषणा गर्‍यो । त्यसैबमोजिम अहिले उक्त उद्योगमा जम्मा 40,000 कामदार कार्यरत छन् भने 3 वर्षअघि उक्त उद्योगमा कति कामदार कार्यरत थिए ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. औषधी प्रयोगका कारणले प्रतिदिन 20% ले घटिरहेको ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या चार दिनपछि जम्मा 1.6×10^8 भएछ भने 4 दिन अगाडि उक्त ब्याक्टेरियो सङ्ख्या कति थियो होला ?
5. चार चार जनाको समूह निर्माण गरी प्रत्येक समूह फरक फरक कम्पनी, ग्यारेज वा पसल वा अन्य संस्थाहरूमा जानुहोस् । उक्त संस्था वा निकायमा प्रयोग गरेका अथवा भएका विद्युतीय सामग्री, मेसिन वा सवारी साधनको खरिदको समयको मूल्य सोध्नुहोस् । उक्त सामग्रीलाई अहिलेको अवस्थामा बेच्नुपर्दा पर्ने मूल्य पनि सोध्नुहोस् । उक्त सामग्री खरिदपश्चात के कति आम्दानी भयो त्यो पनि टिपोट गर्नुहोस् । माथिका तथ्याङ्कहरू प्रयोग गरी उक्त सामग्रीको मूल्य कति प्रतिशतले वार्षिक रूपमा घटेको रहेछ पत्ता लगाउनुहोस् । साथै उक्त मेसिन/गाडी बिक्री गर्दा उनलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान हुन्छ ? प्रतिवेदन तयार गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5.0 पुनरावलोकन (Review)

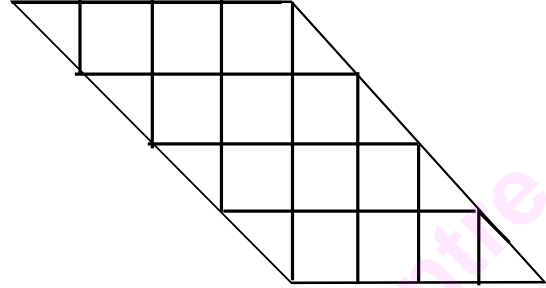
(क) दिइएको चित्र अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



1. माथि दिइएको चित्र ABCD ले कुन आकृतिलाई जनाउँछ, लेख्नुहोस् ।
2. चित्रको परिमिति (perimeter) कति एकाइ हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
3. चित्रको परिमिति कति प्रकारले निकाल्न सकिन्छ, ती के के हुन्, उल्लेख गर्नुहोस् ।
4. चित्रले ओगटेको सतहको क्षेत्रफल कति वर्ग एकाइ हुन्छ ?
5. उक्त समतल सतहको क्षेत्रफल कति तरिकाले निकाल्न सकिन्छ ? ती तरिकाहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।
6. माथिका प्रश्नहरूको उत्तरको निचोड के के हुन सक्छ, लेख्नुहोस् ।
7. चित्रमा एउटा विकर्ण (diagonal) खिच्दा बन्ने नयाँ चित्रहरू के के हुन्छन्, प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
8. नयाँ बनेका चित्रहरूको क्षेत्रफल कति कति वर्ग एकाइ हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
9. प्रश्न 7 र 8 का उत्तरका आधारमा के के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ, उल्लेख गर्नुहोस् ।
10. माथिका सबै प्रश्नहरूको उत्तरका आधारमा एउटा अनुच्छेद तयार गर्नुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)

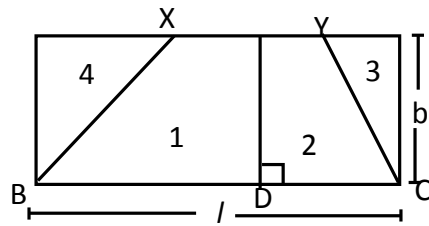
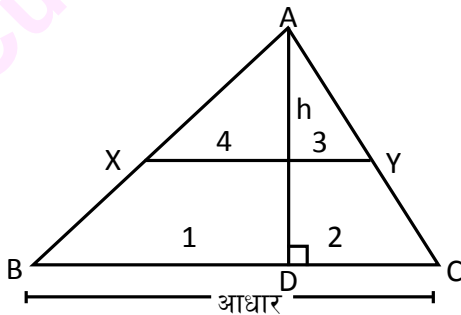
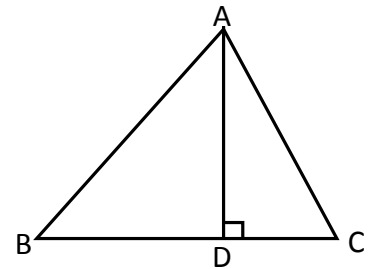
(ख) दिएका चित्रहरूको अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

1. माथिका दुई ओटा चित्रहरूमा रहेका समानता र भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. दुवै चित्रमा एक एक ओटा विकर्ण खिच्दा बन्ने नयाँ आकृतिहरू के के हुन् ? तिनीहरूको नाम लेख्नुहोस् ।
3. दुई चित्रहरूबिच के कस्तो सम्बन्ध देखाउन सकिन्छ ?
4. माथिका प्रश्नहरूका उत्तरका आधारमा के कस्तो निष्कर्षहरू निकाल्न सकिन्छ ? सूत्रबद्ध रूपमा लेख्नुहोस् ।

5.1 त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of a triangle)

क्रियाकलाप 1

आधार BC र उचाइ AD भएको एउटा त्रिभुज ABC खिच्नुहोस् । त्यसपछि उचाइ AD को मध्यबिन्दुबाट आधार BC सँग समानान्तर रेखा XY खिच्नुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तै चार ओटा भागहरूलाई 1, 2, 3 र 4 ले जनाइ कैचीका सहायताले काट्नुहोस् । काटेका टुक्राहरूलाई चित्रमा देखाए जस्तै गरी मिलाइ एउटा आयत बनाउनुहोस् ।



यहाँ आयतको लम्बाइ र त्रिभुजको आधारको नाप एउटै भएकाले बराबर हुन्छ । आयतको उचाइ त्रिभुजको उचाइको आधा मात्र हुन्छ । आयतको उचाइ $(b) = \frac{1}{2} h$; जहाँ $h =$ त्रिभुजको उचाइ हो । त्रिभुजको क्षेत्रफल र आयतको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

$\therefore \Delta ABC$ को क्षेत्रफल = आयतको लम्बाइ \times चौडाइ

$$= BC \times \left(\frac{1}{2} h\right) = \frac{1}{2} BC \times AD$$

अतः त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार \times उचाइ हुन्छ ।

समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of a right angled triangle)

हामीलाई थाहा छ, कुनै पनि त्रिभुजको क्षेत्रफल

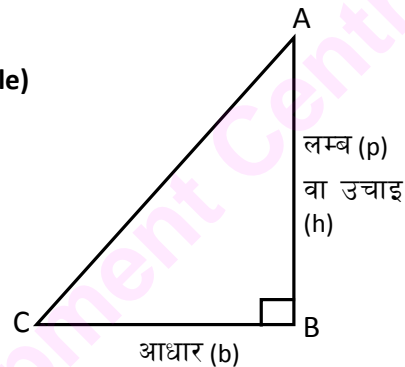
$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{उचाइ हुन्छ ।}$$

अर्थात् त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार \times उचाइ

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

तसर्थ समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार $(b) \times$ उचाइ (p)

$$= \frac{1}{2} \times bh \quad [\text{यहाँ, } b \text{ आधार र } h \text{ उचाइ हुन्छ ।}]$$



समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of an equilateral triangle)

क्रियाकलाप 2

भुजाको लम्बाइ a भएको एउटा समबाहु त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् । आधार BC को मध्यबिन्दु D र शीर्षबिन्दु A जोडेर लम्ब AD खिच्नुहोस् जसलाई त्रिभुज ABC को उचाइ पनि भनिन्छ ।

समकोण ΔADC मा $(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2$ हुन्छ ।

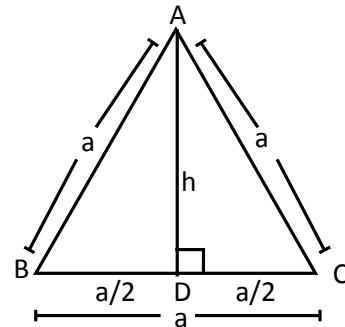
$$\text{अथवा, } a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h)^2$$

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2$$

$$\text{अथवा, } \frac{4a^2 - a^2}{4} = h^2 \text{ अथवा, } h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

यहाँ त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार \times उचाइ सूत्र प्रयोग गर्न सकिन्छ ।



समबाहु त्रिभुजको शीर्षबिन्दुबाट आधार भुजामा खिचिएको लम्बले आधार भुजालाई आधा पार्दछ ।

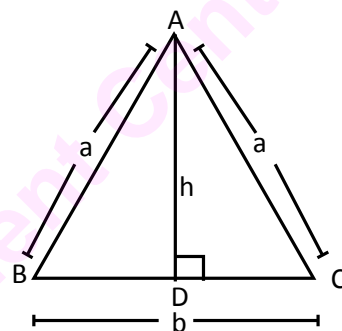
$$\begin{aligned}\therefore \text{समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\end{aligned}$$

अतः समबाहु $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{भुजा})^2$ हुन्छ ।

समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of an isosceles triangle)

क्रियाकलाप 3

आधार भुजा BC को नाप b एकाइ र अन्य दुई बराबर भुजाहरू AB र AC को नाप a एकाइ भएको समद्विबाहु त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् । त्यसपछि आधार BC को मध्यबिन्दु D र शीर्षबिन्दु A बाट लम्ब AD खिच्नुहोस् । जुन सो त्रिभुजको उचाइ पनि हो । यहाँ पाइथागोरस साध्यको प्रयोग गरी उचाइ AD पत्ता लगाउनुहोस् ।



समकोण $\triangle ADC$ बाट

$$\begin{aligned}(AD)^2 &= (AC)^2 - (DC)^2 \\ &= a^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \quad [AD \text{ ले } BC \text{ लाई } D \text{ बिन्दुमा समद्विभाजन गर्छ ।}] \\ &= a^2 - \frac{b^2}{4} \\ \therefore AD &= \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4}}\end{aligned}$$

अब $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{उचाइ}$

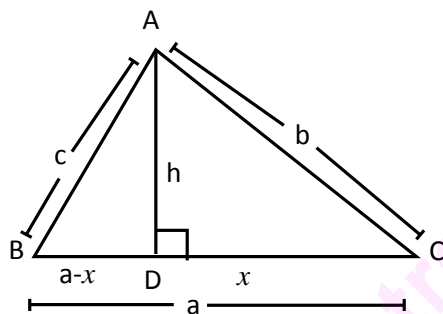
$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \times b \times \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - b^2} \\ &= \frac{1}{4} b \sqrt{4a^2 - b^2}\end{aligned}$$

तसर्थ समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} b \sqrt{4a^2 - b^2}$, जहाँ b = आधार भुजा र a बाँकी बराबर भुजाका नापहरू हुन् ।

विषमबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of a scalene triangle)

क्रियाकलाप 4

भुजा $BC = a$ एकाइ, $CA = b$ एकाइ र $AB = c$ एकाइ नाप भएका विषमबाहु त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् । शीर्षबिन्दु A बाट आधार भुजा BC को बिन्दु D मा पर्ने गरी लम्ब AD खिच्नुहोस् । त्यसपछि $DC = x$ एकाइ नाप मानेर $BD = (a - x)$ एकाइ नाप जनाउनुहोस् । यहाँ त्रिभुजको परिमिति $2s$ मान्दा $2s = (a+b+c)$ हुन्छ ।



$$\therefore s = \frac{a+b+c}{2} \text{ (अर्ध परिमिति)}$$

यहाँ, समकोण $\triangle ADC$ मा $(AD)^2 = (AC)^2 - (DC)^2$

अथवा, $h^2 = b^2 - x^2$ (i) र

फेरि, समकोण $\triangle ADB$ मा

$$(AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2$$

$$\text{अथवा, } h^2 = c^2 - (a - x)^2 \text{ (ii)}$$

समीकरण (i) र (ii) बाट $c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2$

$$\text{अथवा, } c^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = b^2 - x^2$$

$$\text{अथवा, } c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$$

$$\text{अथवा, } 2ax = b^2 - x^2 + x^2 + a^2 - c^2$$

$$\text{अथवा, } 2ax = b^2 + a^2 - c^2$$

$$\therefore x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

अब, x को मान समीकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2 \\ &= \left\{ b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right\} \left\{ b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right\} \\ &= \left\{ \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right\} \left\{ \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right\} = \frac{1}{2a} \left\{ 2ab + b^2 + a^2 - c^2 \right\} \frac{1}{2a} \left\{ 2ab - a^2 - b^2 + c^2 \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2a} \right)^2 \left[\left\{ (a+b)^2 - c^2 \right\} \left\{ c^2 - (a-b)^2 \right\} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2a} \right)^2 (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\ \therefore h &= \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)} \end{aligned}$$

तर, $a + b + c = 2s$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2(s - c)$$

$$c + a - b = a + b + c - 2b = 2s - 2b = 2(s - b)$$

$$c - a + b = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a)$$

$$\begin{aligned}\therefore h &= \frac{1}{2a} \sqrt{2s2(s-c).2(s-b).2(s-a)} \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt{(4)^2 s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{4}{2a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta ABC \text{ को क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times a \times h \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$

तसर्थ भुजाहरूको नाप a, b र c भएको विषमबाहु त्रिभुज (scalene triangle) को क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ वर्ग एकाइ हुन्छ, जहाँ $s =$ अर्ध परिमिति (semi perimeter) हो ।

उदाहरण 1

आधार भुजाको लम्बाइ 6 से.मि. र उचाइ 4 से.मि. भएको त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, आधार भुजा (b) = 6 से.मि.

उचाइ (h) = 4 से.मि.

त्रिभुजको क्षेत्रफल = ?

$$\begin{aligned}\text{त्रिभुजको क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{उचाइ} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \text{ से.मि.} \times 4 \text{ से.मि.} \\ &= 12 \text{ वर्ग से.मि.}\end{aligned}$$

उदाहरण 2

दिइएको समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

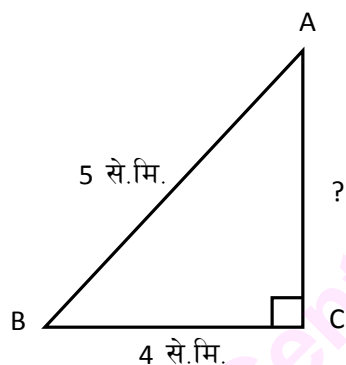
समाधान

यहाँ, कर्ण (AB) = 5 से.मि.

आधार (BC) = 4 से.मि.

उचाइ (AC) = ?

समकोण त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल = ?



$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \quad [\therefore \text{पाइथागोरस साध्यअनुसार}]$$

$$= (5 \text{ से.मि.})^2 - (4 \text{ से.मि.})^2$$

$$= 25 \text{ से.मि.}^2 - 16 \text{ से.मि.}^2$$

$$= 9 \text{ से.मि.}^2$$

$$\therefore AC = 3 \text{ से.मि.}$$

$$\text{अब } \triangle ABC \text{ को क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{लम्ब}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ से.मि.} \times 3 \text{ से.मि.} = 6 \text{ वर्ग से.मि.}$$

उदाहरण 3

दिइएको चतुर्भुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, चतुर्भुजमा दुई ओटा समद्विबाहु त्रिभुज छन् ।

मानौं, $a_1 = 4.5$ से.मि. र $a_2 = 4$ से.मि.

$b_1 = 3$ से.मि. र $b_2 = 3$ से.मि.

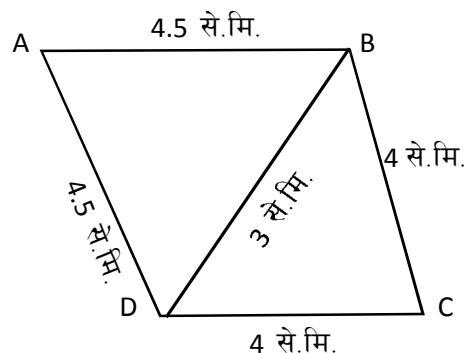
चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = $\triangle ABD$ को क्षेत्रफल + $\triangle BCD$ को क्षेत्रफल

$$\therefore \text{चतुर्भुजको क्षेत्रफल} = \frac{1}{4}b_1\sqrt{4a_1^2 - b_1^2} + \frac{1}{4}b_2\sqrt{4a_2^2 - b_2^2}$$

$$= \frac{1}{4} \times 3 \left[\sqrt{4 \times (4.5)^2 - 3^2} + \sqrt{4 \times 4^2 - 3^2} \right] \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= \frac{3}{4} \left[\sqrt{81 - 9} + \sqrt{64 - 9} \right] \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= \frac{3}{4} \left[\sqrt{72} + \sqrt{55} \right] \text{ वर्ग से.मि.}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{4} \times (8.49 + 7.42) \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= 0.75 \times 15.91 \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= 11.93 \text{ वर्ग से.मि.}
 \end{aligned}$$

उदाहरण 4

दिइएको चड्गा (Kite) को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

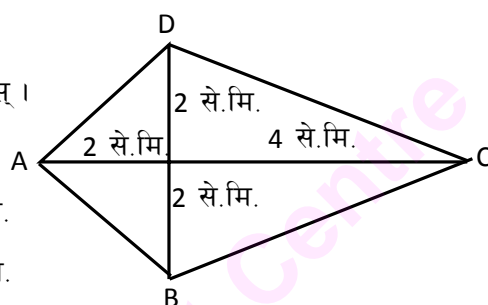
समाधान

यहाँ, चड्गाको विकर्ण $(d_1) = (2+4)$ से.मि. = 6 से.मि.

चड्गाको विकर्ण $(d_2) = (2+2)$ से.मि. = 4 से.मि.

चड्गाको क्षेत्रफल = ?

$$\begin{aligned}
 \text{चड्गाको क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \\
 &= \frac{1}{2} \times 6 \text{ से.मि.} \times 4 \text{ से.मि.} = 12 \text{ वर्ग से.मि.}
 \end{aligned}$$



उदाहरण 5

एउटा त्रिभुजका भुजाहरूको लम्बाइ क्रमशः 13 से.मि., 14 से.मि. र 15 से.मि. भए त्यसको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मानौं,

$$a = 13 \text{ से.मि.} \quad b = 14 \text{ से.मि.} \quad c = 15 \text{ से.मि.}$$

$$2s = (a + b + c)$$

$$= (13 + 14 + 15) \text{ से.मि.} = 42 \text{ से.मि.}$$

$$\therefore s = 21 \text{ से.मि.}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{त्रिभुजको क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
 &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= \sqrt{7056} \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= 84 \text{ वर्ग से.मि.}
 \end{aligned}$$

उदाहरण 6

आधार भुजाको लम्बाइ 16 से.मि. भएको एउटा समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल 120 वर्ग से.मि. भए बाँकी भुजाको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, यहाँ, बराबर भुजाहरू $AB = AC = a$ छन् र आधार $BC = 16$ से.मि. छ ।

समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}b\sqrt{4a^2 - b^2}$

$$120 = \frac{1}{4} \times 16 \sqrt{4a^2 - (16)^2}$$

$$\text{अथवा, } 120 = 4\sqrt{4(a^2 - 64)}$$

$$\text{अथवा, } 30 = 2\sqrt{a^2 - 64}$$

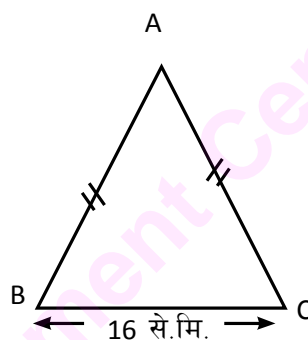
$$\text{अथवा, } 15 = \sqrt{a^2 - 64}$$

$$\text{अथवा, } 225 = a^2 - 64$$

$$\text{अथवा, } 225 + 64 = a^2$$

$$\text{अथवा, } 289 = a^2$$

$$\therefore a = 17 \text{ से.मि.}$$



उदाहरण 7

अर्ध परिमिति 10 से.मि. र एउटा भुजाको नाप 9 से.मि. भएको एउटा त्रिभुजको क्षेत्रफल $6\sqrt{5}$ वर्ग से.मि. छ भने उक्त त्रिभुजका बाँकी भुजाहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, अर्ध परिमिति $(s) = 10$ से.मि.

एउटा भुजा $(a) = 9$ से.मि.

क्षेत्रफल $(A) = 6\sqrt{5}$ वर्ग से.मि.

बाँकी भुजाहरू $b = ?$ र $c = ?$

$$\text{अब, } a + b + c = 2s = 2 \times 10$$

$$\text{अथवा, } a + b + c = 20$$

$$\text{अथवा, } b + c = 20 - 9 = 11$$

$$\text{त्रिभुजको क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{अथवा, } 6\sqrt{5} = \sqrt{10(10-9)(10-b)(10-c)}$$

$$\text{अथवा, } 6\sqrt{5} = \sqrt{5 \times 2(10-b)(10-11+b)} \quad [b+c=11]$$

$$\text{अथवा, } 6\sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \sqrt{(10-b)(b-1)}$$

$$\text{अथवा, } (6)^2 = 2(10b - b^2 - 10 + b) \quad [\text{दुवैतर्फ वर्ग गर्दा}]$$

$$\text{अथवा, } 36 = 2(-b^2 + 11b - 10)$$

$$\text{अथवा, } 18 = -b^2 + 11b - 10$$

$$\text{अथवा, } 18 + b^2 - 11b + 10 = 0$$

$$\text{अथवा, } b^2 - 11b + 28 = 0$$

$$\text{अथवा, } b^2 - 4b - 7b + 28 = 0$$

$$\text{अथवा, } b(b-4) - 7(b-4) = 0$$

$$\text{अथवा } (b-4)(b-7) = 0$$

$$\text{अथवा, } b-4=0 \quad \text{अथवा, } b-7=0$$

$$\therefore b=4 \text{ अथवा } b=7$$

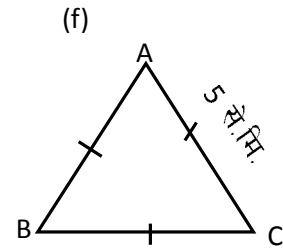
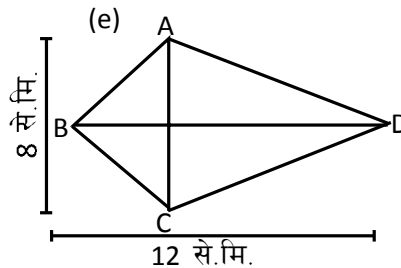
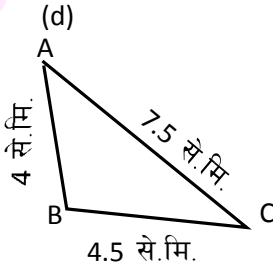
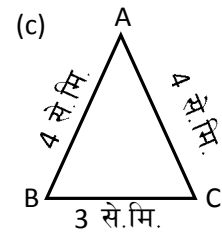
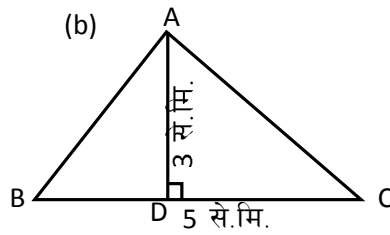
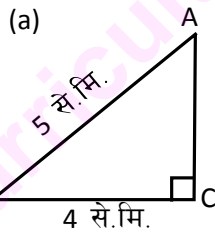
b को मान $b+c=11$ मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$c=11-4=7 \text{ अथवा } c=11-7=4$$

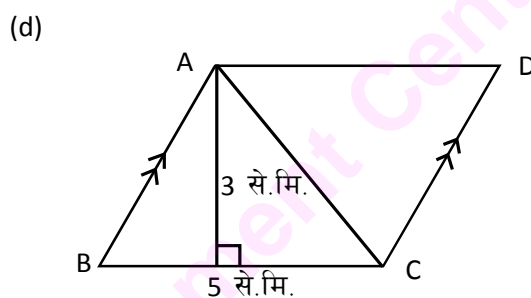
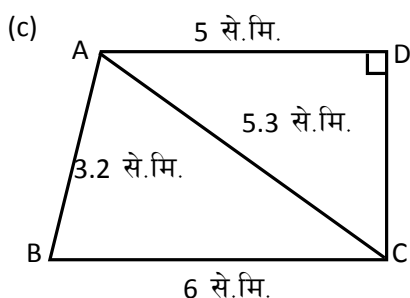
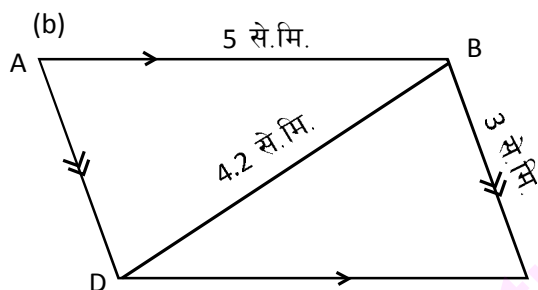
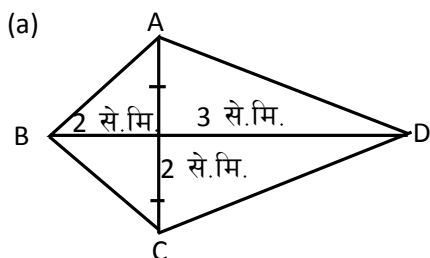
तसर्थ बाँकी भुजाहरूको मान 4 से.मि. र 7 से.मि. हुन्छ।

अभ्यास 5.1

1. दिइएका चित्रहरूको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :



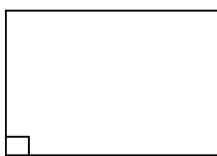
2. तल दिएका समतल सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :



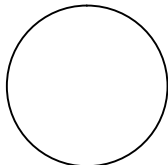
3. भुजाहरूको नाप 12 से.मि. भएको समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
4. एउटा समकोण त्रिभुजाकार जग्गाको सबभन्दा लामो किनाराको लम्बाइ 74 मिटर र अर्को एउटा किनारा 70 मिटर छ । उक्त जग्गाको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
5. समकोण समद्विबाहु त्रिभुजाकार जग्गाको दुई ओटा बराबर किनाराहरूमध्ये एउटा किनाराको लम्बाइ 10 मिटर छ भने त्यसको क्षेत्रफल र बाँकी किनाराको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. कुनै त्रिभुजको एउटा भुजाको लम्बाइ 10 से.मि. र त्यसको क्षेत्रफल 60 वर्ग से.मि. छ, यदि उक्त त्रिभुज समद्विबाहु हो भने बराबर भुजाहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. एउटा त्रिभुजाकार जग्गाका किनाराहरू 12 : 17 : 25 को अनुपातमा छन् र परिमिति 540 फिट छ । उक्त जग्गाको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. क्षेत्रफल 336 वर्ग मिटर र परिमिति 84 मिटर भएको एउटा त्रिभुजाकार जग्गाको एउटा किनाराको लम्बाइ 26 मिटर छ । उक्त जग्गाको बाँकी दुई ओटा किनाराको नाप निकाल्नुहोस् ।
9. एउटा समबाहु त्रिभुजाकार जग्गाको क्षेत्रफल $900\sqrt{3}$ वर्ग मिटर छ भने उक्त जग्गाको प्रत्येक किनाराको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. एउटा भुजाको नाप 4 मिटर भएको त्रिभुजको क्षेत्रफल $\sqrt{135}$ वर्ग मिटर र परिमिति 18 मिटर छन् । त्यसका बाँकी दुई भुजाहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

6.0 पुनरावलोकन (Review)

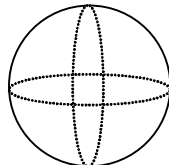
तलका चित्रहरू अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् :



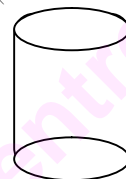
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

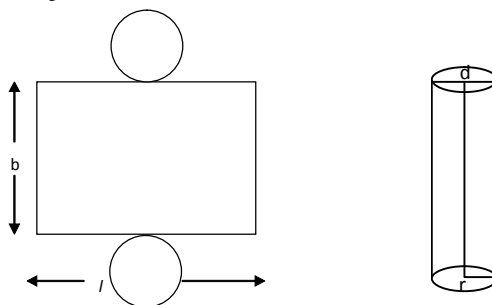
- माथि दिइएका चित्रहरूको समूहमा कति प्रकारका आकृतिहरू छन् ? ती आकृतिहरूको नाम लेखी तिनीहरूबिच पाइने समानता र भिन्नता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- माथि दिइएका चित्रहरूले ओगटेको सतहलाई के भनिन्छ ? तिनको एकाइ के हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
- माथि दिइएको चित्रहरूको परिमिति (Perimeter) र क्षेत्रफल (Area) निकाल्दा तिनीहरूको एकाइमा के अन्तर पाइन्छ ? कारण दिएर लेख्नुहोस् ।

6.1 बेलना (Cylinder)

(a) बेलनाको सतहको क्षेत्रफल (Surface area of the cylinder)

क्रियाकलाप 1

तलको चित्रमा देखाए जस्तै एउटा आयताकार कागज लिनुहोस् । त्यसको दुई विपरीत चौडाइका किनाराहरू एक आपसमा जोडेर बाँसको ढुङ्गोको वा फलामको ढुङ्गो आकार बनाउनुहोस् । यसरी आयताकार कागजबाट बनाइएको ढुङ्गो आकारको वस्तुलाई के भनिन्छ ? यसमा कति किसिमका सतह छन् ? ढुङ्गोका आकारको दुई विपरीततिर बने का वृत्ताकार भाग जुन आयतको चौडाइबाट बनेको छन् । उक्त ढुङ्गो आकारको वस्तुको लम्बाइ उचाइमा बदलिएको छ । यहाँ ढुङ्गोको वक्र सतहको क्षेत्रफल = कागजको (बेलनाको) क्षेत्रफल = चौडाइ \times लम्बाइ = वृत्तको परिधि \times उचाइ = $2\pi r \times h = 2\pi rh$ वर्ग एकाइ



जहाँ r = बेलनाको अर्धव्यास

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफलमा बेलनाको दुईतिरका वृत्तको क्षेत्रफल जोड्नुहोस् ।

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल + दुई ओटा वृत्तको क्षेत्रफल $= 2\pi rh + 2\pi r^2$,

जहाँ $\pi r^2 =$ वृत्तको क्षेत्रफल हो ।

तसर्थ बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2\pi r(h + r)$ वर्ग एकाइ र बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको बेलनाको समतल सतह वक्र सतह तथा पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, बेलनाको उचाइ $(h) = 14$ से.मि.

बेलनाको अर्धव्यास $(r) = d/2 = 7$ से.मि./2 = 3.5 से.मि.

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल = ?

बेलनाको समतल सतहको क्षेत्रफल = ?

बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned}\text{बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल} &= 2\pi rh \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 14 \\ &= 44 \times 7 = 308 \text{ वर्ग से.मि.}\end{aligned}$$

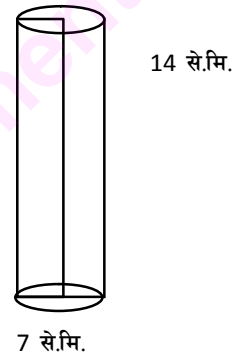
बेलनाको समतल सतहको क्षेत्रफल = दुई ओटा वृत्तको क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}&= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \\ &= 22 \times 3.5 = 77.0 \text{ वर्ग से.मि.}\end{aligned}$$

बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल = वक्र सतहको क्षेत्रफल + समतल सतहको क्षेत्रफल

$$= (308 + 77) \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 385 \text{ वर्ग से.मि.}$$



उदाहरण 2

उचाइ र व्यासको योगफल 28 से.मि. तथा वक्र सतहको क्षेत्रफल 462 वर्ग से.मि. भएको एउटा बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, बेलनाको उचाइ (h) र व्यास (d) को योगफल = 28 से.मि.

वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = 462 वर्ग से.मि.

बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = ?

दिइएकोबाट, बेलनाको उचाइ र व्यासको योगफल, $h + d = 28$ cm

अथवा, $d = 28 - h$ (i)

वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = 462 cm²

अथवा $\pi dh = 462$ cm²

$$\therefore dh = \frac{462}{\pi} \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$(28-h)h = 462 \times \frac{7}{22} \quad [\because d = 28 - h]$$

अथवा, $28h - h^2 = 147$

अथवा, $h^2 - 28h + 147 = 0$

अथवा, $h^2 - 7h - 21h + 147 = 0$

अथवा, $h(h-7) - 21(h-7) = 0$

अथवा, $(h-7)(h-21) = 0$

तसर्थ $h-7=0$ अथवा $h-21=0$

तसर्थ $h=7$ अथवा, $h=21$

अतः $d = 28-7=21$ से.मि. अथवा, $d = 28-21=7$ से.मि.

अथवा, $r = 10.5$ से.मि. वा $r = 3.5$ से.मि. र $h = 7$ से.मि. वा $h = 21$ से.मि.

अब, $r = 3.5$ cm र $h = 21$ cm हुँदा बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5(3.5+21) \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 22 \times 24.5 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 539 \text{ वर्ग से.मि.}$$

पुनः $r = 10.5$ से.मि. र $h = 7$ हुँदा बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



उदाहरण 3

एउटा बेलनाको उचाइ र अर्धव्यासको योगफल 10.5 से.मि. तथा तिनीहरूको फरक 3.5 से.मि. भए वक्र सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, बेलनको अर्धव्यास र उचाइको योगफल = 10.5 से.मि.

$$\therefore r + h = 10.5 \text{ से.मि. (i)}$$

बेलनाको उचाइ र अर्धव्यासको फरक = 3.5 से.मि.

$$\therefore h - r = 3.5 \text{ से.मि. (ii)}$$

वक्र सतहको क्षेत्रफल = ?

समीकरण (i) र (ii) जोडदा

$$\begin{array}{r} h + r = 10.5 \\ h - r = 3.5 \\ \hline 2h = 14 \\ \therefore h = 7 \text{ से.मि.} \end{array}$$

h को मान समीकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$r = 10.5 - 7 = 3.5 \text{ से.मि.}$$

$$\text{बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)} = 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 7 \text{ वर्ग से.मि.} = 154 \text{ से.मि.}$$

(b) बेलनाको आयतन (Volume of Cylinder)

घनाकार ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाउने सूत्रको विश्लेषण गर्दै बेलनाको आयतन कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

बेलनाको आयतन (V) = बेलनाको आधारको क्षेत्रफल x बेलनाको उचाइ

= वृत्तको क्षेत्रफल x उचाइ [बेलनाको आधार वृत्ताकार हुने भएकाले]

$$= \pi r^2 h \text{ घन एकाइ}$$

उदाहरण 4

कुनै बेलनाको आधारको अर्धव्यास 7 से.मि. र उचाइ 14 से.मि. छ भने सो बेलनाको आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, बेलनाको उचाइ (h) = 14 से.मि.

बेलनाको आधारको अर्धव्यास (r) = 7 से.मि.

बेलनाको आयतन (V) = ?

हामीलाई थाहा छ,

बेलनाको आयतन (V) = आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ

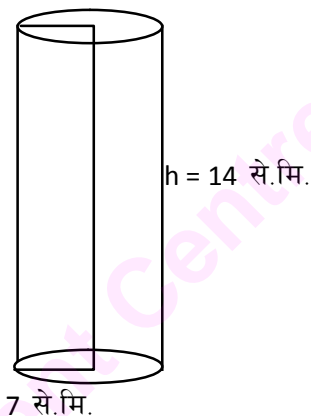
$$= \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 14 \text{ वर्ग घन से.मि.}$$

$$= \frac{22 \times 49}{7} \times 14 \text{ घन से.मि.}$$

$$= (22 \times 7 \times 14) \text{ घन से.मि.}$$

$$= 2156 \text{ घन से.मि.}$$



उदाहरण 5

एउटा बेलनाको आधारको क्षेत्रफल 154 वर्ग से.मि. तथा अर्धव्यास र उचाइको योगफल 20 से.मि. छ भने यसको वक्र सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, बेलनाको आधारको क्षेत्रफल = 154 वर्ग से.मि.

बेलनाको अर्धव्यास र उचाइको योगफल = 20 से.मि.

अथवा, $r + h = 20$ से.मि.

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = ?

बेलनाको आयतन (V) = ?

प्रश्नानुसार, बेलनाको आधारको क्षेत्रफल = 154 वर्ग से.मि.

$$\text{अथवा, } r^2 = \frac{154}{\pi}$$

$$\text{अथवा, } r = \sqrt{\frac{154}{\pi}} \text{ से.मि.}$$

$$r = \sqrt{49} \text{ से.मि.}$$

$$\text{अर्धव्यास (r) = 7 से.मि.}$$

$$\text{तर, } r + h = 20 \text{ से.मि.}$$

$$\therefore h = (20 - 7) \text{ से.मि.} = 13 \text{ से.मि.}$$

$$\text{वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = } 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 13 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 44 \times 13 \text{ वर्ग से.मि.} = 572 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$\text{पुनः आयतन (V) = } \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} (7)^2 \times 13 \text{ घन से.मि.}$$

$$= 22 \times 7 \times 13 \text{ घन से.मि.} = 2002 \text{ घन से.मि.}$$

उदाहरण 6

एउटा बेलनाको आयतन 1584 घन से.मि. तथा त्यसको उचाइ र अर्धव्यासको फरक 8 से.मि. भए सो बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

$$\text{यहाँ, बेलनाको आयतन (V) = 1584 घन से.मि.}$$

$$\text{बेलनाको उचाइ र अर्धव्यासको फरक (h - r) = 8 से.मि.}$$

$$\text{बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल = ?}$$

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{बेलनाको आयतन (V) = } \pi r^2 h$$

$$\text{अथवा } 1584 = \frac{22}{7} \times r^2 h$$

$$\text{अथवा, } 22r^2 h = 1584 \times 7$$

$$\text{अथवा, } r^2 (r + 8) = 504$$

$$\text{अथवा, } r^3 + 8r^2 - 504 = 0$$

$$\text{अथवा, } r^3 - 6r^2 + 14r^2 - 84r + 84r - 504 = 0$$

$$\text{अथवा, } r^2(r - 6) + 14r(r - 6) + 84(r - 6) = 0$$

$$\text{अथवा, } (r - 6)(r^2 + 14r + 84) = 0$$

$\therefore r = 6$ से.मि. [यहाँ r को मान पूर्ण सङ्ख्याका रूपमा आउने भएकाले दोस्रो समीकरणबाट r निकाल्न आवश्यक छैन]

$$\therefore h = 6 + 8 = 14 \text{ से.मि. र } r + h = 20$$

पुरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = $2\pi r(r + h)$ वर्ग एकाइ

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 6 \times 20 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 754.28 \text{ वर्ग से.मि.}$$

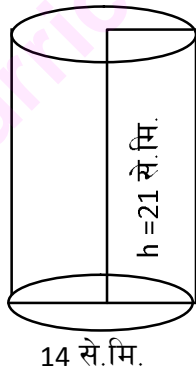
अभ्यास 6.1

1. तल दिइएका नापअनुसारको बेलनाको वक्र सतह र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

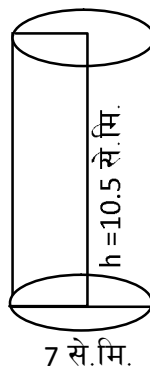
- (i) अर्धव्यास (r) = 3.5 से.मि. र उचाइ (h) = 5 से.मि.
- (ii) अर्धव्यास (r) = 2.1 से.मि. र उचाइ (h) = 6 से.मि.
- (iii) अर्धव्यास (r) = 2.8 से.मि. र उचाइ (h) = 7 से.मि.
- (iv) अर्धव्यास (r) = 4.2 से.मि. र उचाइ (h) = 4.9 से.मि.

2. तल दिइएका बेलनाहरूको वक्र सतह र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

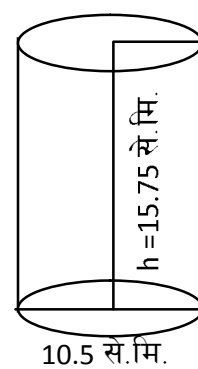
(a)



(b)



(c)

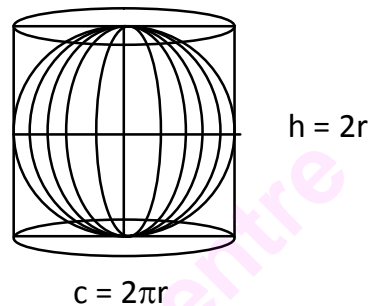


3. यदि एउटा बेलनाको आधारको अर्धव्यास र उचाइको योगफल 21 से.मि. र वक्र सतहको क्षेत्रफल 616 वर्ग से.मि. भए उक्त बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
4. वक्र सतहको क्षेत्रफल 1848 वर्ग से.मि. तथा अर्धव्यास र उचाइको योगफल 35 से.मि. भएको कुनै बेलनाको समतल सतह र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
5. उचाइ र अर्धव्यासको फरक 14 से.मि. तथा तिनीहरूको योगफल 42 से.मि. भएको एउटा बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल तथा अर्धव्यास र उचाइको अनुपात निकाल्नुहोस् ।
6. एउटा बेलनाको आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात 1:3 र तिनीहरूको योगफल 56 से.मि. भए त्यसको वक्र सतहको क्षेत्रफल र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
7. एउटा बेलनाकार काठको मुढाको लम्बाइ 1.5 मिटर तथा त्यसको आधारको अर्धव्यास 42 से.मि. भए उक्त काठको मुढाको आयतन कति हुन्छ ?
8. एउटा बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल त्यसको आधारको क्षेत्रफलको दुई गुणा छ, एवम् उचाइ र अर्धव्यासको योगफल 28 से.मि. छ, भने उक्त बेलनाको आयतन निकाल्नुहोस् ।
9. एउटा बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल 924 वर्ग से.मि. तथा त्यसको आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात 1:3 छ । उक्त बेलनाको आधारको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।
10. अर्धव्यासको दोब्बर उचाइ भएको एउटा बेलनाको आयतन 17248 घन से.मि. छ, भने उक्त बेलनाको वक्र सतहलाई बेर्न न्यूनतम कति वर्ग से.मि. कागजको आवश्यकता पर्दछ, निकाल्नुहोस् ।
11. कुनै बेलनाको आधारको क्षेत्रफल 308 वर्ग मिटर र त्यसको आयतन 1540 घन मिटर छ । सो बेलनाको आधारको परिधि र वक्र सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
12. लगभग 500 लिटर पानी अटाउने बेलनाकार पानी ट्याङ्की निर्माण गर्नका लागि आवश्यक कर्कट पाताको अनुमानित क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
13. लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः 21 से.मि. र 14 से.मि. भएको एउटा आयतकार कागजबाट लम्बाइ र चौडाइलाई आधार लिई क्रमशः दुई ओटा बेलना बनाउनुहोस् । ती बेलनाहरूमध्ये कुनको आयतन बढी हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
14. तपाईंको विद्यालय वा घरमा भएका पानी ट्याङ्की, ड्रम, इनार आदिको मापन गरी तिनीहरूको वक्र सतह र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् । साथै तिनीहरूमा के कस्ता वस्तुहरू राख्ने गरिन्छ ? तिनीहरूको आयतन पनि निकाल्नुहोस् ।

6.2 (a) गोलाको सतहको क्षेत्रफल (Surface area of sphere)

क्रियाकलाप 1 :

व्यास र उचाइ बराबर भएको एउटा बेलना लिनुहोस् । सोही बेलनाको व्यास बराबर व्यास भएको एउटा गोला पनि लिनुहोस् । बेलनाको वक्र सतह ढाक्ने गरी धागोले बेर्नुहोस् । सोही धागो भिकेर नदोहोरिने गरी गोलालाई बेर्नुहोस् । जसबाट बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल र गोलाको सतहको क्षेत्रफल बराबर भएको देखिन्छ । तसर्थ गोलाको सतहको क्षेत्रफल (a) = बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल हुन्छ ।

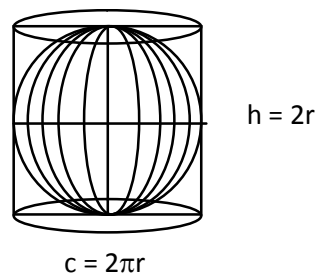


$$\begin{aligned}
 &= \text{बेलनाको आधारको परिधि} \times \text{बेलनाको उचाइ} \\
 &= c \times h \quad (c = \text{बेलनाको आधारको परिधि र } h = \text{बेलनाको उचाइ}) \\
 &= c \times d \\
 &= 2\pi r \times (2r) \quad [\because h = d = 2r, c = 2\pi r] \\
 &= 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

\therefore गोलाको पुरा सतहको क्षेत्रफल $(A) = 4\pi r^2$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

एउटा गोला लिनुहोस् र उक्त गोलाको व्यास बराबरको उचाइ र व्यास भएको एउटा बेलना चित्रमा देखाएको जस्तै गरी निर्माण गर्नुहोस् । यसरी निर्माण गरिएको बेलनाभित्र गोला ठिक्क अट्न सक्छ । अब बेलनाको उचाइको मध्य भागबाट बेलनालाई घुमाउँदै गोलालाई हेर्नुहोस् । गोलाको सतहलाई बेलनाको वक्र सतहले पुरै घेरिएको देखिन्छ । तसर्थ गोलाको सतहको क्षेत्रफल = बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल = बेलनाको आधारको परिधि बेलनाको उचाइ



तसर्थ गोलाको सतहको क्षेत्रफल (SA of sphere) = $4\pi r^2$ वर्ग एकाइ

(b) गोलाको आयतन (Volume of sphere)

क्रियाकलाप 1

बराबर व्यास भएका एउटा गोला र एउटा बेलना लिनुहोस् । बेलनाको व्यास र उचाइ पनि बराबर लिनुपर्छ । बेलनामा पानी भरनुहोस् र उक्त पानीलाई नाप्ने भाँडो (Measuring cylinder) मा विस्तारै

खन्याउनुहोस् । त्यसपछि बेलनामा गोलालाई चित्रमा देखाए जस्तै मिलाएर राख्नुहोस् । नाप्ने भाँडोमा रहेको पानी पुनः गोलासहितको बेलनामा खन्याउनुहोस् । यसरी खन्याउँदा गोलासहितको बेलनामा एक तिहाइ पानी मात्र अटाउँछ र बाँकी पानी नाप्ने भाँडोमै बाँकी रहन्छ । दुई तिहाइ पानी गोलाले ओगटेको अथवा विस्थापित गरेको देखिन्छ । जसको अर्थ गोलाले बेलनाको दुई तिहाइ आयतन ओगटेको जनाउँछ । तसर्थ गोलाको आयतन $(V) = \frac{2}{3}$ (बेलनाको आयतन) हुन्छ ।

अथवा $V = \frac{2}{3}$ (बेलनाको आधारको क्षेत्रफल \times बेलनाको उचाइ)

$$= \frac{2}{3} (A \times h) \quad (A = \text{बेलनाको आधारको क्षेत्रफल र } h = \text{बेलनाको उचाइ})$$

$$= \frac{2}{3} (\pi r^2 \times d)$$

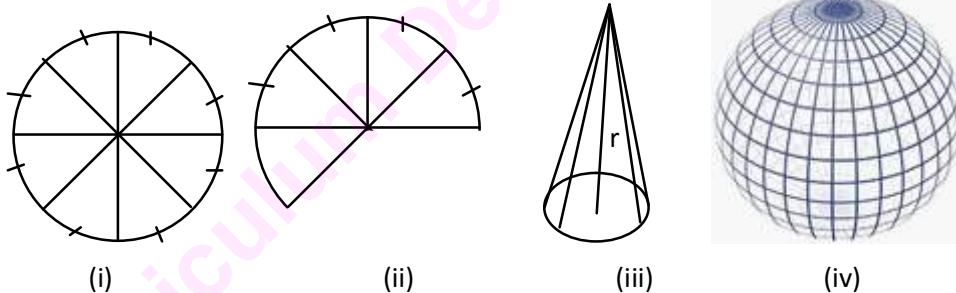
$$= \frac{2}{3} (\pi r^2 \times 2r)$$

$$= \frac{2}{3} (2\pi r^3)$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

तसर्थ गोलाको आयतन $(V) = \frac{4}{3} \pi r^3$ हुन्छ, जहाँ r = गोलाको अर्धव्यास हो ।

क्रियाकलाप 2



फरक फरक रङका तर समान अर्धव्यासका 20 ओटा वृत्तहरू कम्पासको सहायताबाट तयार गर्नुहोस् । अर्धव्यास 4 से.मि. देखि 6 से.मि. सम्मको लिनु उपयुक्त हुन्छ । त्यसपछि प्रत्येक वृत्तलाई चित्रमा देखाए जस्तै आठ बराबर भागमा विभाजन गर्नुहोस् । प्रत्येक वृत्तको तिन भाग काटेर हटाउनुहोस् र बाँकी पाँच भागबाट माथिको तेस्रो चित्र जस्तै गरी पिरामिड बनाउनुहोस् । यस्ता 20 ओटा पिरामिडहरू तयार भइसकेपछि 3-3 ओटाका चार समूह र 4-4 ओटाका दुई समूहमा विभाजन गरी फेबिकलले टाँस्नुहोस् । यसरी समूहको विभाजनमा फेबिकलले टाँसिसकेपछि केही बेर सुक्न दिइसकेपछि 4-4 समूहकामा 3-3 समूहका पिरामिड फेबिकलले टाँस्दै जानुहोस् । यसरी एउटा गोलाको एउटा मोडेल तयार हुन्छ । यहाँ गोलाको आयतन = 20 ओटा पिरामिडहरूको आयतन हुन्छ ।

$$\begin{aligned}
 \text{अतः गोलाको आयतन} &= 20 \left(\frac{1}{3} \times \text{आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ} \right) \\
 &= 20 \left(\frac{1}{3} \right) \times (a) \times (r) \quad [\because \text{पिरामिडको उचाइ} = \text{अर्धव्यास}] \\
 &= 20 \left(\frac{1}{3} \right) ar, \quad \text{जहाँ } a = \text{पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल} \\
 &= \frac{1}{3} (20a)r, \quad 20a = 20 \text{ ओटा पिरामिडको आधारहरूको क्षेत्रफल} \\
 &= \frac{1}{3} (4\pi r^2)r \quad [20 \text{ ओटा पिरामिडको आधारको क्षेत्रफलबाट गोलाको सतह बन्छ,}] \\
 &= \left(\frac{4}{3} \right) \pi r^3
 \end{aligned}$$

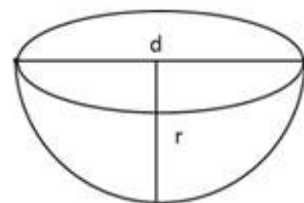
तसर्थ, गोलाको आयतन $(V) = \left(\frac{4}{3} \right) \pi r^3$ घन एकाइ हुन्छ ।

(c) अर्धगोलाको सतहको क्षेत्रफल र आयतन (Surface Area and Volume of Hemisphere)

$$\begin{aligned}
 \text{यहाँ, अर्धगोलाको सतहको क्षेत्रफल} &= \text{अर्धगोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल} + \text{वृत्तको क्षेत्रफल} \\
 &= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2
 \end{aligned}$$

तसर्थ अर्धगोलाको पुरा सतहको क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

$$\begin{aligned}
 \text{त्यस्तै गरी अर्धगोलाको आयतन (V)} &= \frac{1}{2} (\text{गोलाको आयतन}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{2}{3} \pi r^3
 \end{aligned}$$



तसर्थ अर्धगोलाको आयतन $(V) = \frac{2}{3} \pi r^3$ घन एकाइ हुन्छ ।

उदाहरण 1

अर्धव्यास 3.5 से.मि. भएको एउटा गोलाको सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।

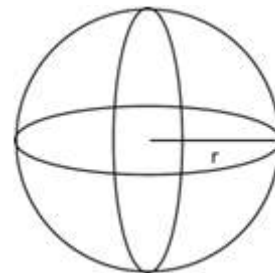
समाधान

यहाँ, अर्धव्यास $(r) = 3.5$ से.मि.

गोलाको सतहको क्षेत्रफल (SA) = ?

गोलाको आयतन (V) = ?

हामीलाई थाहा छ,



$$\begin{aligned}
 \text{गोलाको सतहको क्षेत्रफल (SA)} &= 4\pi r^2 \text{ वर्ग एकाइ} \\
 &= 4 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= \frac{88}{7} \times 12.25 \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= \frac{1078}{7} \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= 154 \text{ वर्ग से.मि.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{गोलाको आयतन (V)} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ घन एकाइ} \\
 &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^3 \text{ घन से.मि.} \\
 &= \frac{88}{21} \times 42.875 \text{ घन से.मि.} \\
 &= \frac{3773}{21} \text{ घन से.मि.} \\
 &= 179.67 \text{ घन से.मि.}
 \end{aligned}$$

उदाहरण 2

सतहको क्षेत्रफल 616 वर्ग से.मि. भएको एउटा गोलाको आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, गोलाको सतहको क्षेत्रफल (S.A) = 616 वर्ग से.मि.

गोलाको आयतन (V) = ?

हामीलाई थाहा छ, गोलाको सतहको क्षेत्रफल (SA) = $4\pi r^2$ वर्ग एकाइ

$$\therefore 4\pi r^2 = 616 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$r^2 = \frac{616}{4\pi} \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= \frac{616}{4 \times \frac{22}{7}} \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= \frac{7 \times 88}{88} \times 7 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 7^2 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$\therefore r = 7 \text{ से.मि.}$$

$$\therefore \text{गोलाको आयतन (V)} = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ घन से.मि.}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3 \text{ घन से.मि.}$$

$$= \frac{88}{21} \times 343 \text{ घन से.मि.}$$

$$= \frac{30184}{21} \text{ घन से.मि.}$$

$$= 1437.33 \text{ घन से.मि.}$$

उदाहरण 3

अर्धव्यासलाई आधा गर्दा कुनै गोलाको आयतन र सतहको क्षेत्रफलमा कति कति फरक पर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, गोलाको सुरुको अर्धव्यास (r_1) = x एकाइ मान्दा

$$\text{गोलाको सुरुको सतहको क्षेत्रफल (S.A}_1\text{)} = 4\pi x^2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$\text{गोलाको सुरुको आयतन (V}_1\text{)} = \frac{4}{3} \pi x^3 \text{ घन एकाइ}$$

$$\text{अर्धव्यास आधा गर्दा (r}_2\text{)} = \frac{x}{2} \text{ एकाइ}$$

$$\text{गोलाको सतहको क्षेत्रफल (S.A}_2\text{)} = 4\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$= 4\pi \frac{x^2}{4} \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$= \pi x^2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$\text{गोलाको सतहको फरक} = (4\pi x^2 - \pi x^2) \text{ वर्ग एकाइ} = 3\pi x^2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$\text{आयतन } V_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 \text{ घन एकाइ}$$

$$= \frac{4\pi x^3}{3 \times 8} \text{ घन एकाइ}$$

$$= \frac{\pi}{6} x^3 \text{ घन एकाइ}$$

आयतनको फरक

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4\pi}{3}x^3 - \frac{\pi}{6}x^3 \right) \text{ घन एकाइ} \\ &= \pi x^3 \left(\frac{8-1}{6} \right) \text{ घन एकाइ} \\ &= \frac{7}{6} \pi x^3 \text{ घन एकाइ} \end{aligned}$$

यसरी देखिने फरकलाई अनुपातको रूपमा पनि व्यक्त गर्नुहोस् ।

उदाहरण 4

अर्धव्यास क्रमशः 3 से.मि., 5 से.मि. र 7 से.मि. भएका तिन ओटा गोलाहरूलाई पगालेर एउटै गोला बनाउँदा नयाँ गोलाको व्यास कति हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो गोलाको अर्धव्यास $(r_1) = 3$ से.मि.

दोस्रो गोलाको अर्धव्यास $(r_2) = 5$ से.मि.

तेस्रो गोलाको अर्धव्यास $(r_3) = 7$ से.मि.

V_1, V_2, V_3 लाई क्रमशः तिन ओटा गोलाको आयतन मान्दा

$$\begin{aligned} \text{कुल आयतन (V)} &= V_1 + V_2 + V_3 \text{ घन एकाइ} \\ &= \left\{ \frac{4}{3} \pi (3)^3 + \frac{4}{3} \pi (5)^3 + \frac{4}{3} \pi (7)^3 \right\} \text{ घन से.मि.} \\ &= \frac{4}{3} \pi (27 + 125 + 343) \text{ घन से.मि.} \\ &= \frac{4}{3} \pi (495) \text{ घन से.मि.} \end{aligned}$$

अब, नयाँ गोलाको अर्धव्यास R मान्दा,

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (495) \text{ घन से.मि.}$$

$$R^3 = 495 \text{ घन से.मि.}$$

$$\therefore R = \sqrt[3]{495} \text{ घन से.मि.}$$

$$= 7.91 \text{ घन से.मि.}$$

$$\text{अतः व्यास (d)} = 2R = 2 \times 7.91 \text{ से.मि.} = 15.82 \text{ से.मि.}$$

उदाहरण 5

यदि एउटा अर्धगोलाको पुरा सतहको क्षेत्रफल 462 वर्ग से.मि. भए उक्त अर्धगोलाको आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, अर्धगोलाको पुरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = 462 वर्ग से.मि.

अर्धगोलाको आयतन (V) = ?

हामीलाई थाहा छ,

अर्धगोलाको पुरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = $3\pi r^2$ वर्ग एकाइ

$\therefore 3\pi r^2 = 462$ वर्ग से.मि.

$$r^2 = \frac{462}{3 \times \frac{22}{7}} \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 49 \text{ वर्ग से.मि.} = (7 \text{ से.मि.})^2$$

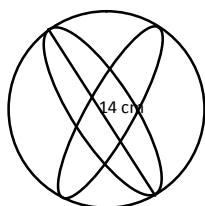
तसर्थ, अर्धगोलाको अर्धव्यास (r) = 7 से.मि.

$$\begin{aligned} \text{अर्धगोलाको आयतन (V)} &= \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ घन एकाइ} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^3 \text{ घन से.मि.} \\ &= \frac{44 \times 343}{21} \text{ घन से.मि.} \\ &= \frac{15092}{21} \text{ घन से.मि.} = 718.66 \text{ घन से.मि.} \end{aligned}$$

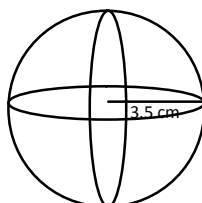
अभ्यास 6.2

1. तल दिइएका गोला र अर्धगोलाको सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् :

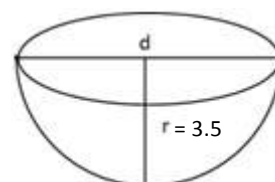
(a)



(b)



(c)



2. अर्धव्यास 21 से.मि. भएको एउटा गोलाको आयतन र सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
3. एउटा गोलाको सतहको क्षेत्रफल 1386 वर्ग से.मि. छ भने उक्त गोलाको आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. एउटा धातुको गोलाको ठुलो वृत्तको परिधि 88 से.मि. छ भने उक्त गोलाको सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।
5. एउटा अर्धगोलाकार काटिएको फलको वृत्तको परिधि 132 से.मि. छ भने त्यसको पुरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।
6. एउटा गोलाको सतहको क्षेत्रफल 5544 वर्ग से.मि. छ भने उक्त गोलाको आयतन निकाल्नुहोस् ।
7. एउटा अर्धगोलाको पुरा सतहको क्षेत्रफल 16632 वर्ग से.मि. छ । त्यसको परिधिको लम्बाइ र आयतन कति हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।
8. एउटा गोलाको सतहको क्षेत्रफल र आयतनको अनुपात 3:7 cm छ । त्यसको ठुलो वृत्तको परिधि र आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. एउटा गोलाको सतहको क्षेत्रफल र आयतनको अनुपात 1:3 cm छ भने उक्त गोलाको व्यास र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. यदि पृथ्वीको व्यास 12950 कि.मि. छ भने पृथ्वीको आयतन र सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
11. एउटा गोलाको सतहको क्षेत्रफल 49π वर्ग से.मि. भएमा त्यसको आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
12. अर्धव्यास क्रमशः 4 से.मि., 5 से.मि. र 5 से.मि. भएका तिन ओटा गोलालाई पगालेर एउटै गोला बनाउँदा उक्त गोलाको आयतन कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
13. तपाईंको विद्यालयमा भएका विभिन्न बलहरू सङ्कलन गरी प्रत्येकको सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।

6.3 संयुक्त ठोस (Compound Solid)

यहाँ बेलनामाथि अर्धगोला राखिएको एउटा संयुक्त ठोस वस्तु दिइएको छ । त्यसको अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

1. बेलनाको मात्र सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
2. अर्धगोलाको मात्र सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
3. संयुक्त ठोसको सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
4. अर्धगोलाको आयतन कति हुन्छ ?
5. बेलनाको आयतन कति हुन्छ ?
6. यस संयुक्त ठोसको आयतन कति हुन्छ ?



माथिका प्रश्नहरू बारे अध्ययन गरी उत्तर लेखिसकेपछि तल दिइएका उदाहरणहरू अध्ययन गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, अर्धगोलाको अर्धव्यास = $(22-15)$ से.मि. = 7 से.मि.

बेलनाको आधारको अर्धव्यास = 7 से.मि.

संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.) = ?

संयुक्त ठोस वस्तुको आयतन (V) = ?

संयुक्त ठोसको पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.)

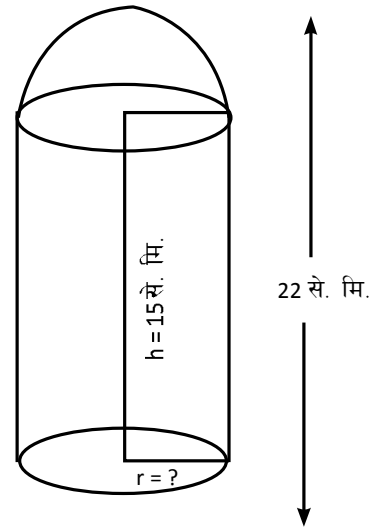
$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$= \pi r(2r + 2h + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 7(2 \times 7 + 2 \times 15 + 7) \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 22(14 + 30 + 7) \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 22 \times 51 \text{ वर्ग से.मि.} = 1122 \text{ वर्ग से. मि.}$$



अब, बेलना र अर्धगोलाको संयुक्त आयतन (V) = अर्धगोलाको आयतन + बेलनाको आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \text{ घन एकाइ}$$

$$= \pi r^2 \left(\frac{2}{3}r + h \right) \text{ घन से.मि.}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{22}{7} \times 7^2 \left(\frac{2}{3} \times 7 + 15 \right) \text{ घन से.मि.} \\
&= 154 \times \left(\frac{14+45}{3} \right) \text{ घन से.मि.} \\
&= 3028.67 \text{ घन से.मि.}
\end{aligned}$$

उदाहरण 2

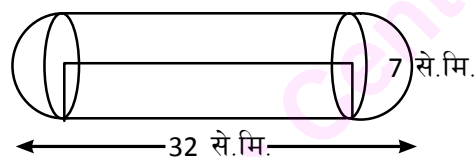
दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, अर्धव्यास (r) = 7 से.मि.

बेलनाको उचाइ (h) = $(32 - 2 \times 7)$ से.मि.

$$= (32 - 14) \text{ से.मि.} = 18 \text{ से.मि.}$$



संयुक्त ठोस वस्तुको आयतन (V) = ?

संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल (SA) = ?

चित्रअनुसार,

संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल = $(2\pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2)$ वर्ग एकाइ

$$\therefore \text{T.S.A.} = (4\pi r^2 + 2\pi rh) \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$= 2\pi r(2r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(2 \times 7 + 18) \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 44(32) \text{ वर्ग से.मि.} = 1408 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$\text{संयुक्त ठोस वस्तुको आयतन (V)} = \left(\frac{2}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 \right) \text{ घन एकाइ}$$

$$= \left(\frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h \right) \text{ घन एकाइ}$$

$$= \left(\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3 + \frac{22}{7} \times 7^2 \times 18 \right) \text{ घन से.मि.}$$

$$= \left(\frac{4312}{3} + 2772 \right) \text{ घन से.मि.}$$

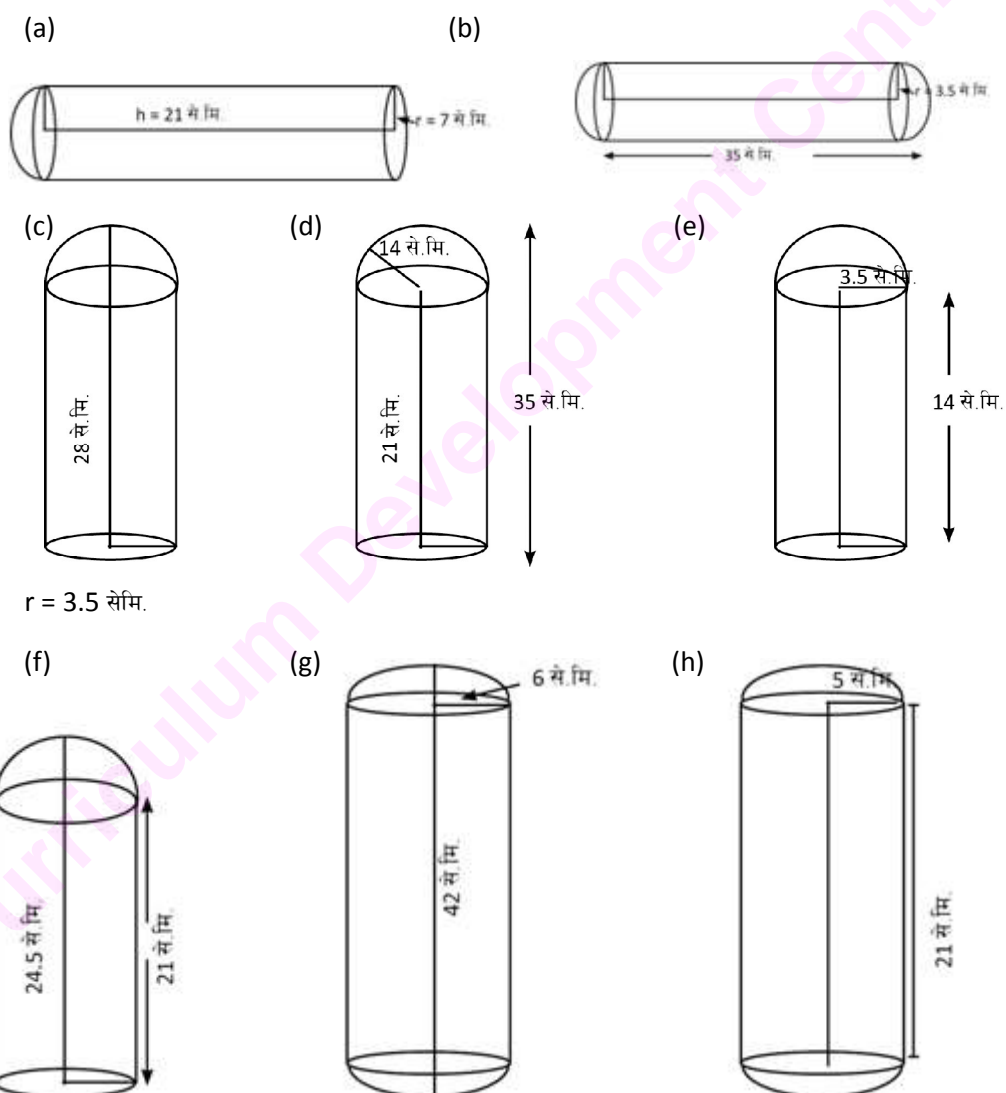
$$= \left(\frac{4312 + 9316}{3} \right) \text{ घन से.मि.}$$

$$= \frac{12628}{3} \text{ घन से.मि.}$$

$$= 4209.33 \text{ घन से.मि.}$$

अभ्यास 6.3

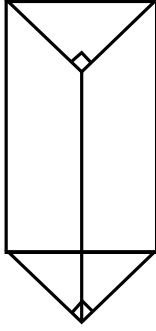
1. तल दिइएका ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् :



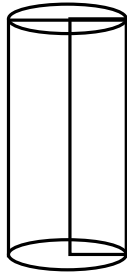
2. उचाइ 42 से.मि. भएको बेलनामाथि एउटा अर्धगोला राखिएको छ, जसको वक्र सतहको क्षेत्रफल 308 वर्ग से.मि. छ । उक्त संयुक्त ठोस वस्तुको आयतन निकाल्नुहोस् ।
3. आधारको क्षेत्रफल 616 वर्ग से.मि. भएको बेलनामाथि अर्धगोला राखिएको छ । यदि बेलनाको उचाइ 35 से.मि. भए उक्त संयुक्त ठोस वस्तुको पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
4. अर्धव्यासको 3 गुना उचाइ भएको बेलनाको दुवैतिर अर्धगोला राखिएका छन् यदि अर्धगोलाको अर्धव्यास 14 से.मि. भए उक्त संयुक्त ठोस वस्तुको आयतन निकाल्नुहोस् ।
5. आयताकार खेल मैदानको चौडाइको दुवैतिर अर्धवृत्ताकार पोखरीहरू छन्, यदि खेल मैदानको चौडाइ 21 मिटर र पोखरीको गहिराइ 1.5 मिटर भए पोखरीको दुवैतिर कति पानी अटाउँछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. एउटा बेलनाकार ट्याङ्की माथिको भाग अर्ध गोलाकार छ । उक्त ट्याङ्कीको कुल उचाइ 4.5 मिटर र आधारको परिधि 22 मिटर छ भने ट्याङ्कीमा कति लिटर पानी अटाउँछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. एउटा बेलानामाथि अर्धगोला भएको ठोस वस्तुमा बेलनाको अर्धव्यास र अर्धगोलाको अर्धव्यास बराबर छन् । यदि संयुक्त ठोस वस्तुको कुल उचाइ 94 से.मि. र बेलनाको उचाइ 80 से.मि. भए सो ठोस वस्तुको पुरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. बेलनाको अर्धव्यास र अर्ध गोलाको अर्धव्यास बराबर भएको एउटा ठोस वस्तु छ, जसको पुरा आयतन 2707 घन से.मि. छ । यदि बेलनाको मात्र उचाइ 80 से.मि. भए उक्त ठोस वस्तुको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. बेलना र अर्धगोलाको संयुक्त उचाइ 10.5 से.मि. तथा बेलनाको आधारको व्यास 7 से.मि. छ । उक्त ठोस वस्तुको पुरा सतहको क्षेत्रफल आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. अर्धगोला र बेलनाको अर्धव्यास बराबर भएको ठोस वस्तुमा अर्धव्यास र बेलनाको उचाइको अनुपात 1:3 तथा तिनीहरूको योगफल 14 से.मि. छ । सो ठोस वस्तुको पुरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. तपाईंको घर र विद्यालयमा भएका संयुक्त ठोस वस्तुहरूको सूची तयार पारी तिनीहरूको सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7.0 पुनरावलोकन (Review)

तल दिइएका चित्रहरूको अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।



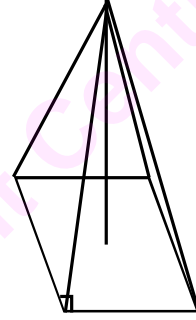
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

1. माथिका चित्रहरू कुन कुन ठोस वस्तुका हुन् ?
2. माथिका चार ओटा चित्रहरूमध्ये कुन कुन प्रिज्म र पिरामिड हुन्, छुट्याउनुहोस् ।
3. माथिका प्रत्येक चित्रहरूमा कति कति ओटा सतहहरू छन् ?
4. माथिका प्रत्येक चित्रहरूमा कति प्रकारका सतहहरू छन् ?
5. सबैभन्दा कम सतह भएका र सबैभन्दा बढी सतह भएका ठोस वस्तु कुन कुन हुन् ? तिनीहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

7.1 प्रिज्म (Prism)

अनुरूप र समानान्तर दुई विपरीत बहुभुज भएका तिन आयामिक (Three dimensional) ठोस वस्तुलाई प्रिज्म (Prism) भनिन्छ । जसका अन्य सतहहरू आयताकार हुन्छन् ।

प्रिज्मका विशेषताहरू यस प्रकार छन् :

- (क) दुई ओटा विपरीत बहुभुजहरू अनुरूप र समानान्तर हुन्छन्, जसलाई आधार भनिन्छ ।
- (ख) यसका हरेक क्रस सेक्सन (cross-section) आधारसँग अनुरूप र समानान्तर हुन्छन् । क्रस सेक्सन क्षेत्रफल (Cross sectional area, CSA) र आधारको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।
- (ग) सबै सतहहरूको क्षेत्रफलको योगफललाई पुरा सतहको क्षेत्रफल (Total surface area, TSA) भनिन्छ ।

(घ) यसका अन्य सतहहरू (lateral surface) आधारमा लम्ब र आयताकार हुन्छन् ।

(ङ) यसको आयतन आधारको क्षेत्रफल र उचाइको गुणन फल हुन्छ । अर्थात् प्रिज्मको आयतन $(V) = \text{प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल} \times \text{ठाडो उचाइ}$

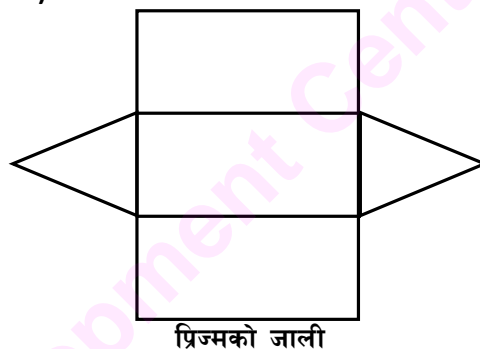
$$\text{अथवा, } V = A \times h$$

यहाँ त्रिभुजाकार आधार भएको प्रिज्मसँग सम्बन्धित समस्याहरू मात्र अध्ययन गरिन्छ ।

(a) प्रिज्मको सतहको क्षेत्रफल (Surface area of a prism)

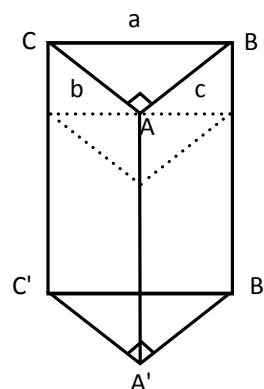
क्रियाकलाप

एउटा आयताकार कागज लिनहोस् र चित्रमा देखाए जस्तै गरी त्रिभुजाकार प्रिज्म बनाउनुहोस् । यसरी कागजलाई पट्याएर त्रिभुजाकार प्रिज्म बनिसकेपछि निम्न विशेषताहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :



प्रिज्मका विशेषताहरू

1. दुई ओटा विपरीत छेउका सतहहरू अनुरूप हुन्छन् ।
2. दुई ओटा विपरीत छेउका सतहहरू समानान्तर हुन्छन् ।
3. छेउको सतहसँग समानान्तर हुने गरी बिचको कुनै पनि भागलाई काट्दा आउने क्रस सेक्सन (cross section) पनि छेउका सतहसँग समानान्तर र अनुरूप नै हुन्छन् ।
4. कुनै प्रिज्मको आयतन $(V) = \text{आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ}$ हुन्छ ।



निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

1. चित्रमा दुई ओटा विपरीत छेउका सतहहरू कुन कुन हुन् ?
2. दुई ओटा विपरीत छेउका सतह बाहेकका सतहहरूलाई के भनिन्छ ?
3. प्रिज्मका दुई ओटा विपरीत छेउका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्न प्रयोग गर्न सकिने तिन ओटा सूत्रहरू के के हुन् ?
4. त्रिभुजाकार प्रिज्ममा छेउको सतह कति ओटा हुन्छन् ? तिनीहरूको सतहको क्षेत्रफल निकाल्न कुन सूत्र प्रयोग गर्न सकिन्छ ?
5. क्रस सेक्सन (cross-section) भन्नाले के बुझिन्छ, लेख्नुहोस् ।

प्रिज्म (Prism)

दुई विपरित छेउका सतहहरूको बिचमा किनाराको सतहसँग लम्ब हुने गरी काट्दा देखिने क्रम सेक्सनसँग समानान्तर र अनुरूप हुने ठोस वस्तु प्रिज्म हो ।

क्रस सेक्सन (Cross-section)

कुनै पनि प्रिज्मको दुई ओटा विपरीत छेउका सतहहरूसँग समानान्तर हुने गरी लम्बाइसँग लम्ब रूपमा काट्दा देखिने भाग वा सतहलाई क्रस सेक्सन (cross section) भनिन्छ । प्रिज्मका आधारको क्षेत्रफल र क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ । तसर्थ क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल निकाल्दा प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल निकाल्ने गरिन्छ ।

केही प्रिज्महरूको क्षेत्रफल

- बेलनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल
$$= \text{वक्र सतहको क्षेत्रफल} + 2 \text{ ओटा वृत्तको क्षेत्रफल}$$
$$= 2\pi r l + 2\pi r^2$$
$$= 2\pi r (l + r) \text{ जहाँ } l = \text{प्रिज्मको लम्बाइ}$$
- आयाताकार प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल
$$= 2 (lb + bh + lh)$$
- घनाकार प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल
$$= 6l^2$$
- त्रिभुजाकार प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल
$$= 2\left(\frac{1}{2} \times b \times l\right) + (ah + bh + ch) \text{ (आधार र उचाइ थाहा भएको अवस्थामा)}$$
$$= bl + h(a + b + c)$$
$$= bl + hp, \quad \therefore p = \text{आधारको परिमिति}$$
- विषमबाहु त्रिभुज आधार भएको अवस्थामा, क्षेत्रफल
$$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} + h(a+b+c)$$
- समद्विबाहु त्रिभुज आधार भएको अवस्थामा, क्षेत्रफल
$$= 2\left(\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}\right) + h(2a+b)$$
$$= \frac{b}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} + h(2a+b)$$
- समबाहु त्रिभुज आधार भएको आधारमा, क्षेत्रफल
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) + 3ah$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + 3ah$$

जहाँ a = बराबर भुजा र h = प्रिज्मको लम्बाइ अथवा उचाइ
- प्रिज्मको आयताकार सतहको क्षेत्रफल = आधारको परिमिति र प्रिज्मको उचाइको गुणन फल
$$= p \times h$$

उदाहरण 1

दिइएको त्रिभुजाकार प्रिज्मको क्रस सेक्सन, छड्के सतहको क्षेत्रफल र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ त्रिभुजका तिन ओटा भुजाहरूको नाप $a = 5$ से.मि.

$$b = 4 \text{ से.मि}$$

$$c = 3 \text{ से.मि.}$$

$$\text{लम्बाइ } (l) = 15 \text{ से.मि.}$$

3, 4 र 5 पाइथागोरियन त्रिपद हुन् तसर्थ $b =$ लम्ब तथा $c =$ आधार हुन् ।

$$\begin{aligned}\text{क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल (C.S.A)} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{उचाइ} \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) \text{ वर्ग से.मि.} \\ &= 6 \text{ वर्ग से.मि.}\end{aligned}$$

$$\text{क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल} = \text{प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल}$$

$$\text{दुई ओटा विपरीत छेउका सतहहरूको क्षेत्रफल} = 2(\text{क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल})$$

$$= 2 \times 6 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 12 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$\text{छड्के सतहको क्षेत्रफल} = l(a + b + c) = lp \text{ जहाँ } p = a + b + c$$

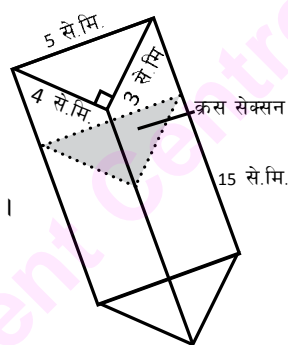
$$\text{पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.)} = \text{छड्के सतहको क्षेत्रफल} + \text{दुई ओटा विपरीत छेउका सतहहरूको क्षेत्रफल}$$

$$= pl + 2\left(\frac{1}{2} \times b \times c\right)$$

$$= [(3 + 4 + 5) \times 15 + 4 \times 3] \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= [(12) 15 + 12] \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= 192 \text{ वर्ग से.मि.}$$



प्रिज्मको आयतन (Volume of Prism)

कुनै पनि नियमित (regular) ठोस वस्तुको आयतन त्यसको आधारको क्षेत्रफल र ठाडो उचाइको गुणन फलसँग बराबर हुन्छ। प्रिज्म पनि एउटा नियमित ठोस वस्तु भएको हुँदा त्यसको आयतन पनि त्यसको आधारको क्षेत्रफल र ठाडो उचाइको गुणन फल नै हुन्छ।

तसर्थ प्रिज्मको आयतन $(V) = \text{प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल} \times \text{प्रिज्मको लम्बाइ वा उचाइ}$

$$V = A/l \quad \text{जहाँ } A = \text{आधारको क्षेत्रफल र } l \text{ त्यसको लम्बाइ हो।}$$

उदाहरण 2

सँगैको प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस्।

समाधान

यहाँ त्रिभुजको अर्ध परिमिति $(s) = \left(\frac{10+7+5}{2} \right)$ से.मि. = 11 से.मि

प्रिज्मको लम्बाइ $(l) = 21$ से.मि.

प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A) = ?

प्रिज्मको आयतन $(v) = ?$

त्रिभुजाकार प्रिज्मका आधारको

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{11(11-10)(11-5)(11-7)} \\ &= \sqrt{11 \times 1 \times 6 \times 4} \\ &= 16.25 \text{ वर्ग से.मि.} \end{aligned}$$

\therefore दिइएको प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A) = $p/l + 2$ ओटा त्रिभुजको क्षेत्रफल

$$= 22 \times 21 \text{ वर्ग से.मि} + 32.5 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$= (462 + 32.5) \text{ वर्ग से.मि.} = 494.5 \text{ वर्ग से.मि.}$$

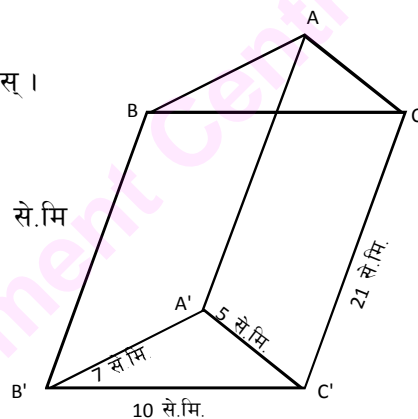
प्रिज्मको आयतन $(V) = \text{आधारको क्षेत्रफल} \times \text{लम्बाइ}$

$$V = (16.25 \times 21) \text{ घन से.मि.}$$

$$= 341.25 \text{ घन से.मि.}$$

उदाहरण 3

एउटा त्रिभुजाकार प्रिज्मको लम्बाइ 14 से.मि. र त्यसका आधारका प्रत्येक भुजाहरूको लम्बाइ 8 से.मि. छ। सो प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस्।



समाधान

यहाँ, प्रिज्मको आधार समबाहु त्रिभुज हो । जसको प्रत्येक भुजाको लम्बाइ 8 से.मि. र प्रिज्मको लम्बाइ (l) = 14 से.मि. छ ।

$$\begin{aligned}\therefore \text{प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल} &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(8)^2 \text{ वर्ग से.मि.} \\ &= \sqrt{3} \times \frac{64}{4} \text{ वर्ग से.मि.} \\ &= 1.73 \times 16 \text{ वर्ग से.मि.}\end{aligned}$$

$$\text{त्रिभुजको क्षेत्रफल} = 27.68 \text{ वर्ग से.मि.}$$

$$\begin{aligned}\text{प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल (L.S.A)} &= (3a \times l) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= (3 \times 8) \times 14 \text{ वर्ग से.मि.} \\ &= 336 \text{ वर्ग से.मि.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A)} &= 2 \text{ ओटा त्रिभुजको क्षेत्रफल} + \text{प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल} \\ &= (2 \times 27.68 + 336) \text{ वर्ग से.मि.} \\ &= 391.36 \text{ वर्ग से.मि.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{प्रिज्मको आयतन (V)} &= (\text{आधारको क्षेत्रफल} \times \text{लम्बाइ}) \text{ घन एकाइ} \\ &= (27.68 \times 14) \text{ घन से.मि} = 387.52 \text{ घन से.मि.}\end{aligned}$$

उदाहरण 4

एउटा प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल 660 वर्ग से.मि. र त्यसको आधार समकोणी त्रिभुज छ । यसका भुजाहरूको नाप क्रमशः आधार भुजा 12 से.मि. र कर्ण भुजा 13 से.मि. छ भने सो प्रिज्मको लम्बाइ निकाल्नुहोस् ।

समाधान

$$\text{यहाँ प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A)} = 660 \text{ वर्ग से.मि.}$$

आधारको समकोण त्रिभुजका भुजाहरू क्रमशः कर्ण (h) = 13 से.मि. र आधार भुजा (b) = 12 से.मि. र लम्ब भुजा (p) = ?

$$\text{प्रिज्मको लम्बाइ (h)} = ?$$

$$\begin{aligned}\text{पाइथागोरस साध्यअनुसार, लम्ब भुजा (p)} &= \sqrt{h^2 - b^2} \text{ एकाइ} \\ &= \sqrt{(13)^2 - (12)^2} \text{ से.मि.}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{169-144} \text{ से.मि}$$

$$= \sqrt{25} \text{ से.मि.} = 5 \text{ से.मि.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{उचाई (लम्ब)} \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 5\right) \text{ वर्ग से.मि.} = 30 \text{ वर्ग से.मि.} \end{aligned}$$

हामीलाई थाहा छ, प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल = आधारका दुई त्रिभुजको क्षेत्रफल + $p/$

प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल = 660 वर्ग से.मि. (जहाँ p = परिमिति र $/$ = प्रिज्मको लम्बाइ)

\therefore दुई ओटा त्रिभुजको क्षेत्रफल + $p/$ = 660 वर्ग से.मि.

$$2 \times 30 + (5 + 12 + 13) \times h = 660 \text{ से.मि.}$$

$$60 + 30h = 660$$

$$\text{अथवा } 30h = (660 - 60)$$

$$\therefore h = \frac{600}{30}$$

$$\therefore h = 20 \text{ से.मि.}$$

उदाहरण 5

एउटा प्रिज्मको लम्बाइ (l) = 12 से.मि., त्यसको आधारको त्रिभुजका भुजाहरूको नाप 6 से.मि., 6 से.मि. र 8 से.मि. छ। सो प्रिज्मको आयतन र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस्।

समाधान

यहाँ $l = 12$ से.मि., $a = c = 6$ से.मि. र $b = 8$ से.मि. पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.) = ? र आयतन (V) = ?

$$\begin{aligned} \text{समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल} &= \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{8}{4} \sqrt{4 \times 6^2 - 8^2} \\ &= 2\sqrt{144 - 64} = 2\sqrt{80} = 17.88 \text{ वर्ग से.मि.} \end{aligned}$$

समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल = 17.88 वर्ग से.मि.

छड्के सतहको क्षेत्रफल = त्रिभुजको परिमिति \times प्रिज्मको लम्बाइ

$$= p/ = (6 + 6 + 8) \times 12 \text{ वर्ग से.मि.} = 240 \text{ वर्ग से.मि.}$$

तसर्थ प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.) = 2 ओटा त्रिभुजको क्षेत्रफल + छड्के सतहको क्षेत्रफल

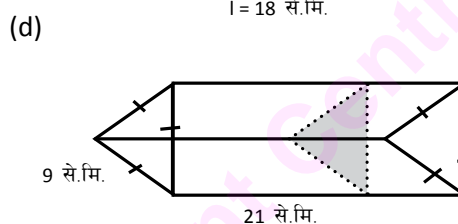
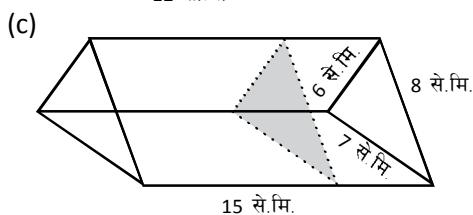
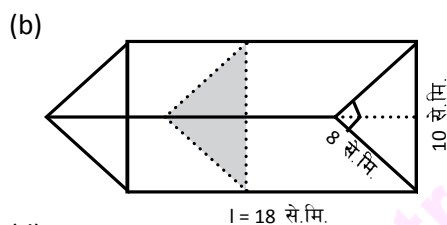
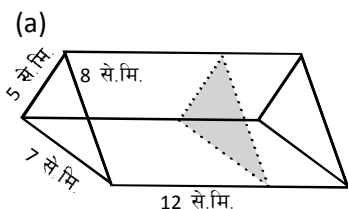
$$= (2 \times 17.88 + 240) \text{ वर्ग से.मि.} = 275.76 \text{ वर्ग से.मि.}$$

आयतन (V) = आधारको क्षेत्रफल \times लम्बाइ

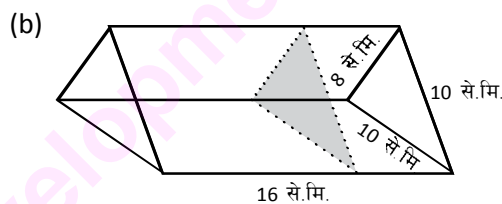
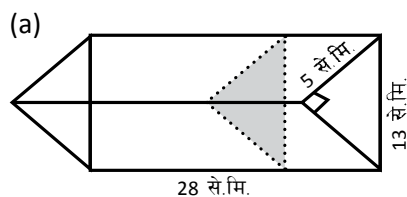
$$= (17.88 \times 12) \text{ घन से.मि.} = 214.56 \text{ घन से.मि.}$$

अभ्यास 7.1

1. तलका प्रिज्महरूको क्रस सेक्सन, छड्के सतह र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :



2. तलका प्रिज्महरूको आयतन निकाल्नुहोस् :

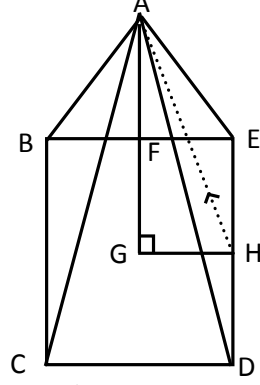


- आधारको त्रिभुजाका भुजाहरू 6 से.मि., 7 से.मि., 8 से.मि. र लम्बाइ 15 से.मि. भएको त्रिभुजाकार प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल, छड्के सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।
- आयतन 12000 घन से.मि. भएको समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजाकार प्रिज्मको लम्बाइ 100 से.मि. भए आधारका भुजाहरूको नाप निकाल्नुहोस् ।
- भुजाहरूको नाप $6\sqrt{2}$ से.मि., 12 से.मि. र $6\sqrt{2}$ से.मि. भएको समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजाकार प्रिज्मको लम्बाइ 12 से.मि. भए आधारको क्षेत्रफल र छड्के सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
- भुजाहरूको नापहरू क्रमशः 10 से.मि., 8 से.मि. र 6 से.मि. भएको समकोण त्रिभुजाकार प्रिज्मको लम्बाइ 28 से.मि. भए सो प्रिज्मको क्रस सेक्सन क्षेत्रफल, छड्के सतहको क्षेत्रफल, पुरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।
- तपाईंको विद्यालयको विज्ञान प्रयोगशालामा भएका त्रिभुजाकार प्रिज्मको विभिन्न भागको नाप लिई क्रस सेक्सन, छड्के सतह र पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- चार चार जनाको समूह निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहले कागज, काठ वा निगालो आदिबाट विभिन्न नापका कम्तीमा 5/5 ओटा त्रिभुजाकार प्रिज्म निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक प्रिज्मका सबै भागको नाप लिई क्रस सेक्सन, छड्के सतह र पुरा सतहको क्षेत्रफल गणना गरी कक्षाकोठामा तालिका बनाई प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

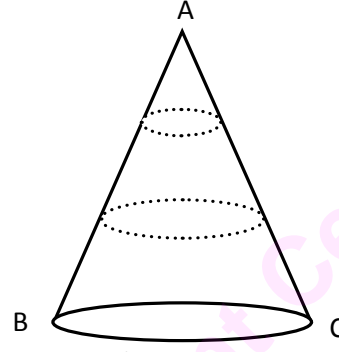
7.2 पिरामिड (Pyramid) र सोली (Cone)

(a) पिरामिडको परिचय

तल दिइएका चित्रहरू अध्ययन र अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



चित्र (i)



चित्र (ii)

1. माथि दिइएका चित्रहरू के केका हुन् ?
2. चित्र (i) र (ii) मा के के समानता र असमानताहरू छन् ?
3. पिरामिडको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

आधार त्रिभुज, चतुर्भुज वा अन्य बहुभुज भएको र अन्य छड्के सतहहरूको एउटा साभ्ना शीर्षबिन्दु भएको त्रिआयामिक (Three dimensional) ठोस वस्तुलाई पिरामिड (pyramid) भनिन्छ । यसका सबै छड्के सतहहरू त्रिभुजाकार हुन्छन् । पिरामिडको आधारअनुसार यसलाई निम्नानुसार वर्गीकरण गरिन्छ :

(क) त्रिभुज आधार भएको पिरामिड

(ख) वर्ग आधार भएको पिरामिड

(ग) आयत आधार भएको पिरामिड

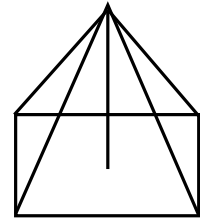
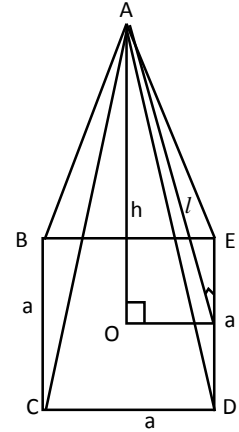
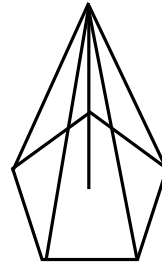
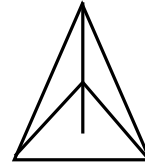
(घ) पञ्चभुज आधार भएको पिरामिड आदि ।

पिरामिडका विशेषताहरू

(क) आधारको सतह बहुभुज हुन्छ ।

(ख) आधार बाहेकका सतहहरूको एउटा साभ्ना शीर्षबिन्दु हुन्छ ।

(ग) ठाडो उचाइ आधारको सतहसँग लम्ब हुन्छ ।



(घ) छड़के सतहहरू समतल र त्रिभुजाकारका हुन्छन् ।

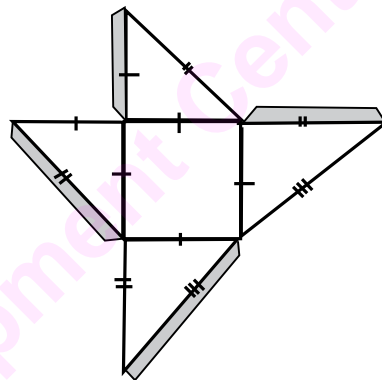
(ङ) पिरामिडको आयतन आधारको क्षेत्रफल र ठाडो उचाइको गुणन फलको एक तिहाइ हुन्छ । अर्थात् पिरामिडको आयतन $(V) = \frac{1}{3}$ आधारको क्षेत्रफल \times ठाडो उचाइ

$$V = \frac{1}{3} Ah \quad \text{जहाँ, पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल} = A, \text{ ठाडो उचाइ} = h \text{ हो ।}$$

यहाँ वर्ग आधार भएको पिरामिडसँग सम्बन्धी समस्याहरू मात्र अध्ययन गरिन्छ ।

क्रियाकलाप

पिरामिडको आयतन आधारको क्षेत्रफल र उचाइको गुणन फलको एक तिहाइ हुन्छ । यस सम्बन्धी सूत्र निकाल्नका लागि तल दिइएको जालीका आधारमा वर्गाकार आधार भएको एउटै नापका तिन ओटा पिरामिड बनाउनुहोस् । तिन ओटा पिरामिडको जोडाइबाट एउटा घनाकार वस्तु तयार हुन्छ । यसको आधारमा तिन ओटा पिरामिडको आयतन बराबर एउटा घनको आयतन हुन्छ भनी प्रस्ट हुन्छ । तसर्थ एउटा घनको आयतन = तिन ओटा पिरामिडको आयतन हुन्छ । अथवा घनको आयतन = 3 पिरामिडको आयतन



अथवा $\frac{1}{3}V = \text{एउटा पिरामिडको आयतन हुन्छ ।}$

\therefore पिरामिडको आयतन $(V) = \frac{1}{3} \times \text{आधारको क्षेत्रफल} \times \text{ठाडो उचाइ}$

$$V = \frac{1}{3} Ah$$

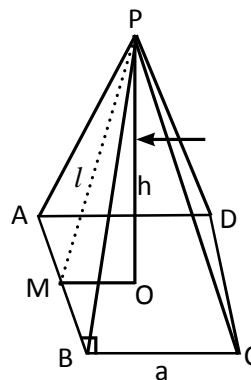
(b) पिरामिडको सतहको क्षेत्रफल (Surface area of a pyramid)

- छड़के उचाइ (slant height, l) र आधार भुजा (a) को नाप दिइएको अवस्थामा वर्ग आधार भएको पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

यहाँ, वर्गको क्षेत्रफल = (भुजा)² वर्ग एकाइ

$$= a^2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$\begin{aligned} \text{चार ओटा छड़के सतहको क्षेत्रफल} &= 4\left(\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{छड़के उचाइ}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2} \times a \times l\right) \\ &= 2al \text{ वर्ग एकाइ} \end{aligned}$$



∴ पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A) = $(a^2 + 2al)$ वर्ग एकाइ

$$T.S.A = a(a + 2l) \text{ वर्ग एकाइ}$$

उदाहरण 1

एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिडको आधारको भुजाको लम्बाइ $(a) = 6$ से.मि. र छड्के उचाइ $(l) = 5$ से.मि. छ भने उक्त पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

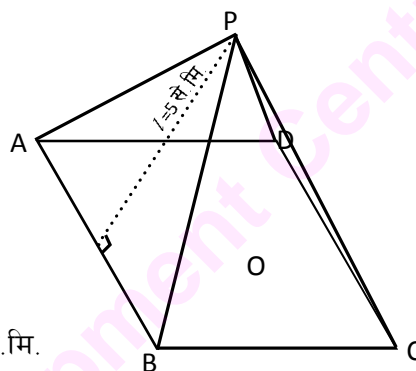
यहाँ आधारको भुजा $(a) = 6$ से.मि.

छड्के उचाइ $(l) = 5$ से.मि.

पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.) = ?

सूत्रअनुसार,

$$\begin{aligned} \text{पुरा सतहको क्षेत्रफल} &= a(a + 2l) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= 6(6 + 2 \times 5) \text{ वर्ग से.मि.} \\ &= 6(6 + 10) \text{ वर्ग से.मि.} \\ &= 6(16) \text{ वर्ग से.मि.} \\ &= 96 \text{ वर्ग से.मि.} \end{aligned}$$



उदाहरण 2

सँगैको पिरामिडको चित्रमा आधारको वर्गको भुजाको लम्बाइ $(a) = 8$ से.मि. र पिरामिडको ठाडो उचाइ $(h) = 3$ से.मि. दिइएको छ । उक्त पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ आधारको भुजा $(a) = 8$ से.मि.

पिरामिडको उचाइ $(h) = 3$ से.मि.

छड्के उचाइ $(l) = ?$

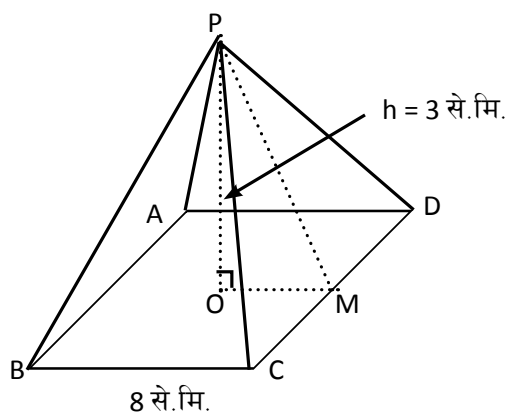
पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.) = ?

$$\text{चित्रमा } OM = \frac{a}{2} \text{ एकाइ}$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2} \times 8 \text{ से.मि.}$$

$$= 4 \text{ से.मि.}$$

$$\text{उचाइ } (OP) = 3 \text{ से.मि.}$$



$$\begin{aligned}
 \therefore \text{छड्के उचाइ (l)} &= \sqrt{(OM)^2 + (OP)^2} \text{ एकाइ} \\
 &= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \text{ से.मि.} \\
 &= \sqrt{16+9} \text{ से.मि.} \\
 &= \sqrt{25} \text{ से.मि.} = 5 \text{ से.मि.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A)} &= a(a + 2l) \text{ वर्ग एकाइ} \\
 &= 8(8 + 2 \times 5) \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= 8(8 + 10) \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= 8 \times 18 \text{ वर्ग से.मि.} \\
 &= 144 \text{ वर्ग से.मि.}
 \end{aligned}$$

उदाहरण 3

आधार भुजा र उचाइ दिएको अवस्थामा दिइएको वर्ग आधार भएको पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ आधारको भुजा = a (मानौं)

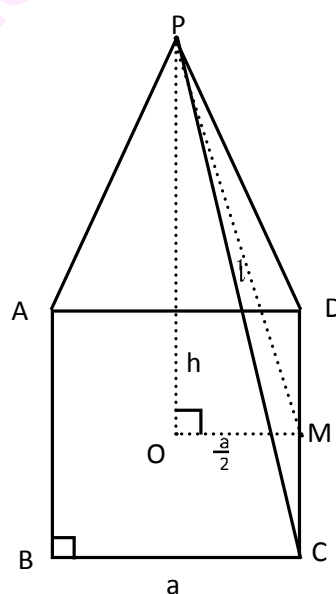
$$\therefore OM = \frac{1}{2} \times a$$

\therefore पाइथागोरस साध्यअनुसार

$$\begin{aligned}
 \text{छड्के उचाइ (l)} &= \sqrt{(OM)^2 + (OP)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = \sqrt{\frac{a^2 + 4h^2}{4}} \\
 \therefore l &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4h^2}
 \end{aligned}$$

छड्के सतहको क्षेत्रफल = चार ओटा त्रिभुजको क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= 4\left(\frac{1}{2} \times a \times l\right) \\
 &= 2al
 \end{aligned}$$



$$= 2a \times \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4h^2}$$

$$L.S.A = a\sqrt{a^2 + 4h^2} \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$\therefore \text{पुरा सतहको क्षेत्रफल} = (a^2 + a\sqrt{a^2 + 4h^2}) \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$\text{अथवा, T.S.A.} = a(a + \sqrt{a^2 + 4h^2}) \text{ वर्ग एकाइ}$$

(c) **पिरामिडको आयतन (Volume of pyramid)**

माथिको उदाहरणमा जस्तै वर्ग आधार भएको पिरामिड भएमा

$$\text{पिरामिडको आयतन (V)} = \frac{1}{3} \text{ आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ घन एकाइ}$$

$$= \frac{1}{3} Ah \text{ घन एकाइ}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 h \text{ घन एकाइ, जहाँ } a = \text{आधारको भुजा}$$

उदाहरण 4

एउटा वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल 96 वर्ग से.मि. र भुजाको लम्बाइ 6 से.मि. छ। उक्त पिरामिडको आयतन निकाल्नुहोस्।

समाधान

यहाँ पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A) = 96 वर्ग से.मि.

पिरामिडको आधारको भुजा (a) = 6 से.मि.

पिरामिडको आयतन (v) = ?

पिरामिडको उचाइ (h) = ?

हामीलाई थाहा छ,

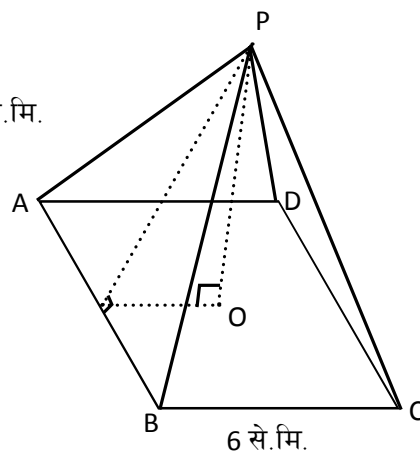
दिइएको पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल = 96 वर्ग से.मि.

$$a(a + \sqrt{a^2 + 4h^2}) = 96$$

$$\text{अथवा, } 6(6 + \sqrt{6^2 + 4h^2}) = 6 \times 16$$

$$\text{अथवा, } 6 + \sqrt{36 + 4h^2} = 16$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{4(9 + h^2)} = 16 - 6$$



अथवा, $2\sqrt{9+h^2}=10$

अथवा, $\sqrt{9+h^2}=5$

द्वैतर्ग वर्ग गर्दा, $9+h^2=25$

अथवा $h^2=25-9$

अथवा, $h^2=16$

$\therefore h=4$ से.मि.

वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको आयतन $(V) = \frac{1}{3}$ आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ

$$= \frac{1}{3} a^2 \times h \text{ घन एकाइ}$$

$$= \frac{1}{3} (6)^2 \times 4 \text{ घन से.मि.}$$

$$= 12 \times 4 \text{ घन से.मि.}$$

$$= 48 \text{ घन से.मि.}$$

उदाहरण 5

दिइएको संयुक्त पिरामिडको आधारको भुजाको लम्बाइ 4 से.मि. र तिनीहरूको संयुक्त उचाइ 12 से.मि. छ। उक्त संयुक्त पिरामिडको आयतन निकाल्नुहोस्।

समाधान

यहाँ पिरामिडको संयुक्त उचाइ $(h_1 + h_2) = 12$ से.मि.

पिरामिडको आधार भुजा $(a) = 4$ से.मि.

पिरामिडको आयतन $(V) = ?$

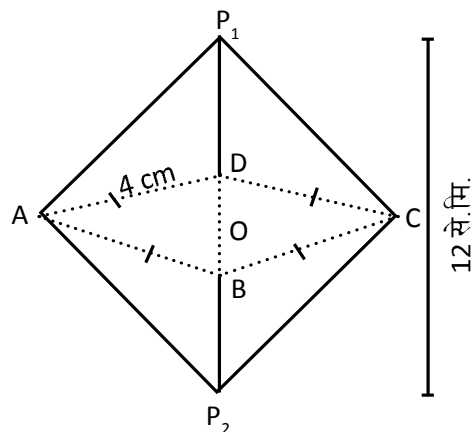
संयुक्त पिरामिडको आयतन $(V) = V_1 + V_2$

$$V = \frac{1}{3} a^2 h_1 + \frac{1}{3} a^2 h_2 = \frac{1}{3} a^2 (h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{3} \times 4^2 \times 12 \text{ घन से.मि.}$$

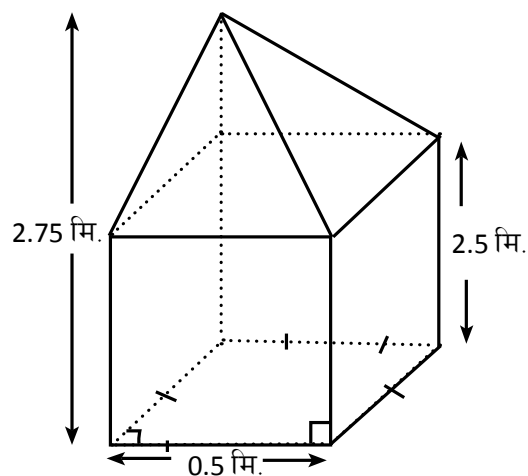
$$= 64 \text{ घन से.मि.}$$

\therefore पिरामिडको संयुक्त आयतन $(V) = 64$ घन से.मि.



उदाहरण 6

चित्रमा देखाइएको संयुक्त ठोस वस्तुको पुरा आयतन निकाल्नुहोस् :



समाधान

यहाँ पिरामिड आकारको स्तुपको उचाइ $(h_1) = (2.75 - 2.5)$ मिटर
 $= 0.25$ मिटर

स्तुपको आधार भुजा $(a) = 0.5$ मि.

षड्मुखाकार ठोस वस्तुको उचाइ $(h_2) = 2.5$ मि.

षड्मुखाकार ठोस वस्तुको आधारको भुजा $(a) = 0.5$ मि.

संयुक्त ठोस वस्तुको आधार वर्गाकार छ, जसको तल्लो भाग षड्मुखा र माथिल्लो भागमा पिडाभिड छ ।

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ ठोस वस्तुको पुरा आयतन (V) } &= (a^2 h_2 + \frac{1}{3} a^2 h_1) \\
 &= a^2 (h_2 + \frac{1}{3} h_1) \\
 &= (0.5 \text{ मि})^2 [2.5 + \frac{1}{3} \times 0.25] \text{ मि.} \\
 &= 0.25 \left(\frac{7.5 + 0.25}{3} \right) \text{ घन मि.} \\
 &= \frac{0.25 \times 7.75}{3} \text{ घन मि.} \\
 &= \frac{1.9375}{3} \text{ घन मि.} \\
 &= 0.6458 \text{ घन मि.}
 \end{aligned}$$

(d) सोलीको सतहको क्षेत्रफल र आयतन

सोलीको वक्र सतहको भागलाई काटेर फिजाउँदा वृत्तको क्षेत्रक (sector) बन्छ। यसको वक्ररेखाले सोलीको परिधिको (circumference) प्रतिनिधित्व गर्दछ। तसर्थ परिधि $(C) = 2\pi r$ हुन्छ।

क्षेत्रकलाई आठ बराबर भागमा काटेर आयताकार बनाउँदा सुरुको सोलीमा छड्के लम्बाइ (l) आयतकार वस्तुको लम्बाइ तथा सोलीको परिधिको आधा भाग आयताकार वस्तुको चौडाइ बन्छ। तसर्थ $b = \pi r$ हुन्छ।

उक्त आयतको क्षेत्रफल $= b \times l = \pi r l$ वर्ग एकाइ

तसर्थ सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= \pi r l$

सोलीको आधारको सतहको क्षेत्रफल $= \pi r^2$

\therefore सोलीको पुरा सतहको क्षेत्रफल $= (\pi r^2 + \pi r l)$ वर्ग एकाइ
 $= \pi r(r + l)$ वर्ग एकाइ

सोलीको आयतन $(V) = \frac{1}{3}$ आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ घन एकाइ}$$

जहाँ h = सोलीको उचाइ

उदाहरण 7

दिइएको सोलीको आयतन र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस्।

समाधान

यहाँ सोलीको उचाइ $OB (h) = 8$ से.मि.

सोलीको छड्के उचाइ $AB (l) = 10$ से.मि.

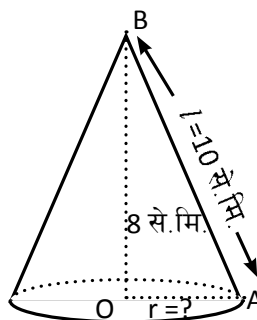
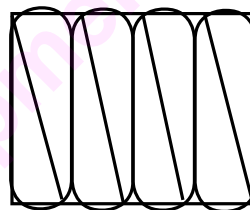
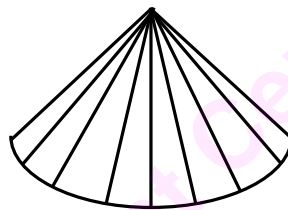
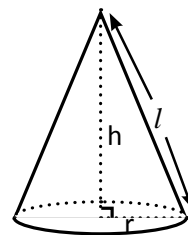
सोलीको आधारको अर्धव्यास $OA (r) = ?$

सोलीको आयतन $(V) = ?$

सोलीको पुरा सतहको क्षेत्रफल $= ?$

चित्रमा BOA एउटा समकोण त्रिभुजका रूपमा छ।

$$\begin{aligned} \therefore OA &= \sqrt{AB^2 - OB^2} \text{ एकाइ} \\ &= \sqrt{10^2 - 8^2} \text{ से.मि.} \\ &= \sqrt{100 - 64} \text{ से.मि.} \\ &= \sqrt{36} \text{ से.मि.} \end{aligned}$$

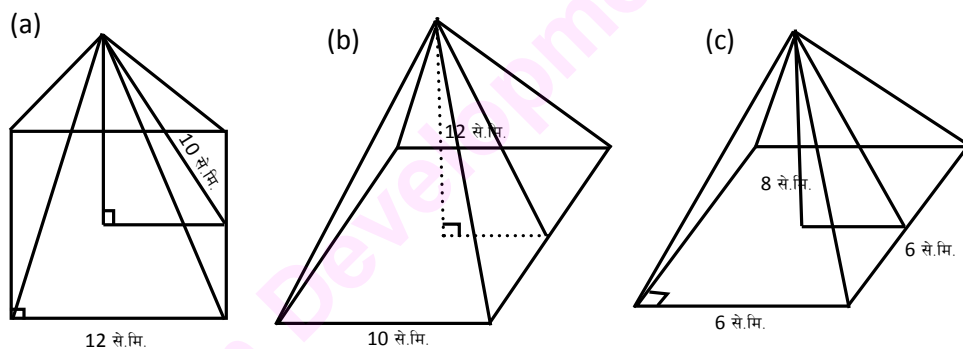


अर्धव्यास (r) = 6 से.मि.

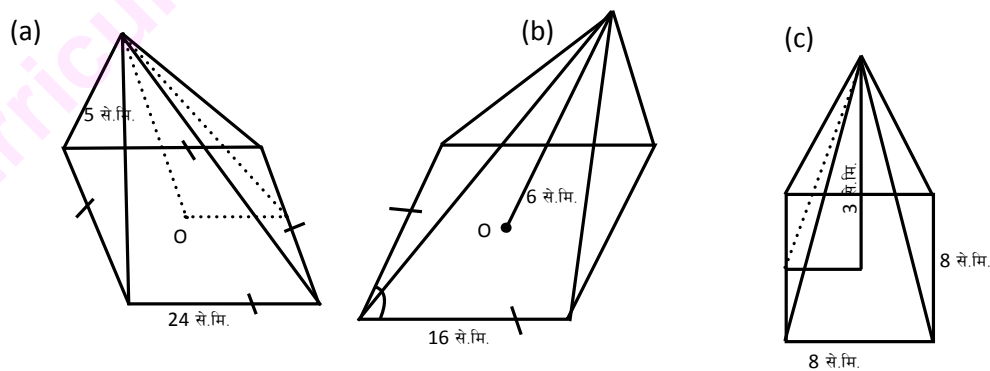
$$\begin{aligned}
 \text{सोलीको आयतन (V)} &= \frac{1}{3} (\text{आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ}) \text{ घन एकाइ} \\
 &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h \text{ घन एकाइ} \\
 &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6^2 \times 8 \right) \text{ घन से.मि.} \\
 &= \left(\frac{22 \times 36 \times 8}{21} \right) \text{ घन से.मि.} \\
 &= \frac{6336}{21} \text{ घन से.मि.} = 301.71 \text{ घन से.मि.}
 \end{aligned}$$

अभ्यास 7.2

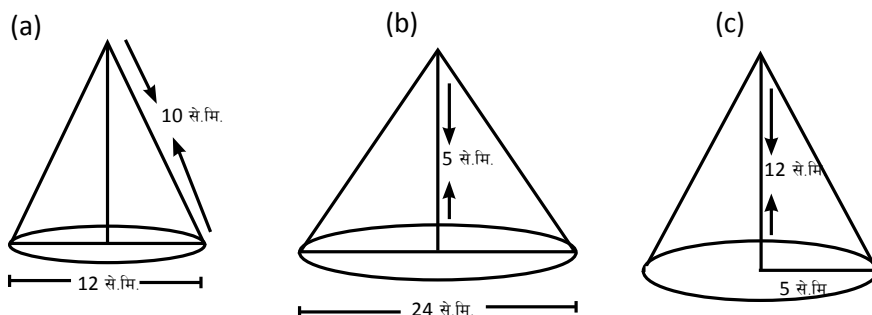
1. निम्नानुसार नापका पिरामिडहरूको पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :



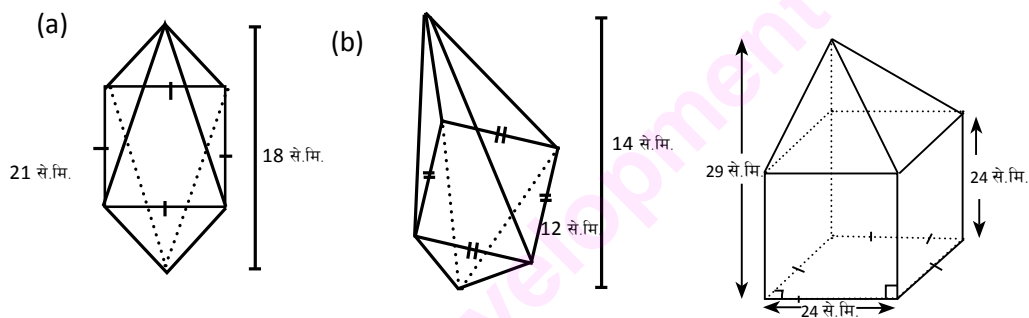
2. निम्नानुसारका नाप भएका वर्गाकार पिरामिडहरूको आयतन र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :



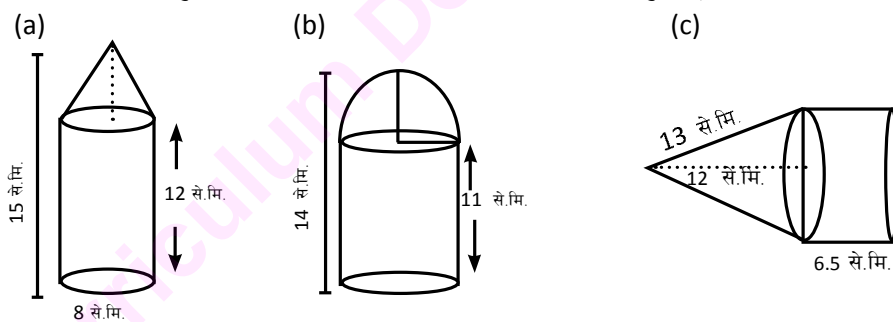
3. निम्नानुसार नाप भएका सोलीको आयतन र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :



4. निम्नानुसार नापका संयुक्त पिरामिडको आयतन निकाल्नुहोस् :



5. तलका ठोस वस्तुहरूको सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् :



- पुरा सतहको क्षेत्रफल 800 वर्ग से.मि. भएको एउटा वर्गाकार पिरामिडको आधारको भुजा 16 से.मि. छ। उक्त पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस्।
- वर्गाकार आधार भएको एउटा पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल 384 वर्ग से.मि. र आधारको भुजाको लम्बाइ 12 से.मि. छ। उक्त पिरामिडको आयतन निकाल्नुहोस्।
- आयतन 384 घन से.मि. भएको एउटा वर्गाकार पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस्, जसको उचाइ 8 से.मि. छ।

9. छड्के सतहको क्षेत्रफल 320 वर्ग से.मि. र वर्गाकार आधार भुजाको नाप 16 से.मि. भएको एउटा पिरामिडको आयतन निकाल्नुहोस् ।
10. वर्गाकार आधार भएको एउटा पिरामिडको पुरा सतहको क्षेत्रफल 216 वर्ग से.मि. र आधारको भुजा 9 से.मि. छ । उक्त पिरामिडको आयतन निकाल्नुहोस् ।
11. एउटा घनाकार ठोस वस्तुमाथि 8 से.मि. ठाडो उचाइ भएको पिरामिड राखिएको छ, यदि घनको भुजाको नाप 12 से.मि. छ भने सो संयुक्त ठोस वस्तुको पुरा आयतन निकाल्नुहोस् ।
12. वर्ग आधार भएको एउटा षड्मुखाकार ठोस वस्तुमाथि 12 से.मि. ठाडो उचाइ भएको एउटा पिरामिड राखिएको छ । यदि उक्त षड्मुखाकार ठोस वस्तुको आधारको क्षेत्रफल 100 वर्ग से.मि. तथा उचाइ 9 से.मि. भए संयुक्त ठोस वस्तुको पुरा आयतन निकाल्नुहोस् ।
13. व्यास 8 से.मि. र उचाइ 21 से.मि. भएको सोलीको आयतन र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
14. एउटा सोलीको आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात 5:12 तथा आयतन 314.29 घन से.मि. छ । उक्त सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
15. एउटा ठोस कोन (cone) को ठाडो उचाइ व्यासको 3 गुणा छ, यदि उक्त कोनको आयतन 54π घन से.मि. भए पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
16. एउटा बेलनामाथि 6 से.मि. ठाडो उचाइ भएको कोन राखिएको छ, यदि बेलनाको अर्ध व्यास 8 से.मि. र उचाइ 6 से.मि. भए उक्त संयुक्त ठोस वस्तुको पुरा आयतन र पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।
17. तपाईंको विद्यालय र घरमा भएका पिरामिड, सोली आकारका ठोस वस्तु एवम् संयुक्त ठोसहरूको सूची तयारी गर्नुहोस् । तिनीहरूका विभिन्न भागको नाप लिई आयतन गणना गर्नुहोस् ।
18. चार चार जनाको समूह निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहले काठ, माटो, कागज, बाँस आदि स्थानीय सामग्री प्रयोग गरी पिरामिड, सोली र संयुक्त ठोसहरू निर्माण गर्नुहोस् । निर्माण गरेका प्रत्येक ठोस वस्तुका नाप लिई क्षेत्रफल र आयतन गणना गरी तालिकासहित कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7.3 ज्यामितीय वस्तुहरू (Geometrical Bodies)

एक जना अभिभावकले कक्षा 10 मा अध्ययनरत आफ्नो छोरालाई भने, “हाम्रो घरको पछाडि दस हजार लिटर पानी अटाउने एउटा पानी ट्याङ्की बनाउनुपर्‍यो । त्यसका लागि मोटामोटी कति मिटर लम्बाइ, कति मिटर चौडाइ र कति मिटर उचाइको ट्याङ्की बनाउँदा उपयुक्त होला, आवश्यक हिसाब किताब गरी निकाल त ।” तत्काल दस हजार लिटर पानी अटाउने ट्याङ्की बनाउन निम्नानुसारका हिसाब गरी छोराको बुवालाई देखाए :

ट्याङ्कीको उचाइ (h) = 2 मिटर

लम्बाइ (l) = 2.85 मिटर

चौडाइ (b) = 2.75 मिटर

तसर्थ निकाल्नु पर्ने माटाको आयतन (V) = $l \times b \times h$ घन एकाइ

$$= 2 \times 2.85 \times 2.75 \text{ घन मिटर}$$

$$= 15.675 \text{ घन मिटर}$$

तयारी ट्याङ्कीको अनुमानित नाप

लम्बाइ (l_i) = 2.60 मिटर

चौडाइ (b_i) = 2.50 मिटर

उचाइ (h_i) = 1.75 मिटर

तसर्थ पानीको आयतन (V_w) = $l_i \times b_i \times h_i$ घन एकाइ

$$= 2.60 \times 2.50 \times 1.75 \text{ घन मिटर}$$

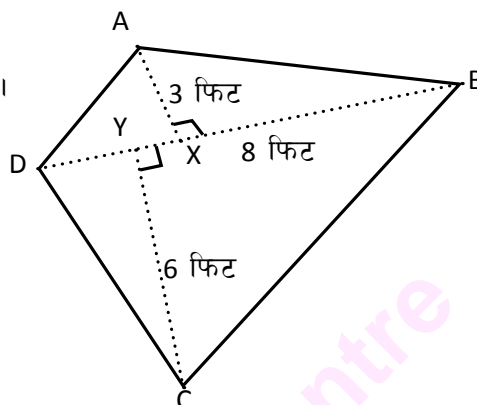
$$= 11.375 \text{ घन मिटर}$$

यसरी उक्त विद्यार्थीले अनुमानित 11 हजार 3 सय 75 लिटर पानी अटाउने पानी ट्याङ्की निर्माणका लागि आवश्यक खाका तयार गरे । माथिको क्रियाकलापको अध्ययन गरी निम्न लिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

1. एक घन मिटर पानी बराबर कति लिटर हुन्छ ?
2. एक लिटर पानी बराबर कति घन सेन्टिमिटर पानी हुन्छ ?
3. उक्त पानी ट्याङ्की निर्माणका लागि अनुमानित खर्च निकाल्नुहोस् ।
4. तपाईंहरूले पनि आफ्ना घर वा विद्यालयका लागि आवश्यक पानी ट्याङ्की निर्माण गर्न एउटा कार्य योजना तयार गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

एउटा घरको आँगन दिइएको ज्यामितीय आकारको छ ।
उक्त आँगनमा प्रति वर्गफिट रु. 24 का दरले प्लास्टर
गर्दा जम्मा ज्यालाको रकम कति हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।
(कुनै नाप दिइएको छैन ।)



समाधान

यहाँ, प्रति वर्गफिट प्लास्टरको ज्याला (c) = रु. 24

जम्मा ज्याला (T) = ?

आँगनको कुनै नाप दिइएको छैन । तसर्थ सर्वप्रथम विकर्ण BD वा AC नाप लिनुपर्छ । मानौं विकर्ण BD को नाप 8 फिट छ । विकर्ण BD मा लम्ब हुने गरी AX र CY दुई ओटा उचाइहरू नाप्दा क्रमशः 3 फिट र 6 फिट पाइयो । तसर्थ आँगनको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} \times BD (AX + CY)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

$$\text{अथवा } A = \frac{1}{2} \times 8 \times (3 + 6) \text{ वर्गफिट}$$

$$= 4 \times 9 \text{ वर्गफिट}$$

$$= 36 \text{ वर्गफिट}$$

∴ जम्मा ज्याला (T) = C X A हुन्छ ।

$$= \text{रु. } 24 \times 36$$

$$= \text{रु. } 864$$

उदाहरण 2

एउटा पानी ट्याङ्कीको भित्री लम्बाइ 2.5 मिटर, चौडाइ 2.5 मिटर र उचाइ 2 मिटर छ । उक्त ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ पानी ट्याङ्कीको भित्री लम्बाइ (l) = 2.5 मिटर

चौडाइ (b) = 2.5 मिटर

उचाइ (h) = 2 मिटर

पानी ट्याङ्कीको आयतन (V) = l x b x h घन एकाइ

$$= 2.5 \text{ मिटर} \times 2.5 \text{ मिटर} \times 2 \text{ मिटर}$$

$$= 12.5 \text{ घन मिटर}$$

ट्याङ्कीको आयतन = पानीको आयतन हुन्छ ।

∴ ट्याङ्कीमा अट्ने पानीको आयतन (V) = 12.5 घन मिटर हुन्छ ।

हामीलाई थाहा छ,

1 घन मिटर पानी = 1 हजार लिटर पानी हुन्छ ।

∴ 12.5 घन मिटर पानीको आयतन = 12 हजार 5 सय लिटर हुन्छ ।

उदाहरण 3

सँगैको चित्रमा एउटा घरको कम्पाउन्डको गेटका दुई ओटा पिलर र पिलरमाथि वर्ग आधारका दुई ओटा पिरामिडहरू राखिएका छन् । 6 फिट अग्लो पिलरमाथि 1 फिट उचाइ भएको पिरामिड छ । उक्त पिलरमा प्रति वर्गफिट रु. 52 का दरले टायल लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ, निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, प्रिज्मको लम्बाइ (l) = 6 फिट

पिरामिडको ठाडो उचाइ (h) = 1 फिट

पिरामिडको चौडाइ (b) = 1 फिट

प्रिज्मको आधार वर्गाकार छ ।

∴ पिरामिडको छड्के सतहको उचाइ (l) = ?

$$l = \sqrt{(.5)^2 + (1)^2} \text{ फिट}$$

$$= \sqrt{0.25 + 1} \text{ फिट}$$

$$= \sqrt{1.25} \text{ फिट}$$

$$= 1.12 \text{ फिट}$$

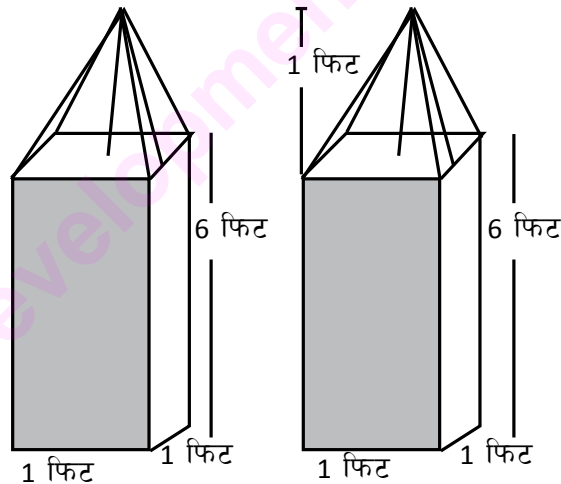
एउटा पिलरको पुरा सतहको क्षेत्रफल = $(1 \times 6 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1.12) \times 4$ वर्गफिट

दुई ओटा पिलरको पुरा सतहको क्षेत्रफल = $2 \times 4(6 + 0.56)$ वर्गफिट

$$\text{T.S.A} = 52.48 \text{ वर्गफिट}$$

प्रति वर्गफिट टायल लगाएको खर्च (C) = रु. 52

तसर्थ, जम्मा खर्च (T.C) = रु $52 \times 52.48 =$ रु. 2728.96 \approx रु. 2729



उदाहरण 4

एउटा सिमेन्टको चक्काको व्यास 3.5 फिट र उचाइ 1 फिट छ। इनार बनाउँदा प्रति चक्काको लागत मूल्य रु. 1200 पर्छ। यदि 32 चक्काको एउटा इनार तयार गर्नु छ भने उक्त इनारको लागत खर्च निकाल्नुहोस्। साथै उक्त इनारको 18 चक्कासम्म पानी छ भने इनारको खाली ठाउँ र पानीको आयतन कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ इनारमा राखिएको चक्काको व्यास (d) = 3.5 फिट

उचाइ (h_1) = 1 फिट

प्रति चक्का इनारमा राखेबापतको मूल्य = रु. 1200

∴ कुल लागत खर्च (T.C) = 32 × 1200 = रु. 38400

इनारको खाली ठाउँको आयतन (V_1) = $\pi r^2 h$

$$\begin{aligned} &= \frac{22}{7} \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times (32 - 18) \text{ घनफिट} \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{12.25}{4} \times 14 \text{ घनफिट} \\ &= 134.75 \text{ घनफिट} \end{aligned}$$

$$\text{पानीको आयतन } (V_2) = \pi r^2 h_2 = \frac{22}{7} \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 18 \text{ घनफिट} = 173.25 \text{ घनफिट}$$

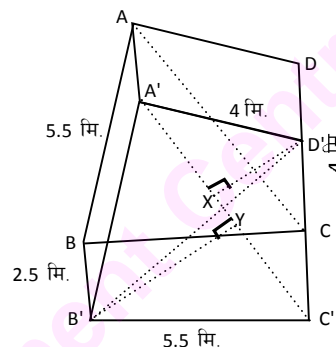
अभ्यास 7.3

- 1.(a) भित्री लम्बाइ 3 मिटर र उचाइ 2 मिटर भएको वर्गाकार आधारको एउटा ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ ?
- (b) वर्ग आधार भएको पानी ट्याङ्कीको भित्री लम्बाइ र उचाइ क्रमशः 2.5 मिटर र 1.5 मिटर भए सो पानी ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ ?
- 2.(a) एउटा इनारमा 3.5 फिट व्यास भएको तथा उचाइ 1 फिटका 50 ओटा चक्का राखिएका छन्। यदि सो इनार बनाउन प्रतिचक्का खर्च रु. 1300 पर्छ भने उक्त इनार खन्न कति खर्च लाग्छ ? उक्त इनारमा अधिकतम कति पानी अटाउँछ, निकाल्नुहोस्।
- (b) एउटा इनारको भित्री व्यास 1 मिटर र उचाइ 16.5 मिटर छ भने सो इनारमा कति लिटर पानी अटाउँछ ?
- (c) गहिराइ 8.5 मिटर र व्यास 1.4 मिटर भएको कुनै इनारमा कति पानी अटाउँछ होला ? पत्ता लगाउनुहोस्।

3.(a) अर्धव्यास 1.05 मिटर र उचाइ 3.5 मिटर नाप भएको पानी ट्याङ्कीको माथिल्लो भाग अर्ध गोलाकार (hemisphere) छ भने उक्त पानी ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एउटा विद्यालयमा आकासे पानी जम्मा गर्न 1.40 मिटर भित्री व्यास र 1.5 मिटर उचाइ भएको बेलनाकार ट्याङ्की निर्माण गरिएको छ । यदि उक्त ट्याङ्कीको माथिल्लो भाग 0.36 मिटर ठाडो उचाइको सोली छ भने सो ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. सँगैको चित्रमा ABCD ट्याङ्कीको माथिल्लो भाग तथा A'B'C'D' ट्याङ्कीको आधार हो । यसको उचाइ $BB' = AA' = CC' = DD' = 2.5$ मिटर छ । ट्याङ्कीको आधार A'B'C'D' को विकर्ण $A'C' = 6.25$ मिटर $D'X = 2.3$ मिटर र $B'Y = 4.5$ मिटर छ । उक्त ट्याङ्कीको अध्ययन गरी निम्न लिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



(a) ट्याङ्कीको चार भित्ताको जम्मा क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

(b) प्रति वर्गमिटर रु. 275 का दरले चार भित्तामा प्लास्टर गर्दा लाग्ने ज्याला निकाल्नुहोस् ।

(c) ट्याङ्कीको आधारको सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(d) ट्याङ्कीको आधारमा प्रति वर्गमिटर रु. 250 का दरले प्लास्टर गर्दा कति ज्याला लाग्छ ?

(e) ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ ?

(f) तपाईंको विद्यालयको सेवा क्षेत्रमा उपलब्ध ओभरसियर वा इन्जिनियरसँग सम्पर्क गरी ट्याङ्की निर्माणका लागि लाग्ने लागत खर्च निकाल्नुहोस् ।

8.0 पुनरावलोकन (Review)

समूहमा छलफल गरी तलका बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर्नुहोस् :

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| (a) $2x + 4$ | (b) $a^2 + ab + ab^2 + b^3$ |
| (c) $2x^2 - 8$ | (d) $8x^3 - 27y^3$ |
| (e) $x^3 - \frac{1}{8y^3}$ | (f) $x^4 + 64$ |
| (g) $a^4 + 9a^2 + 81$ | (h) $27a^3 + 125b^3$ |
| (i) $5x^2 + 9x + 4$ | (j) $x^3 + 7x^2 + 6x$ |

त्यस्तै गरी बीजीय अभिव्यञ्जकहरू $x^2 + x$, $4x + 8$ का खण्डीकरणहरू के के होलान् ? प्रत्येक बीजीय अभिव्यञ्जकको रेखा गणितीय चित्रहरू पनि बनाउनुहोस् ।

कक्षा 8 र 9 मा बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण बारे प्रशस्त अध्ययन र छलफल भइसकेको छ । यहाँ महत्तम समापवर्तक र लघुत्तम समापवर्त्यका बारेमा छलफल तथा अध्ययन गरिने छ ।

8.1 महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)

बीजीय अभिव्यञ्जकहरू $2x + 4$ र $3x + 6$ का गुणन खण्डहरू के के होलान् ? तिनीहरूमा साझा गुणन खण्डहरू के के होलान् ? ती साझा गुणन खण्डहरूलाई के भनिन्छ ? साथै उक्त गुणन खण्डलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ, या सकिदैन ? छलफल गर्नुहोस् । तल दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गरी तिनीहरूको साझा गुणन खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् :

- (1) $a^2 + 3a$ र $a + 3$
- (2) $a^2 - 9$ र $a^2 - 6a + 9$
- (3) $6x^2 + 9$ र $a^2 + 6a + 9$
- (4) $2x^3 + 4x^2 + 2x$ र $2x^3 + 6x^2 + 4x$

माथि दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणन खण्डलाई के भनिन्छ, लेख्नुहोस् । साथै उक्त साझा गुणन खण्डहरूलाई भेनचित्र (Venn diagram) मा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक (म.स.) निकाल्नुहोस् र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

$$6x + 8 \text{ र } 9x + 12$$

समाधान

$$\text{यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक} = 6x + 8$$

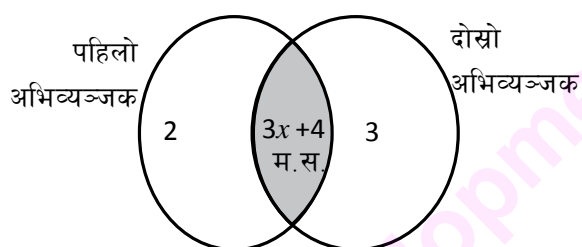
$$= 2(3x + 4)$$

$$\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} = 9x + 12$$

$$= 3(3x + 4)$$

$$\text{अतः साझा गुणन खण्ड} = (3x + 4)$$

तसर्थ दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणन खण्ड $(3x + 4)$ लाई नै दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको म.स. भनिन्छ । त्यसलाई भेनचित्र (Venn diagram) मा प्रस्तुत गर्दा



भेनचित्र (Venn diagram)

माथिको उदाहरणमा म.स.ले दुवै अभिव्यञ्जकलाई पालैपालो भाग गर्दा :

$$\frac{6x + 8}{\text{म.स.}} = \frac{2(3x + 4)}{(3x + 4)} = 2 \quad \text{र} \quad \frac{9x + 12}{\text{म.स.}} = \frac{3(3x + 4)}{(3x + 4)} = 3$$

$$\text{अर्थात्} \quad \frac{6x + 8}{3x + 4} = 2 \quad \text{र} \quad \frac{9x + 12}{3x + 4} = 3$$

तसर्थ, दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकहरूलाई निःशेष भाग जाने ती अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणन खण्डलाई म.स. (HCF) भनिन्छ ।

उदाहरण 2

म.स. निकाल्नुहोस् : $x^3 + 2x^2 + x$ र $x^3 - x$

समाधान

$$\begin{aligned}\text{यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक} &= x^3 + 2x^2 + x \\ &= x(x^2 + 2x + 1) \\ &= x(x + 1)^2 \\ &= x(x+1)(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^3 - x \\ &= x(x^2 - 1) \\ &= x(x + 1)(x - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{म.स.} &= \text{साझा गुणन खण्ड} \\ &= x(x + 1)\end{aligned}$$

उदाहरण 3

म.स. निकाल्नुहोस् : $x^2y - xy^2$ र $x^3 - 2x^2y + xy^2$

समाधान

$$\begin{aligned}\text{यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक} &= x^2y - xy^2 \\ &= xy(x - y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^3 - 2x^2y + xy^2 \\ &= x(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= x(x - y)^2 \\ &= x(x-y)(x-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{म.स.} &= \text{साझा गुणन खण्ड} \\ &= x(x-y)\end{aligned}$$

उदाहरण 4

म.स. निकाल्नुहोस् : $x^2 - y^2 - 2y - 1$ र $x^2 + 2xy + y^2 - 1$

समाधान

$$\begin{aligned}\text{यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक} &= x^2 - y^2 - 2y - 1 \\ &= x^2 - (y^2 + 2y + 1) \\ &= x^2 - (y + 1)^2 \\ &= \{x + (y + 1)\} \{x - (y + 1)\} \\ &= (x + y + 1)(x - y - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^2 + 2xy + y^2 - 1 \\ &= (x + y)^2 - 1^2 \\ &= (x + y + 1)(x + y - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{म.स.} &= \text{साझा गुणन खण्ड} \\ &= (x + y + 1)\end{aligned}$$

उदाहरण 5

म.स. निकाल्नुहोस् : $x^2 + (a+b)x + ab$ र $a^3 + 2a^2x + ax^2$

समाधान

$$\begin{aligned}\text{यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक} &= x^2 + (a+b)x + ab \\ &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x(x+a) + b(x+a) \\ &= (x+a)(x+b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= a^3 + 2a^2x + ax^2 \\ &= a(a^2 + 2ax + x^2) \\ &= a(a+x)^2 \\ &= a(x+a)(x+a)\end{aligned}$$

∴ म.स. = साझा गुणन खण्ड

$$= (x+a)$$

उदाहरण 6

म.स. निकाल्नुहोस् : $x^4 + x^2y^2 + y^4$, $x^3 - y^3$ र $x^3 + x^2y + xy^2$

समाधान

$$\begin{aligned}\text{पहिलो अभिव्यञ्जक} &= x^4 + x^2y^2 + y^4 \\ &= x^4 + (2-1)x^2y^2 + y^4 \\ &= (x^2)^2 + 2x^2y^2 + (y^2)^2 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \\ &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^3 - y^3 \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ \text{तेस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^3 + x^2y + xy^2 \\ &= x(x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$

$$\text{म.स.} = (x^2 + xy + y^2)$$

उदाहरण 7

म.स. निकाल्नुहोस् : $x^3 + 1 + 2x^2 + 2x$, $x^3 - 1$ र $x^4 + x^2 + 1$

समाधान

$$\begin{aligned}\text{यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक} &: x^3 + 1 + 2x^2 + 2x \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1) + 2x(x+1) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 2x + 1) \\ &= (x+1)(x^2 + x + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^3 - 1 \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{तेस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^4 + x^2 + 1 \\
&= x^4 + (2 - 1)x^2 + 1 \\
&= x^4 + 2x^2 - x^2 + 1 \\
&= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 - x^2 \\
&= (x^2 + 1)^2 - (x)^2 \\
&= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{म.स.} = (x^2 + x + 1)$$

उदाहरण 8

$$\text{म.स. निकालुहोस् : } 4x^3 - 6x^2y + 9xy^2, 16x^4 + 36x^2y^2 + 81y^4 \text{ र } 8x^3 + 27y^3$$

समाधान

$$\begin{aligned}
\text{यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक} &= 4x^3 - 6x^2y + 9xy^2 \\
&= x(4x^2 - 6xy + 9y^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= 16x^4 + 36x^2y^2 + 81y^4 \\
&= 16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 36x^2y^2 \\
&= (4x^2 + 9y^2)^2 - (6xy)^2 \\
&= (4x^2 + 9y^2 + 6xy)(4x^2 + 9y^2 - 6xy) \\
&= (4x^2 + 6xy + 9y^2)(4x^2 - 6xy + 9y^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{तेस्रो अभिव्यञ्जक} &= 8x^3 + 27y^3 \\
&= (2x)^3 + (3y)^3 \\
&= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{म.स.} = (4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

अभ्यास 8.1

म.स. निकालुहोस् :

$$(1) 3x + 9 \text{ र } 5x + 15$$

$$(2) 4x + 16 \text{ र } 5x + 20$$

$$(3) 5x + 30 \text{ र } 3x + 18$$

$$(4) 6x + 18 \text{ र } 4x + 12$$

$$(5) 7x + 28 \text{ र } 9x + 36$$

$$(6) 3x^2 + 6x + 3 \text{ र } 4x^2 + 8x + 4$$

$$(7) y^3 + 6y^2 + 9y \text{ र } 2y^3 + 12y^2 + 18y$$

$$(8) x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 \text{ र } 2x^3 + 4x^2y + 2xy^2$$

$$(9) x^3 + 2x^2 + x \text{ र } x^2y + 2xy + y$$

$$(10) 5x^2 + 10x + 5 \text{ र } 7x^3 + 14x^2 + 7x$$

$$(11) x^3 - xy^2 \text{ र } x^2y - 2xy^2 + y^3$$

$$(12) 7x^3 + 14x^2y + 7xy^2 \text{ र } 3x^2 - 3y^2$$

$$(13) 11x^2 - 44xy + 44y^2 \text{ र } 3x^2y - 12y^3$$

$$(14) x^2 - xy \text{ र } x^2 - y^2$$

$$(15) x(x^2 + 2x + 1) \text{ र } x^3y - xy^3$$

$$(16) a^2 - b^2 - 2bc - c^2 \text{ र } a^3 - 3ab(a - b) - b^3 - c^3$$

$$(17) a^2 - 2ac + c^2 - b^2 \text{ र } b^2 - 2bc + c^2 - a^2$$

$$(19) x^2 - y^2 + 2yz - z^2 \text{ र } y^2 - z^2 + 2zx - x^2$$

$$(21) x^2 + (b-a)x - ab \text{ र } x^2 - (a-b)x - ab$$

$$(23) x^3 + x^2 + x + 1 \text{ र } x^3 - x^2 - x + 1$$

$$(25) x^3 + x^2 - x - 1 \text{ र } x^3 + x^2y + xy^2$$

$$(27) a^4 + a^2b^2 + b^4, a^3 + b^3 \text{ र } a^3 - a^2b + ab^2$$

$$(29) x^3 + 2x^2 + 2x + 1, x^3 - 1 \text{ र } x^4 + x^2 + 1$$

$$(31) x^3 + 2x^2 + 4x, x^4 + 4x^2 + 16 \text{ र } x^3 - 8$$

$$(33) 16x^4 + 100x^2y^2 + 625y^4, 4x^3 - 10x^2y + 25xy^2 \text{ र } 8x^3 + 125y^3$$

$$(34) x^4 - 7x^2 + 1, x^3 + 3x^2 + x \text{ र } x^4 - 11x^2 + 1$$

$$(35) x^3 + 64y^3, x^4 + 16x^2y^2 + 256y^4 \text{ र } 4x^3 - 16x^2y + 64y^2x$$

$$(18) x^2 - y^2 - 2yz - z^2 \text{ र } y^2 - z^2 - 2zx - x^2$$

$$(20) x^2 - y^2 + 2y - 1 \text{ र } x^3 - 3xy(x-y) - y^3 + 1$$

$$(22) x^2 + (a-b)x - ab \text{ र } b^2 - 2bx + x^2$$

$$(24) x^3 + x^2 + x + 1 \text{ र } x^3 - x^2 + x - 1$$

$$(26) x^4 + x^2 + 1, x^3 + 1 \text{ र } x^3 - x^2 + x$$

$$(28) x^4 - 3x^2 + 1, x^3 - x^2 - x \text{ र } x^2 - 2x^2 + x$$

$$(30) x^4 + x^3y + x^2y^2, x^4 + x^2y^2 + y^4 \text{ र } x^3 - y^3$$

$$(32) 27x^3 + 125y^3, 9x^3 - 15x^2y + 25xy^2$$

8.2 लघुत्तम समापवर्त्य (Least Common Multiple)

दिइएका दुई ओटा बीजीय अभिव्यञ्जकहरूका साझा गुणन खण्ड र सो बाहेकका गुणन खण्डहरूको गुणन फल निकाल्नुहोस् ।

$$x^4 + 4 \text{ र } 2x^2 + 4x + 4$$

$$\text{पहिलो अभिव्यञ्जक} = x^4 + 4$$

$$\text{साझा गुणन खण्ड} = (x^2 + 2x + 2)$$

$$= (x^2 + 2)^2 - 2x^2 = (x^2 + 2)^2 - 2x^2$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2 - 2x)$$

$$\text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} = 2x^2 + 4x + 4 = 2(x^2 + 2x + 2)$$

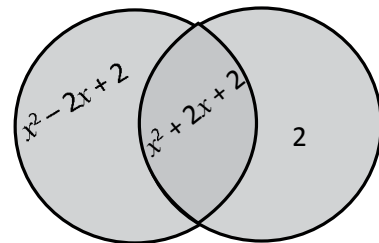
$$\text{साझा गुणन खण्डबाहेकका गुणन खण्डहरू} = 2 \text{ र } (x^2 - 2x + 2)$$

$$\text{यी दुवैको गुणन फल} = (x^2 - 2x + 2) \times 2$$

$$\therefore \text{ ल.स.} = \text{म.स.} \times \text{बाँकी गुणन खण्डहरूको गुणन फल}$$

$$= 2(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

तसर्थ, दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणन खण्ड र बाँकी गुणन खण्डहरूको गुणन फललाई लघुत्तम समापवर्त्य (Least common multiple) भनिन्छ । यसलाई भेनचित्रमा (Venn diagram) निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।



ल.स. = छायाँ पारिएको भाग

उदाहरण 1

ल.स. निकाल्नुहोस् : $x^4 + x^2 + 1$ र $x^3 + x^2 + x$

समाधान

यहाँ पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^4 + x^2 + 1$

$$\begin{aligned} &= (x^4 + 1) + x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 + x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^3 + x^2 + x$

$$= x(x^2 + x + 1)$$

साझा गुणन खण्ड (म.स.) $= (x^2 + x + 1)$

बाँकी गुणन खण्डहरूको गुणन फल $= x(x^2 - x + 1)$

साझा गुणन खण्ड र बाँकी गुणन खण्डहरूको गुणन फल $= x(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$$\therefore \text{ल.स.} = x(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

उदाहरण 2

ल.स. निकाल्नुहोस् : $x^3 + y^3$ र $x^3y - x^2y^3 + xy^3$

समाधान

$$\begin{aligned} \text{यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक} &= x^3 + y^3 \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^3y - x^2y^3 + xy^3 \\ &= xy(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

साझा गुणन खण्ड $= x^2 - xy + y^2$

बाँकी गुणन खण्डहरू $= (x + y) \cdot xy$

तसर्थ, ल.स. = साझा गुणन खण्ड \times बाँकी गुणन खण्डहरू

$$\begin{aligned} &= (x^2 - xy + y^2) \times (x + y)(xy) \\ &= xy(x + y)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

उदाहरण 3

ल.स. निकाल्नुहोस् : $x^3 - 1$ र $x^4 + x^2 + 1$

समाधान

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^3 - 1$

$$= (x - 1) (x^2 + x + 1)$$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^4 + x^2 + 1$

$$= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 + x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$$

$$= (x^2 + x + 1) (x^2 - x + 1)$$

ल.स. = (साझा गुणन खण्ड) \times बाँकी गुणन खण्डहरू

$$= (x^2 - x + 1) (x - 1) (x^2 + x + 1)$$

$$= (x-1) (x^2 + x + 1) (x^2 - x + 1)$$

उदाहरण 4

ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् : $x^3 - 1$, $x^4 + x^3 + x^2$ र $x^3 - x^2 + x$

समाधान

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^3 - 1$

$$= (x - 1) (x^2 + x + 1)$$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^4 + x^3 + x^2$

$$= x^2 (x^2 + x + 1)$$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$

ल.स. = साझा गुणन खण्ड \times बाँकी गुणन खण्डहरूको गुणन फल

$$= x (x - 1) (x^2 + x + 1) \cdot x (x^2 - x + 1)$$

$$= x^2 (x + 1) (x^2 + x + 1) (x^2 - x + 1)$$

उदाहरण 5

ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् : $x^4 + 10x^2 + 169$, $x^3 + 4x^2 + 13x$ र $x^3 + x(x + 13) + 3x^2$

समाधान

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^4 + 10x^2 + 169$

$$= (x^2)^2 + 169 + 10x^2$$

$$= (x^2 + 13)^2 - 26x^2 + 10x^2$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 13)^2 - 16x^2 \\
&= (x^2 + 13 + 4x)(x^2 + 13 - 4x) \\
&= (x^2 + 4x + 13)(x^2 - 4x + 13)
\end{aligned}$$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^3 + 4x^2 + 13x$
 $= x(x^2 + 4x + 13)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= x^3 + x(x + 13) + 3x^2$
 $= x(x^2 + x + 13 + 3x)$
 $= x(x^2 + 4x + 13)$

\therefore ल.स. = साझा गुणन खण्ड \times बाँकी गुणन खण्डहरू
 $= (x^2 + 4x + 13)(x^2 - 4x + 13)$
 $= x(x^2 + 4x + 13)(x^2 - 4x + 13)$

अभ्यास 8.2

लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स) निकाल्नुहोस् :

- (1) $x^4 + 4$ र $2x^3 - 4x^2 + 4x$ (2) $x^3 + 8$ र $x^3 - 2x^2 + 4x$
- (3) $x^3 - 1$, $x^3 - x^2 + x$ र $x^4 + x^2 + 1$ (4) $x^4 + 2ax^3 + a^2x^2$ र $x^3 + ax^2 + b^2x$
- (5) $y^4 + (2b^2 - a^2)y^2 + b^4$ र $y^3 - ay^2 + b^2y$ (6) $\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^2$ र $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^3$
- (7) $x^4 + 1 + \frac{1}{x^4}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ र $x^3 + x + \frac{1}{x}$ (8) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$, $x^3 + 8y^3$ र $x^3 - 8y^3$
- (9) $x^4 + 64y^4$, $2x^3 + 8x^2y + 16xy^2$ र $x^3 - 4x^2y + 8xy^2$
- (10) $x^4 + 4y^4$, $x^3 + 2x^2y + 2xy^2$ र $x^3 - 2x^2y + 2xy^2$
- (11) $x^4 - 64$, $x^3 + 4x^2 + 16x$ र $4x^2 + 16x + 64$
- (12) $x^4 + 9x^2 + 81$, $3x^2 + 9x + 27$ र $x^3 + 27$
- (13) $x^4 + 8x^2 + 144$, $x^3 + x(x + 12) + 3x^2$ र $x^3 + 12x + 4x^2$
- (14) $x^4 - 8x^2 + 196$, $x^3 + x(x + 14) + 5x^2$ र $2x^2 + 12x + 28$
- (15) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$, $b^2 + 2bc + c^2 - a^2$ र $c^2 + 2ac + a^2 - b^2$
- (16) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $x^3 + 2x^2y - xy^2$ र $x^2y - 2xy^2 - y^3$
- (17) $x^4 + x^2 + 1$, $x^3 - 1$ र $x^6 - 1$ (18) $x^6 - 16x^4$, $x^5 + 6x^4 + 8x^3$ र $x^4 + 8x^3 + 16x^2$
- (19) $x^4 + 4x^2 + 16$, $x^3 + 2x^2 + 4x$ र $x^3 - 8$ (20) $x^3 - 4x^2 + 12x$, $x^4 + 8x^2 + 144$

9.0 पुनरावलोकन (Review)

निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

के $\sqrt{9}$ र $\sqrt{x^2}$ को निश्चित मान निकाल्न सकिन्छ ?

आनुपातिक सङ्ख्या भन्नाले के बुझिन्छ ?

के $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ र $\sqrt{7}$ आनुपातिक सङ्ख्याका उदाहरणहरू हुन् ?

कुनै सङ्ख्या जसलाई $\frac{p}{q}$ का रूपमा व्यक्त गरिन्छ, p, q दुवै पूर्णाङ्कहरू हुन् र $q \neq 0$ छ भने उक्त सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या (rational number) भनिन्छ ।

9.1 सर्डहरू (Surd)

$\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{12}, \frac{2}{24}$ आदिलाई $\frac{p}{q}$ का रूपमा व्यक्त गरिएको छ । के $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ आदिलाई $\frac{p}{q}$ का रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ ? $\frac{p}{q}$ का रूपमा व्यक्त गर्न सकिने र $\frac{p}{q}$ का रूपमा व्यक्त गर्न नसकिने कुनै चार चार ओटा उदाहरणहरू कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

कुनै सङ्ख्या जसलाई $\frac{p}{q}$ का रूपमा लेख्न सकिँदैन, त्यस्ता सङ्ख्याहरूलाई अनानुपातिक सङ्ख्या (irrational number) अथवा सर्ड (surd) भनिन्छ । यी सङ्ख्याहरूको निश्चित मान निकाल्न सकिँदैन । $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$ आदि सर्डका उदाहरणहरू हुन् ।

$\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$) मा " $\sqrt[n]{}$ " लाई n औं साधारण मूलक चिह्न (n^{th} radical sign) भनिन्छ । जस्तै : $\sqrt[3]{6}$ मा " $\sqrt[3]{}$ " तेस्रो मूल (third root) हो ।

के $\sqrt{\sqrt{4}}$ र $\sqrt{\sqrt[3]{27}}$ सर्डहरू हुन् ? के सर्डलाई आनुपातिक सङ्ख्याको वर्गमूल, घनमूल आदिका रूपमा लिन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

माथिका दुई मूल चिह्नहरूको निश्चित मान निकाल्न सकिँदैन तसर्थ यिनीहरू दुवै सर्डहरू हुन् ।

(क) सर्द सम्बन्धी केही तथ्यहरू (some facts about surds)

- (अ) $\sqrt[4]{7}$ सर्दको क्रम 4 हो भने $\sqrt{11}$ सर्दको क्रम 2 हो ।
- (आ) $\sqrt{17}$ एक पूर्ण सर्द (pure surd) को उदाहरण हो जसले अनानुपातिक सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।
- (इ) $4\sqrt{5}$ एक मिश्रित सर्दको उदाहरण हो जसले आनुपातिक सङ्ख्या (rational number) र पूर्ण सर्द (pure surd) को गुणन फललाई जनाउँछ ।
- (ई) $2\sqrt{5}$ र $6\sqrt{5}$ समान सर्दहरू हुन् किनकि यिनीहरूको मूल चिह्नभित्र एउटै सङ्ख्या छ ।
- (उ) $\sqrt[3]{7}$ र $\sqrt[3]{11}$ असमान सर्दहरू हुन् किनकि यिनीहरूको मूल चिह्नभित्र फरक फरक सङ्ख्याहरू छन् । साथै मूल चिह्नहरू पनि फरक फरक छन् ।
- (ऊ) सर्दहरूको क्रम मूल चिह्नमा रहेका अङ्कले जनाउँछन्, जस्तै : $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[5]{9}$
क्रमशः दोस्रो, तेस्रो र पाँचौं क्रमका सर्दहरू हुन् ।

उदाहरणहरू

1. $\sqrt[4]{27}$ र $\sqrt[n]{a}$ सर्दहरूको क्रम लेख्नुहोस् ।

समाधान

$\sqrt[4]{27}$ मा सर्दको क्रम 4 छ । त्यस्तै, $\sqrt[n]{a}$ मा सर्दको क्रम n छ ।

2. $\sqrt{288}$ लाई सरल रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

समाधान

$$\sqrt{288} = \sqrt{2 \times 12 \times 12} = 12\sqrt{2}$$

3. मिश्रित सर्दलाई पूर्ण सर्दका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(क) $\frac{4}{11} \sqrt{\frac{77}{8}}$ (ख) $\frac{3xy}{2p} \sqrt{\frac{20p^2}{9x^2y}}$

समाधान

(क) $\frac{4}{11} \sqrt{\frac{77}{8}} = \sqrt{\frac{4^2}{11^2} \times \frac{77}{8}} = \sqrt{\frac{4 \times 4}{11 \times 11} \times \frac{11 \times 7}{8}} = \sqrt{\frac{14}{11}}$

(ख) $\frac{3xy}{2p} \sqrt{\frac{20p^2}{9x^2y}} = \sqrt{\left(\frac{3xy}{2p}\right)^2 \times \frac{20p^2}{9x^2y}} = \sqrt{\frac{9x^2y^2}{4p^2} \times \frac{20p^2}{9x^2y}} = \sqrt{5y}$

4. $\sqrt[8]{x^3}$, $\sqrt[9]{x^6}$ र $\sqrt[20]{x^5}$ लाई एउटै क्रमका मूल चिह्न (radical sign) भित्र लेख्नुहोस् ।

समाधान

मूल चिह्नहरूको लघुत्तम मूल चिह्न नै एउटै घाताङ्क हो । 8, 9 र 20 को ल.स. = 360

$$\text{त्यसैले, } \sqrt[8]{x^3} = \sqrt[8 \times 45]{x^{3 \times 45}} = \sqrt[360]{x^{135}}$$

$$\sqrt[9]{x^6} = \sqrt[9 \times 40]{x^{6 \times 40}} = \sqrt[360]{x^{240}}$$

$$\sqrt[20]{x^5} = \sqrt[20 \times 18]{x^{5 \times 18}} = \sqrt[360]{x^{90}}$$

अभ्यास 9.1

1. तल दिइएका सर्डहरूको क्रम लेख्नुहोस् :

(क) $\sqrt[8]{4}$ (ख) $\sqrt[3]{25}$ (ग) $\sqrt[7]{11}$ (घ) $3\sqrt[n]{x}$ ($n > 1$)

2. तल दिएका सर्डहरूलाई सरल रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् :

(क) $\sqrt{18}$ (ख) $\sqrt{72}$ (ग) $\sqrt[3]{16x}$ (घ) $\sqrt{36a^3}$ (ङ) $\sqrt[3]{81a^4b^7}$

3. तल दिएका सर्डहरूलाई पूर्ण सर्डका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् :

(क) $4\sqrt{5}$ (ख) $2\sqrt[3]{6}$ (ग) $\frac{2a}{b} \sqrt[4]{\frac{b^4}{8a^3}}$ (घ) $(a+b) \sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}$

4. तलका प्रत्येक सर्डहरूलाई एउटै क्रमको मूल चिह्न प्रयोग गरी लेख्नुहोस् :

(क) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$ (ख) $\sqrt[4]{x^2}$, $\sqrt[3]{x^4}$, $\sqrt[6]{x^3}$

5. 1 देखि 100 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरूको वर्गमूल र घनमूल पत्ता लगाउनुहोस् । तिनीहरूमध्ये कुन सर्डहरू हुन् र कुन होइनन् छलफल गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

9.2 सर्डहरूको सरलीकरण (Simplification of surds)

निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् :

के $\sqrt{2}$ र $\sqrt{18}$ समान सर्डहरू हुन् ?

के $\sqrt[3]{5}$ र $2\sqrt[3]{5}$ को क्रम एउटै छ ?

के $\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{20}$ हुन्छ ?

के $\sqrt{2} + \sqrt{18} = 4\sqrt{2}$ हुन्छ ?

सर्डहरूको जोड क्रियामा, सर्डको क्रम तथा मूल चिह्न भित्रको परिमाण उही भएमा मात्र जोड गर्न सकिन्छ । अर्थात् समान सर्डहरू मात्र जोड्न सकिन्छ ।

उदाहरणहरू

1. जोड गर्नुहोस् : $4\sqrt{128} + 4\sqrt{50}$

समाधान

$$\text{यहाँ, } \sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

त्यसैले, $4\sqrt{128} + 4\sqrt{50}$

$$= 4 \times 8\sqrt{2} + 4 \times 5\sqrt{2}$$

$$= 32\sqrt{2} + 20\sqrt{2}$$

$$= (32 + 20)\sqrt{2}$$

$$= 52\sqrt{2}$$

सर्डहरूको घटाउ क्रियामा सर्डको क्रम तथा मूल चिह्नभित्रको परिमाणहरू उही भएमा मात्र घटाउन सकिन्छ । अर्थात् समान सर्डहरू मात्र घटाउन सकिन्छ ।

2. सरल गर्नुहोस् :

$$\sqrt[4]{48a^4b^6} + \sqrt[4]{243a^4b^6} - \sqrt[4]{1875a^4b^6}$$

समाधान

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[4]{48a^4b^6} + \sqrt[4]{243a^4b^6} - \sqrt[4]{1875a^4b^6} \\
 &= \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3a^4 \times b^4 \times b^2} + \sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3a^4 \times b^4 \times b^2} - \sqrt[4]{3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5a^4 \times b^4 \times b^2} \\
 &= 2ab\sqrt[4]{3b^2} + 3ab\sqrt[4]{3b^2} - 5ab\sqrt[4]{3b^2} \\
 &= (2ab + 3ab - 5ab)\sqrt[4]{3b^2} \\
 &= 0\sqrt[4]{3b^2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{के } (\sqrt{5})^2 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25} \text{ हुन्छ ?}$$

यदि $2^3 = 8$ हुन्छ भने के $2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$ लेख्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

सर्दहरूको गुणन क्रिया गर्न सर्दहरूको क्रम एउटै हुनुपर्छ । मूल चिह्नभित्रको परिमाण एउटै वा फरक पनि हुन सक्छ ।

3. गुणन गर्नुहोस् : (क) $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$ (ख) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2}$

समाधान

$$(क) \sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{2 \times 7} = \sqrt{14}$$

$$(ख) \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{2^2} \quad (2 \text{ र } 3 \text{ को ल.स.} = 6)$$

$$= \sqrt[6]{8 \times 4}$$

$$= \sqrt[6]{32} \quad [2^3 = 8, 2^2 = 4]$$

सर्दहरूको भाग क्रियामा सर्दहरूको क्रम एउटै हुनुपर्छ । मूल चिह्नभित्रको परिमाण एउटै वा फरक पनि हुन सक्छ ।

4. सरल गर्नुहोस् : $\sqrt[3]{a^7b^8c^9} \div \sqrt[3]{81a^5b^6c^5}$

समाधान

$$\sqrt[3]{a^7b^8c^9} \div \sqrt[3]{81a^5b^6c^5}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{\frac{a^7 b^8 c^9}{81 a^5 b^6 c^5}} = \sqrt[3]{\frac{a^2 b^2 c^4}{81}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{a^2 b^2 c^3 \times c}{81}} \\
&= \frac{c}{3} \sqrt[3]{\frac{a^2 b^2 c}{3}}
\end{aligned}$$

5. सरल गर्नुहोस् : $(3\sqrt{a} - 2\sqrt{x})(2\sqrt{a} + 3\sqrt{x})$

समाधान

$$\begin{aligned}
&(3\sqrt{a} - 2\sqrt{x})(2\sqrt{a} + 3\sqrt{x}) \\
&= 3\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 3\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}(2\sqrt{a} + 3\sqrt{x}) \\
&= 6\sqrt{a \times a} + 9\sqrt{a \times x} - 4\sqrt{x \times a} - 2 \times 3\sqrt{x \times x} \\
&= 6a + 9\sqrt{ax} - 4\sqrt{ax} - 6x \\
&= 6a - 6x + 5\sqrt{ax}
\end{aligned}$$

अभ्यास 9.2

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$

(ख) $5\sqrt[3]{7} + 8\sqrt[3]{7} + 5\sqrt[3]{7}$

(ग) $25\sqrt[7]{192} + 45\sqrt[7]{192} + 20\sqrt[7]{192}$

(घ) $25\sqrt[3]{37} + 251\sqrt[3]{37} + 49\sqrt[3]{37}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{500} + \sqrt{625}$

(ख) $7\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{128} - 4\sqrt[3]{250}$

(ग) $2\sqrt{72} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{98}$

3. गुणन गर्नुहोस् :

(क) $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$

(ख) $\sqrt{3} \times \sqrt{11}$

$$(ग) \sqrt[3]{2} \times \sqrt{2}$$

$$(घ) \sqrt[4]{4} \times \sqrt{2}$$

4. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) 3\sqrt{18} \times 2\sqrt{12}$$

$$(ख) 5\sqrt{12} \times 7\sqrt{6}$$

$$(ग) (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$(घ) (4\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$$

$$(ङ) 27\sqrt{24} \div 9\sqrt{12}$$

$$(च) \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{78} \times \sqrt{3}}{\sqrt{26} \times \sqrt{24}}$$

5. कुनै 5 ओटा फरक मूल चिह्न भएका सर्डहरू लेख्नुहोस् । तीमध्ये कुनै 4 ओटा सर्डहरूलाई गुणन गर्नुहोस् र पाँचौँ सर्डले उक्त गुणन फललाई भाग गर्नुहोस् । प्राप्त अन्तिम परिणामलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

9.3 आनुपातीकरण (Rationalization)

निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गरी प्राप्त नतिजालाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ को हरलाई कसरी सर्डरहित बनाउन सकिन्छ होला ?

$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ को हरलाई कसरी सर्डरहित बनाउन सकिन्छ होला ?

सर्डसहित भिन्नको हरलाई सर्डरहित बनाउने क्रियालाई हरको आनुपातीकरण (rationalization) भनिन्छ ।

यदि कुनै अनानुपातिक पद $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ भए यसको आनुपातिक खण्ड (Rationalising factor) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ हुन्छ । $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ र $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ लाई एक आपसमा गुणन गर्दा आनुपातिक गुणन खण्ड $(x-y)$ प्राप्त हुन्छ ।

उदाहरण

1. $\frac{10}{2\sqrt{3}}$ को लाई आनुपातीकरण गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ $\frac{10}{2\sqrt{3}}$ को हरमा $\sqrt{3}$ छ, जुन अनानुपातिक सङ्ख्या हो ।

$$\begin{aligned} \text{त्यसैले, अंश र हर दुवैमा } \sqrt{3} \text{ ले गुणन गर्दा } & \frac{10}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{10\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

2. आनुपातीकरण गर्नुहोस् : $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

समाधान

$$\begin{aligned} & \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \text{ [अंश र हरमा } 2+\sqrt{3} \text{ को अनुबद्ध (conjugate) ले गुणन गर्दा]} \\ &= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2)^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{(2)^2-2 \times 2 \times \sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{4-3} = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{1} = 7-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. सरल गर्नुहोस् : $\frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

समाधान

$$\begin{aligned} & \frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}} \times \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ & \text{(प्रत्येक हरको अनुबद्ध (conjugate) ले अंश र हरमा गुणन गर्दा)} \\ &= \frac{12\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2} + \frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} - \frac{4\sqrt{18}+4\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{12\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{4 \times 3-6} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3-2} - \frac{(4 \times 3\sqrt{2}+4\sqrt{6})}{6-2} \\ &= \frac{12\sqrt{3}}{6} + \frac{6\sqrt{6}}{6} + 3\sqrt{2}-2\sqrt{3} - \frac{4 \times 3\sqrt{2}}{4} - 4 \times \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} = 0 \end{aligned}$$

4. यदि $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = a+b\sqrt{6}$ भए a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

$$\text{यहाँ } \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = a + b\sqrt{6}$$

$$\text{अथवा, } \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}} \times \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = a + b\sqrt{6}$$

$$\text{अथवा, } \frac{3(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 2(\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2} = a + b\sqrt{6}$$

$$\text{अथवा, } \frac{3 \times 3 + 5\sqrt{6} + 2 \times 2}{9 \times 3 - 4 \times 2} = a + b\sqrt{6}$$

$$\text{अथवा, } \frac{9 + 4 + 5\sqrt{6}}{27 - 8} = a + b\sqrt{6}$$

$$\text{अथवा, } \frac{13 + 5\sqrt{6}}{19} = a + b\sqrt{6}$$

$$\text{अथवा, } \frac{13}{19} + \frac{5\sqrt{6}}{19} = a + b\sqrt{6}$$

$$\text{द्वैतिर एक समान पदहरूलाई तुलना गर्दा } a = \frac{13}{19} \text{ र } b = \frac{5}{19}$$

अभ्यास 9.3

1. हरहरूको आनुपातीकरण गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$(ख) \frac{14}{\sqrt{7}}$$

$$(ग) \frac{12}{\sqrt{72}}$$

$$(घ) \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}$$

2. हरहरूको आनुपातीकरण गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{5}{3 + \sqrt{2}}$$

$$(ख) \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$$

$$(ग) \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$$

$$(घ) \frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{48} + \sqrt{18}}$$

3. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$(ख) \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(ग) \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

4. (क) यदि $\frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$ भए a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

$$(ख) \text{ यदि } a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \text{ र } b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \text{ भए } (a + b)^2 \text{ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।}$$

$$(ग) \text{ यदि } x = 6 - \sqrt{35} \text{ भए } x + \frac{1}{x} \text{ र } x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।}$$

5. आनुपातिक र अनानुपातिक सङ्ख्याको उदाहरणसहित भिन्नता लेख्नुहोस् । के आनुपातीकरणले यी दुई सङ्ख्याहरूलाई एक अर्कामा परिवर्तन गर्छ ? आनुपातीकरणको प्रयोग कहाँ के कसरी हुन्छ ? आफूभन्दा माथिल्ला कक्षामा गणित विषय अध्ययन गर्नेहरूसँग सोधी छोटो प्रतिवेदन कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

9.4. साधारण मूलक समीकरण (Equations involving surds)

$\sqrt{16}$ भन्नाले के बुझिन्छ ? के $(\sqrt{x})^2 = x$ लेख्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

चलराशि मूलसहित भएको समीकरणलाई साधारण मूलक समीकरण भनिन्छ । उदाहरणका लागि $\sqrt{x} = 2$, $\sqrt{x-1} = 5$ आदि । मूल चिह्नको वर्ग गर्दा मूल चिह्न हट्छ, जस्तै : $\sqrt{x} = 3$ भए $(\sqrt{x})^2 = (3)^2$ अथवा $x = 9$ हुन्छ ।

साधारण मूलक समीकरण हल गर्दा प्राप्त भएको उत्तर ठिक छ, छैन भनी थाहा पाउन उत्तर प्रतिस्थापन गरी हेर्न सकिन्छ । साधारणमूलक समीकरण हल गर्दा प्राप्त हुने सङ्ख्याहरूमध्ये जुन सङ्ख्याले समीकरणलाई सन्तुष्ट गर्दैन त्यसलाई "Extraneous root" भन्दछन् ।

उदाहरण

1. हल गर्नुहोस् (क) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$ (ख) $\sqrt[4]{x} + 1 = 3$

समाधान

(क) यहाँ, $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$

अथवा, $\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$

अथवा, $(\sqrt{x+5})^2 = (1 + \sqrt{x})^2$ (दुवैतिर वर्ग गर्दा)

अथवा, $x + 5 = 1 + 2\sqrt{x} + x$

अथवा, $4 = 2\sqrt{x}$

अथवा, $2 = \sqrt{x}$

अथवा, $(2)^2 = (\sqrt{x})^2$

अथवा, $4 = x$

जाँच गर्दा, $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$

अथवा, $\sqrt{4+5} - \sqrt{4} = 1$

अथवा, $3 - 2 = 1$

अथवा, $1 = 1$

$\therefore x = 4$

(ख) यहाँ, $\sqrt[4]{x} + 1 = 3$

अथवा, $\sqrt[4]{x} = 3 - 1$

अथवा, $\sqrt[4]{x} = 2$

अथवा, $(x^{\frac{1}{4}}) = 2$

दुवैतिर चौथो घात लिँदा

अथवा, $x^{\frac{1}{4} \times 4} = 2^4$

अथवा, $x = 16$

जाँच गर्दा :

$\sqrt[4]{x} + 1 = 3$

अथवा, $\sqrt[4]{16} + 1 = 3$

अथवा, $2 + 1 = 3$

अथवा, $3 = 3$

$\therefore x = 16$

2. हल गर्नुहोस् : $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

समाधान

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{8+\sqrt{x}-1}{2}$$

$$\text{अथवा, } \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{7+\sqrt{x}}{2}$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{x} - 1 = \frac{7+\sqrt{x}}{2}$$

$$\text{अथवा, } 2\sqrt{x} - 2 = 7 + \sqrt{x}$$

$$\text{अथवा, } 2\sqrt{x} - \sqrt{x} = 7 + 2$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{x} = 9$$

$$\text{अथवा, } (\sqrt{x})^2 = (9)^2$$

$$\text{अथवा, } x = 81$$

$$\text{जाँच गर्दा, } \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$\text{अथवा, } \frac{81-1}{\sqrt{81}+1} = 4 + \frac{\sqrt{81}-1}{2}$$

$$\text{अथवा, } \frac{80}{9+1} = 4 + \frac{9-1}{2}$$

$$\text{अथवा, } \frac{80}{10} = 4 + 4 \quad \text{अथवा, } 8 = 8 \quad \therefore x = 81$$

3. हल गर्नुहोस् : $\sqrt{x^2 - 3x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$

समाधान

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 1 + \sqrt{(x-2)^2}$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 1 + x - 2$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{x^2 - 3x + 5} = x - 1$$

$$\text{अथवा, } (\sqrt{x^2 - 3x + 5})^2 = (x - 1)^2$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 3x + 5 = x^2 - 2x + 1$$

$$\text{अथवा, } x^2 - x^2 - 3x + 2x = 1 - 5$$

$$\text{अथवा, } -x = -4 \quad \text{अथवा, } x = 4$$

$$\text{जाँच गर्दा, } \sqrt{x^2 - 3x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{4^2 - 3 \times 4 + 5} - \sqrt{4^2 - 4 \times 4 + 4} = 1$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$$

$$\text{अथवा, } 3 - 2 = 1 \quad \text{अथवा, } 1 = 1$$

$$\therefore x = 4$$

अभ्यास 9.4

हल गर्नुहोस् र जाँच्नुहोस् :

1. (क) $\sqrt{x-5} = 3$

(ख) $7 - \sqrt{x-4} = 3$

(ग) $\sqrt[3]{4x-7} = 5$

(घ) $13 - \sqrt[3]{5x-4} = 7$

2. (क) $\sqrt{x+25} = 1 + \sqrt{x}$

(ख) $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 9$

(ग) $\sqrt{x-4} + 3 = \sqrt{x+11}$

(घ) $\sqrt{9x-8} = 3\sqrt{x+3} - 5$

3. (क) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

(ख) $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 3 + \frac{\sqrt{x}+1}{2}$

(ग) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 2$

(घ) $\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}} = 2$

4. $\sqrt{x^2 - 2x - 4} - \sqrt{x^2 - 3x - 3} = 1$ लाई हल गर्दा x को मान 4 र $-\frac{4}{3}$ आउँछ भनी देखाउनुहोस् । $x = -\frac{4}{3}$ ले समीकरणलाई सन्तुष्ट गर्दैन किन ? कारण खोज्नुहोस् ।

5. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ लाई समाधान गर्दा $x = 81$ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् । उक्त समीकरण हल गर्दा आउने x को कुन मान उक्त समीकरणका लागि समाधान हुँदैन, किन ? कारण लेख्नुहोस् ।

6. अभ्यासमा दिइए जस्तै अन्य कुनै 5 ओटा प्रश्नहरू आफैँ निर्माण गरी तिनीहरूको समाधान सहित कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

10.0 पुनरावलोकन (Review)

दिइएको सर्वसमिकाको खाली स्थानमा ठिक सङ्ख्या भर्नुहोस् :

(क) $2^5 \times 2^7 = \dots$

(ख) $2^9 \div 2^4 = \dots$

(ग) $\frac{1}{2^{-7}} = \dots$

(घ) $(2 \times 3)^6 = \dots$

(ङ) $2^0 = \dots$

(च) $(2 \div 3)^6 = \dots$

(छ) $\sqrt[4]{3^3} = \dots$

(ज) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \dots$

घाताङ्क सम्बन्धी केही नियमहरू

1. $x^m \times x^n = x^{m+n} \quad (x \neq 0)$

2. $x^m \div x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0)$

3. $(x^m)^n = x^{mn} \quad (x \neq 0)$

4. $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$

5. $x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$

6. $x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad (x \neq 0)$

7. $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}} \quad (x > 0)$

घाताङ्कका यी नियमहरूको प्रयोग कहाँ कहाँ हुन्छ, समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

10.1 घाताङ्कको सरलीकरण (Simplification of Indices)

तल दिइएका पदहरूलाई घाताङ्कको प्रयोग गरी लेख्नुहोस् :

(क) $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = \dots$

(ख) $x \times x^4 \times x^9 \times x^{-7} = \dots$

$$(ग) \quad (-7)^2 \times (-7)^3 \times (-7)^9 = \dots$$

$$(घ) \quad (a+2)^2 \times (a+2)^9 \times (a+2)^{-5} = \dots$$

उदाहरण

$$1. \text{ सरल गर्नुहोस् : } \frac{\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(1-\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}}}{\left(\frac{y}{x}+1\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(\frac{y}{x}-1\right)^{\frac{y}{x-y}}}$$

समाधान

$$\begin{aligned} & \frac{\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(1-\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}}}{\left(\frac{y}{x}+1\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(\frac{y}{x}-1\right)^{\frac{y}{x-y}}} \\ &= \frac{\left(\frac{y+x}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(\frac{y-x}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}}}{\left(\frac{y+x}{x}\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(\frac{y-x}{x}\right)^{\frac{y}{x-y}}} = \left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(\frac{y-x}{y-x}\right)^{\frac{y}{x-y}} \\ &= \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x-y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x+y}{x-y}} \end{aligned}$$

$$2. \text{ सरल गर्नुहोस् : } \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+x^{b-a}}$$

समाधान

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+x^{b-a}} \\ &= \frac{x^b}{x^b(1+x^{a-b}+x^{c-b})} + \frac{x^c}{x^c(1+x^{b-c}+x^{a-c})} + \frac{x^a}{x^a(1+x^{c-a}+x^{b-a})} \\ &= \frac{x^b}{x^b + x^b \times x^{a-b} + x^b \times x^{c-b}} + \frac{x^c}{x^c + x^c \times x^{b-c} + x^c \times x^{a-c}} + \frac{x^a}{x^a + x^a \times x^{c-a} + x^a \times x^{b-a}} \\ &= \frac{x^b}{x^b + x^{a-b+b} + x^{b+c-b}} + \frac{x^c}{x^c + x^{c+b-c} + x^{c+a-c}} + \frac{x^a}{x^a + x^{a+c-a} + x^{a+b-a}} \\ &= \frac{x^b}{x^b + x^{a+x^c}} + \frac{x^c}{x^c + x^{b+x^a}} + \frac{x^a}{x^a + x^{c+x^b}} = \frac{x^{b+x^c+x^a}}{x^{b+x^c+x^a}} = 1 \end{aligned}$$

3. यदि $p = x^a, q = x^b$ र $r = x^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $p^{b-c} \times q^{c-a} \times r^{a-b} = 1$

समाधान

यहाँ, बायाँ पक्ष $= p^{b-c} \times q^{c-a} \times r^{a-b}$ (p, q र r को मान राख्दा)

$$= (x^a)^{b-c} \times (x^b)^{c-a} \times (x^c)^{a-b}$$

$$= x^{ab-ac} \times x^{bc-ba} \times x^{ac-bc} \quad [(x^m)^n = x^{mn} \text{ भएकाले}]$$

$$= x^{ab-ac+bc-ab+ac-bc}$$

$$= x^0 = 1$$

$$= \text{दायाँ पक्ष}$$

अभ्यास 10.1

1. मान पत्ता लगाउनुहोस् :

$$(क) \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} \times \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}} \quad (ख) \left(\frac{5^2}{5^3}\right)^4 \times \left(\frac{5^3}{5^4}\right)^2 \times \left(\frac{5^4}{5^2}\right)^3$$

2. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{x^{a-b} \cdot y^{c-b}}{x^{2b-a} \cdot y^c} \quad (ख) \frac{a^{-4} b^{-5} c^{-6}}{ab^{-2} c^3} \quad (ग) \frac{2^{n+1} + 2^n}{3 \times 2^{n+2} - 5 \times 2^n} \quad (घ) \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^{n+2} - 3^{n+1}}$$

3. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2} \quad (ख) \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$$

$$(ग) \left(\frac{1}{x^{a-b}}\right)^{\frac{1}{a-c}} \times \left(\frac{1}{x^{b-c}}\right)^{\frac{1}{b-a}} \times \left(\frac{1}{x^{c-a}}\right)^{\frac{1}{c-b}} \quad (घ) \frac{(x^2 - \frac{1}{y^2})^p \times (x - \frac{1}{y})^{q-p}}{(y^2 - \frac{1}{x^2})^q \times (y + \frac{1}{x})^{p-q}}$$

4. यदि $a + b + c = 0$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{1}{1+x^a+x^{-b}} + \frac{1}{1+x^b+x^{-c}} + \frac{1}{1+x^c+x^{-a}} = 1$$

5. यदि $abc = 1$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1}{1+a+b^{-1}} + \frac{1}{1+b+c^{-1}} + \frac{1}{1+c+a^{-1}} = 1$

6. यदि $a = x^{q+r} \cdot y^p$, $b = x^{r+p} \cdot y^q$ र $c = x^{p+q} \cdot y^r$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :
 $a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = 1$
7. यदि $2abc = 1$ र $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :
 $x^{a^2b^{-1}c^{-1}} \cdot x^{a^{-1}b^2c^{-1}} \cdot x^{a^{-1}b^{-1}c^2} = x^2$
8. प्रश्न 1, 2 र 3 मा दिइए जस्तै प्रत्येकका अन्य 5 ओटा प्रश्नहरू निर्माण गरी ती प्रश्नहरूको समाधान कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

10.2 घाताङ्क युक्त समीकरण (Exponential Equation)

निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

$2^x = 32$ मा x को मान कति हुँदा यो समीकरण सत्य हुन्छ होला ?

$x = 1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, -3$, लाई 2^x मा प्रतिस्थापन गर्दा के कस्ता सङ्ख्याहरू प्राप्त हुन्छन् ?

$4^{x+1} = 64$ मा x को मान कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ होला ?

के $a^2 = 4$ घाताङ्क युक्त समीकरण हो ? हो भने किन र होइन भने किन ?

के $a^x = 2^x$ मा $a=2$ भए घाताङ्क युक्त समीकरण हल भएको मानिन्छ होला ?

घाताङ्क सम्बन्धी निम्न लिखित कुराहरू हामीले कक्षा ९ मा अध्ययन गरिसकेका छौं :

1. $a^x = A$ मा x को मान कति हुँदा समीकरण सन्तुलन हुन्छ भनी पत्ता लगाउनु नै यस स्वरूपको समीकरणको हल गर्नु हो, जहाँ A एक अचर राशी हो ।
2. समीकरणको दुवैतिरका आधारहरू बराबर भएमा घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनुपर्छ, जस्तै : $3^x = 3^4$ मा $x = 4$ हुन्छ ।
3. बराबर चिह्नका एकापट्टि रहेका दुई पदीय अभिव्यञ्जकलाई सरल गरी एउटै आधार बनाउन सकिन्छ ।

जस्तै : $3^{x+1} + 3^x = 12$ मा $3^x \times 3 + 3^x = 12$

अथवा, $3^x(3 + 1) = 12$

अथवा, $3^x = 3$

अथवा, $x = 1$

अब हामी वर्ग समीकरणका रूपमा आउने घाताङ्क युक्त समीकरणका बारेमा अध्ययन गर्ने छौं । यी समीकरणहरूले वर्ग समीकरणका गुणहरूलाई सन्तुष्ट गर्छन् । तल दिएका उदाहरण अध्ययन गरौं :

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् : $9^x - 2 \times 3^x - 3 = 0$

समाधान

$$9^x - 2 \times 3^x - 3 = 0$$

अथवा, $(3^x)^2 - 2 \times 3^x - 3 = 0$

अथवा, $(3^x)^2 - 3 \times 3^x + 3^x - 3 = 0$

अथवा, $3^x(3^x - 3) + 1(3^x - 3) = 0$

अथवा, $(3^x - 3)(3^x + 1) = 0$

अथवा, $3^x - 3 = 0$ वा $3^x + 1 = 0$

अथवा, $3^x = 3$ वा $3^x = -1$ (-1 लाई 3 को घातमा लेख्न सकिँदैन)

अथवा, $x = 1$

$x = 1$ लाई समीकरण $9^x - 2 \times 3^x - 3 = 0$ मा प्रतिस्थापन गर्दा $9^1 - 2 \times 3^1 - 3 = 0$

अथवा $0 = 0$

$\therefore x = 1$

उदाहरण 2

हल गर्नुहोस् : $2^x + \frac{1}{2^x} = 2\frac{1}{2}$

समाधान

यहाँ $2^x + \frac{1}{2^x} = 2\frac{1}{2}$

मानौं, $2^x = a$

त्यसैले, $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$

अथवा $\frac{a^2 + 1}{a} = \frac{5}{2}$

अथवा, $2a^2 + 2 = 5a$

अथवा, $2a^2 - 5a + 2 = 0$

अथवा, $2a^2 - 4a - a + 2 = 0$

$$\text{अथवा, } 2a(a - 2) - 1(a - 2) = 0$$

$$\text{अथवा, } (a - 2)(2a - 1) = 0$$

$$\text{अथवा, } a - 2 = 0 \text{ वा } 2a - 1 = 0$$

$$\text{अथवा, } a = 2 \text{ वा } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{अथवा, } 2^x = 2^1 \text{ वा } 2^x = 2^{-1}$$

$$\text{अथवा, } x = 1 \text{ वा } x = -1$$

$x = \pm 1$ लाई $2^x + \frac{1}{2^x} = 2\frac{1}{2}$ मा प्रतिस्थापन गर्दा बायाँ पक्ष र दायाँ पक्ष बराबर आउँछन् ?
प्रतिस्थापन गरी हेर्नुहोला ।

$$\therefore x = \pm 1$$

अभ्यास 10.2

हल गर्नुहोस् :

1. (क) $3^{2y} - 4 \times 3^y + 3 = 0$

(ख) $4^x - 6 \times 2^{x-1} + 2 = 0$

(ग) $5^{2x} - 6 \times 5^{x+1} + 125 = 0$

(घ) $3^{2x} - 4 \times 3^x + 3 = 0$

(ङ) $4^y - 24 \times 2^y = -128$

2. (क) $3^x + \frac{1}{3^x} = 9\frac{1}{9}$

(ख) $5^y + \frac{1}{5^y} - 25\frac{1}{25} = 0$

(ग) $4^{x-1} + 4^{-x} = 1$

(घ) $5^{x+1} + 5^{2-x} = 126$

3. $4 \times 3^{x+1} - 9^x = 27$ लाई हल गर्दा आउने x का मानहरूले $3^{2x} - 4 \times 3^{x+1} + \frac{81}{3} = 0$ लाई पनि सन्तुष्ट गर्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

4. दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित घाताङ्क र घाताङ्क युक्त समीकरणको प्रयोग हुने कुनै तिन ओटा उदाहरणहरूको खोजी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

11.0 पुनरावलोकन (Review)

- समान हर भएका कुनै 2 ओटा बीजीय भिन्नहरू लेख्नुहोस् ।
- $\frac{4}{x-5}$ कुन अवस्थामा परिभाषित हुँदैन, लेख्नुहोस् ।
- $xy - y^2$ र $x^3 - y^3$ को म.स. र ल.स. कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

बीजीय भिन्नहरूको सरलीकरण गर्न म.स. र ल.स. को ज्ञान हुनु आवश्यक छ । जुन हामीले अगिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरी सकेका छौं ।

11.1 बीजीय भिन्न प्रयोग भएका सरलीकरण (Simplification of Rational Algebraic Fractions)

यहाँ, हामी बढीमा तिन पद भएका भिन्नहरूको सरलीकरण सम्बन्धी अध्ययन गर्ने छौं ।

तल दिइएका भिन्नहरूलाई समान हर बनाई समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{x-y}, \frac{1}{x+y}$

(ख) $\frac{a-b}{ab}, \frac{b-c}{bc}, \frac{c-a}{ca}$

(ग) $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a^2-b^2}$

(घ) $\frac{1}{(a-b)}, \frac{1}{(a+b)}, \frac{1}{(c-a)}$

भिन्नहरूलाई सरल गर्दा भिन्नको अंश र हरमा भएका साझा गुणन खण्डहरू समावेश नगरी भिन्नलाई लघुत्तम पदका रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । तल दिइएका उदाहरणहरूको अध्ययन गर्नुहोस् :

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् : $\frac{1}{(a-b)} + \frac{1}{(b-c)} + \frac{1}{(c-a)}$

समाधान

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

$$= \frac{b-c+a-b}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{c-a} \text{ (पहिलो र दोस्रो पदका हरहरूको ल.स. लिँदा)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(c-a)}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)} \\
&= \frac{-(c-a)^2 + (a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{-(c^2 - 2ac + a^2) + (ab - ac - b^2 + bc)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{ab + bc + ac - a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}$$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् : $\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}$

समाधान

$$\begin{aligned}
&\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca} \\
&= \frac{c(a-b) + a(b-c)}{abc} + \frac{c-a}{ca} \\
&= \frac{ac-bc+ab-ac}{abc} + \frac{c-a}{ca} \\
&= \frac{ab-bc}{abc} + \frac{c-a}{ca} \\
&= \frac{ab-bc+b(c-a)}{abc} \\
&= \frac{ab-bc+bc-ab}{abc} \\
&= \frac{0}{abc} \\
&= 0
\end{aligned}$$

उदाहरण 3

सरल गर्नुहोस् : $\frac{x^2-4a^2}{x^2-2ax} - \frac{x^2+2ax-8a^2}{x^2-4a^2}$

समाधान

$$\begin{aligned}& \frac{x^2-4a^2}{x^2-2ax} - \frac{x^2+2ax-8a^2}{x^2-4a^2} \\&= \frac{(x-2a)(x+2a)}{x(x-2a)} - \frac{x^2+4ax-2ax-8a^2}{(x-2a)(x+2a)} \\&= \frac{x+2a}{x} - \frac{x(x+4a)-2a(x+4a)}{(x-2a)(x+2a)} \\&= \frac{x+2a}{x} - \frac{(x+4a)(x-2a)}{(x-2a)(x+2a)} \\&= \frac{x+2a}{x} - \frac{(x+4a)}{(x+2a)} \\&= \frac{(x+2a)^2 - (x+4a)x}{x(x+2a)} \\&= \frac{x^2+4xa+4a^2-x^2-4ax}{x(x+2a)} \\&= \frac{4a^2}{x(x+2a)}\end{aligned}$$

उदाहरण 4

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1+x^2)}$$

समाधान

$$\begin{aligned}& \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1+x^2)} \\&= \frac{1-x+1+x}{4(1+x)(1-x)} + \frac{1}{2(1+x^2)} \\&= \frac{2}{4(1-x^2)} + \frac{1}{2(1+x^2)} \\&= \frac{1}{2(1-x^2)} + \frac{1}{2(1+x^2)} \\&= \frac{1+x^2+1-x^2}{2(1-x^2)(1+x^2)} \\&= \frac{2}{2(1-x^4)} = \frac{1}{1-x^4}\end{aligned}$$

उदाहरण 5

सरल गर्नुहोस् : $\frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{2x}{1+x^2+x^4}$

समाधान

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{2x}{1+x^2+x^4} \\ &= \frac{1+x+x^2-(1-x+x^2)}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)} - \frac{2x}{1+x^2+x^4} \\ &= \frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{(1+x^2)^2-x^2} - \frac{2x}{1+x^2+x^4} \\ &= \frac{2x}{1+x^4+2x^2-x^2} - \frac{2x}{1+x^2+x^4} \\ &= \frac{2x}{1+x^2+x^4} - \frac{2x}{1+x^2+x^4} \\ &= \frac{2x-2x}{1+x^2+x^4} \\ &= \frac{0}{1+x^2+x^4} = 0 \end{aligned}$$

अभ्यास 11

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3}$

(ख) $\frac{3}{a-6} + \frac{1}{a+2}$

(ग) $\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}$

(घ) $\frac{1}{2x-3y} - \frac{x+y}{4x^2-9y^2}$

(ङ) $\frac{3}{(x^2-4)} + \frac{1}{(x-2)^2}$

(च) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y} + \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2} - \frac{2xy}{2x^2+8xy}$

(ख) $\frac{a^3+b^3}{(a^2-ab+b^2)} - \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

(ग) $\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} - \frac{2a-b}{2a+b}$

(घ) $\frac{x^2}{x-x^3} - \frac{x}{1+x^2}$

3. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} + \frac{2x}{xy-y^2} \quad (ख) \frac{5}{1+2y} - \frac{3y}{1-2y} - \frac{4-13y}{1-4y^2}$$

$$(ग) \frac{2a}{2a+3b} + \frac{3b}{2a-3b} + \frac{8b^2}{4a^2-9b^2} \quad (घ) \frac{1}{2(a-b)} - \frac{1}{2(a+b)} - \frac{b}{a^2-b^2}$$

4. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-x-2} - \frac{4}{x^2-1}$$

$$(ख) \frac{a}{a^2+5a+6} + \frac{15}{a^2+9a+14} - \frac{12}{a^2+10a+21}$$

$$(ग) \frac{x}{(x+3)(x-1)} + \frac{x-1}{(x+3)(2-x)} + \frac{(x-3)}{(x-2)(x-1)}$$

$$(घ) \frac{1}{a^2-5a+6} - \frac{2}{a^2-4a+3} + \frac{3}{a^2-3a+2}$$

$$(ङ) \frac{1}{4(1-\sqrt{y})} + \frac{1}{4(1+\sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{y}}{4(1-y)}$$

5. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$(ख) \frac{x+y}{(p-q)(p-r)} + \frac{x+y}{(q-r)(q-p)} + \frac{x+y}{(r-p)(r-q)}$$

$$(ग) \frac{ax^2+b}{2x-1} + \frac{4ax^3}{1-4x^2} + \frac{ax^2-b}{2x+1}$$

6. $\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)}$ परिभाषित कुन अवस्थामा हुन्छ, लेख्नुहोस् । उक्त भिन्नको सरलीकृत रूप के हुन्छ, प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7. $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4x^3}{x^4+y^4} = \frac{8x^7}{x^8-y^8}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

8. बीजीय भिन्नहरूको सरलीकरण गर्दा खण्डीकरण, म.स. र ल.स. को के भूमिका हुन्छ ? छोटकरीमा लेखी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

9. बीजीय भिन्नसँग सम्बन्धित एक एक ओटा प्रश्नहरू कक्षा 6, 7, 8 र 9 को पाठ्य पुस्तकबाट सङ्कलन गरी समाधानसहित कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

12.0 पुनरावलोकन (Review)

निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गरी समाधान खोज्नुहोस् :

- $x + y = 5$ र $x - y = 1$ ले कुन बिन्दुमा एक आपसमा भेट्छन् होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- सम्भनाको हालको उमेर 20 वर्ष छ । उनको 4 वर्ष पहिलेको उमेर र 2 वर्षपछिको उमेर जोडदा कति हुन्छ ?
- वर्ग समीकरण $x^2 - 4 = 0$ का मूलहरू के के हुन् ?
- दुई ओटा युगपत् रेखीय समीकरणहरूलाई कुन कुन विधिद्वारा हल गर्न सकिन्छ ?
- $px^2 + qx + r = 0$ एक वर्ग समीकरण हुन अनिवार्य सर्त के हो ?

12.1 युगपत् रेखीय समीकरण सम्बन्धी शाब्दिक समस्या (Verbal problems leading to simultaneous equation)

दुई चलयुक्त समीकरणको प्रयोग गरी व्यावहारिक समस्याहरू हल गर्न सकिन्छ । दिइएको वाक्यलाई गणितीय स्वरूपका रूपमा समीकरण बनाई विभिन्न तरिकाले हल गर्न सकिन्छ । केही समस्याहरूको समाधान तल उदाहरणहरूमा दिइएको छ । यी समस्याहरू हल गर्दा समस्या समाधानका निम्न लिखित चरणहरू अपनाउनुपर्ने हुन्छ :

1. दिइएको प्रश्नमा अज्ञात राशिलाई x, y, z आदिले जनाउने
2. साधारण वाक्यलाई समीकरणमा बदल्ने
3. प्राप्त समीकरणलाई हटाउने विधि, प्रतिस्थापन विधि आदिका माध्यमबाट हल गर्ने

उदाहरण 1

यदि एउटा त्रिभुजमा भएका दुई ओटा न्यूनकोणहरूको योगफल 75° र फरक 15° छ भने ती कोणहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ ती दुई ओटा न्यूनकोणहरू x र y मानौं

प्रश्नअनुसार : $x + y = 75^\circ$ (i)

$x - y = 15^\circ$ (ii)

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$$x + y = 75^\circ$$

$$x - y = 15^\circ$$

$$2x = 90^\circ$$

$$\text{अथवा, } x = 45^\circ$$

x को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$45^\circ + y = 75^\circ$$

$$\text{अथवा, } y = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

\therefore उक्त कोणहरू 45° र 30° रहेछन् ।

उदाहरण 2

एउटा आयताकार पोखरीको परिमिति 100 मिटर छ, यदि चौडाइभन्दा लम्बाइ 10 मिटरले बढी छ भने त्यस पोखरीको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, पोखरीको लम्बाइ ' l ' मिटर र चौडाइ ' b ' मिटर छ ।

$$\text{प्रश्नअनुसार } 2l + 2b = 100$$

$$\text{अथवा, } l + b = 50 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{फेरि, दोस्रो सर्तअनुसार } l - b = 10 \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) र (ii) लाई जोड्दा

$$2l = 60$$

$$\text{अथवा } l = 30 \text{ मिटर}$$

l को मान समीकरण (ii) मा राख्दा

$$30 - b = 10$$

$$\text{अथवा, } b = 20 \text{ मिटर}$$

$$\text{अतः क्षेत्रफल, } l \times b = 30 \times 20 = 600 \text{ वर्ग मिटर}$$



उदाहरण 3

12 कि.ग्रा. आलु र 10 कि.ग्रा. प्याजको मूल्य रु. 640 पर्छ । त्यसै गरी 2 कि.ग्रा. आलु र 3 कि.ग्रा. प्याजको मूल्य रु. 160 पर्छ । 1 कि.ग्रा. आलु र प्याजको छुट्टा छुट्टै मूल्य कति पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ 1 कि.ग्रा. आलुको मूल्य रु. x र प्याजको मूल्य रु. y मानौं

प्रश्नअनुसार $12x + 10y = 640$ (i)

$2x + 3y = 160$ (ii)

समीकरण (ii) लाई 6 ले गुणन गरी समीकरण (i) बाट घटाउँदा

$$12x + 10y = 640 \text{ (i)}$$

$$\begin{array}{r} 12x + 18y = 960 \text{ (ii)} \\ (-) \quad (-) \quad (-) \end{array}$$

$$-8y = -320$$

$$\text{अथवा, } y = \frac{320}{8} = 40$$

फेरि y को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$12x + 10y = 640$$

$$\text{अथवा, } 12x + 10 \times 40 = 640$$

$$\text{अथवा, } 12x + 400 = 640$$

$$\text{अथवा, } 12x = 640 - 400$$

$$\text{अथवा, } 12x = 240$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{240}{12}$$

$$\text{अथवा, } x = 20$$

त्यसैले 1 कि.ग्रा. आलुको मूल्य रु. 20 र 1 कि.ग्रा. प्याजको मूल्य रु. 40 पर्छ ।

उदाहरण 4

15 वर्षअघि बाबुको उमेर छोरीको उमेरभन्दा चार गुणा थियो । यदि अबको 5 वर्षपछि बाबुको उमेर छोरीको उमेरको दुई गुणा हुने छ भने तिनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, बाबुको हालको उमेर ' x ' वर्ष र छोरीको हालको उमेर ' y ' वर्ष छ ।

प्रश्नानुसार : 15 वर्षअघि

$$(x - 15) = 4(y - 15)$$

अथवा, $x = 4y - 60 + 15$

अथवा, $x = 4y - 45$ (i)

फेरि, 5 वर्षपछि :

$$x + 5 = 2(y + 5)$$

अथवा, $x = 2y + 10 - 5$

अथवा, $x = 2y + 5$ (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$4y - 45 = 2y + 5$$

अथवा, $4y - 2y = 5 + 45$

अथवा, $2y = 50$

अथवा, $y = \frac{50}{2}$

अथवा, $y = 25$

फेरि समीकरण (i) बाट

$$\begin{aligned}x &= 4y - 45 \\&= 4 \times 25 - 45 \\&= 100 - 45 \\&= 55\end{aligned}$$

त्यसैले बाबुको हालको उमेर 55 वर्ष र छोरीको हालको उमेर 25 वर्ष छ ।

उदाहरण 5

एउटा भिन्नको अंशलाई 4 ले गुणन गरी हरबाट 2 घटाउँदा नतिजा 4 हुन्छ । यदि सो भिन्नको अंशमा 10 जोडी हरको दोब्बरबाट 2 घटाइयो भने नतिजा $\frac{5}{4}$ हुन्छ भने सो भिन्न पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, दिइएको भिन्न $\frac{x}{y}$ छ ।

प्रश्नानुसार : $\frac{4x}{y-2} = 4$

अथवा, $4x = 4y - 8$

अथवा, $x = y - 2$ (i)

फेरि : $\frac{x+10}{2y-2} = \frac{5}{4}$

अथवा, $4(x + 10) = 5(2y - 2)$ (ii)

समीकरण (i) बाट समीकरण (ii) मा $x = y - 2$ राख्दा

$$4(y - 2 + 10) = 10y - 10$$

अथवा, $4y + 32 = 10y - 10$

अथवा, $4y - 10y = -10 - 32$

अथवा, $-6y = -42$

अथवा, $y = \frac{-42}{-6}$

अथवा, $y = 7$

फेरि, समीकरण (i) बाट

$$x = 7 - 2 = 5$$

∴ दिइएको भिन्न $= \frac{5}{7}$ हुन्छ ।

उदाहरण 6

दुई अङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्यामा अङ्कहरूको योगफल 8 छ, यदि सो सङ्ख्याबाट 36 घटाइयो भने अङ्कहरूको स्थान बदलिन्छ । त्यो सङ्ख्या कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, त्यो दुई अङ्कले बनेको सङ्ख्या $10x + y$ हो ।

जहाँ x र y क्रमशः दसको स्थान र एकको स्थानमा रहेका अङ्कहरू हुन् ।

प्रश्नको पहिलो सर्तअनुसार $x + y = 8$

अथवा, $x = 8 - y$ (i)

फेरि, दोस्रो सर्तअनुसार $10x + y - 36 = 10y + x$

अथवा, $10x - x = 10y - y + 36$

अथवा, $9x = 9y + 36$

अथवा, $x = y + 4$ (i)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$8 - y = y + 4$$

अथवा, $8 - 4 = 2y$

अथवा, $4 = 2y$

अथवा, $2 = y$

फेरि, समीकरण (i) बाट

$$x = 8 - 2 = 6$$

त्यसैले उक्त सङ्ख्या $= 10x + y = 10 \times 6 + 2 = 60 + 2 = 62$ हुन्छ ।

अभ्यास 12.1

1. (a) दुई ओटा धनात्मक सङ्ख्याको योगफल 60 र अन्तर 20 भए ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
(b) यदि एउटा सङ्ख्या अर्को सङ्ख्याको तिन गुणा छ र तिनीहरूको योगफल 24 छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. (a) एउटा आयताकार चउरको परिमिति 54 मिटर छ । यसको आकार घटाउँदा नयाँ लम्बाइ र चौडाइ पहिलेको लम्बाइ र चौडाइको $\frac{3}{5}$ र $\frac{3}{4}$ गुणासँग बराबर हुन्छ । यदि आयताकार चउरको नयाँ परिमिति 36 मिटर छ भने चौरको लम्बाइ र चौडाइ सुरुमा कति थियो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(b) एउटा आयताकार खेतको परिमिति 240 मिटर छ । चौडाइभन्दा लम्बाइ 20 मिटरले बढी छ भने त्यस खेतको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. (a) यदि 3 ओटा कलम र 5 ओटा कापीको मूल्य रु. 430 पर्छ । त्यस्तै 2 ओटा कलम र 1 ओटा कापीको मूल्य रु. 170 पर्छ । एउटा कलम र एउटा कापीको छुट्टा छुट्टै मूल्य कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(b) यदि 4 ओटा किताब र 2 ओटा कापीको मूल्य रु. 440 पर्छ । एउटा किताब र 3 ओटा कापीको मूल्य रु. 240 पर्छ । एउटा किताब र एउटा कापीको छुट्टा छुट्टै मूल्य कति पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. (a) यदि एउटा भिन्नको अंशलाई 4 ले गुणन गरी हरबाट 2 घटाइयो भने नतिजा 4 हुन्छ । उक्त भिन्नको हर र अंश प्रत्येकबाट 3 घटाउँदा भिन्नको मान $\frac{1}{2}$ हुन्छ भने उक्त भिन्न कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (b) एउटा भिन्नको अंशलाई 3 ले गुणन गरी हरबाट 2 घटाइयो भने नतिजा 3 हुन्छ। यदि सो भिन्नको अंशमा 4 जोडी हरलाई दोब्बर गरी 2 घटाउँदा नतिजा 1 हुन्छ भने उक्त भिन्न पत्ता लगाउनुहोस्।
5. (a) यदि तिन वर्षअघि एक जना बाबु र उनको छोराको उमेरको योगफल 48 वर्ष थियो। अबको तिन वर्षपछि उसको बाबु र छोराको उमेरको अनुपात 3:1 हुन्छ। हालको बाबु र छोराको उमेर कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस्।
- (b) दुई जना विद्यार्थीहरूको हाल उमेरको अनुपात 5:7 छ। यदि आठ वर्षअघि उनीहरूको उमेरको अनुपात 7:13 थियो भने हालको उमेर कति कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।
6. (a) दुई अड्कले बनेको एउटा सङ्ख्यामा अड्कहरूको योगफल 8 छ। यदि सो सङ्ख्यामा 18 घटाइयो भने अड्कहरूको स्थान बदलिन्छ। उक्त सङ्ख्या कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।
- (b) दुई अड्कको एउटा कुनै सङ्ख्या त्यसका अड्कहरूको योगफलको 6 गुणा छ। यदि त्यो सङ्ख्याबाट 9 घटाइयो भने त्यसका अड्कहरूको स्थान बदलिन्छ। त्यो सङ्ख्या कति हो, पत्ता लगाउनुहोस्।
7. बजारमा भएका कुनै दुई ओटा उपभोग्य समानहरूको एकाइ मूल्य सोध्नुहोस्। ती एकाइ मूल्यका आधारमा युगपत् रेखीय समीकरणका 2 ओटा शाब्दिक समस्याहरू बनाई हल गर्नुहोस्।

12.2 वर्ग समीकरणका शाब्दिक समस्याहरू (Verbal Problems on Quadratic Equation)

दिइएका शाब्दिक समस्याहरूलाई चर राशी प्रयोगबाट गणितीय वाक्यमा परिणत गरी खण्डीकरण अथवा $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $(ax^2 + bx + c = 0)$ $a \neq 0$ सूत्र प्रयोग गरी वर्ग समीकरणलाई हल गर्न सकिन्छ। वर्ग समीकरण सम्बन्धी शाब्दिक समस्याहरू समाधानका सम्बन्धमा तल दिइएका उदाहरणहरू अध्ययन गर्नुहोस् :

उदाहरण 1

यदि एउटा सङ्ख्याको वर्गबाट 3 घटाउँदा 61 बाँकी हुन्छ भने उक्त सङ्ख्या कति होला, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

मानौं, उक्त सङ्ख्या x छ।

प्रश्नानुसार $x^2 - 3 = 61$

अथवा, $x^2 = 64$

अथवा, $x^2 - 64 = 0$

अथवा, $(x - 8)(x + 8) = 0$

अथवा, $x - 8 = 0$ वा $x + 8 = 0$

अथवा, $x = 8, x = -8$

∴ चाहिएको सङ्ख्या ± 8 हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि कुनै दुई ओटा क्रमागत धनात्मक सङ्ख्याहरूको गुणन फल 600 छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, ती दुई ओटा क्रमागत सङ्ख्याहरू x र $x + 1$ छन् ।

प्रश्नानुसार : $x(x+1) = 600$

अथवा, $x^2 + x = 600$

अथवा, $x^2 + x - 600 = 0$

अथवा, $x^2 + 25x - 24x - 600 = 0$

अथवा, $x(x + 25) - 24(x + 25) = 0$

अथवा, $(x - 24)(x + 25) = 0$

अथवा, $x - 24 = 0, x + 25 = 0$

अथवा, $x = 24, -25$

धनात्मक सङ्ख्याहरू मात्र लिँदा

$x = 24$ र $x + 1 = 25$ हुन्छ ।

त्यसैले ती सङ्ख्याहरू 24 र 25 हुन् ।

उदाहरण 3

2 अङ्कको एउटा सङ्ख्या त्यसमा भएका अङ्कहरूको योगफलको 5 गुणा छ । यदि अङ्कहरूको गुणन फल 20 भए उक्त सङ्ख्या कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, दुई अङ्कको सङ्ख्या $10x + y$ छ । जहाँ x र y क्रमशः दस र एकको स्थानमा रहेका अङ्कहरू हुन् ।

$$\text{यहाँ, } 10x + y = 5(x + y)$$

$$\text{अथवा, } 10x + y = 5x + 5y$$

$$\text{अथवा, } 10x - 5x = 5y - y$$

$$\text{अथवा, } 5x = 4y$$

$$\text{अथवा } x = \frac{4}{5}y \dots\dots (i)$$

$$\text{फेरि } xy = 20 \dots\dots (ii)$$

$$\text{अथवा, } \frac{4}{5}y \times y = 20 \quad [\text{समीकरण (i) बाट}]$$

$$\text{अथवा, } 4y^2 = 100$$

$$\text{अथवा, } y^2 = 25$$

$$\text{अथवा, } y^2 - 25 = 0$$

$$\text{अथवा, } (y - 5)(y + 5) = 0$$

$$\text{अथवा, } y = 5 \text{ वा } y = -5$$

यहाँ धनात्मक मान मात्र लिन सकिन्छ । त्यसैले, $y = 5$

$$\text{फेरि, समीकरण (i) बाट, } x = \frac{4}{5} \times 5 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{अतः चाहिएको सङ्ख्या} &= 10x + y \\ &= 10 \times 4 + 5 \\ &= 40 + 5 = 45 \end{aligned}$$

उदाहरण 4

यदि हाल दुई जना दाजुभाइको उमेर क्रमशः 10 वर्ष र 12 वर्ष छ । कति वर्षपछि तिनीहरूको उमेरको गुणन फल 360 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, x वर्षपछि तिनीहरूको उमेरको गुणन फल 360 हुन्छ ।

$$\text{त्यसैले } (10 + x)(12 + x) = 360$$

$$\text{अथवा, } 120 + 12x + 10x + x^2 = 360$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 22x + 120 - 360 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 22x - 240 = 0$$

अथवा, $x^2 + 30x - 8x - 240 = 0$

अथवा, $x(x + 30) - 8(x + 30) = 0$

अथवा, $(x + 30)(x - 8) = 0$

अथवा, $x + 30 = 0$ वा $x - 8 = 0$

अथवा, $x = -30, 8$

उमेर धनात्मक मात्र हुने हुनाले $x = 8$ मात्र लिन सकिन्छ ।

अतः 8 वर्षपछि दुवैको उमेरको गुणन फल 360 हुन्छ ।

उदाहरण 5

एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण 5 मिटर छ । यदि बाँकी दुई भुजाहरूको नापको फरक 1 मिटर भए प्रत्येक भुजाको लम्बाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं $\angle ABC = 90^\circ$

$AC = 5$ मिटर, $AB = x$ र $BC = x + 1$

पाइथागोरस साध्यअनुसार

$$5^2 = x^2 + (x + 1)^2$$

अथवा, $25 = x^2 + x^2 + 2x + 1$

अथवा, $2x^2 + 2x - 24 = 0$

अथवा, $x^2 + x - 12 = 0$

अथवा, $x^2 + 4x - 3x - 12 = 0$

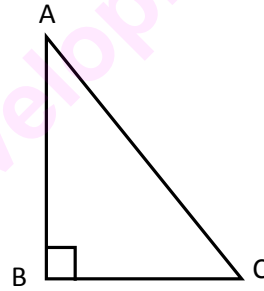
अथवा, $x(x + 4) - 3(x + 4) = 0$

अथवा, $x + 4 = 0$ वा $x - 3 = 0$

अथवा, $x = -4, x = 3$

x को मान 3 लिँदा $x + 1 = 3 + 1 = 4$ हुन्छ ।

त्यसैले बाँकी भुजाहरूको लम्बाइ क्रमशः 3 मि. र 4 मि. हुन्छ ।

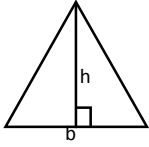
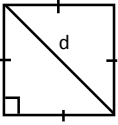
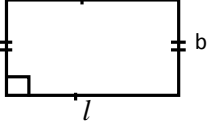
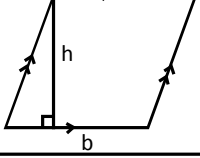
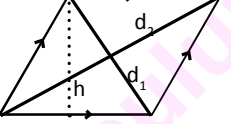
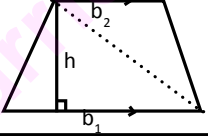
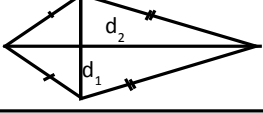
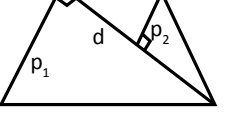


अभ्यास 12.2

1. (a) यदि एउटा सङ्ख्याको वर्गबाट 4 घटाउँदा 21 बाँकी रहन्छ भने उक्त सङ्ख्या कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(b) यदि एउटा सङ्ख्याको वर्गमा 18 जोड्दा 214 हुन्छ भने सो सङ्ख्या कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(c) यदि एउटा सङ्ख्या र त्यसैको व्युत्क्रमको योगफल $\frac{37}{6}$ छ भने उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. (a) कुनै दुई ओटा क्रमागत जोर सङ्ख्याहरूको गुणनफल 1056 हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
(b) दुई ओटा क्रमागत सङ्ख्याहरूको वर्गको योगफल 340 हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. (a) दुई अङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्यामा एकको स्थानमा पर्ने अङ्क दसको स्थानको अङ्क भन्दा 4 ले बढी छ । यदि दुई अङ्कहरूको गुणन फल 21 छ भने सो सङ्ख्या कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(b) अङ्कहरूको योगफलको चार गुणा भएको दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्या छ, यदि अङ्कहरूको गुणन फल 18 भए त्यो सङ्ख्या कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. (a) दुई जना दाजु र भाइको हालको उमेरको योगफल 34 वर्ष र उनीहरूको उमेरको गुणन फल 288 छ भने तिनीहरूको हालको उमेर कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(b) बाबु र छोरोको हालको उमेर क्रमशः 42 वर्ष र 16 वर्ष छ । कति वर्षअघि तिनीहरूको उमेरको गुणन फल 272 थियो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(c) दुई जना साथीहरूको अहिलेको उमेर 32 वर्ष र 35 वर्ष छ । कति वर्षपछि तिनीहरूको उमेर को गुणन फल 1404 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. (a) एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण 13 मिटर छ । यदि बाँकी दुई भुजाहरूको नापको फरक 7 मिटर भए बाँकी भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
(b) एउटा आयताकार जग्गाको क्षेत्रफल 88 वर्ग मिटर र परिमिति 38 मिटर छ । उक्त जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. आफू सुत्ने कोठाको परिमिति र क्षेत्रफल अनुमान गर्नुहोस् । क्षेत्रफल र परिमिति दिएको आधारमा कोठाको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् । आफूले अनुमान गरेकोभन्दा वास्तविक लम्बाइ र चौडाइ के कतिले फरक भयो, तुलना गर्नुहोस् । .

13.0 पुनरावलोकन (Review)

तल दिइएका चित्रहरूका बारेमा समूहमा छलफल गरी तालिका पुरा गर्नुहोस् :

क्र.स.	चित्रहरू	चित्रहरूको नाम	क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्रहरू
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			

13.1 त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle and Quadrilateral)

साध्य 1

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिचमा रहेका समानान्तर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

थाहा दिइएको : एउटै आधार BC र उही समानान्तर

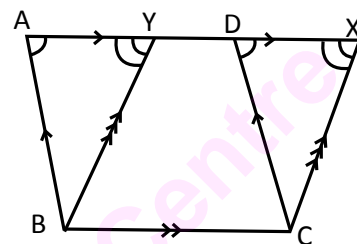
रेखाहरू BC र AX बिचमा समानान्तर

चतुर्भुजहरू ABCD र BCXY छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने :

स.च. ABCD को क्षेत्रफल = स.च. BCXY को क्षेत्रफल

प्रमाण



तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle ABY$ र $\triangle DCX$ मा (i) $AB = CD$ (भु.) (ii) $\angle BAY = \angle CDX$ (को.) (iii) $\angle BYA = \angle CXD$ (को.) 2. $\triangle ABY \cong \triangle DCX$ 3. $\triangle ABY = \triangle DCX$ 4. $\triangle ABY + \text{स.ल.च. BCDY} = \triangle DCX + \text{स.ल.च. BCDY}$ 5. स.च. ABCD = स.च. BCXY	1. (i) स.च. ABCD का विपरीत भुजाहरू भएकाले (ii) $AB \parallel CD$ भएकाले सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् (iii) $BY \parallel CX$ भएकाले सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् 2. भु.को.को. तथ्यअनुसार 3. अनुरूप त्रिभुजका क्षेत्रफलहरू बराबर हुने भएकाले 4. दुवैतर्फ स.ल.च. BCDY जोड्दा बराबरी तथ्यअनुसार 5. सिङ्गो टुक्रे तथ्यअनुसार

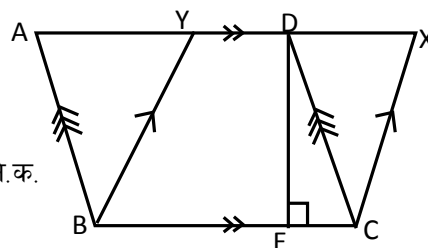
वैकल्पिक तरिका

थाहा दिइएको

स.च. ABCD र स.च. BCXY दुवै एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरू BC र AX बिचमा पर्छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : स.च. ABCD को क्षे.क. = स.च. BCXY को क्षे.क.

रचना : आधार BC मा लम्ब DE खिच्नुहोस् ।



प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. स.च. ABCD को क्षेत्रफल = $BC \times DE$ 2. स.च. BCXY को क्षेत्रफल = $BC \times DE$ 3. स.च. ABCD को क्षेत्रफल = स.च. BCXY को क्षेत्रफल	1. स.च. को क्षेत्रफल आधार र उचाइको गुणन फल हुने भएकाले 2. तथ्य 1 मा जस्तै 3. तथ्य 1 र 2 बाट

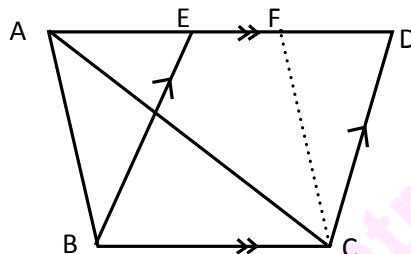
प्रमाणित भयो ।

साध्य 2

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिचमा रहेका त्रिभुज र समानान्तर चतुर्भुजमध्ये त्रिभुजको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलको आधा हुन्छ ।

थाहा दिइएको

एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरूका BC र AD बिचमा रहेका समानान्तर चतुर्भुज BCDE र त्रिभुज ABC छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. BCDE को क्षेत्रफल

रचना : AB सँग समानान्तर हुने FC खिचौं ।

प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. स.च. BCDE को क्षेत्रफल = स.च. ABCF को क्षेत्रफल	1. एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिचमा बनेका स.च.हरू भएकाले
2. त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCF को क्षेत्रफल	2. स.च. ABCF लाई विकर्ण AC ले आधा गर्ने भएकाले
3. $\therefore \Delta ABC$ को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. BCDE को क्षेत्रफल	3. तथ्य (1) र (2) बाट

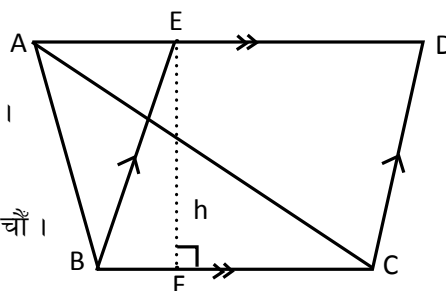
प्रमाणित भयो ।

वैकल्पिक तरिका

थाहा दिइएको : एउटै आधार BC तथा उही समानान्तर रेखाहरू BC र AD बिचमा त्रिभुज ABC र स.च. BCDE छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : ΔABC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. BCDE

रचना : आधार BC सँग लम्ब हुने गरी EF उचाइ (h) खिचौं ।



प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. स.च. BCDE को क्षेत्रफल = $BC \times h$	1. समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल आधार र उचाइको गुणन फल हुने भएकाले
2. ΔABC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times BC \times h$	2. त्रिभुजको क्षेत्रफल बराबर आधार उचाइको गुणन फलको आधा हुने भएकाले
3. $\therefore \Delta ABC$ को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. BCDE को क्षेत्रफल	3. तथ्य (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

साध्य 3

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूका बिचमा रहेका त्रिभुजहरूका क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिइएको

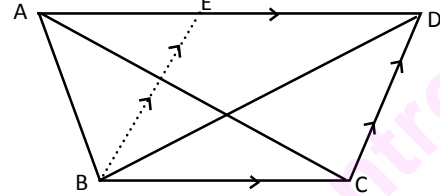
$\triangle ABC$ र $\triangle DCB$ दुवै एउटै आधार BC तथा उही समानान्तर रेखाहरू BC र AD बिचमा रहेका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने

$\triangle ABC$ को क्षेत्रफल = $\triangle DCB$ को क्षेत्रफल

रचना : DC सँग समानान्तर हुने गरी EB खिचौं ।

प्रमाण



तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle DCB$ को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. $BCDE$ को क्षेत्रफल	1. स.च. $BCDE$ को विकर्ण BD भएकाले
2. $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. $BCDE$ को क्षेत्रफल	2. $\triangle ABC$ र स.च. $BCDE$ दुवै एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरू BC र AD बिचमा रहेकाले
3. $\therefore \triangle ABC$ को क्षेत्रफल = $\triangle DCB$ को क्षेत्रफल	3. तथ्य (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

यस साध्यलाई पनि वैकल्पिक तरिकाबाट प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

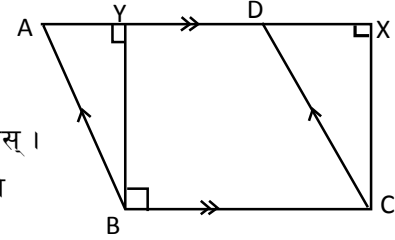
एउटै आधार BC मा बनेका आयत $BCXY$ र

स.च. $ABCD$ को क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

थाहा दिइएको : उही समानान्तर रेखाहरू AX तथा BC र उही आधार BC मा स.च. $ABCD$ र आयत $BCXY$ बनेका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : आयत $BCXY$ को क्षेत्रफल = स.च. $ABCD$ को क्षेत्रफल

प्रमाण

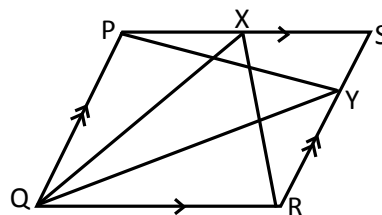


तथ्यहरू	कारणहरू
1. समकोण $\triangle AYB$ र समकोण $\triangle DXC$ मा	1.
(i) $\angle AYB = \angle DXC$ (स.)	(i) आयतका कोणहरू समकोण हुने भएकाले
(ii) $AB = DC$ (क.)	(ii) स.च. $ABCD$ का विपरीत भुजाहरू
(iii) $BY = CX$ (भु.)	(iii) आयतका विपरीत भुजाहरू
2. $\triangle AYB \cong \triangle DXC$	2. स.क.भु. तथ्य अनुसार
3. $\therefore \triangle AYB$ को क्षेत्रफल = $\triangle DXC$ को क्षेत्रफल	3. अनुरूप त्रिभुजका क्षेत्रफलहरू
4. $\triangle AYB +$ स.ल.च. $BCDY = \triangle DXC +$ स.ल.च. $BCDY$	4. दुवैतर्फ उही स.ल.च. $BCDY$ जोड्दा
5. \therefore स.च. $ABCD$ को क्षेत्रफल = आयत $BCXY$ को क्षेत्रफल	5. सिङ्गो दुवै तथ्य अनुसार

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

चित्रमा PQRS एउटा स.च. हो जसका भुजाहरू PS र RS मा बिन्दुहरू क्रमशः X र Y छन्। $\Delta PQY = \Delta QRX$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



समाधान

थाहा दिइएको : स.च. PQRS मा ΔPQY र ΔQRX छन्।

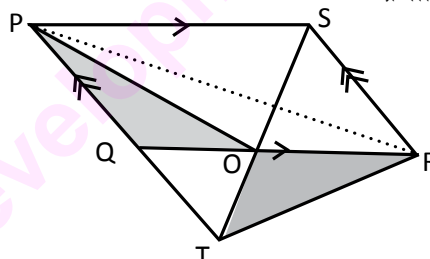
प्रमाणित गर्नुपर्ने : ΔPQY को क्षेत्रफल = ΔQRX को क्षेत्रफल

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\Delta PQY = \frac{1}{2}$ स.च. PQRS	1. ΔPQY र स.च. PQRS दुवैको आधार PQ भएकाले
2. $\Delta QRX = \frac{1}{2}$ स.च. PQRS	2. ΔQRX र स.च. PQRS दुवैको आधार QR भएकाले
3. $\therefore \Delta PQY = \Delta QRX$	3. तथ्य (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो।

उदाहरण 3

दिइएको चित्रमा PQRS एउटा स.च. हो, जसमा QR को कुनै बिन्दु O बाट SO र PQ लाई बिन्दु T सम्म लम्ब्याइएको छ भने $\Delta PQO = \Delta RTO$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



थाहा दिइएको : स.च. PQRS को भुजा QR मा O बिन्दु छ। PQ र SO लाई T बिन्दुसम्म लम्ब्याइएको छ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : ΔPQO को क्षेत्रफल = ΔRTO को क्षेत्रफल

रचना : स.च. PQRS मा PR विकर्ण खिचौं।

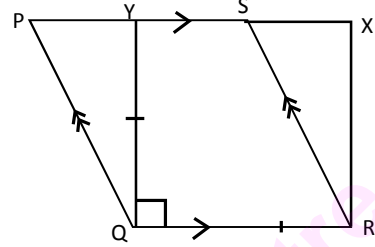
प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. ΔPRS को क्षेत्रफल = ΔPQR को क्षेत्रफल	1. स.च. PQRS लाई विकर्ण PR ले आधा गर्छ।
2. ΔPRS को क्षेत्रफल = ΔTRS को क्षेत्रफल	2. एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिचमा बनेका त्रिभुजका क्षेत्रफलहरू बराबर हुन्छन्।
3. $\therefore \Delta PQR$ को क्षेत्रफल = ΔTRS को क्षेत्रफल	3. तथ्य (1) र (2) बाट
4. $\Delta POR = \Delta SOR$	4. एउटै आधार OR र उनी समानान्तर रेखाहरू PS र OR बिच बनेका त्रिभुजहरू भएकाले
5. $\therefore \Delta PQR - \Delta POR = \Delta TRS - \Delta SOR$	5. बराबरी तथ्यअनुसार
6. $\therefore \Delta PQO$ को क्षेत्रफल = ΔRTO को क्षेत्रफल	6. शेष तथ्यअनुसार

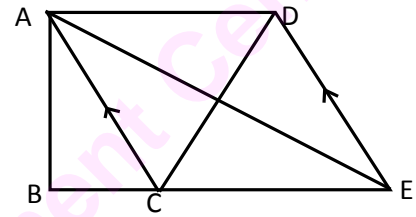
प्रमाणित भयो।

अभ्यास 13.1

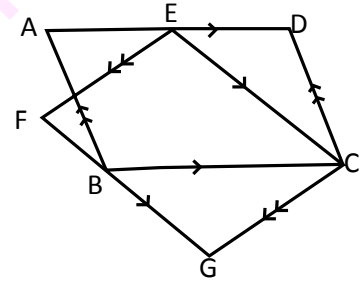
- दिइएको चित्रमा PQRS एउटा स.च. हो र Q RXY एउटा वर्ग हो भने प्रमाणित गर्नुहोस् :
स.च. PQRS को क्षेत्रफल = वर्ग Q RXY को क्षेत्रफल हुन्छ ।



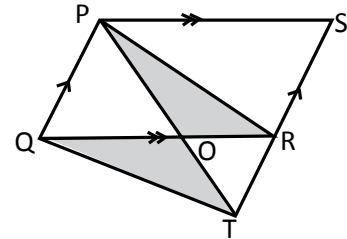
- दिइएको चित्रमा ABCD एउटा चतुर्भुज हो । जसको विकर्ण AC सँग समानान्तर हुने गरी DE खिचिएको छ र BC भुजालाई लम्ब्याएर E सम्म पुऱ्याइएको छ । A र E जोडिएको अवस्थामा चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = $\triangle ABE$ को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



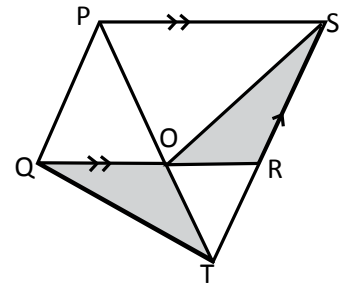
- दिइएको चित्रमा ABCD र EFGC दुई ओटा स.च. हुन् भने, स.च. ABCD को क्षेत्रफल = स.च. EFGC को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



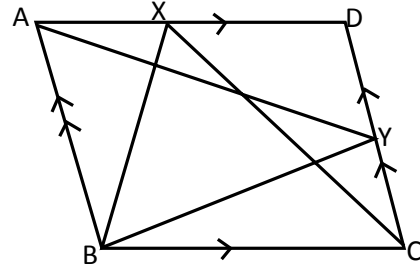
- दिइएको चित्रमा स.च. PQRS को भुजा SR लाई T सम्म लम्ब्याइएको छ । भुजा QR को कुनै बिन्दु O बाट जाने गरी PO लाई पनि T सम्म लम्ब्याइएको छ । प्रमाणित गर्नुहोस् : $\triangle POR = \triangle QOT$ हुन्छ ।



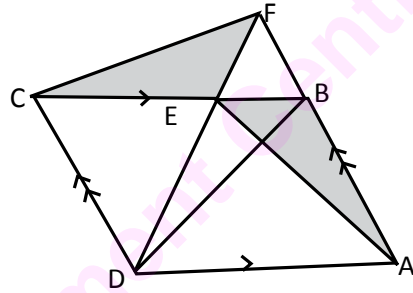
- दिइएको चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो, जसमा भुजा QR को कुनै बिन्दु O बाट PO लाई T सम्म र SR लाई पनि उही बिन्दु T सम्म लम्ब्याइएको छ । QT जोडेको छ भने $\triangle QOT = \triangle ROS$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



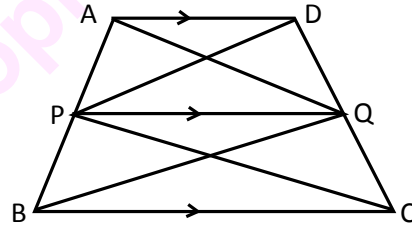
6. सँगैको चित्रमा ABCD एउटा स.च. हो, जसका भुजा AD को X बिन्दु तथा भुजा CD को Y बिन्दुबाट त्रिभुजहरू XBC र YAB बनेका छन् भने $\triangle ABY = \triangle ABX + \triangle CDX$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



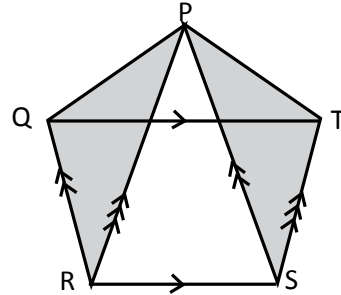
7. सँगैको चित्रमा ABCD एउटा स.च. हो । भुजा BC मा कुनै बिन्दु E छ । DE र AB लाई F सम्म लम्ब्याइएको छ । CF जोडेको छ भने $\triangle CEF = \triangle ABE$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



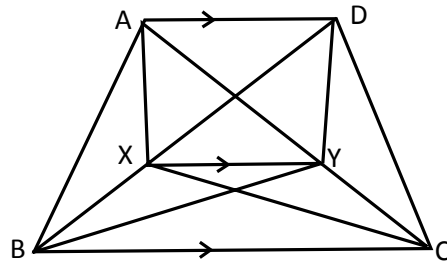
8. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो जसमा $AD \parallel PQ \parallel BC$ छन् । $\triangle AQB$ को क्षेत्रफल र $\triangle DPC$ को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



9. सँगैको चित्रमा PQRST एउटा पञ्चभुज हो, जसमा $QT \parallel RS$, $QR \parallel PS$ तथा $TS \parallel PR$ छन् । $\triangle PQR$ को क्षेत्रफल र $\triangle PTS$ को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



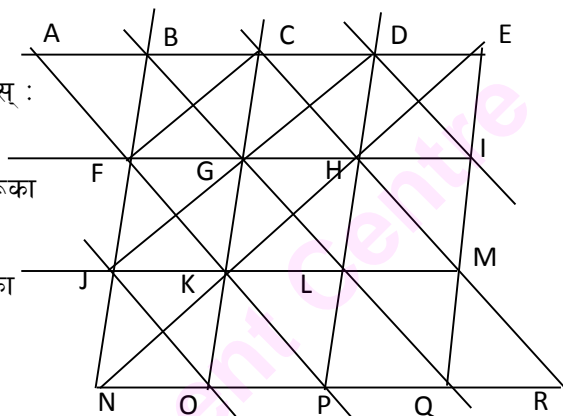
10. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो, जसमा विकर्णहरू AC र BD का बिन्दुहरू Y र X क्रमशः $AD \parallel XY \parallel BC$ हुने गरी जोडिएका छन् । $\triangle AXC$ को क्षेत्रफल र $\triangle BYD$ को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



14.0 पुनरावलोकन (Review)

संगैको चित्रमा तलका तथ्यहरूको खोजी गर्नुहोस् :

- (क) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच रहेका समानान्तर चतुर्भुजहरूका बिचको सम्बन्ध र उदाहरणहरू
- (ख) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूका बिचमा रहेको समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजको सम्बन्ध र उदाहरणहरू
- (ग) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिचमा रहेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफलको सम्बन्ध र उदाहरणहरू



माथिका सामानान्तर चतुर्भुज, त्रिभुज तथा विभिन्न प्रकारका चतुर्भुजहरूका गुणहरू र तिनीहरूका सैद्धान्तिक प्रमाण र रचनाहरूका बारेमा हामीले यसअघि नै अध्ययन गरिसकेका छौं । अब हामी त्रिभुज र चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल बराबर भएको अवस्थामा कसरी रचना गर्ने भन्ने सन्दर्भ अध्ययन गर्ने छौं । तपाईंले यस एकाइमा रचनाका प्रत्येक चरणका कारणहरू पनि खोजी गर्नुपर्ने छ ।

14.1 त्रिभुज र चतुर्भुजहरूको रचना (Construction of Triangle and Quadrilateral)

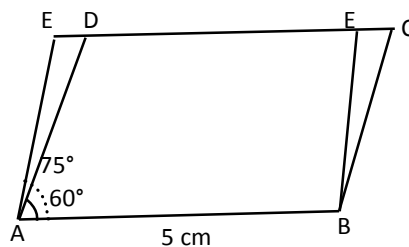
- (a) बराबर क्षेत्रफल भएका दुई ओटा समानान्तर चतुर्भुजको रचना : विभिन्न प्रकारका फरक फरक नापका समानान्तर चतुर्भुजहरूको रचना हामीले अगिल्ला कक्षाहरूमा गरिसक्यौ । अब हामी बराबर क्षेत्रफल भएका समानान्तर चतुर्भुजहरूको रचना गर्दछौं ।

उदाहरण 1

समानान्तर चतुर्भुज ABCD, जहाँ $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 3.5 \text{ cm}$ र $\angle BAD = 60^\circ$ खिची उक्त स.च.को बराबर हुने र एउटा कोण 75° भएको अर्को स.च. ABEF रचना गर्नुहोस् ।

समाधान

- (क) दिइएको नापअनुसारको नमुना आकृति खिचौं ।
- (ख) दिइएको नापअनुसार समानान्तर चतुर्भुज ABCD को रचना गरौं ।



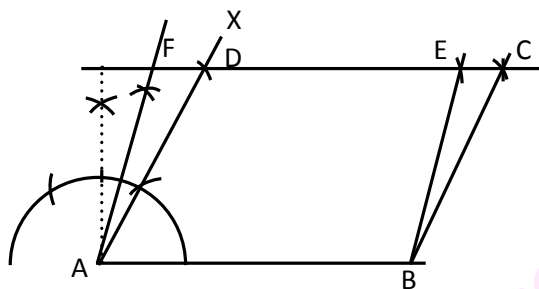
(i) $AB = 5 \text{ cm}$ रेखा तानौ ।

(ii) बिन्दु A मा कम्पासको सहायताले 60° को कोण BAX खिचौ ।

(iii) कम्पासमा 3.5 cm को चाप लिएर AX मा काटौ र काटिएको बिन्दुलाई D नाम दिऔ ।

(iv) बिन्दु D बाट AB सँग समानान्तर हुने गरी रेखा PQ खिचौ ।

(v) बिन्दु D बाट 5 cm को चापले रेखा PQ मा चिह्न लगाऔ र काटिएको बिन्दुलाई C नाम दिऔ । B र C जोडौ । यसरी समानान्तर चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।



(ग) पुनः बिन्दु B मा 75° को कोण खिचौ जसले CD लाई बिन्दु F मा काट्छ ।

(घ) F बाट 5 cm को चापले CD मा काटी E नाम दिऔ र B र E जोडौ ।

अब आवश्यक स.च. ABEF तयार भयो जसको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुज ABCD सँग बराबर हुन्छ ।

(b) बराबर क्षेत्रफल भएका त्रिभुजको रचना

अब हामी दुई ओटा बराबर क्षेत्रफल भएका दुई ओटा त्रिभुजहरूको रचना कसरी गर्न सकिन्छ, त्यसको बारेमा अध्ययन गर्दछौ ।

उदाहरण 2

$PQ = 6.5 \text{ cm}$, $QR = 7 \text{ cm}$ र $PR = 6 \text{ cm}$ भएको $\triangle PQR$ सँग बराबर क्षेत्रफल हुने र एउटा भुजाको नाप 8 cm भएको $\triangle SQR$ को रचना गर्नुहोस् ।

समाधान

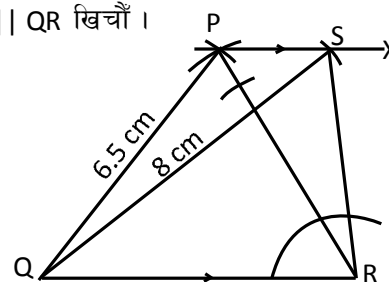
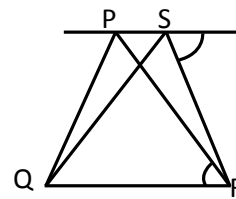
(क) दिइएको आँकडाअनुसार नमुना चित्र बनाऔ ।

(ख) दिइएको आँकडाअनुसार $\triangle PQR$ को रचना गरौ ।

(ग) बिन्दु P मा $\angle QRP$ सँग बराबर हुने कोण RPX खिची $PX \parallel QR$ खिचौ ।

(घ) बिन्दु Q बाट 8 cm को चापले PX मा काटौ र S नाम दिऔ । Q र S, S र R जोडौ ।

यसरी आवश्यक $\triangle SQR$ तयार भयो जसको क्षेत्रफल $\triangle PQR$ सँग बराबर हुन्छ ।



(c) बराबर क्षेत्रफल हुने समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजको रचना

कुनै निश्चित नापको त्रिभुज र समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजहरूको रचना कसरी गर्न सकिन्छ, तल दिइएका उदाहरणहरूको अध्ययन गरौं :

उदाहरण 3

$AB = 4\text{ cm}$, $BC = 7\text{ cm}$, $\angle ABC = 120^\circ$ भएको $\triangle ABC$ को रचना गरी उक्त त्रिभुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् जसमा भुजा $DE = 6\text{ cm}$ छ ।

समाधान

(क) दिइएको आँकडाको नमुना चित्र खिच्नुहोस् ।

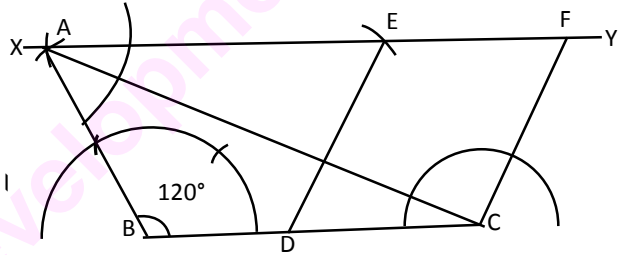
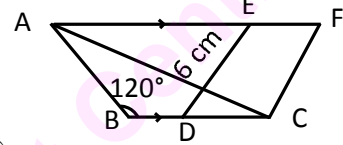
(ख) $AB = 4\text{ cm}$, $BC = 7\text{ cm}$ र $\angle ABC = 120^\circ$ भएको $\triangle ABC$ खिच्नुहोस् ।

(ग) BC सँग समानान्तर रेखा XY खिच्नुहोस् ।

(घ) BC को मध्यबिन्दु D लिएर D बाट
र C बाट 6 cm को चापले XY
मा चिह्न लगाउनुहोस् र काटिएका
बिन्दुहरूमा क्रमशः E र F लेख्नुहोस् ।

(ङ) D र E , C र F जोड्नुहोस् ।

यसरी आवश्यक समानान्तर चतुर्भुज $CDEF$ को रचना भयो जसको क्षेत्रफल $\triangle ABC$ सँग बराबर छ ।



उदाहरण 4

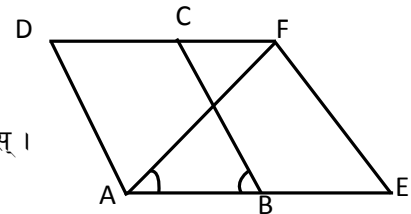
$AB = 4.5\text{ cm}$, $BC = 5.2\text{ cm}$ र $\angle ABC = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी $\triangle EAF$ को रचना गर्नुहोस् जसमा $\angle EAF = 60^\circ$ छ ।

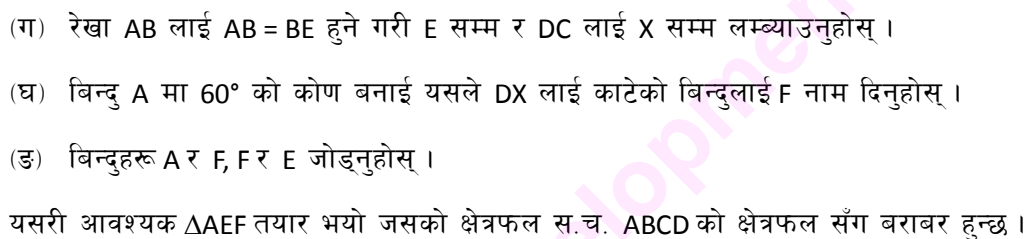
समाधान

(क) दिइएको नापको नमुना चित्र खिच्नुहोस् ।

(ख) दिइएको नाप बराबरको समानान्तर चतुर्भुज रचना गर्नुहोस् ।

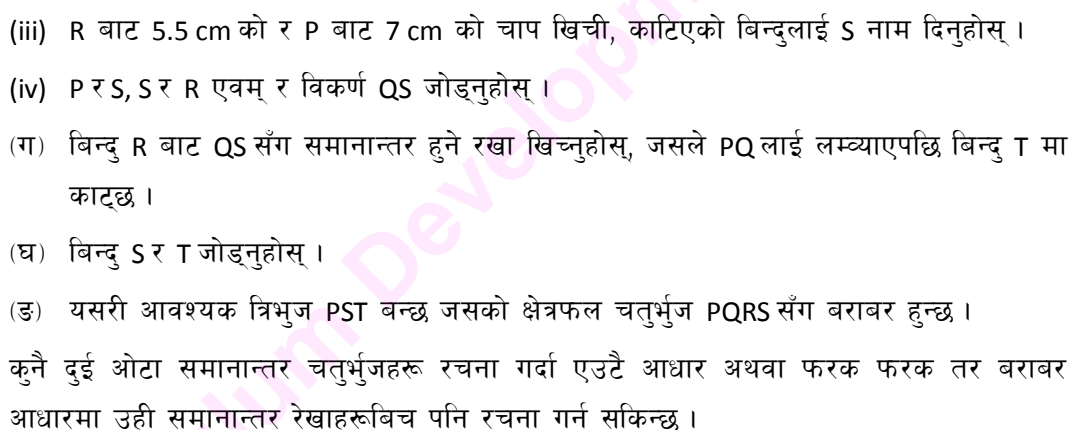
जहाँ $AB = 4.5\text{ cm}$, $BC = 5.2\text{ cm}$ र $\angle ABC = 60^\circ$ छ ।





उदाहरण 5

(ii) Q बाट 5.5 cm को चापले R मा चिह्न लगाउनुहोस् ।



- 1.(a) भुजाहरू $AB = 4\text{ cm}$, $AD = 6\text{ cm}$ र $\angle BAD = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा कोण 45° भएको समानान्तर चतुर्भुज रचना गर्नुहोस् ।
- (b) एउटा समानान्तर चतुर्भुजमा $AB = 5\text{ cm}$, $AD = 6\text{ cm}$ र विकर्ण $BD = 6\text{ cm}$ छ । उक्त समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा कोण 75° भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।
- (c) एउटा समानान्तर चतुर्भुजमा दुई ओटा विकर्णहरू क्रमशः 6 cm , 4.8 cm र तिनीहरूका बिचको कोण 30° छ । उक्त समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी एउटा विकर्ण 7.2 cm भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

- 2.(a) $BC = 6.4$ cm, $AB = 5.6$ cm र $AC = 6$ cm भएको त्रिभुज ABC सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज रचना गर्नुहोस्, जसको एउटा भुजा 7 cm छ ।
- (b) $LM = 6.3$ cm, $\angle LNM = 30^\circ$ र $\angle LMN = 45^\circ$ भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle OLM$ को रचना गर्नुहोस्, जसमा $OM = 7.5$ cm छ ।
- (c) $PQ = 6.5$ cm, $QR = 7$ cm र $PR = 6$ cm भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी एउटा भुजाको लम्बाइ 8 cm भएको एउटा त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।
- 3.(a) $PQ = 6.5$ cm, $QR = 6$ cm र $PR = 5.5$ cm भएको एउटा त्रिभुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\angle TSR = 75^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज RSTI रचना गर्नुहोस् ।
- (b) $\triangle ABC$ मा $b = 5$ cm, $c = 4.8$ cm र $\angle ABC = 45^\circ$ छ । उक्त त्रिभुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने र एउटा भुजा $CD = 7.5$ cm भएको समानान्तर चतुर्भुज CDEF को रचना गर्नुहोस् ।
- (c) $AB = 4$ cm, $BC = 3.2$ cm र $AC = 3.5$ cm भएको $\triangle ABC$ को क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी $BE = 5$ cm भएको समानान्तर चतुर्भुज BXYE को रचना गर्नुहोस् ।
- 4.(a) $AB = 6$ cm, $BC = 4.5$ cm र $\angle DAB = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle AEF$ को रचना गर्नुहोस्, जसमा $FE = 7.5$ cm छ ।
- (b) भुजाहरू $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm र $\angle BAD = 45^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज ABCD सँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी $\triangle APQ$ को रचना गर्नुहोस्, जसमा $\angle APQ = 60^\circ$ छ ।
- (c) $PQ = 5$ cm, विकर्ण $PR = 6$ cm र विकर्ण $QS = 8$ cm भएको समानान्तर चतुर्भुज PQRS सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।
- 5.(a) भुजाहरू $PQ = QR = 5.5$ cm, $RS = SP = 4.5$ cm र $\angle SPQ = 75^\circ$ भएको चतुर्भुज PQRS सँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle PST$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (b) $AB = 4.5$ cm, $BC = 5.5$ cm, $CD = 5.7$ cm र $DA = 4.9$ cm र विकर्ण $BD = 5.9$ cm भएको चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफलसँग बराबर हुने $\triangle DAE$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (c) $PQ = 5$ cm, $QR = 9.6$ cm, $RS = 4.5$ cm, $SP = 5.4$ cm र $QS = 6.5$ cm भएको चतुर्भुज PQRS को बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle QRT$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (d) समबाहु चतुर्भुज PQRS को रचना गर्नुहोस्, जसमा विकर्णहरू $PR = 6$ cm र $QS = 8$ cm छन् । सो समबाहु चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle PSA$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (e) 6 cm लम्बाइ र 4.5 cm चौडाइ भएको आयतको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने एउटा कोण 60° भएको त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।
6. पाँच पाँच जनाको समूह निर्माण गर्नुहोस् । बाँसका सिन्का, छ्वाली वा जुस पाइपको प्रयोग गरी सबै समूहले माथिका प्रत्येक रचनाका एक एक ओटा नमुना निर्माण गरी कार्डबोर्डमा टाँसी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

15.0. पुनरावलोकन (Review)

तल दिइएका वृत्तका आधारभूत धारणाहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् । साथै प्रत्येक धारणालाई प्रस्ट्याउने ज्यामितीय चित्र पनि बनाउनुहोस् :

- | | |
|--|------------------------|
| (क) परिधि (circumference) | (ख) अर्धव्यास (radius) |
| (ग) व्यास (diameter) | (घ) जीवा (chord) |
| (ङ) अर्धवृत्त (semi-circle) | (च) चाप (arc) |
| (छ) वृत्तखण्ड (segment) | (ज) क्षेत्रक (sector) |
| (झ) एक केन्द्रित वृत्तहरू (concentric circles) | |
| (ञ) प्रतिच्छेदित वृत्तहरू (intersecting circles) | |
| (ट) बराबर वृत्तहरू (equal circles) | |

15.1 केन्द्रीय कोण र परिधि कोण (Central angle and angle at circumference)

एउटा सिक्काको बाहिरी घेरालाई ट्रेस गरी वृत्त खिच्नुहोस् ।

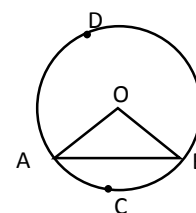
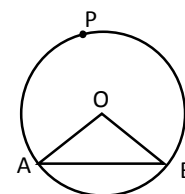
उक्त वृत्तको केन्द्र अनुमान गरी देखाउनुहोस् । वृत्तमा कुनै एउटा जीवा खिच्नुहोस् । उक्त जीवाका छेउका बिन्दुहरूलाई केन्द्रसँग जोड्दा बनेका कोणहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

केन्द्रमा बनेको कोणलाई केन्द्रीय कोण भनिन्छ । सँगैको

चित्रमा $\angle AOB$ केन्द्रीय कोण हो ।

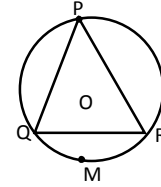
चित्रमा O वृत्तको केन्द्र छ । OA र OB वृत्तका दुई अर्धव्यासहरू हुन् । चाप ACB र चाप ADB मा बनेका केन्द्रीय कोणहरूको नाम लेख्नुहोस् । के चाप र केन्द्रीय कोणबिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध छ ?

छलफल गर्नुहोस् ।



$\angle AOB \cong \widehat{ACB}$ लाई चाप ACB को डिग्रीमा नाप भनी पढ्ने गरिन्छ । केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापबिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध हुन्छ । यहाँ सङ्केत \cong अथवा \equiv लाई सम्प्रभावी (Equal influence) भनेर पनि पढ्ने गरिन्छ । त्यसैले माथिको चित्रमा $\angle AOB$ सम्प्रभावी चाप ACB लाई $\angle AOB \equiv \widehat{ACB}$ द्वारा पनि जनाउने गरिन्छ ।

फेरि, चित्रमा देखाए जस्तै साँझा बिन्दु भएर जाने जीवाहरू PQ र PR खिच्नुहोस् । Q र R लाई जोड्नुहोस् । जीवा PQ, PR र QR मा बनेका कोणहरू र प्रत्येक कोणका सम्मुख चापको नाम पनि लेख्नुहोस् ।



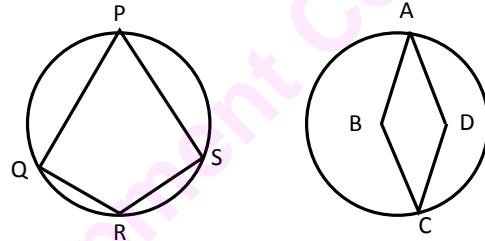
वृत्तका दुई ओटा जीवाहरू परिधिको कुनै एक बिन्दुमा प्रतिच्छेदित हुँदा बनेको कोणलाई परिधि कोण (inscribed angle) भनिन्छ । माथि चित्रमा $\angle QPR$ चाप QMR मा बनेको परिधि कोण हो ।

वृत्तमा परिधिको कोण सो कोणले निर्धारण गर्ने चापको (सम्मुख चापको) आधारसँग सम्प्रभावी हुन्छ । चित्रमा $\angle QPR \equiv \frac{1}{2} \widehat{QMR}$ हुन्छ ।

चक्रीय चतुर्भुज (Cyclic Quadrilateral)

चार ओटै शीर्षबिन्दुहरू एउटै वृत्तको परिधिमा पर्ने चतुर्भुजलाई चक्रीय चतुर्भुज भनिन्छ ।

चित्रमा PQRS एउटा चक्रीय चतुर्भुज हो । तर ABCD चक्रीय चतुर्भुज होइन ।



प्रयोगात्मक पुष्टिहरू (Experimental Verification)

- कुनै वृत्तमा बराबर केन्द्रीय कोणहरूले बनाउने चापहरू बराबर हुन्छन् ।

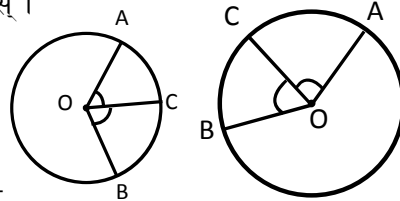
चित्रमा जस्तै फरक फरक नापका दुई वृत्तहरू खिच्नुहोस् ।

कम्पासले दुवै वृत्तहरूको केन्द्र O मा बराबर नापका

कोणहरू $\angle AOC$ र $\angle COB$ रचना गर्नुहोस् ।

धागोले दुवै वृत्तका चापहरू AC र BC लाई नाप्नुहोस् ।

ती दुवै चापको नाप कति हुन्छ रुलरको सहायताले पत्ता लगाउनुहोस् र तल दिइएको तालिका भर्नुहोस् :

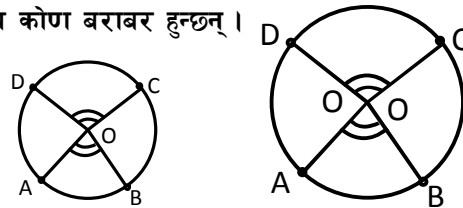


चित्र	$\angle BOC$	$\angle AOC$	चाप AC	चाप BC	परिणाम
(i)					
(ii)					

माथि तालिकाको निष्कर्ष छोटो वाक्यमा लेख्नुहोस् ।

- कुनै पनि वृत्तमा बराबर चापहरूले बनाउने केन्द्रीय कोण बराबर हुन्छन् ।

चित्रमा देखाए जस्तै फरक फरक अर्धव्यास भएका दुई ओटा वृत्तहरू खिच्नुहोस् । दुई बराबर चापहरू AB र CD काट्नुहोस् ।



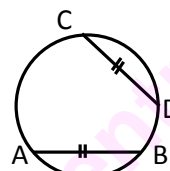
कोणहरू नापेर दिइएको तालिका भर्नुहोस् :

चित्र	$\angle AOB$	$\angle COD$	परिणाम
(i)			
(ii)			

निष्कर्षलाई छोटकरीमा लेखी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

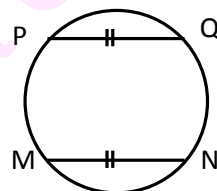
के दुई बराबर जीवाहरूले काटेका चापहरू पनि बराबर हुन्छन् ?

चित्रमा जीवाहरू AB र CD बराबर छन् । चाप AB र चाप CD लाई धागोले नापेर हुर्नुहोस् । के तिनीहरूको नाप बराबर पाउन सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



बराबर जीवाहरूले काटेका चापहरूको लम्बाइ पनि बराबर हुन्छ ।

चित्रमा चाप PQ र MN बराबर छन् । जीवाहरू PQ र MN लाई रूलरले अथवा अन्य काठ/बाँसका सिन्काले नापेर हेर्नुहोस् । के तिनीहरूको नाप बराबर हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



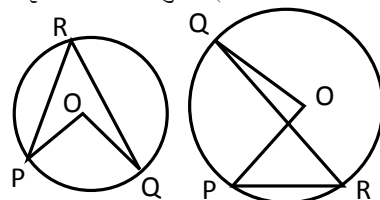
त्यस्तै बराबर चापहरूले बनाउने जीवाहरूको लम्बाइ पनि बराबर हुन्छ ।

3. कुनै वृत्तको एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण परिधिमा बनेको कोणको दुई गुणा हुन्छ ।

चित्रमा देखाए जस्तै दुई दुई ओटा फरक फरक अर्धव्यास भएका वृत्तहरू खिच्नुहोस् :

प्रत्येक वृत्तको चाप PQ मा बनेका केन्द्रीय कोण POQ र परिधिको कोण PRQ नाप्नुहोस् र तल तालिकामा भर्नुहोस् :

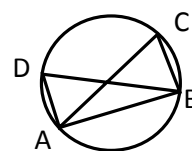
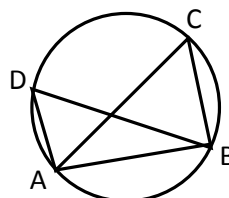
चित्र	$\angle POQ$	$\angle PRQ$	परिणाम
(i)			
(ii)			



प्राप्त निष्कर्षलाई छोटकरीमा लेखी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4. वृत्तको एउटै वृत्तखण्डमा बनेको कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

चित्रमा देखाए जस्तै फरक फरक अर्धव्यास भएका दुई ओटा वृत्तहरू खिच्नुहोस् । जीवा AB ले बनाएको वृत्तखण्डमा परिधिका कोणहरू क्रमशः $\angle ADB$ र $\angle ACB$ खिच्नुहोस् ।

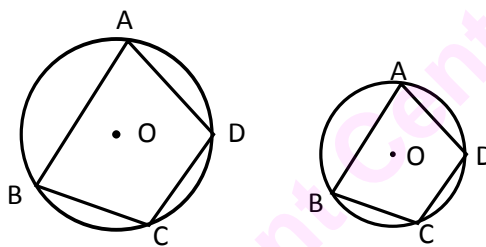


प्रत्येक कोणको नापलाई तल दिइएको तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

चित्र	$\angle ADB$	$\angle ACD$	परिणाम
(i)			
(ii)			

5. चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।

फरक फरक अर्धव्यास भएका दुई ओटा वृत्तहरू खिच्नुहोस् । वृत्तभित्र चक्रीय चतुर्भुज ABCD खिच्नुहोस् ।



चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू नापेर तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र	$\angle BAD$	$\angle BCD$	$\angle ADC$	$\angle ABC$	$\angle ABC + \angle ADC$	$\angle BCD + \angle BAD$	परिणाम
(i)							
(ii)							

माथिका तालिकाको निष्कर्षलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

सैद्धान्तिक प्रमाण (Theoretical Proof)

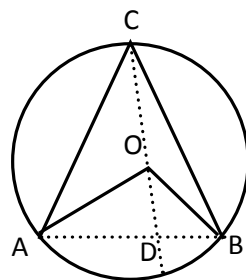
साध्य 1. एउटै वृत्तखण्डमा बनेका परिधि कोण र केन्द्रीय कोणमध्ये केन्द्रीय कोण परिधि कोणको दुई गुणा हुन्छ ।

थाहा दिइएको : चित्रमा O वृत्तको केन्द्र बिन्दु हो ।

वृत्तखण्ड AB अथवा चाप AB मा बनेका परिधि कोण र केन्द्रीय कोण क्रमशः $\angle ACB$ र $\angle AOB$ हुन् ।

प्राणित गर्नुपर्ने : $\angle AOB = 2\angle ACB$

रचना : CO लाई D सम्म लम्ब्याऔं ।



प्रमाण

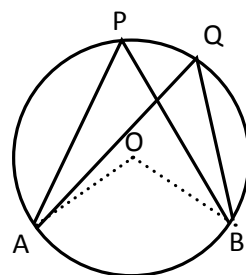
तथ्यहरू	कारणहरू
ΔAOC मा 1. $\angle OAC = \angle OCA$ 2. $\angle OAC + \angle OCA = \angle AOD$ अथवा $2\angle OCA = \angle AOD$ 3. ΔBOC मा $2\angle BCO = \angle BOD$ 4. $2(\angle OCA + \angle BCO) = \angle AOD + \angle BOD$ अथवा $2\angle ACB = \angle AOB$	1. अर्धव्यास $AO = OC$ भएकाले आधारका बराबर कोणहरू 2. त्रिभुजको एउटा भुजालाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाह्य कोण भित्री अनासन्न कोणहरूको योगफलसँग बराबर हुने भएकाले 3. तथ्य (1) र (2) जस्तै 4. तथ्य (2) र (3) को योगफल लिँदा

साध्य 2. एउटै वृत्तखण्डमा बनेका परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : चित्रमा O वृत्तको केन्द्र हो । $\angle APB$ र $\angle AQB$ एउटै वृत्तखण्ड AB मा बनेको कोणहरू हुन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle APB = \angle AQB$

रचना : AO र BO जोडौं ।



प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $2\angle APB = \angle AOB$ 2. $2\angle AQB = \angle AOB$ 3. $2\angle APB = 2\angle AQB$ अथवा $\angle APB = \angle AQB$	1. एउटै वृत्तखण्डमा बनेका परिधि कोण र केन्द्रीय कोणको सम्बन्ध भएकाले । 2. तथ्य (1) जस्तै 3. तथ्य (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

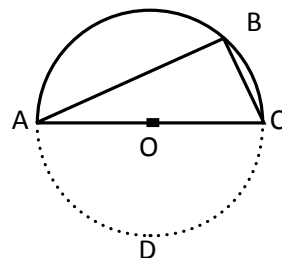
साध्य 3. अर्धवृत्तमा बन्ने परिधि कोण एक समकोण हुन्छ ।

थाहा दिइएको : चित्रमा ABC एउटा अर्धवृत्त हो ।

जसमा O अर्धवृत्तको केन्द्र र ABC परिधिमा बनेको कोण हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ABC = 90^\circ$

रचना : अर्ध वृत्तलाई बिन्दु D बाट पूर्ण वृत्त बनाऔं ।



प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\angle AOC = 180^\circ$	सिधा रेखामा बनेको सरल कोण भएकाले
2. $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$	एउटै चाप ADC मा बनेका परिधिको कोण ABC र केन्द्रीय कोण AOC भएकाले
3. $\angle ABC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$	तथ्य (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

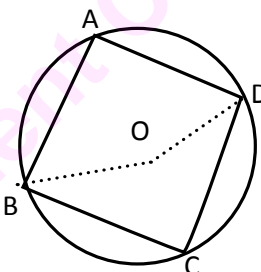
के यो साध्यलाई अन्य विधिबाट पनि प्रमाणित गर्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

साध्य 4. चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपुरक हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्तमा चक्रीय चतुर्भुज ABCD का सम्मुख कोणहरू $\angle BAD$, $\angle BCD$ र $\angle ABC$, $\angle ADC$ हुन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ र $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

रचना : BO र DO जोडौं ।

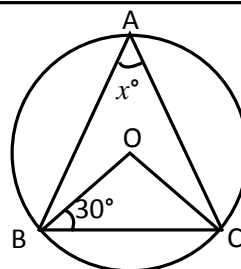


प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $2\angle BAD = \angle BOD$	एउटै चाप BAD मा बनेका परिधिकोण र केन्द्रीय कोण भएकाले
2. $2\angle BCD = \text{बृहत कोण } \angle BOD$	एउटै चाप BCD मा बनेका परिधिकोण र केन्द्रीय कोण भएकाले
3. $2(\angle BAD + \angle BCD) = \angle BOD + \text{बृहतकोण } \angle BOD$ अथवा, $2(\angle BAD + \angle BCD) = 360^\circ$ अथवा, $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$	तथ्य (1) र (2) जोड्दा
4. $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$	4. चतुर्भुजका भित्री कोणहरूको योगफल 360° हुने भएकाले

उदाहरण 1

चित्रमा O वृत्तको केन्द्र छ । यदि $\angle OBC = 30^\circ$ र $\angle BAC = x^\circ$ भए x° को मान कति हुन्छ ?
पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ, $\angle OBC = \angle OCB$

$$= 30^\circ \quad [\text{समद्विबाहु } \triangle OBC \text{ का आधारका कोणहरू भएकाले}]$$

फेरि $\angle BOC = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ $[\triangle OBC \text{ मा भित्री कोणहरूको योगफल } 180^\circ \text{ हुने भएकाले}]$

त्यसैले, $x^\circ = \frac{1}{2} \times 120^\circ$ [एउटै चाप BC मा बनेका परिधिीको कोण, केन्द्रीय कोणको आधा हुने भएकाले।]

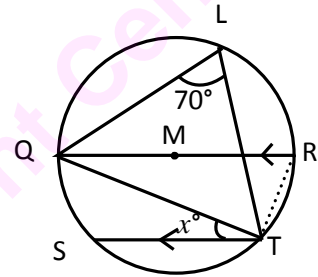
$$\therefore x = 60^\circ$$

उदाहरण 2

चित्रमा $QR \parallel ST$ छ। वृत्तको केन्द्र M छ।

यदि $\angle QLT = 70^\circ$ भए x° को मान कति हुन्छ ?

पत्ता लगाउनुहोस्।



समाधान

यहाँ $QR \parallel ST$ छ। बिन्दुहरू T र R जोड्नुहोस्।

त्यसैले $\widehat{QS} = \widehat{RT}$ [समानान्तर रेखाहरूबिच रहेका चापहरू बराबर हुने भएकाले]

फेरि, $\angle QTR = 90^\circ$ [अर्ध वृत्तमा बनेको कोण भएकाले]

$$\angle RQT = x^\circ \quad [ST \parallel QR \text{ मा एकान्तर कोणहरू}]$$

$$\angle QLT = \angle QRT = 70^\circ \quad [\text{एउटै चाप QT मा बनेका परिधिका कोणहरू भएकाले।}]$$

त्यसैले, $70^\circ + 90^\circ + x^\circ = 180^\circ$ $[\triangle QTR \text{ मा भित्री कोणहरूको योगफल } 180^\circ \text{ हुने भएकाले}]$

$$\text{अथवा, } x^\circ + 160^\circ = 180^\circ$$

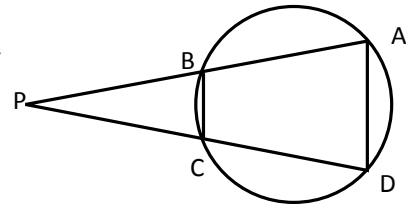
$$\text{अथवा } x^\circ = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

उदाहरण 3

चक्रीय चतुर्भुज ABCD का भुजाहरू AB र DC लाई बढाउँदा

बिन्दु P मा काटिएका छन्। यदि $\angle DAB = \angle CBP$ भए

$CP = BP$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



समाधान

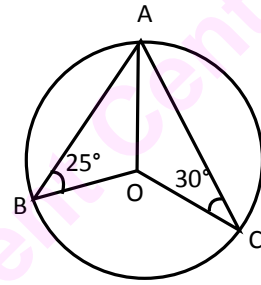
(1) $\angle PCB + \angle BCD = 180^\circ$ [सिधा रेखा PCD मा बनेका कोणहरूको योगफल 180° हुने भएकाले]

(2) $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$ [चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुने भएकाले]

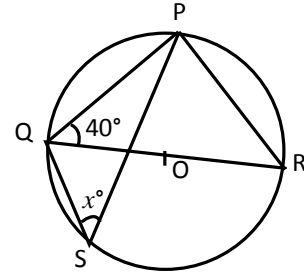
- (3) $\angle PCB = \angle BAD$ [तथ्य 1 र 2 बाट]
 (4) $\angle CBP = \angle BAD$ [थाहा दिइएको बाट]
 (5) $\angle PCB = \angle CBP$ [तथ्य 3 र 4 बाट]
 (6) $PB = CP$ [तथ्य 5 बाट $\triangle PBC$ का आधारका कोणहरू बराबर भएकाले]

अभ्यास 15.1

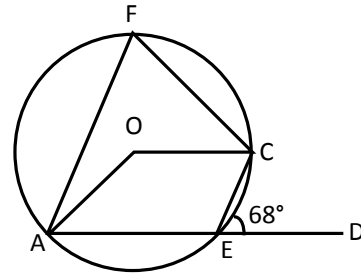
1. (a) सँगैका चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो ।
 $\angle OBA = 25^\circ$ र $\angle OCA = 30^\circ$ भए $\angle BOC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



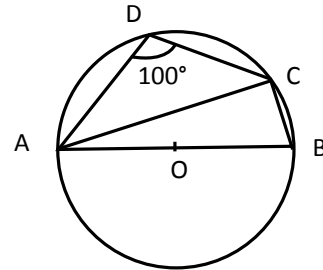
- (b) सँगैका चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो ।
 यदि $\angle PQR = 40^\circ$ र $\angle PSQ = x^\circ$ भए x° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



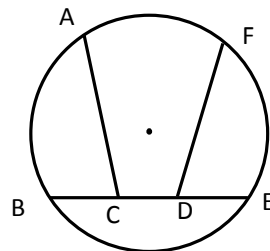
- (c) दिइएको चित्रमा, O वृत्तको केन्द्र बिन्दु हो ।
 $FAEC$ एउटा चक्रीय चतुर्भुज हो, यदि $\angle CED = 68^\circ$ छ भने (i) $\angle AFC$ (ii) बृहत् कोण $\angle AOC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



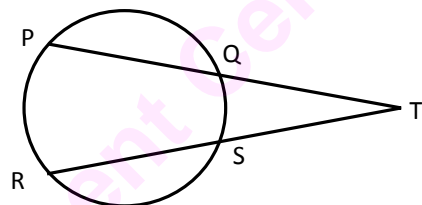
- (d) दिइएको चित्रमा AOB वृत्तको व्यास हो ।
 यदि $\angle ADC = 100^\circ$ भए $\angle BAC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



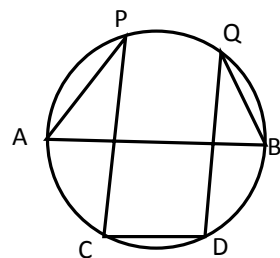
2. सँगैको चित्रमा $BC = DE$ र $\widehat{AB} = \widehat{FE}$ भए $\angle ACB = \angle FDE$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



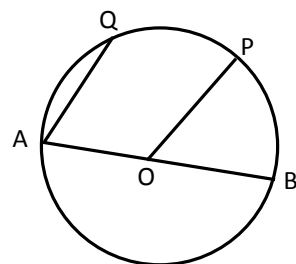
3. सँगैको चित्रमा, जीवा PQ र RS वृत्तको बाह्य बिन्दु T मा परस्पर काटिएका छन् भने $\angle QTS = \frac{1}{2}(\widehat{PR} - \widehat{QS})$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



4. दिइएको चित्रमा यदि $\angle APC = \angle BQD$ छ भने $AB \parallel CD$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

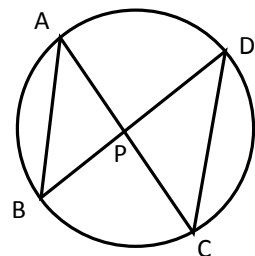


5. सँगैको चित्रमा O वृत्तको केन्द्र हो । यदि $\widehat{PQ} = \widehat{PB}$ भए $AQ \parallel OP$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



6. दिइएको चित्रमा जीवा AC र BD परस्परमा बिन्दु P मा काटिएका छन् । यदि $PB = PC$ भए सिद्ध गर्नुहोस् ।

- (i) जीवा $AB =$ जीवा DC
(ii) जीवा $AC =$ जीवा BD
(iii) चाप $ABC =$ चाप BCD

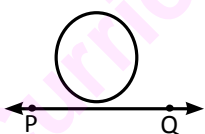


7. केन्द्रीय कोण र परिधि कोणको सम्बन्ध र तिनीहरूसँग सम्बन्धित चाप तथा जीवाहरूको सम्बन्ध प्रष्ट्याउने गरी कागजका मोडेलहरू बनाउनुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
8. केन्द्रहरू क्रमशः X र Y भएका तिन जोडा बराबर वृत्तहरू ABP र CDQ खिच्नुहोस् । बराबर चापहरू AB र CD बनाई जीवाहरू AB र CD जोड्नुहोस् । AB र CD नाप्नुहोस् र आएको नतिजालाई तालिकामा भर्नुहोस् ।
के जीवा AB = जीवा CD छ ?
के जीवा AB र CD ले केन्द्रमा बनाएका कोणहरू बराबर छन् ?
के जीवा AB ले वृत्तको परिधिमा बनाएको कोण केन्द्रीय कोणको आधा छ ।
यस कार्यका लागि मसिनो धागो/तार र ट्रेसिङ पेपरको प्रयोग गर्न सकिन्छ ।
9. एउटा डोरी अथवा मसिनो तारले विद्यालयको चउरमा वृत्ताकार आकृति बनाउनुहोस् । बाँस, निगालो अथवा अन्य काठका मसिना सिक्काहरूका माध्यमबाट माथि दिइएका साध्य र तिनीहरूका विलोम पुष्टि गर्नुहोस् ।
10. तपाईंले हालसम्म अध्ययन गरेका वृत्त सम्बन्धी अवधारणा र तथ्यहरू दैनिक जीवनमा कहाँ कहाँ प्रयोग हुन्छन् ? खोजी गरी तालिकासहित कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

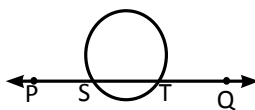
15.2 स्पर्श रेखा (Tangent)

एउटा सिक्काको घेरालाई डेस्कको छेउमा गुडाउँदै जानुहोस् । यसरी गुडाउँदा सिक्काको घेराले डेस्कलाई कति ओटा बिन्दुमा छुन्छ, अवलोकन गर्नुहोस् ।

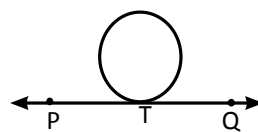
एउटा वृत्तलाई कुनै रेखाले प्रतिच्छेदन गर्ने विषयमा तल दिइएका चित्रहरू अध्ययन गरी कक्षाकोठामा छलफल गर्नुहोस् ।



चित्र 1



चित्र 2



चित्र 3

सम्भावना 1: रेखाले वृत्तलाई चित्र 1 मा देखाए जस्तै प्रतिच्छेदन नगर्न पनि सक्छ ।

सम्भावना 2: रेखाले वृत्तलाई चित्र 2 मा देखाए जस्तै दुई बिन्दुमा (S र T) प्रतिच्छेदन गर्न पनि सक्छ ।

सम्भावना 3: रेखाले वृत्तलाई चित्र 3 मा जस्तै एउटा र एउटै मात्र बिन्दु (T) मा प्रतिच्छेदन पनि गर्न सक्छ। यहाँ के वृत्तले बिन्दु T को छेउछाउमा अन्य बिन्दुलाई पनि स्पर्श गर्छ किन् ? छलफल गर्नुहोस्। वृत्तको कुनै एउटा बिन्दुलाई सबभन्दा नजिकबाट छोएर जाने रेखालाई स्पर्श रेखा भनिन्छ। त्यस्तै उक्त रेखाले छोएको सबभन्दा नजिकको बिन्दुलाई स्पर्श बिन्दु भनिन्छ। चित्र 3 मा PQ स्पर्श रेखा र बिन्दु T स्पर्श बिन्दु हो।

परीक्षण 1 अर्धव्यास र स्पर्श रेखा बिचको सम्बन्ध

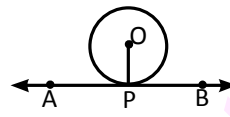
दुई ओटा फरक फरक अर्धव्यास भएका वृत्तहरू खिच्नुहोस्।

वृत्तको केन्द्रबाट स्पर्श रेखा AB को स्पर्श बिन्दु P लाई

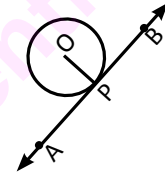
चित्रमा देखाए जस्तै जोड्नुहोस्।

$\angle OPA$ र $\angle OPB$ नाप्नुहोस्।

प्राप्त नतिजालाई तालिकामा भर्नुहोस्।



चित्र 4



चित्र 5

चित्र	$\angle OPB$	$\angle OPA$	नतिजा

माथिको प्रयोगबाट प्राप्त नतिजालाई कक्षाकोठामा छलफल गर्नुहोस्।

वृत्तको स्पर्श बिन्दुसम्म खिचिएको अर्धव्यास स्पर्श रेखामा लम्ब हुन्छ। माथिको चित्रमा $OP \perp AB$ हुन्छ, जहाँ P स्पर्श बिन्दु हो।

उदाहरण 1

चित्रमा O वृत्तको केन्द्र बिन्दु हो। यदि $AB = 8$ से.मि. र

$ON = 5$ से.मि. भए PN को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

चित्रमा, $AB = 8$ से.मि., $OP = \frac{1}{2} AB = 4$ से.मि.

र $\angle OPN = 90^\circ$ छ।

यहाँ, $ON^2 = OP^2 + PN^2$

[$\triangle OPN$ मा पाइथागोरस साध्यबाट]

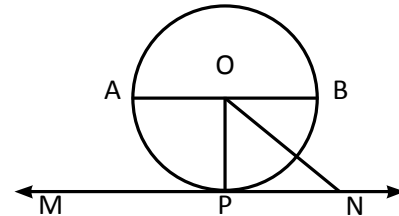
अथवा, $5^2 = 4^2 + PN^2$

अथवा $25 = 16 + PN^2$

अथवा $9 = PN^2$

अथवा $\sqrt{9} = PN$

अथवा, $PN = 3$ से.मि.



अभ्यास 15.2

- एउटै अर्धव्यास भएका तिन ओटा वृत्तहरू खिच्नुहोस् । तल दिइएका अवस्थाहरूलाई चित्रमा देखाउनुहोस् :

(क) रेखाले वृत्तलाई छुदै नछुने

(ख) रेखाले वृत्तलाई सबभन्दा नजिकबाट एउटा मात्र बिन्दुमा छोएर जाने

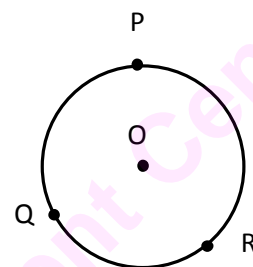
(ग) रेखाले वृत्तको कुनै दुई ओटा बिन्दुलाई छोएर जाने

- चित्रमा वृत्तको परिधिमा पर्ने बिन्दुहरू P, Q र R मा स्पर्श रेखाहरू खिच्नुहोस् ।

(क) बिन्दु O (केन्द्र) बाट OP, OQ र OR जोड्नुहोस् ।

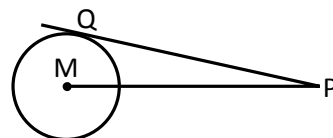
के OP, OQ र OR स्पर्श रेखाहरूमा लम्ब हुन्छन् ? नापेर निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

(ख) के स्पर्श रेखाहरूले एक अर्कालाई भेट्छन् ? भेट्छन् भने कुन ज्यामितीय आकृति बन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



- अर्धव्यास 7 से.मि. भएको एउटा वृत्तको केन्द्रबाट 25 से.मि. टाढा कुनै बिन्दुबाट स्पर्श रेखा खिचिएको छ । स्पर्श रेखाको लम्बाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- चित्रमा M वृत्तको केन्द्र बिन्दु हो । यदि $PQ = 16$ से.मि र $MP = 20$ से.मि भए वृत्तको व्यास कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



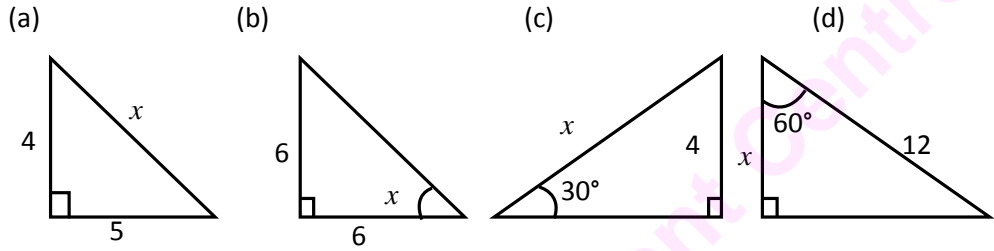
- एउटा कागजको कार्टुनबाट वृत्ताकार आकृति काट्नुहोस् । उक्त आकृतिको कुनै बाह्य बिन्दुमा छुने गरी लामो र मसिनो काठको सिन्का लिनुहोस् । अर्धव्यास र सिन्काबिच कस्तो कोण बन्छ ? नापेर निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- चार चार जनाको समूह बनाउनुहोस् । ज्यामितिमा हालसम्म सिकेका विभिन्न अवधारणा र तथ्यहरू हाम्रो दैनिक जीवनमा के कसरी प्रयोग भएका छन् ? खोजी गरी प्रतिवेदन कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् । कक्षाबाट प्राप्त पृष्ठ पोषणलाई समेट्दै एक लेख तयार गरी भित्ते पत्रिका वा अन्य पत्रिकामा प्रकाशन गर्नुहोस् ।

एकाइ 16

त्रिकोणमिति (Trigonometry)

16.0 पुनरावलोकन (Review)

तल दिइएका समकोणी त्रिभुजहरूमा थाहा नभएको भाग (x) को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

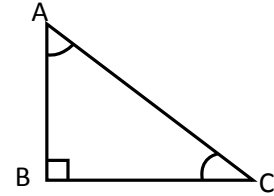


आफूले सबै पत्ता लगाइसकेपछि समूहमा छलफल गरी साझा उत्तर तयार पार्नुहोस् र निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् । यसरी प्रस्तुत गरेको सारांशलाई निम्नानुसार सामान्यीकरण गर्नुहोस् :

माथिका समकोणी त्रिभुजहरू (a) मा पाइथागोरस साध्यको प्रयोग गरिन्छ भने (b), (c) र (d) मा क्रमशः \tan , \sin र \cos अनुपात र तिनीहरूका बिचको कोणहरूको मान प्रयोग गरिएको छ । यसलाई निम्नानुसार उल्लेख गर्न सकिन्छ :

समकोणी $\triangle ABC$ मा A लाई प्रसङ्ग कोण मान्दा,

AB = आधार (b), BC = लम्ब (p) र AC = कर्ण (h) हुन्छ ।



$$\text{जहाँ } \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{p}{h} = \frac{BC}{AC}, \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{b}{h} = \frac{AB}{AC} \text{ र } \tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{p}{b} = \frac{BC}{AB}$$

पुनः यी अनुपातहरूका व्युत्क्रम अनुपातहरूलाई निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ :

$$\operatorname{Cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{p/h} = \frac{h}{p} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{b/h} = \frac{h}{b} = \frac{AC}{AB} \text{ र}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{p/b} = \frac{b}{p} = \frac{AB}{BC} \text{ हुन्छ ।}$$

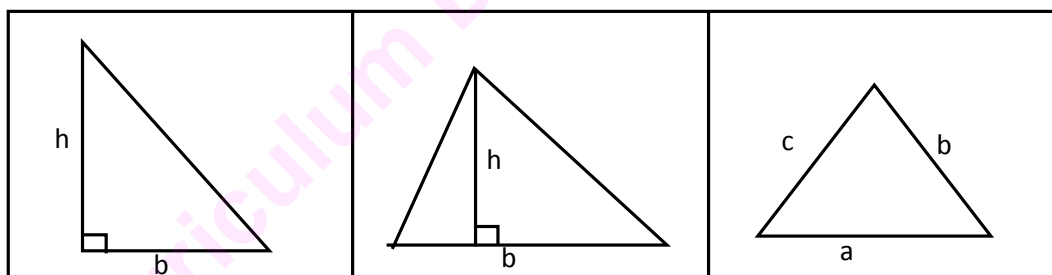
यी अनुपातहरूमा आधारभूत कोणहरूको मान निम्न तालिकामा भर्नुहोस् :

कोण अनुपात	0°	30°	45°	60°	90°
Sin					
Cos					
Tan					
Cosec					
Sec					
Cot					

माथिका त्रिकोणमितीय अनुपातहरू तथा तिनीहरूमा विशिष्ट कोणहरूका मानहरू हामीले कक्षा 9 मा अध्ययन गरिसकेका छौं । अब हामी त्रिभुज तथा चतुर्भुजका क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउने भनी अध्ययन गर्दछौं ।

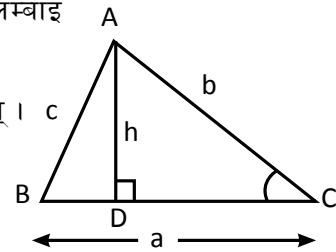
16.1 त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle and Quadrilateral)

दिइएका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, सोचेर सबैले आआफ्नो कापीमा सूत्र लेख्नुहोस् ।



अर्थात् माथिका त्रिभुजहरूमा पहिलो र दोस्रोमा आधार र उचाइ दिइएको अवस्था छ भने तेस्रोमा तिन ओटै भुजाको लम्बाइ दिइएको छ । यस्ता त्रिभुजका क्षेत्रफलका बारेमा हामीले यसअघि नै अध्ययन गरिसकेका छौं । यहाँ कुनै त्रिभुजका दुई ओटा भुजाको लम्बाइ र तिनीहरूबिचको कोणको नाप दिइएको अवस्थामा त्यसको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउने त्यस बारे अध्ययन गर्दछौं ।

मानौं, ABC एउटा त्रिभुज हो जसमा a, b, c तिन ओटा भुजाहरूको लम्बाइ हुन् । भुजाहरू a र b बिचको कोण $\angle ACB$ दिइएको छ । $AD \perp BC$ खिचौं । त्यसपछि $\triangle ABD$ र $\triangle ACD$ दुई ओटा समकोणी त्रिभुजहरू हुन् । जसमा $AD = h$ छ ।



अब समकोण $\triangle ADC$ मा $\angle C$ लाई प्रसङ्ग कोण मान्दा,

$$\sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{h}{b}$$

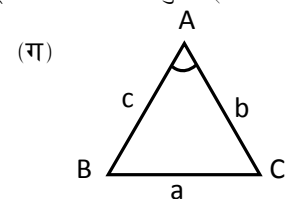
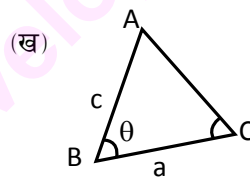
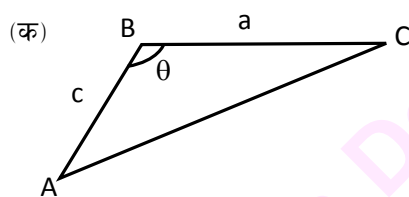
अथवा $h = b \sin C$ हुन्छ ।

अब $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}$ आधार x उचाइ हुन्छ ।

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} BC \times AD \\ &= \frac{1}{2} a \cdot b \sin C \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ को क्षेत्रफल (A) } = \frac{1}{2} ab \sin C \text{ वर्ग एकाइ हुन्छ ।}$$

यसैगरी तल दिइएका फरक फरक त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।



दिइएको त्रिभुज अधिककोणी भए तापनि माथिको सूत्र लागु हुन्छ ।

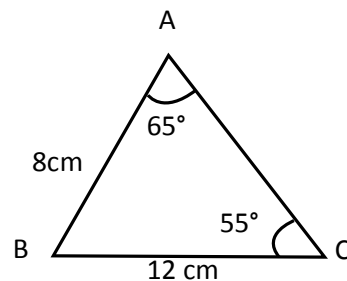
जस्तै : चित्र (क) मा $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} ac \sin \theta$

चित्र (ख) मा $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} ac \sin \theta$

चित्र (ग) मा $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} bc \sin A$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएका त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ दिइएको

$$\angle A = 65^\circ, \angle C = 55^\circ$$

हामीलाई थाहा छ, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$$\text{अथवा, } 65^\circ + \angle B + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\text{अथवा, } \angle B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{पुनः } AB = c = 8 \text{ cm र}$$

$$BC = a = 12 \text{ cm}$$

$\triangle ABC$ को क्षेत्रफल (A) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ } \triangle ABC \text{ को क्षेत्रफल (A)} &= \frac{1}{2} a.c.\sin B \quad [\because a, c \text{ र } \angle B \text{ दिएकामा}] \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \cdot \sin 60^\circ \\ &= 4 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 24\sqrt{3} \text{ वर्ग से.मि.} \end{aligned}$$

उदाहरण 2

$\triangle XYZ$ मा $\angle X = 30^\circ$, $y = 14 \text{ cm}$ र $z = 15 \text{ cm}$ छ भने $\triangle XYZ$ को क्षेत्रफल कति होला ?

समाधान

यहाँ $\triangle XYZ$ मा $\angle X = 30^\circ$ $y = 14 \text{ cm}$ र $z = 15 \text{ cm}$

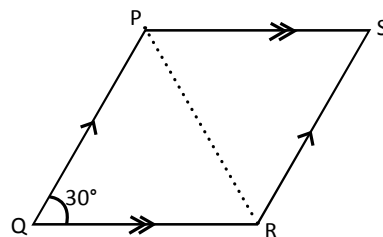
$\triangle XYZ$ को क्षेत्रफल (A) = ?

$$\begin{aligned} \angle XYZ \text{ को क्षेत्रफल (A)} &= \frac{1}{2} y.z. \sin X \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= \frac{1}{2} 14 \times 15 \cdot \sin 30^\circ \text{ cm}^2 \\ &= 7 \times 15 \times \frac{1}{2} \text{ cm}^2 \\ &= 52.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 3

समानान्तर चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल 48 वर्ग से.मि. छ।

यदि $\angle PQR = 30^\circ$ र $PQ = 8\text{cm}$ भए QR को मान पत्ता लगाउनुहोस्।



समाधान

यहाँ समानान्तर चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल (A) = 48 वर्ग से.मि.

अथवा, ΔPQR को क्षेत्रफल + ΔPRS को क्षेत्रफल = 48 cm^2

अथवा, $2\Delta PQR$ को क्षेत्रफल = 48 cm^2

अथवा, ΔPQR को क्षेत्रफल = $\frac{48}{2} = 24\text{ cm}^2$ हुन्छ।

अथवा, $\frac{1}{2} p \cdot \sin Q = 24\text{ cm}^2$

अथवा, $\frac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot p \cdot \sin 30^\circ = 24\text{ cm}^2$

अथवा $4p \cdot \frac{1}{2} \text{ cm} = 24\text{ cm}^2$

अथवा, $p \cdot 2\text{ cm} = 24\text{ cm}^2$

अथवा, $p = \frac{24\text{ cm}^2}{2\text{ cm}} = 12\text{ cm}$

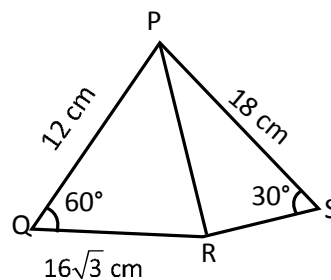
अतः $p = QR = 12\text{ cm}$

उदाहरण 4

संगैको चित्रमा $PQ = 12\text{ cm}$, $QR = 16\sqrt{3}\text{ cm}$, $PS = 18\text{ cm}$,

$\angle Q = 60^\circ$ र $\angle S = 30^\circ$ र ΔPRS को क्षेत्रफल ΔPQR को

क्षेत्रफलको $\frac{1}{4}$ भए RS को नाप पत्ता लगाउनुहोस्।



समाधान

यहाँ, $PQ = 12\text{ cm}$, $QR = 16\sqrt{3}\text{ cm}$, $PS = 18\text{ cm}$, $\angle Q = 60^\circ$ र $\angle S = 30^\circ$ छ।

तसर्थ, ΔPQR को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QR \cdot \sin 60^\circ$ वर्ग एकाइ

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \times 16\sqrt{3}\text{ cm} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$$

$$= 3 \times 16 \times 3\text{ cm}^2$$

$$= 144\text{ cm}^2$$

फेरि ΔPRS को क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}$ ΔPQR को क्षेत्रफल

अथवा, $PS \cdot RS \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \times 144 \text{ cm}^2$

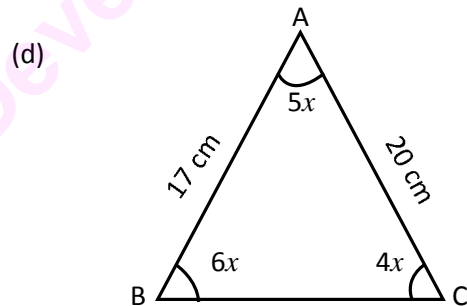
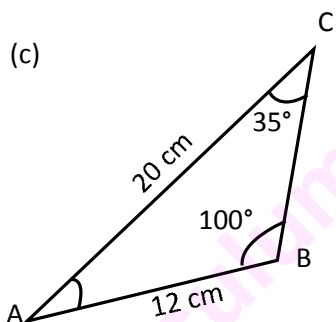
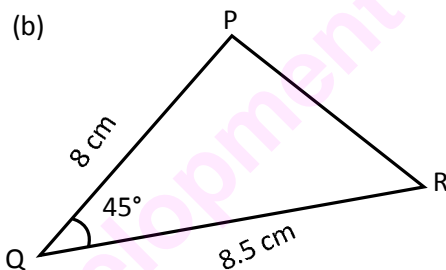
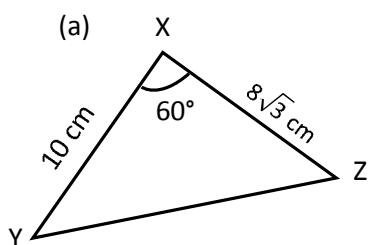
अथवा, $18 \cdot RS \cdot \frac{1}{2} = 36 \text{ cm}$

अथवा, $9 RS = 36 \text{ cm}$

$$RS = \frac{36}{9} = 4 \text{ cm}$$

अभ्यास 16.1

1. तलका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



2. निम्न लिखित प्रश्नहरूमा थाहा नभएको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $b = 2.7 \text{ cm}$ $c = 4 \text{ cm}$ $\angle A = 90^\circ$ ΔABC को क्षेत्रफल = ?

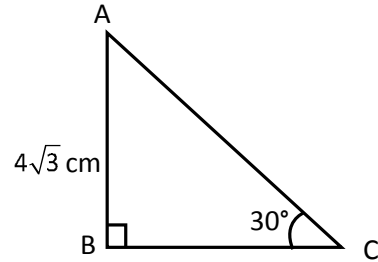
(b) $a = 7.1 \text{ cm}$ $b = 3.5 \text{ cm}$ $\angle C = 30^\circ$ ΔABC को क्षेत्रफल = ?

(c) $XY = 5 \text{ m}$ $\angle Y = 30^\circ$ ΔXYZ को क्षेत्रफल = 21 m^2 $YZ = ?$

(d) ΔPQR को क्षेत्रफल = 1047.89 cm^2 $QR = 44 \text{ cm}$ $PQ = 55 \text{ cm}$ $\angle Q = ?$

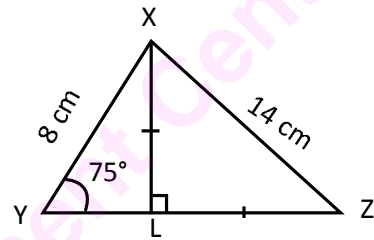
(e) $\angle B = 110^\circ$ $\angle C = 25^\circ$ $AB = 10 \text{ cm}$ ΔABC को क्षेत्रफल = 100 cm^2 $AC = ?$

- 3.(a) दिइएको $\triangle ABC$ मा $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$ र
 $AB = 4\sqrt{3}$ cm भए $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल पत्ता
 लगाउनुहोस् ।

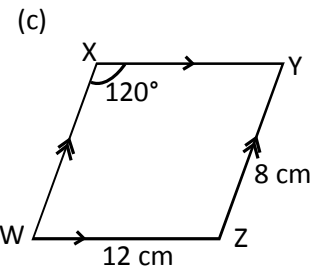
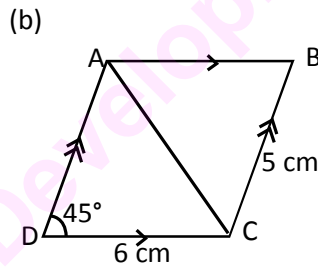
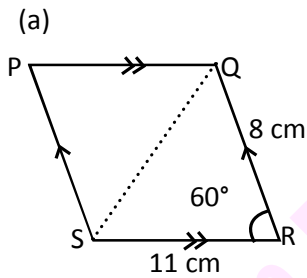


- (b) $\triangle PQR$ मा $PR = 4$ cm, $QR = 7$ cm, $\angle P = 110^\circ$ र $\angle Q = 40^\circ$ भए $\triangle PQR$ को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

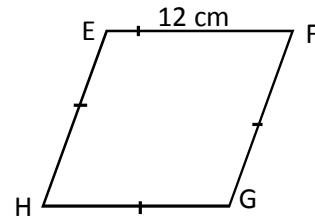
- (c) दिइएको चित्रमा $\angle Y = 75^\circ$, $XY = 8$ cm, $XZ = 14$ cm,
 $XL \perp YZ$ र $XL = LZ$ भए $\triangle XYZ$ को क्षेत्रफल पत्ता
 लगाउनुहोस् ।



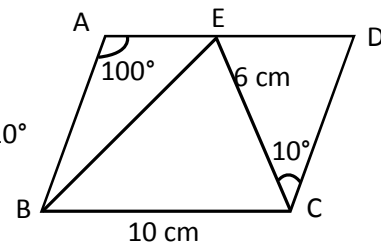
4. तल दिइएका समानान्तर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



- 5.(a) EFGH एउटा समबाहु चतुर्भुज हो जसको क्षेत्रफल
 72cm^2 , $EF = 12$ cm भए $\angle EFG$ र $\angle FGH$ को
 मान निकाल्नुहोस् ।

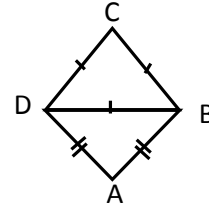


- (b) दिइएको समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा $\triangle BCE$ छ
 जसमा $\angle A = 100^\circ$, $BC = 10$ cm, $EC = 6$ cm, $\angle ECD = 10^\circ$
 भए $\triangle BCE$ को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

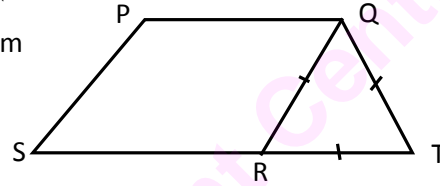


6.(a) चित्रमा $\triangle ABD$ समद्विबाहु र $\triangle BCD$ समबाहु त्रिभुज हुन् ।

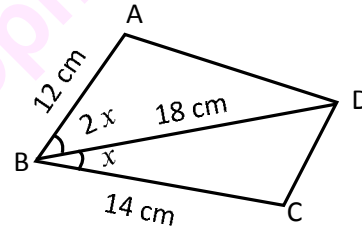
यदि $\angle ADC = 105^\circ$, $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $BC = 8$ cm भए $ABCD$ को क्षेत्रफल कति हुन्छ ?



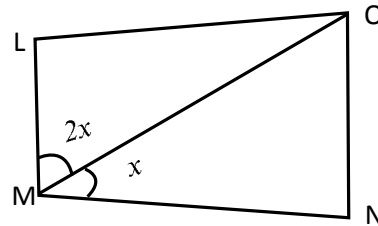
(b) दिइएको चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो र QRT एउटा समबाहु त्रिभुज हो । यदि $SP = 4\sqrt{3}$ cm र $SR = 8$ cm भए समलम्ब चतुर्भुज PQTS को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



(c) सँगैको चित्रमा $AB = 12$ cm, $BD = 18$ cm, $BC = 14$ cm, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABD$ र $\triangle ABD$ को क्षेत्रफल 54 वर्ग से.मि. भए चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



(d) दिइएको चतुर्भुज LMNO मा $\angle LMO = 2\angle OMN$, $OM = MN = 10$ cm, $LM = 6$ cm, $\angle MON = 75^\circ$ भए चतुर्भुज LMNO को क्षेत्रफल कति हुन्छ ?



7. पाँच पाँच जना विद्यार्थीहरूको समूहहरू बनाउनुहोस् । लट्ठी, काठ वा जुस पाइप र तारको प्रयोग गरी एक एक ओटा चतुर्भुज र त्रिभुजका नमुनाहरू निर्माण गर्नुहोस् । उक्त नमुनाको चित्र बनाएर त्यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

16.2 उचाइ र दुरी (Height and Distance)

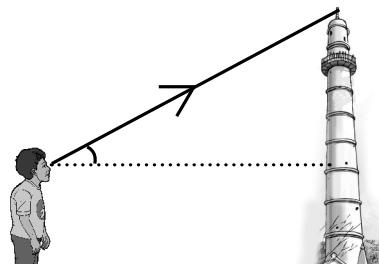
तलका तिन ओटा अवस्थाहरूका बारेमा कक्षाकोठामा छलफल गरी समूहमा साझा निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (क) समकोणी त्रिभुजमा समकोणबाहेकका एउटा कोण र एउटा भुजाको नाप थाहा भएमा बाँकी भुजाहरूको लम्बाइ कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?
- (ख) विद्यालयको प्राङ्गणमा बसेर विद्यालयभित्र रहेको खम्बा वा मन्दिरको उचाइ कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?
- (ग) नदीको किनारमा रहेको एउटा भवनको माथिल्लो तलाबाट नदीको चौडाइ कसरी पत्ता लगाउन सकिनेला ?

माथिको पहिलो अवस्थाका बारेमा हामीले अगिल्लो पाठमा अध्ययन गरिसकेका छौं । दोस्रो र तेस्रो अवस्थामा क्रमशः उचाइ र दुरी पत्ता लगाउनुपर्ने व्यावहारिक समस्या छन् । तिनीहरूका बारेमा अब हामी छलफल गर्ने छौं ।

(a) उन्नतांश कोण (Angle of Elevation) :

माथिको दोस्रो अवस्थामा विद्यालयको चउरबाट धरहराको टुप्पो मा हेर्दा जमिनसँग समानान्तर हुने रेखासँग दृष्टि रेखाले बनाउने कोण उन्नतांशकोण हो ।



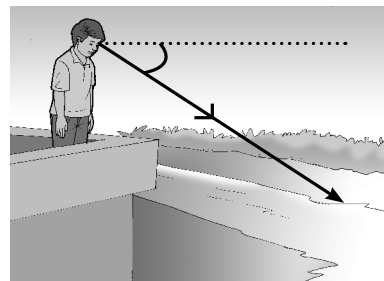
कुनै पनि माथितिर रहेको वस्तुलाई तलबाट हेर्दा दृष्टिरेखाले जमिनसँग समानान्तर हुने रेखासँग बनाएको कोणलाई उन्नतांश कोण (angle of elevation) भनिन्छ ।

(b) अवनति कोण (Angle of Depression) :

माथिको तेस्रो अवस्थामा कुनै एउटा भवनबाट नदीको किनारामा

हेर्दा अवलोकनकर्ताको आँखा र नदी किनाराको बिन्दु जोड्ने दृष्टि रेखाले क्षितिजसँग बनाएको कोण अवनति कोण हो ।

कुनै अग्लो स्थानबाट होचो भागमा रहेको कुनै वस्तुलाई हेर्दा दृष्टिरेखाले क्षितिज रेखासँग बनाएको कोणलाई अवनति कोण (angle of depression) भनिन्छ ।



सँगैको चित्रका $\angle ABC$ अवनति कोण हो भने $\angle BCD$ उन्नतांश कोण हो । जहाँ AB (क्षितिज रेखा)

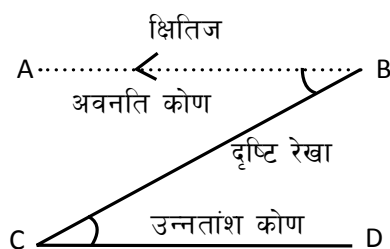
CD सँग समानान्तर छ ।

त्यस कारण $\angle ABC = \angle BCD$ हुन्छ

अर्थात्, अवनति कोण = उन्नतांश कोण हुन्छ ।

यी कोणहरू नाप्ने यन्त्रलाई क्लाइनोमिटर

(clinometer) भनिन्छ ।



उदाहरण 1

एउटा 24 m अग्लो खम्बाको टुप्पोबाट यसलाई अड्याउनका लागि तार लगेर भुइँमा गाडिएको छ ।

यदि उक्त तारले भुइँसँग 60° को कोण बनाउँछ भने तारको लम्बाइ कति होला ?

समाधान

यहाँ मानौं AB खम्बाको उचाइ र BC तारको लम्बाइ हो । जहाँ, $AB = 24\text{m}$ र $\angle ACB = 60^\circ$

समकोणी $\triangle ABC$ मा $\sin 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

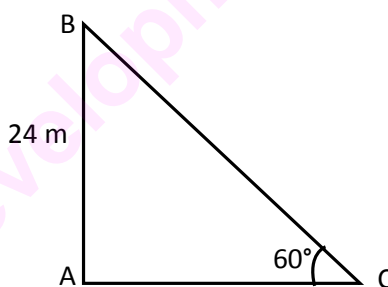
$$\text{अथवा, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{BC}$$

$$\text{अथवा, } BC = \frac{24 \times 2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8 \times 3 \times 2}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$= 8 \times 2 \times \sqrt{3} \text{ m}$$

$$= 16\sqrt{3} \text{ m}$$



तसर्थ तारको लम्बाइ $= 16\sqrt{3} \text{ m}$

उदाहरण 2

परिधि 176m भएको एउटा वृत्ताकार चउरको विचमा एउटा अग्लो खम्बा गाडिएको छ । यदि उक्त

चउरको छेउबाट खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा 30° को कोण बन्दछ भने उक्त खम्बाको उचाइ कति होला ?

समाधान

यहाँ, मानौं O वृत्ताकार चउरको केन्द्रविन्दु हो भने OQ अर्धव्यास हो ।

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको परिधि $= 176 \text{ m}$

$$\text{अथवा, } 2\pi r = 176 \text{ m}$$

$$\text{अथवा, } 2 \times \frac{22}{7} \times r = 176$$

$$\text{अथवा, } r = 28\text{m} = OQ$$

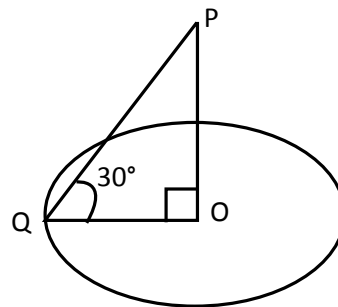
फेरि समकोणी $\triangle POQ$ मा

$$\tan 30^\circ = \frac{OP}{OQ}$$

$$\text{अथवा, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{OP}{28}$$

$$\text{अथवा, } OP = \frac{28}{\sqrt{3}} = 16.17$$

$$\text{अतः खम्बाको उचाइ} = 16.17\text{m}$$



उदाहरण 3

1.5 मिटर अग्लो मानिस 51.5 मिटर अग्लो रुखको ठिक अगाडि उभिएर रुखको टुप्पोमा हेर्दा 45° को कोण बनाउँछ भने रुख र मानिसबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

$$\text{मानौं, } BC = \text{मानिसको उचाइ} = 1.5\text{m र}$$

$$\text{रुखको उचाइ} = AD = 51.5\text{ m}$$

$$\text{तसर्थ } AE = AD - BC = 51.5 - 1.5 = 50\text{ m}$$

$$\angle ABE = 45^\circ$$

$$\text{अब रुख र मानिसबिचको दुरी } DC = EB = ?$$

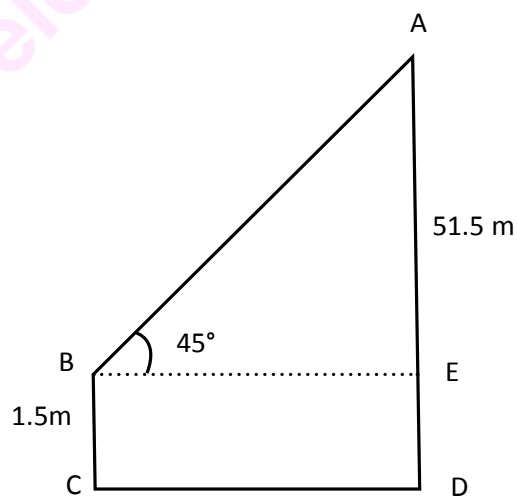
अब, समकोणी त्रिभुज ABE मा

$$\tan 45^\circ = \frac{AE}{BE}$$

$$\text{अथवा, } 1 = \frac{50\text{m}}{BE}$$

$$\text{अथवा, } BE = 50\text{ m}$$

तसर्थ उक्त मानिस रुखबाट 50m को दुरीमा उभिएको रहेछ ।



उदाहरण 4

एउटा 150 m अग्लो टावर टावरको टुप्पोबाट 60m को दुरीमा रहेको घरको छतमा हेर्दा बन्ने अवनति कोण 30° भएमा घरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मानौं $AC =$ टावरको उचाइ $= 150$ m र

$BE = CD =$ टावरदेखि घरसम्मको दुरी $= 60$ m

अवनति कोण $\angle FAE = \angle AEB = 30^\circ$

$DE =$ घरको उचाइ $= ?$

समकोणी $\triangle ABE$ मा

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BE}$$

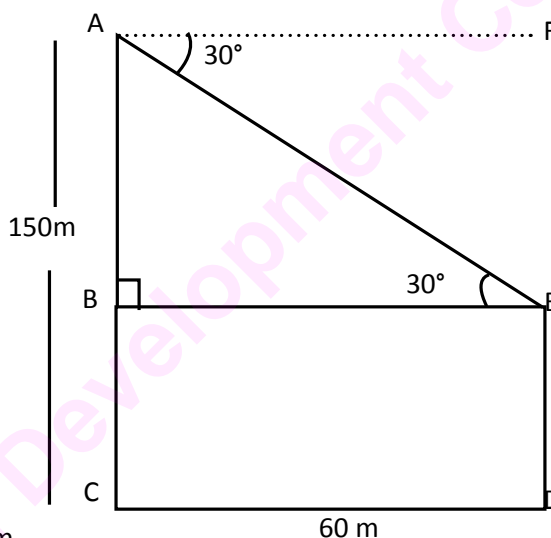
$$\text{अथवा, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AC - BC}{60 \text{ cm}}$$

$$\text{अथवा, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150 - BC}{60}$$

$$150 - BC = \frac{60}{\sqrt{3}}$$

$$= 150 - 20\sqrt{3} = 115.36 \text{ m}$$

अतः घरको उचाइ $= 115.36$ m



उदाहरण 5

एउटा $25\sqrt{3}$ m अग्लो रुखको टुप्पोमा पाकेको फल छ । उक्त रुखभन्दा 72 मिटर पर रहेको $\sqrt{3}$ m अग्लो मानिसले उक्त फललाई निसाना लगाउन कति डिग्रीको कोण बनाएर मट्याङ्ग्रा हान्नु पर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, रुखको उचाइ $AB = 25\sqrt{3}$ m

मानिसको उचाइ $CD = EB = \sqrt{3} \text{ m}$

$DE = BC = 72 \text{ m}$ र $\angle ADE = ?$

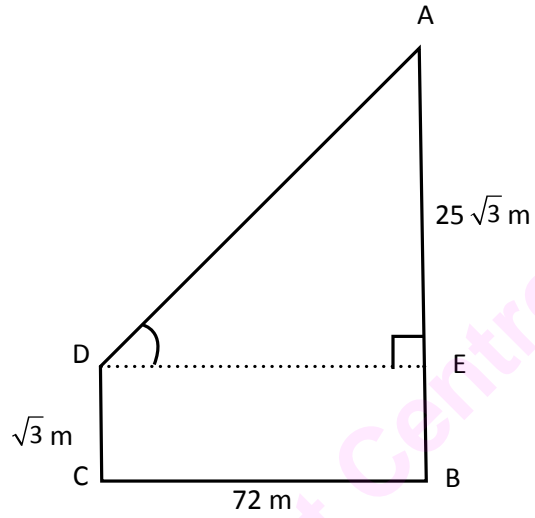
हामीलाई थाहा छ,

$$\tan \theta = \frac{AE}{ED} = \frac{AB - EB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{25\sqrt{3} - \sqrt{3}}{72} = \frac{24\sqrt{3}}{72}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ$$



तसर्थ उक्त फललाई निसाना लगाउन 30° को कोणमा मट्याङ्ग्रा हान्नुपर्छ ।

अभ्यास 16.2

- 1.(a) अवलोकन बिन्दुबाट $19\sqrt{3} \text{ m}$ दुरीमा रहेको एउटा खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 30° पाइयो भने खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) एक जना मानिसले 30 m को दुरीमा रहेको रुखको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 60° पाउँछ । यदि मानिसको उचाइ 1.64 m भए रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) 1.7 m अग्लो मानिसले 25 m को दुरीमा रहको स्तम्भको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 45° पायो भने स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) एक जना सर्वेक्षकले गुम्बाको उचाइ नाप्न चाहन्छन् । यदि उक्त गुम्बाको टुप्पोलाई 40 मिटर फरकमा रहेका दुई ओटा बिन्दुबाट अवलोकन गर्दा क्रमश 45° र 60° को कोण पाएछ भने गुम्बाको उचाइ कति होला ?
- (e) 6 m अग्लो घरको छानाबाट एउटा स्मारक स्तम्भको टुप्पो अवलोकन गर्दा उन्नतांश कोण 60° पाइयो । यदि घर र स्मारकबिचको दुरी $24\sqrt{3} \text{ m}$ भएमा स्मारकको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 2.(a) 60 m व्यास भएको एउटा वृत्ताकार खेतको बिचमा एउटा स्तम्भ गाडिएको छ । उक्त खेतको परिधिबाट एउटा बिन्दुबाट सो स्तम्भको टुप्पोमा हेर्दा 60° को कोण बन्दछ भने उक्त स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (b) एउटा वृत्ताकार पोखरीको वरिपरि 1.68m अग्लो पर्खाल लगाइएको छ । उक्त पोखरीको बिचमा रहेको खम्बाको टुप्पोमा पर्खालबाट हेर्दा 60° को उन्नतांश कोण बन्दछ । यदि पोखरीको व्यास 20m भए पानीको सतहदेखि माथिको खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) 120m व्यास भएको वृत्ताकार पोखरीको ठिकबिचमा एउटा खम्बा ठाडो पारेर गाडिएको छ । पोखरीको सतहको परिधिबाट उक्त खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा 30° को कोण बनेको पाइयो । यदि पोखरीको गहिराइ 2m भए खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) एउटा वृत्ताकार पोखरीको केन्द्रमा एउटा खम्बा ठाडो उभ्याइएको छ । पानीको सतहदेखि खम्बाको टुप्पोको उचाइ 30 m छ र पोखरीको परिधिमा एउटा बिन्दुबाट खम्बाको टुप्पोमा 60° को कोण भएमा पोखरीको अर्धव्यास र परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (e) एउटा आयतकार चउरको लम्बाइ पट्टिको डिलमा एउटा 40m अग्लो सुरिलो रुख छ । यदि उक्त आयतकार चउरको लम्बाइको दुई किनाराको बिन्दुबाट उक्त रुखको टुप्पोमा हेर्दा क्रमशः 60° र 30° को उन्नतांश कोणहरू बनेको पाइयो भने उक्त चउरको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 3.(a) एउटा 16 m अग्लो घरको छतबाट 38 m अग्लो रुखको टुप्पोमा हेर्दा 30° को उन्नतांश कोण बन्दछ भने उक्त रुख र घरबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) 1.7 m अग्लो एउटा मानिसले आफू अगाडि रुखको टुप्पोमा रहेको चरा अवलोकन गर्दा 60° को उन्नतांश कोण पायो । रुखको उचाइ 53.7m छ भने रुख र मानिसबिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।
- (c) एउटा 2.5 मिटर अग्लो पर्खालबाट 3.76 मिटर उचाइ भएको स्तम्भ x मिटर दुरीमा छ, यदि स्तम्भको टुप्पोमा पर्खालबाट अवलोकन गर्दा 30° को उन्नतांश कोण पाइयो भने पर्खाल र स्तम्भबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (d) एउटा घर र रुखको उचाइ क्रमशः 5m र 17m छ । यदि घरको छानाबाट रुखको टुप्पोमा हेर्दा 60° को उन्नतांश कोण पाइयो भने रुख र घरबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 4.(a) $45\sqrt{3}$ m अग्लो एउटा स्तम्भको टुप्पोबाट 6.6m अग्लो घरको टुप्पोमा हेर्दा 30° को अवनति कोण बन्छ भने स्तम्भ र घर बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) 91m अग्लो धरहराको टुप्पोबाट समतलमा रहेको 12m अग्लो घरको छतमा हेर्दा 60° को अवनति कोण पाइयो भने धरहरा र घरबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) 80 m अग्लो एउटा भवनको छतबाट नजिकै रहको 20m अग्लो स्तम्भको टुप्पोमा अवलोकन गर्दा 45° को अवनति कोण पाइयो भने स्तम्भ र भवनबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (d) दुई सिधा खम्बाहरू 60 मिटरको दुरीमा छन् । पहिलो खम्बाको टुप्पोको अवनति कोण, 150 m उचाइ भएको दोस्रो खम्बाको टुप्पोबाट हेर्दा 30° को पाइयो भने पहिलो खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 5.(a) 1.54 मिटर अग्लो मानिसले 30m को दुरीमा रहेको 53.5 m स्तम्भको टुप्पो अवलोकन गर्दा बन्ने उन्नतांश कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (b) अवलोकन बिन्दुबाट बाट 240 m पर रहको $80\sqrt{3}$ m अग्लो धरहराको टुप्पो अवलोकन गर्दा बन्ने उन्नतांश कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (c) एक जना मानिस स्तम्भको टुप्पोबाट अगाडि रहेको घरको छत अवलोकन गर्दछ । स्तम्भ र घरको उचाइ क्रमशः 60m र 25m छ र ती दुईबिचको दुरी 35m छ भने मानिसले बनाएको अवनति कोण निकाल्नुहोस् ।
- (d) निमाले 53.6m अग्लो रुखको टुप्पोबाट भुईँमा रहेको बाघ अवलोकन गर्दछ । यदि रुख र बाघबिचको दुरी 30.95 m भए रुखको टुप्पोबाट निमाले बाघ हेर्दा बन्ने अवनति कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (e) 30m अग्लो विद्यालय भवनको छतमा जानको निमित्त 30° को झुकावमा च्याम्प बनाउनु पर्‍यो भने,
- (i) सो च्याम्पको लम्बाइ कति होला ?
- (ii) विद्यालय भवन र च्याम्पको फेद बिचको दुरी कति होला ?
6. दुई दुई जनाको समूह बनाउनुहोस् । प्रत्येक समूहले विद्यालय क्षेत्र वरिपरिका रुखहरू, मन्दिरहरू, गुम्बाहरू, चर्चहरू र अन्य भवनहरूको त्रिकोणमितीय विधिबाट उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् । यसरी समूहले गरेका कार्यलाई चित्रसहित कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

17.0. पुनरावलोकन (Review)

- एकाइ परीक्षामा 5 जना विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क 40, 45, 50, 55 र 60 छ भने औसत प्राप्ताङ्क कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- बढ्दो अथवा घट्दो क्रममा मिलाइएको श्रेणीलाई दुई बराबर भाग लगाउने पदको मूल्यलाई के भनिन्छ ।
- सबभन्दा बढी दोहरिएको पदको मूल्यलाई के भनिन्छ ।
- नेपालमा बस्ने नागरिकको हालको औसत आयु र औसत आय कति छ ? खोजी गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- वर्गीकृत तथ्याङ्क भन्नाले के बुझिन्छ ? समूहमा छलफल गरी उदाहरणसहित प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 7, 8, 15, 17, 19, 14, 12, 11, 17, 18 लाई 0-4, 4-8, 8-12, 12-16, 16-20 वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिका बनाइ प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

17.1 वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक (Mean of grouped data)

आफ्नो टोल अथवा छिमेकमा भएका विभिन्न उमेर समूहका मानिसहरूको सङ्ख्या अनुमान गरी तल दिइएको तालिका भर्नुहोस् :

उमेर (वर्षमा)	मानिसहरूको सङ्ख्या (f)	उमेरको मध्यक मान (m)	fm
0-15			
15-30			
30-45			
45-60			
60-75			
75-90			
	$\Sigma f =$		$\Sigma fm =$

$\frac{\Sigma fm}{\Sigma f}$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाई र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

वर्गीकृत तथ्याङ्कमा मध्यमान (Mean value) पत्ता लगाउन निम्न चरणहरू अपनाउनुपर्छ ।

(क) विभिन्न वर्गको मध्यबिन्दु 'm' को मान पत्ता लगाउनुपर्छ ।

(ख) प्रत्येक वर्गको मध्यमान (mid value) लाई सम्बन्धित बारम्बारताले गुणन गरी गुणन फल $\sum fm$ अथवा $\sum fx$ गणना गर्नुपर्दछ । [m र x ले एउटै राशिको मानलाई जनाउँछन् ।]

(ग) योगफल $\sum fm$ अथवा $\sum fx$ लाई बारम्बारताहरूको योगफल $\sum f$ अथवा N ले भाग गरिन्छ ।

$$\text{त्यसैले, मध्यक मान } (\bar{X}) = \frac{\sum fm}{\sum f} \text{ अथवा } \frac{\sum fx}{N} \text{ हुन्छ ।}$$

मध्यक मान निकाल्न अन्य विधिहरू पनि प्रयोग गर्न सकिन्छन्, जुन उदाहरणमा प्रष्ट पारिएको छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएका तथ्याङ्कको मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् :

तौल (कि.ग्रा.) (X)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	4	6	10	15	5

समाधान

माथि दिइएका तथ्याङ्कलाई निम्नानुसार तालिकामा प्रस्तुत गर्दा :

तौल (कि.ग्रा.मा) (X)	मध्यक मान (m)	बारम्बारता (f)	f x m
10-20	15	4	60
20-30	25	6	150
30-40	35	10	350
40-50	45	15	675
50-60	55	5	275
		$\sum f = 40$	$\sum fm = 1510$

$$\begin{aligned} \text{अब मध्यक मान } (\bar{X}) &= \frac{\sum fm}{\sum f} \\ &= \frac{1510}{40} \\ &= 37.75 \text{ कि.ग्रा.} \end{aligned}$$

वैकल्पिक विधिहरू

1. छोटकरी विधि (Short cut method/deviation method)

(क) मध्यमूल्यको नजिक पर्ने कल्पित मध्यक (assumed mean), A = 35 मान्नुहोस् ।

(ख) m बाट A घटाउँदा आउने विचलन (d) = m - A पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $\sum fd$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) मध्यक $(\bar{X}) = A + \frac{\sum fd}{N}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

m	d = m - A	f	fd
15	-20	4	-80
25	-10	6	-60
35	0	10	0
45	10	15	150
55	20	5	100
		$\sum f = 40$	$\sum fd = 110$

$$\begin{aligned}\text{अतः, मध्यक } (\bar{X}) &= A + \frac{\sum fd}{N} \\ &= 35 + \frac{110}{40}\end{aligned}$$

$$= 35 + 2.75 = 37.75$$

2. पद विचलन विधि (step - deviation method)

(क) $d = m - A$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) प्रत्येक विचलन 'd' लाई समान गुणन खण्ड अथवा वर्गहरूको समानान्तर h अथवा (i) ले भाग गर्नुहोस्, जसलाई $d' = d/h$ ले जनाउनुहोस् ।

(ग) $\sum fd'$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) मध्यक $(\bar{X}) = A + \frac{\sum fd'}{N} \times h$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

m	d = m - A = m - 35	f	d' = d/10	fd'
15	-20	4	-2	-8
25	-10	6	-1	-6
35	0	10	0	0
45	10	15	1	15
55	20	5	2	10
		$N = 40$		$\sum fd' = 11$

$$\begin{aligned}\text{अब, मध्यक मान } (\bar{X}) &= A + \frac{\sum fd'}{N} \times h \\ &= 35 + \frac{11}{40} \times 10 \\ &= 35 + 2.75 = 37.75\end{aligned}$$

उदाहरण 2

तल दिइएका तथ्याङ्कमा पसल सङ्ख्या र दैनिक बिक्री सम्बन्धी विवरण दिइएको छ । यदि बिक्रीको मध्यक मान (\bar{x}) रु. 24625 भए अज्ञात पसलको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

बिक्री (रु. हजारमा) (X)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
पसल सङ्ख्या (f)	5	25	?	18	7

समाधान

मानौं, अज्ञात बारम्बारता = 'a'

अब, दिइएको तथ्याङ्कलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्दा :

X	m	f	fm
0-10	5	5	25
10-20	15	25	375
20-30	25	a	25a
30-40	35	18	630
40-50	45	7	315
		N = 55+a	$\sum fm = (1345 + 25a)$

अब, सूत्रअनुसार $\bar{x} = \frac{\sum fm}{N}$

अथवा, $24625 = \frac{1345 + 25a}{55 + a} \times 1000$ [x को मान हजारमा भएकाले 1000 ले गुणन गरिएको]

अथवा, $24625 (55 + a) = (1345 + 25a) \times 1000$

अथवा, $1354375 + 24625a = 1345000 + 25000a$

अथवा, $1354375 - 1345000 = 25000a - 24625a$

अथवा, $9375 = 375a$

अथवा, $\frac{9375}{375} = a$

अथवा, $25 = a$

\therefore अज्ञात बारम्बारता = 25

अभ्यास 17.1

1. तल दिइएका वर्गाङ्कित तथ्याङ्कको मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् :

(a)	उमेर (वर्षमा)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
	मानिसहरूको सङ्ख्या	10	20	60	30	20

(b)	तौल (कि.ग्रा.)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
	मानिसहरूको सङ्ख्या	2	8	11	12	11	6

(c)	प्राप्ताङ्क	47.5-52.5	52.5-57.5	57.5-62.5	62.5-67.5	67.5-72.5	72.5-77.5
	विद्यार्थी सङ्ख्या	5	12	15	14	10	4

(d)	खर्च (रु. लाखमा)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
	विद्यालय सङ्ख्या	4	6	10	20	6	4

2.(a) तल दिइएका आँकडाबाट 10 श्रेणीको अन्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक निकाल्नुहोस् :

7, 8, 36, 36, 47, 18, 31, 32, 39, 16, 23, 19, 9, 41, 49, 22, 29, 51, 17, 49, 59, 12, 21, 24, 31,

(b) तल 60 जना विद्यार्थीहरूको 75 पूर्णाङ्कको एउटा परीक्षाको प्राप्ताङ्क विवरण दिइएको छ । यस आँकडालाई 10 श्रेणीको अन्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

6, 78, 68, 25, 36, 38, 10, 17, 48, 35, 38, 39, 58, 60, 35, 40, 35, 45, 56, 50, 31, 46, 33, 48, 60, 35, 41, 42, 46, 50, 25, 38, 23, 45, 28, 28, 32, 30, 23, 25, 31, 29, 35, 10, 50, 60, 35, 31, 35, 48, 72, 41, 42, 55, 9, 5, 19, 35, 46, 30

3.(a) तल दिइएको आँकडाको मध्यक 41 भए 'a' को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थी सङ्ख्या	1	4	a	14	11	11	3	1

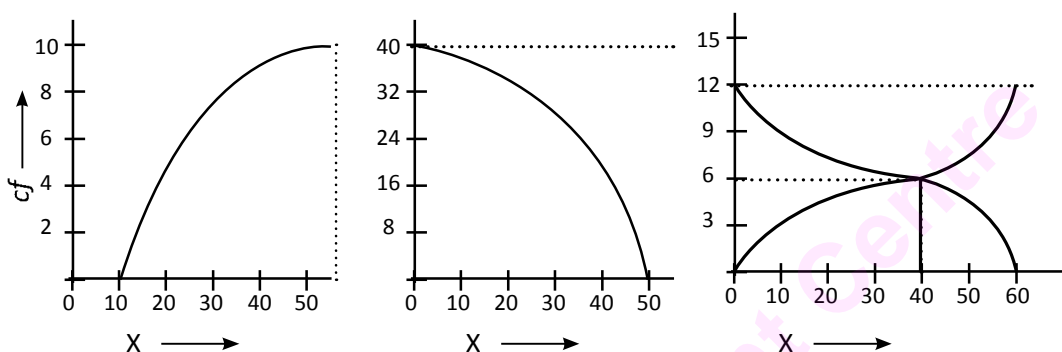
(b) तल दिइएको तथ्याङ्कको मध्यक 31 भए 'k' को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	6	k	20	6	4

4. विद्यालय अथवा विद्यालयबाहिर भएका फरक फरक उमेर समूहका 100 जना मानिसहरूको उमेर (वर्षमा) सोध्नुहोस् । उचित वर्ग अन्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

17.2 मध्यिका र चतुर्थांशहरू

(a) मध्यिका (Median)



दिइएका सञ्चित बारम्बारता वक्रहरूबाट $N/2$ औँ मा पर्ने पदको मूल्य र त्यसको वर्गान्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

आरोही (ascending) अथवा अवरोही (descending) क्रममा मिलाइएको श्रेणीलाई दुई बराबर भाग लगाउने पदको मूल्यलाई मध्यिक (median) भनिन्छ ।

कुनै वर्गीकृत तथ्याङ्कहरूलाई भन्दा सानो र भन्दा ठुलो सञ्चित बारम्बारता वक्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । यी दुई वर्गहरू एक आपसमा प्रतिच्छेदन हुन्छन् । उक्त प्रतिच्छेदन बिन्दुमा X - अक्षको मान नै मध्यिका हो ।

यदि N, L, f, cf र h ले क्रमशः जम्मा बारम्बारता, मध्यिका श्रेणीको तल्लो सीमा, मध्यिका श्रेणीको बारम्बारता, मध्यिका श्रेणीभन्दा एक श्रेणी अगिल्लो सञ्चित बारम्बारता र मध्यिका श्रेणीको श्रेणी अन्तरलाई जनाउँछन् भने,

मध्यिका $(M_d) = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$ सूत्र प्रयोग गरी गणना गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएका तथ्याङ्कको मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

उमेर (वर्षमा)	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
मानिसहरूको सङ्ख्या	4	10	22	27	30

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा :

उमेर वर्षमा (x)	f	c.f.
15-25	4	4
25-35	10	14
35-45	22	36
45-55	27	63
55-65	30	93
	$\Sigma f = N = 93$	

यहाँ, $\frac{N}{2} = \frac{93}{2} = 46.5$

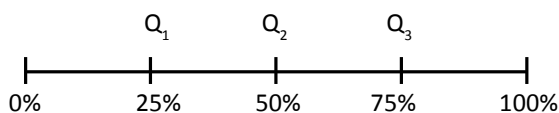
सञ्चित बारम्बारता हेर्दा 46.5 औं पदको निकटतम सञ्चित बारम्बारता 63 छ । त्यसैले मध्यिका पर्ने श्रेणी 45-55 हुन्छ ।

यहाँ, $L = 45$, $N/2 = 46.5$, $cf = 36$, $f = 27$, $h = 10$ हुन्छ ।

$$\begin{aligned}
 \text{त्यसैले, मध्यिका } (M_d) &= L + \frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} \times h \\
 &= 45 + \frac{46.5 - 36}{27} \times 10 \\
 &= 45 + \frac{10.5 \times 10}{27} \\
 &= 48.88 \text{ वर्ष} = 49 \text{ वर्ष (लगभग)}
 \end{aligned}$$

चतुर्थांशहरू (Quartiles)

पुरै तथ्याङ्कलाई चार बराबर भागमा बाँड्दा जम्मा कति ठाउँमा विभाजन गर्नुपर्ला ? छलफल गर्नुहोस् ।



अविच्छिन्न श्रेणीमा $\frac{N}{4}$ र $\frac{3N}{4}$ अथवा 25% र 75% को मानले Q_1 र Q_3 कुन वर्गमा पर्छ भनी देखाउँछन् । मध्यिका जस्तै चतुर्थांशहरूको मान पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

पहिलो चतुर्थांश अथवा तल्लो चतुर्थांश (lower quartile) $Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times h$ र तेस्रो चतुर्थांश

अथवा माथिल्लो चतुर्थांश (upper quartile) $Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h$ हुन्छ ।

L : पहिलो/तेस्रो चतुर्थांश वर्गको तल्लो सीमा

cf : पहिलो/तेस्रो चतुर्थांश वर्गभन्दा पहिलेको सञ्चित बारम्बारता

f : पहिलो/तेस्रो चतुर्थांश वर्गको बारम्बारता

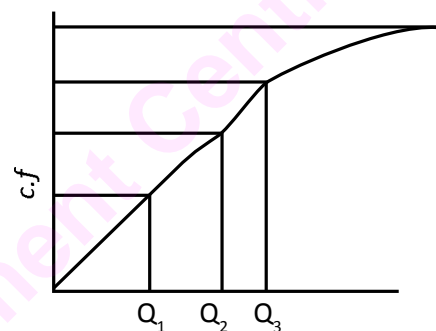
h : पहिलो/तेस्रो चतुर्थांश वर्गको बिस्तारलाई जनाउँछन् ।

चतुर्थांशलाई सञ्चित बारम्बारता

वक्रबाट पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

$$\text{मध्यिका } (Q_2) = \frac{\text{पहिलो चतुर्थांश } (Q_1) + \text{तेस्रो चतुर्थांश } (Q_3)}{2}$$

बाट पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ ।



उदाहरण 2

तलको तालिकामा दिइएको आँकडाअनुसार तल्लो 25% र माथिल्लो 25% विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेको न्यूनतम अङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थी सङ्ख्या	50	100	90	60	50

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा :

x	f	c.f
0-20	50	50
20-40	100	150
40-60	90	240
60-80	60	300
80-100	50	350

यहाँ, $\frac{N}{4} = \frac{350}{4} = 87.5$

तल्लो चतुर्थांश 20 - 40 मा पर्छ ।

यहाँ, $L = 20$, $\frac{N}{4} = 87.5$, c.f. = 50, $f = 100$, $h = 20$

$$\begin{aligned}\text{त्यसैले, } Q_1 &= L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times h \\ &= 20 + \frac{87.5 - 50}{100} \times 20 \\ &= 20 + \frac{37.5}{5} \\ &= 27.50\end{aligned}$$

$$\text{पुनः } \frac{3N}{4} = 3 \times \frac{350}{4} = 262.5$$

माथिल्लो चतुर्थांश 60 - 80 मा पर्छ ।

यहाँ, $L = 60$, $3N/4 = 262.5$, $cf = 240$, $f = 60$, $h = 20$

$$\begin{aligned}\text{फेरि, } Q_3 &= L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h \\ &= 60 + \frac{262.5 - 240}{60} \times 20 \\ &= 60 + 7.50 = 67.50\end{aligned}$$

उदाहरण 3

दिइएको तथ्याङ्कको मध्यिका 100 भए अज्ञात बारम्बारता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

ज्याला (रु. प्रतिघण्टा)	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180
कामदार सङ्ख्या	2	8	22	?	17	7

समाधान

मानौं, अज्ञात बारम्बारता a छ । उक्त तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिका प्रस्तुत गर्दा,

ज्याला रु. X (प्रति घण्टा)	f	c.f
0-30	2	2
30-60	8	10
60-90	22	32
90-120	a	$32+a$
120-150	17	$49+a$
150-180	7	$56+a$

यहाँ, मध्यिका श्रेणी 90 - 120 छ ।

त्यसैले, $\frac{N}{2} = \frac{56+a}{2}$, $cf = 32$, $f = a$, $h = 30$, $L = 90$

$$\text{मध्यिका } (M_d) = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$$

$$\text{अथवा, } 100 = 90 + \frac{\frac{56+a}{2} - 32}{a} \times 30$$

$$\text{अथवा, } 10 = \frac{56+a-64}{2a} \times 30$$

$$\text{अथवा, } 2a = (a-8)3$$

$$\text{अथवा, } 2a = 3a - 24$$

$$\text{अथवा, } 24 = a$$

त्यसैले, अज्ञात बारम्बारता = 24

उदाहरण 4

दिइएको तथ्याङ्कको तल्लो चतुर्थांश (Q_1) र माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	0 भन्दा बढी	10 भन्दा बढी	20 भन्दा बढी	30 भन्दा बढी	40 भन्दा बढी	50 भन्दा बढी
विद्यार्थी सङ्ख्या	50	46	40	20	10	3

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई अविच्छिन्न श्रेणीको सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा :

X	f	cf
0-10	50-46 = 4	4
10-20	46-40 = 6	10
20-30	40-20 = 20	30
30-40	20-10 = 10	40
40-50	10-3 = 7	47
50 भन्दा बढी	3	50

यहाँ, $N = 50$

$$\text{र } \frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12.50$$

त्यसैले, Q_1 पर्ने वर्गान्तर 20-40 हो ।

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times h \\
 &= 20 + \frac{12.50 - 10}{20} \times 10 \\
 &= 20 + \frac{2.5}{2} \\
 &= 21.25
 \end{aligned}$$

$$\text{पुनः } \frac{3N}{4} = 3 \times \frac{50}{4} = 37.5$$

त्यसैले, Q_3 पर्ने वर्गान्तर 30 - 40 हो ।

$$\begin{aligned}
 Q_3 &= L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h \\
 &= 30 + \frac{37.5 - 30}{10} \times 10 \\
 &= 30 + 7.5 = 37.5
 \end{aligned}$$

अभ्यास 17.2

1. तल दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) उमेर (वर्षमा)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
मानिसहरूको सङ्ख्या	3	4	7	5	6	5	2	2

(b) हप्तामा घर खर्च (रु.)	500-1500	1500-2500	2500-3500	3500-4500	4500-5500
परिवारको सङ्ख्या	3	5	9	3	2

(c) उमेर (वर्षमा)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
कामदारहरूको सङ्ख्या	5	3	2	5	3	1	2	1

2. तल दिइएको तालिकाका आधारमा पहिलो चतुर्थांश (Q_1) पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) दैनिक खर्च (रु.)	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
कामदारहरूको सङ्ख्या	10	25	145	220	70	30

(b)	मूल्य (रु.)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
	किताबहरूको सङ्ख्या	3	7	10	8	6	1

(c)	उचाइ (से.मि.)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
	विरुवाहरूको सङ्ख्या	3	2	15	4	5	6	3

3. तल दिइएका तथ्याङ्कका आधारमा तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउनुहोस् :

(a)	प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
	विद्यार्थी सङ्ख्या	5	8	7	12	28	20	10	10

(b)	उमेर (वर्षमा)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
	मानिसहरूको सङ्ख्या	4	8	12	20	18

4. दिइएको तथ्याङ्कलाई 5 को वर्गान्तरको तालिका बनाई पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।

10, 4, 16, 32, 34, 24, 17, 5, 16, 9, 32, 29, 24, 18, 23, 28, 5, 24, 2, 18, 6, 27, 17, 8,
16, 33, 19, 16, 18, 14, 31, 29, 30, 18, 21, 13, 21, 16, 19, 24, 20, 14, 20, 26, 16, 1, 15,
8, 23, 10

5. तल तालिकामा दिइएको तथ्याङ्कको मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	0-19	20-39	40-59	60-79	80-89
विद्यार्थी सङ्ख्या	14	23	26	21	16

6. तल दिइएको तथ्याङ्कको मध्यिका 35 भए छुटेको बारम्बारता पत्ता लगाउनुहोस् :

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	10	20	35	40	?	25	15

7. तल तालिकामा दिइएको तथ्याङ्कको तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् :

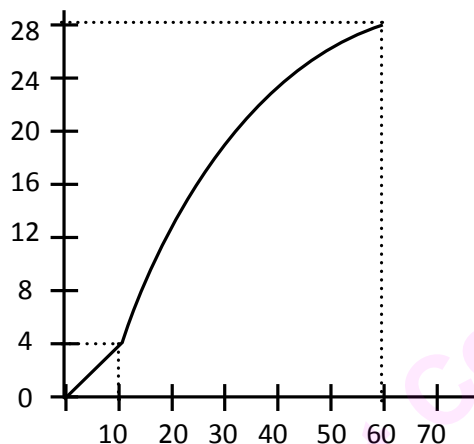
X	10 भन्दा कम	20 भन्दा कम	30 भन्दा कम	40 भन्दा कम	50 भन्दा कम	60 भन्दा कम	70 भन्दा कम	80 भन्दा कम
f	5	13	20	32	60	80	90	100

8 दिइएको सञ्चित बारम्बारता वक्रबाट निम्न मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) मध्यिका पर्ने श्रेणी

(ख) तल्लो चतुर्थांश पर्ने श्रेणी

(ग) माथिल्लो चतुर्थांश पर्ने श्रेणी



9. कक्षा 10 मा अध्ययन गर्ने विद्यार्थीहरूले कक्षा 9 को अन्तिम परीक्षामा प्राप्त गरेको 6 ओटा विषयहरूको प्राप्ताङ्क विद्यालयबाट सङ्कलन गर्नुहोस् । 6 ओटा समूहमा सबै साथीहरूलाई समेट्ने गरी समूह निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक विषयमा प्राप्त प्राप्ताङ्कलाई उचित श्रेणी अन्तरमा अविच्छिन्न श्रेणी बनाई (क) मध्यिका (ख) पहिलो चतुर्थांश (ग) तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. एउटा कम्पनीमा काम गर्ने 50 जना कामदारहरूले एक महिनामा पाउने बोनस रकम दिइएअनुसार छ :

बोनस (रु. मा): 990, 880, 940, 950, 890, 850, 1020, 920, 1020, 760, 830, 970, 860, 850, 920, 810, 890, 1040, 820, 930, 870, 910, 980, 1030, 910, 850, 1000, 1060, 1080, 980, 900, 860, 870, 770, 850, 880, 930, 870, 800, 960, 1030, 930, 940, 880, 870, 1080, 920, 770, 990, 1000

उक्त तथ्याङ्कलाई 10 अथवा 20 को वर्गान्तर तालिका बनाउनुहोस् । उक्त तथ्याङ्कको

(क) मध्यक र मध्यिका कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) मध्यक र मध्यिकाको अन्तर निकाल्नुहोस् ।

(ग) मध्यकभन्दा कम र बढी बोनस पाउने कति कति जना छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. आफ्नो छिमेकमा रहेका कुनै 20 परिवारको एक दिनमा हुने खर्चका बारेमा सोधपुछ गरी प्राप्त तथ्याङ्कलाई टिपोट गर्नुहोस् । उक्त तथ्याङ्कलाई वर्गान्तर तालिकामा बदल्नुहोस् । यसरी प्राप्त तथ्याङ्कको मध्यक र मध्यिका एवम् तिनीहरूको फरक पत्ता लगाई प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् । उक्त प्रतिवेदन कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

18.0 पुनरावलोकन (Review)

सम्भाव्यता सम्बन्धी आधारभूत कुराहरू हामीले कक्षा नौमा अध्ययन गरिसकेका छौं । त्यसका आधारमा निम्न प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

1. परीक्षण भनेको के हो ? एउटा सिक्कालाई उफार्दा प्राप्त हुने नमुना क्षेत्र लेख्नुहोस् ।
2. अनुकूल परिणाम सङ्ख्या केलाई भनिन्छ ? एउटा डाइसलाई उफार्दा घट्न सक्ने घटनाको सम्भाव्यता $P(E)$ के के हुन सक्छन्, लेख्नुहोस् ।
3. सम्भाव्यता स्केल भनेको के हो, लेख्नुहोस् ।
4. तास (cards) सम्बन्धी सामान्य जानकारी चार्ट बनाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

18.1 पारस्परिक निषेधक घटनाहरूको जोड सिद्धान्त (Addition Law of Mutually Exclusive Events)

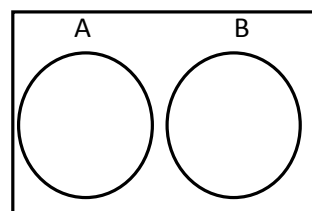
(a) पारस्परिक निषेधक घटनाहरू (Mutually exclusive events) :

एउटा सिक्कालाई एक पटक उफार्दा अग्रभाग (Head) वा पछिल्लो भाग (Tail) आउन सक्छ । तर दुवै एक साथ आउन सक्दैन । अर्थात् H आउदा T आउन सक्दैन वा T आउँदा H को सम्भावना रहँदैन । त्यस कारण यहाँ H र T दुई ओटा घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् । त्यस्तै गरी एउटा डाइसलाई उफार्दा एक्का (1) आउने घटना घट्दा बाँकी अन्य घटनाहरू घट्ने सम्भावना (Probability) हुन सक्दैन । एक्का आउने घटनाले अन्य पाँच ओटा घटनाहरूको सम्भावनालाई निषेध गर्दछ ।

तसर्थ कुनै पनि परीक्षणमा एउटा घटनाको सम्भाव्यताले अर्को घटनालाई निषेध गर्दछ भने त्यस्ता घटना (event) लाई पारस्परिक निषेधक घटनाहरू (Mutually exclusive events) भनिन्छ ।

(b) सम्भाव्यताको जोड सिद्धान्त (Additive laws of probability)

यदि कुनै परीक्षणमा घटनाहरू A र B पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन भने तिनीहरूको सम्भाव्यता $P(A \text{ अथवा } B) = P(A) + P(B)$ हुन्छ । यसलाई पारस्परिक



निषेधक घटनाहरूको जोड सिद्धान्त भनिन्छ र यसलाई भेनचित्र (Venn diagram) मा पनि प्रस्तुत गर्न सकिन्छ। यहाँ भेनचित्रबाट $P(A \cap B) = 0$ हुन्छ भन्ने प्रष्ट देखिन्छ।

उदाहरण 1

एउटा बाकसमा 3 ओटा हरियो, 4 ओटा रातो र 5 ओटा सेता उस्तै र उत्रै बलहरू छन् भने नहेरिकन एउटा बल निकाल्दा हरियो अथवा रातो बल आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ जम्मा बलहरूको सङ्ख्या, $n(S) = (3 + 4 + 5)$ ओटा बलहरू

$$= 12 \text{ ओटा बलहरू}$$

हरियो बलको सङ्ख्या, $n(G) = 3$ ओटा बलहरू

रातो बलको सङ्ख्या $n(R) = 4$ ओटा बलहरू

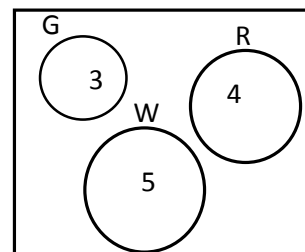
$$\begin{aligned} \therefore \text{हरियो बल आउने सम्भाव्यता } P(G) &= \frac{\text{अनुकूल परिणाम सङ्ख्या}}{\text{कुल परिणाम सङ्ख्या}} \\ &= \frac{3}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{रातो बल आउने सम्भाव्यता } P(R) &= \frac{\text{रातो बलको सङ्ख्या}}{\text{जम्मा बलको सङ्ख्या}} \\ &= \frac{4}{12} \end{aligned}$$

यी घटनाहरू पारस्परिक निषेधक भएकाले सम्भाव्यताको जोड सिद्धान्त अनुसार,

$$P(G \text{ अथवा } R) = P(G) + P(R)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \\ &= \frac{3+4}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$



उदाहरण 2

एउटा थैलीमा 2 देखि 31 सम्म लेखिएका जम्मा 30 ओटा उस्तै र उत्रै बलहरू छन्। कुनै एउटा बल नहेरिकन निकाल्दा सो बल 5 अथवा 7 को गुणाङ्क हुने सम्भावना कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

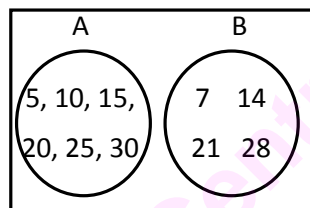
यहाँ 5, 10, 15, 20, 25, 30 अङ्कित बलहरू 5 को गुणाङ्क हुने 6 ओटा बलहरू छन् र 7 गुणाङ्कका बलहरू 7, 14, 21 र 28 हुन् ।

र $\therefore n(5 \text{ गुणाङ्क}) = 6$ ओटा

$\therefore n(7 \text{ गुणाङ्क}) = 4$ ओटा

$\therefore p(5 \text{ को गुणाङ्क}) = \frac{6}{30}$ र $p(7 \text{ को गुणाङ्क}) = \frac{4}{30}$

यहाँ, 5 को गुणाङ्क र 7 को गुणाङ्कको साभ्ता सङ्ख्या कुनै पनि छैन ।



$\therefore P(A \cup B) = P(A \text{ अथवा } B) = P(A) + P(B)$

$$\begin{aligned} &= \frac{6}{30} + \frac{4}{30} \\ &= \frac{10}{30} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

उदाहरण 3

एक सेट 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर कुनै एउटा तासको पत्ती थुत्दा बादशाह, मिस्सी अथवा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, जम्मा तासको सङ्ख्या, $n(S) = 52$

बादशाहको सङ्ख्या, $n(K) = 4$

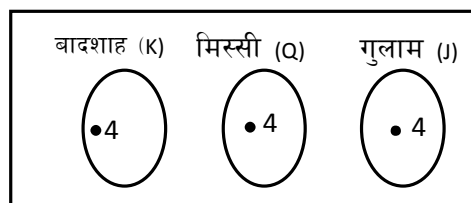
मिस्सीको सङ्ख्या, $n(Q) = 4$

गुलामको सङ्ख्या, $n(J) = 4$

बादशाहको सम्भाव्यता, $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{52}$

मिस्सीको सम्भाव्यता, $P(Q) = \frac{n(Q)}{n(S)} = \frac{4}{52}$

गुलामको सम्भाव्यता, $P(J) = \frac{n(J)}{n(S)} = \frac{4}{52}$



यहाँ, K, Q र J तिनै ओटा घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन्, तसर्थ तिनीहरूको

सम्भाव्यता, $P(K \text{ अथवा } Q \text{ अथवा } J) = P(K) + P(Q) + P(J)$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} + \frac{4}{52} \\ &= \frac{4+4+4}{52} \\ &= \frac{12}{52} \\ &= \frac{3 \times 4}{13 \times 4} \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

उदाहरण 4

एस.एल.सी. परीक्षामा एउटा विद्यालयको गणित विषयको नतिजा विवरण निम्नअनुसार छ :

ग्रेड	विद्यार्थी सङ्ख्या
C	2
B	12
A	13
A+	3
जम्मा	30

माथिको तालिकाबाट एक जना विद्यार्थी छान्दा

- (i) A⁺ प्राप्त गर्ने विद्यार्थीको सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (ii) A ग्रेड प्राप्त गर्ने विद्यार्थीको सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (iii) B ग्रेड प्राप्त गर्ने विद्यार्थीको सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (iv) C ग्रेड प्राप्त गर्ने विद्यार्थीको सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या, $n(S) = 30$

ग्रेड C प्राप्त गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(C) = 2$

ग्रेड B प्राप्त गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(B) = 12$

A ग्रेड प्राप्त गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(A) = 13$

A⁺ ग्रेड प्राप्त गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(A^+) = 3$

माथिका विभिन्न ग्रेडहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् ।

$$(i) A^+ \text{ ग्रेड प्राप्त गर्ने सम्भाव्यता } P(A^+) = \frac{n(A^+)}{n(S)} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

$$(ii) A \text{ ग्रेड प्राप्त गर्ने सम्भाव्यता } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{30}$$

$$(iii) B \text{ ग्रेड प्राप्त गर्ने सम्भाव्यता } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$(iv) C \text{ ग्रेड प्राप्त गर्ने सम्भाव्यता } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

उदाहरण 5

तथ्याङ्क शास्त्रको अङ्ग्रेजी शब्द "STATISTICS" मा रहेका 10 ओटा अक्षरहरूको सङ्केतबाट अङ्कित पत्तीहरूबाट नहेरिकन एउटा पत्ती निकाल्दा S अथवा T अथवा I अङ्कित पत्ती आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ "STATISTICS" मा जम्मा अक्षरहरूको सङ्ख्या $n = 10$

सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या, $n(S) = 10$

S को अनुकूल परिणाम सङ्ख्या, $n(E_1) = 3$

T को अनुकूल परिणाम सङ्ख्या, $n(E_2) = 3$

I को अनुकूल परिणाम सङ्ख्या, $n(E_3) = 2$

एउटा पत्ती निकाल्दा S अङ्कित अथवा T अङ्कित तथा I अङ्कित पत्ती आउने सम्भाव्यता

$$= P(S \text{ अथवा } T \text{ अथवा } I)$$

$$= P(S) + P(T) + P(I)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10}$$

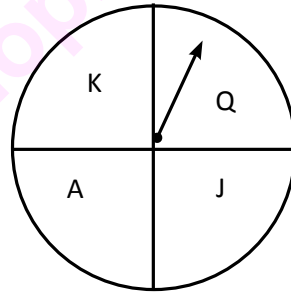
$$= \frac{3+3+2}{10}$$

$$= \frac{8}{10}$$

$$= \frac{4}{5}$$

अभ्यास 18.1

1. A र B दुई ओटा पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन्, यदि $n(A) = 6$ र $n(B) = 3$ तथा $n(S) = 18$ भए $P(A \cup B)$ को मान निकाल्नुहोस् ।
2. एउटा भोलामा 5 ओटा सेता 3 ओटा राता र 4 ओटा काला उस्तै र उत्रै बलहरू राखिएका छन् । नहेरिकन एउटा बल निकाल्ने हो भने सेतो अथवा रातो बल पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा बाकसमा 1 देखि 20 सम्म अङ्कित अङ्कहरू भएको उस्तै उत्रै 20 ओटा बलहरू राखिएका छन् । नहेरिकन एउटा बल निकाल्दा 3 ले निशेष भाग लाग्ने अथवा 5 ले निशेष भाग लाग्ने बलहरू पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. एक सेट 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर कुनै एउटा तासको पत्ती थुन्दा एक्का (A) अथवा बादशाह (K) अथवा मिस्री (Q) पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।
5. एउटा डाइसलाई एक पटक उफार्दा 1 वा 3 वा 5 पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. दिइएको चक्कामा K, Q, J र A अङ्कित चार ओटा बराबर भाग देखाइएको छ । उक्त चक्कालाई घुमाउँदा निम्नअनुसारको स्थानमा सुइरो पर्ने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् :



(i) A मा नपर्ने सम्भाव्यता

(ii) K, Q वा J मा पर्ने सम्भाव्यता

7. कक्षा 3 मा पढ्ने एउटा विद्यार्थीको पैसा राख्ने थैलीमा निम्नअनुसारका सिक्काहरू छन् :

सिक्का	सङ्ख्या
25 पैसा (सुका)	12
50 पैसा (मोहर)	8
रु. 1 (डबल)	10

उक्त थैलीबाट नहेरी कुनै एउटा सिक्का निकाल्दा

- (i) 25 पैसाको सिक्का पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (ii) मोहर पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (iii) डबल पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (iv) मोहर अथवा डबल पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

8. एउटा डाइसलाई एक पटक उफार्दा निम्नानुसारको सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् :
- (i) 3 अथवा 6 पर्ने सम्भाव्यता
 - (ii) रुठ सङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता
 - (iii) संयुक्त सङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता
 - (iv) 2 भन्दा ठुलो सङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता
 - (v) 7 को गुणाङ्कको सङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता
9. सम्भाव्यताको अङ्ग्रेजी शब्द "PROBABILITY" का एक एक अक्षर लेखिएका एघार ओटा पत्तीहरूबाट नहेरी एउटा पत्ती निकाल्दा B अथवा A अथवा T अङ्कित पत्ती पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. गणितको अङ्ग्रेजी शब्द "MATHEMATICS" का 11 ओटा अक्षरहरू अङ्कित पत्तीहरूबाट नहेरिकन एउटा पत्ती निकाल्दा M अथवा A अथवा T अङ्कित पत्ती पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।

18.2 सम्भाव्यताको गुणन सिद्धान्त र वृक्ष चित्र

(Multiplication Law and Tree Diagram of Probability)

(a) अनाश्रित घटनाहरू (Independent Events)

कुनै एउटा सिक्कालाई एकपछि अर्को गरी दुई पटक उफार्दा पहिलो परीक्षणमा घटेका घटनाले दोस्रो परीक्षणको घटनालाई कुनै प्रकारको असर गर्दैन । मानौं पहिलो परीक्षणमा सिक्काको अग्रभाग (H) परिणामको घटना घट्छ भने कुन दोस्रो पटकको परीक्षणमा सिक्काको अग्रभाग आउन पहिलोले छेक्न सक्दैन । पहिलो H र दोस्रो H एक अर्कामा अनाश्रित घटनाहरू हुन् । यहाँ पहिलो घटनामा H आउँदा दोस्रोमा H वा पछिल्लो भाग (T) जुन पनि आउन सक्ने सम्भावना हुन्छ । पहिलो घटनाले दोस्रो घटनालाई कुनै किसिमको असर पार्न सक्दैन । त्यस्तै गरी एउटा सिक्का र एउटा डाइस उफार्दा सिक्कामा आउने घटनाले डाइसमा आउने घटनालाई असर गर्दैन किनकि ती दुवै अनाश्रित घटनाहरू हुन् ।

दुई वा दुईभन्दा बढी घटनाहरूमा एउटाको प्राप्तिले अर्को घटनालाई असर गर्दैन भने त्यस्ता घटनाहरूलाई अनाश्रित घटनाहरू भनिन्छ ।

(b) अनाश्रित घटनाहरूको गुणन सिद्धान्त (Multiplicative law for independent events)

यदि A र B दुई ओटा अनाश्रित घटनाहरू हुन भने A र B दुवैको एक साथ आउने सम्भाव्यतालाई

$P(A \text{ र } B)$ अथवा $P(A) \times P(B)$ ले जनाइन्छ ।

यहाँ $P(AB) = P(A) \times P(B)$ हुन्छ ।

त्यस्तै गरी A, B र C तिन ओटा अनाश्रित घटनाहरू हुन भने $P(ABC) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा सिक्का र एउटा डाइस एकै समय उफार्दा सिक्काको अग्रभाग (H) र डाइसमा 5 आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, एउटा सिक्का र एउटा घनाकार डाइसलाई एकै साथ उफार्दा सिक्कामा H अथवा T मध्ये कुनै पनि आउन सक्छ भने डाइसमा 1 देखि 6 अङ्कसम्म कुनै पनि आउन सक्छ । सिक्कामा आउने घटनाले डाइसमा आउने घटनालाई कुनै असर गर्दैनन् ती घटनाहरू अनाश्रित हुन् ।

सिक्काको नमुना क्षेत्र (sample space), $S_1 = \{H, T\}$

डाइसको नमुना क्षेत्र (sample space) $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

दुवैको सम्भावित नमुना क्षेत्र $S = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$

$$\therefore n(S) = 12$$

$$P(H, 5) = ?$$

$$P(5) = \frac{1}{6} \text{ र } P(H) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(H, 5) = P(H) \times P(5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

(c) पराश्रित घटनाहरू (Dependent Events)

एउटा भोलामा 5 ओटा काला र 6 ओटा रातो गुच्छाहरू छन् । तीमध्ये दुई ओटा गुच्छा नहेरी पहिले निकालेको गुच्छा पुनः भोलामा नराखी एकपछि अर्को क्रमशः निकाल्दा

$$\text{पहिलो गुच्छा रातो आउने सम्भाव्यता, } P_1(R) = \frac{6}{11}$$

$$\text{दोस्रो गुच्छा रातो आउने सम्भाव्यता, } P_2(R) = \frac{5}{10}$$

यहाँ पहिलेको भन्दा दोस्रोको सम्भाव्यता घटेको छ किनभने पहिलो घटनाले दोस्रो घटनालाई असर पारेको छ । यस्तो घटनालाई पराश्रित घटना भनिन्छ ।

तसर्थ कुनै परीक्षणमा एउटा घटना घट्दा अर्को घटनाको सम्भाव्यतामा प्रभाव पार्ने घटनाहरूलाई पराश्रित घटना (dependent events) भनिन्छ ।

उदाहरण 2

एक सेट 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिले निकालेको तास पुनः नराखी एकपछि अर्को गर्दै 2 ओटा तास निकाल्दा दुवै तास बादशाह (K) नै पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ कुल तासको सङ्ख्या $n(S) = 52$

बादशाहको सङ्ख्या $n(K) = 4$

$\therefore P(K, K) = ?$

$P(K, K) = P_1(K) \times P_2(K)$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{52} \times \frac{(4-1)}{(52-1)} \quad [\because \text{पहिले निकालेको तास पुनः नराख्दा}] \\ &= \frac{4}{13 \times 4} \times \frac{3}{51} \\ &= \frac{1}{13} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{221} \end{aligned}$$

उदाहरण 3

एउटा परिवारमा जन्मेका बच्चाहरूमा तिन ओटै छोरा वा छोरी हुने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ नमुना क्षेत्र $(S) = \{s, d\}$

$\therefore n(S) = 2$

पहिलो पटक जन्मिएको बच्चा छोरा हुने सम्भाव्यता $P_1(s) = \frac{1}{2}$

दोस्रो पटक जन्मिएको बच्चा छोरा हुने सम्भाव्यता $P_2(s) = \frac{1}{2}$

तेस्रो पटक जन्मिएको बच्चा छोरा हुने सम्भाव्यता $P_3(s) = \frac{1}{2}$

\therefore तिन ओटा छोरा हुने सम्भाव्यता $P(s.s.s) = P_1(s) \times P_2(s) \times P_3(s)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

त्यस्तै गरी तिन ओटै छोरी हुने सम्भाव्यता $P(d, d, d) = P_1(d) \times P_2(d) \times P_3(d)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

तसर्थ तिन ओटै छोरा वा छोरी हुने सम्भाव्यता $P(sss \text{ वा } ddd)$

$$= P(sss) + P(ddd)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(d) सम्भाव्यता वृक्षचित्र (Probability Tree Diagram)

एउटा भोलामा 4 ओटा रातो र 3 ओटा काला उस्तै र उत्रै आकारका बलहरू छन् । त्यसबाट नहेरी एउटा बल निकाल्दा

$$\text{रातो बल आउने सम्भाव्यता } P_1(R) = \frac{4}{7} \quad [\because n(S) = 4 + 3 = 7]$$

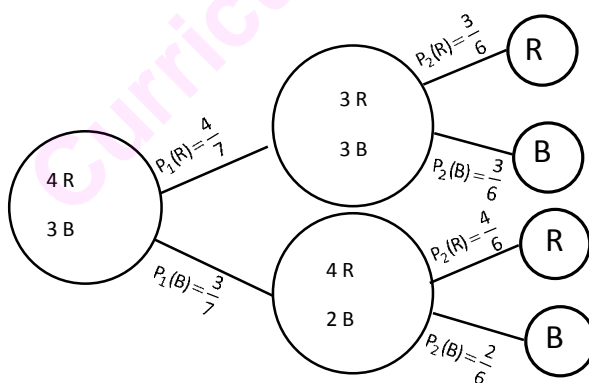
$$\text{कालो बल आउने सम्भाव्यता } P_1(B) = \frac{3}{7}$$

अब भोलाबाट (पहिलेको बल पुनः भोलामा नराखी) अर्को बल निकाल्दा रातो बल आउने सम्भाव्यता, $P_2(R) = \frac{3}{6}$

$$\text{कालो बल आउने सम्भाव्यता } P_2(B) = \frac{3}{6} \quad [\because \text{पहिलो बल रातो मान्दा}]$$

र पहिलो बल कालो मान्दा $P_2(B) = 2/6$ र $P_2(R) = 4/6$ हुन्छ ।

यसरी पहिलो र दोस्रो पटक बल निकाल्दाको घटना क्रमलाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्दा ।



$$P(R \text{ र } R) = P_1(R) \times P_2(R) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

$$P(R \text{ र } B) = P_1(R) \times P_2(B) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

$$P(B \text{ र } R) = P_1(B) \times P_2(R) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

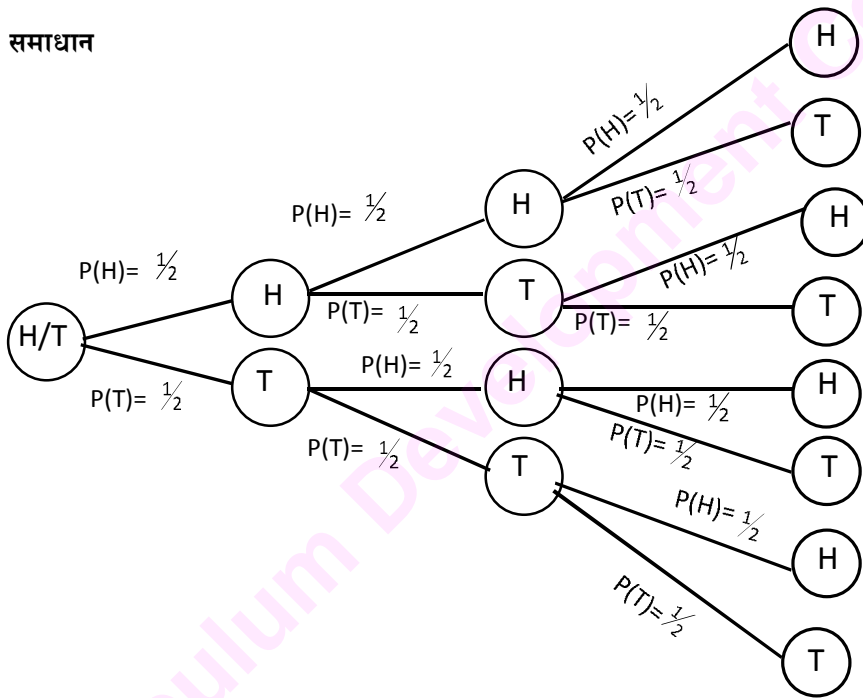
$$P(B \text{ र } B) = P_1(B) \times P_2(B) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

उदाहरण 4

एउटा सिक्कालाई तिन पटकसम्म लगातार उफार्दा आउने परिणामलाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गरी निम्न लिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

- तिन ओटा H आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- तिन ओटा T आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- कम्तीमा H दुई पटक आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- कम्तीमा T दुई पटक आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान



- तिनै ओटा H आउने सम्भाव्यता $= P(HHH) = P(H) \cdot P(H) \cdot P(H) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- तिनै ओटा T आउने सम्भाव्यता $= P(TTT) = P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- कम्तीमा दुई पटक H आउने सम्भाव्यता $= P(HHH) + P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$
 $= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- कम्तीमा T दुई पटक आउने सम्भाव्यता $= P(HTT) + P(THT) + P(TTH) + P(TTT)$
 $= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

अभ्यास 18.2

1. एउटा सिक्का र एउटा डाइस एकसाथ उफार्दा सिक्कामा पछिल्लो भाग (T) र डाइसमा 3 आउने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् ।
2. एउटा बाक्समा 2 ओटा हरिया, 3 ओटा राता र 5 ओटा कालो उस्तै र उत्रै बलहरू राखिएका छन् । त्यसबाट नहेरिकन एउटा बल निकाली पुनः त्यसमा नराखी अर्को बल नहेरी निकाल्दा निम्नअनुसारका बलहरू आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :
 - (i) दुवै एउटै रङका
 - (ii) दुई ओटा भिन्ना भिन्नै रङका
 - (iii) कम्तीमा एउटा बल रातो अथवा कालो रङका
3. एउटा भोलामा राखिएका 7 ओटा राता र 8 ओटा पहेँला उस्तै उस्तै बलहरूमा दुई ओटा बलहरू पालैपालो निकाल्दा दुवै पटक रातो अथवा पहेँलो बल आउने सम्भाव्यतालाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गरी निकाल्नुहोस् । (पहिले निकालिएको बल पुनः भोलामा नराख्ने ।)
4. एउटा परिवारमा 4 जना बच्चाहरू छन् । प्रत्येक जन्ममा छोरा वा छोरी हुने सम्भावना बराबर छ । उक्त परिवारमा जन्मेका बच्चाहरूमा 4 जना छोरा वा छोरी हुने सम्भाव्यतालाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
5. राम्ररी फिटिएको 52 पत्तीको 1 सेट तासबाट नहेरिकन एउटा तास भिकेर पुनः त्यसमा नराखी नहेरीकनै दोस्रो तास भिक्दा हुने सम्भावित घटनालाई वृक्षचित्रमा देखाई निम्न प्रश्नहरूको जवाफ दिनुहोस् :
 - (i) दुवै पटक एक्का पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
 - (ii) एक एक ओटा एक्का वा बादशाह पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
6. एउटा भोलामा रातो, हरियो र कालो एक एक ओटा उस्तै र उत्रै गुच्चाहरू राखिएका छन् । उक्त भोलाबाट नहेरिकन एउटा गुच्चा निकाल्ने र पुनः त्यसमा नराखी अर्को गुच्चा निकाल्दा हुने सबै सम्भाव्यताहरूलाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
7. एउटा भोलामा एक एक ओटा राता, सेता र काला बलहरू राखिएका छन् । तीमध्ये एउटा बल भिक्नुहोस् र त्यही बल नदोहोरिने गरी क्रमशः अरु बल भिक्दा हुने सम्भाव्यतालाई तालिका र वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
8. सम्भाव्यताको प्रयोग दैनिक जीवनमा कहाँ कहाँ हुन्छ ? खोजी गर्नुहोस् । यसको सकारात्मक र नकारात्मक प्रयोग सम्बन्धमा एक लेख तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर माला

अभ्यास 1.1

- 1.(i) 10 (ii) 7 (iii) 3 (iv) 7 (v) 4 (vi) 11 (vii) 18 (viii) 7 (ix) 7 (x) 21
2.(a) 80, 20 (b) 55, 15 (c) 8 (d) 25, 40
3. (a) 20% (b) 20 (c) 25, 275 (d) 40% 4. (क) 190 (ख) 140 (ग) 440

अभ्यास 1.2

- 1.(i) 8 (ii) 6 (iii) 5 (iv) 1 (v) 1 (vi) 0 (vii) 7 (viii) 3 (ix) 15 (x) 12
2. शिक्षकलाई देखाउने
3. (a) 30 (b) 25 (c) 113, 7 4.(a) 21 (b) (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 205 (ग) 30
c) (क) 30 (ख) 125 d) (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 97 (ग) 102 (ग) 59
5. (a) 124, 22 b) (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 5% (ग) 195

अभ्यास 2.1

1. (a) रु. 3616 (b) रु. 52985.7 (c) रु. 57,630 (d) रु. 83563.5
(e) रु. 2, 40,125 2. (a) रु. 5368.42 (b) रु. 30818.18 (c) रु. 4000
(d) रु. 60,000 (e) रु. 1,20,000
3. (a) रु. 6,780 (b) रु. 780 (c) 13% (d) रु. 7321.5,13%
(e) रु. 1,000 4. (a) रु. 65,143 (b) रु. 78223.6

अभ्यास 2.2

1. (a)(i) रु. 2000 (ii) रु. 147728 (iii) रु. 739553.76 (iv) रु. 174142.8
(v) रु. 57960 (vi) रु. 5172.48 (vii) रु. 10548 (viii) रु. 5998.68
(ix) रु. 47484 (x) रु. 129045 (b) (i) रु. 2001.88 (ii) रु. 148568

- (iii) रु. 78950.82 (iv) रु. 17512560 (v) रु. 583000 (vi) रु. 5201.28
 (vii) रु. 10584 (viii) रु. 6032.88 (ix) रु. 47484.5 (x) रु. 129780
 (c) रु. 3259.52 (d) रु. 86,400 2. (a) \$ 3.64 (b) £ 0.056
 (c) 33.05 (d) 2552338.53 (e) 118.58 3. (a) \$1574.25
 (b) 376706.40 (c) 3436.24 pound 4. (a) Rs. 762643.69 (b) Rs. 15716.60
 (c) 673 pound

अभ्यास 3

1. (a) रु. 3561.60 (b) रु. 11236, रु. 1236 (c) रु. 10081.28, रु. 74081.28
 2. (a) रु. 3152.50, रु. 23152.50 (b) रु. 22276.8, रु. 70276.8
 (c) रु. 4243.17, रु. 24243.17 3. (a) रु. 512 (b) रु. 337.5 (c) रु. 1176
 4. (a) रु. 58492.93 रु. 8492.93 (b) रु. 126531.90, रु. 26531.90
 (c) रु. 190.27 (d) रु. 9724.85 5. (a) रु. 1935.48 (b) रु. 8000
 (c) रु. 16000 (d) रु. 16,000 6. (a) रु. 12000, 10% (b) रु. 8000 रु. 15%
 (c) 60,000 रु. 10% (d) 12%, रु. 15,000
 7. (a) रु. 13814.08, रु. 63814.08 (b) रु. 367.10, रु. 3367.50 (c) (i) (d) 1.5 yrs

अभ्यास 4.1

1. (a) 214451 (b) 1313 (c) 472660 (d) रु. 11406.56
 2. (a) 15468 (b) 0.24 m (c) 16,22,012
 3. (a) 13,335 (b) 4,09,808 (c) 8.32×10^{11}
 4. (a) 1.17% (b) 5% (c) 2 वर्ष (d) 3 वर्ष
 5. (a) 34,450 (b) 20,000 (c) 3,96,658

अभ्यास 4.2

1. (a) रु. 1,10,592 (b) रु. 72,900 (c) 30 (d) 40010.83 (e) रु. 24,880
 2. (a) 20% (b) 20% (c) 3 वर्ष (d) 2 वर्ष
 3. (a) 3072 (b) 3,63,375 (c) रु. 54870 (d) 39.06×10^8

अभ्यास 5.1

1. (a) 6cm^2 (b) 7.5cm^2 (c) 5.56cm^2 (d) 7.48cm^2 (e) 48cm^2 f) 10.83cm^2
2. (a) 10cm^2 (b) 12.57cm^2 (c) 12.86cm^2 (d) 15cm^2 3) $36\sqrt{3}\text{cm}^2$ 4) 840m^2
- 5) 50m^2 , 14.14m 6) 13cm 7) 9000ft^2 8) $b = 30\text{m}$ & $c = 28\text{m}$ or $b = 28\text{m}$ & $c = 30\text{m}$
- 9) 60m 10) $b = 8\text{m}$ & $c = 6\text{m}$ or $b = 6\text{m}$, $c = 8\text{m}$

अभ्यास 6.1

1. (a) 110cm^2 , 187cm^2 (b) 79.21cm^2 , 106.92cm^2 (c) 123.2cm^2 , 172.48cm^2
(d) 129.36cm^2 , 240.24cm^2 2. (a) 924cm^2 , 1232cm^2 (b) 115.5cm^2 , 308cm^2
(c) 519.75cm^2 , 693cm^2 3) 924cm^2 or 1848cm^2
- 4) 1232cm^2 or 2772cm^2 , 3080cm^2 or 4620cm^2 5) 3696cm^2 , $1:2$
- 6) 3696cm^2 , 4928cm^2 7) 0.8316m^3 8) 8624cm^3 9) 154cm^2 , 3234cm^3
- 10) 2464cm^2 11) 62.23m , 311.15m^2

12 र 13 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 6.2

1. (a) 616cm^2 , 1437.33cm^3 (b) 154cm^2 , 179.67cm^3 (c) 115.5cm^2 , 89.83cm^3
- 2) 38808cm^3 , 5544cm^2 3) 4851cm^3 4) 2464cm^2 5) 4158cm^2 , 19404cm^3
- 6) 38808cm^3 7) 264cm , 155232cm^3 8) 44cm , 1437.33cm^3
- 9) 18cm , 3054.86cm^3 10) $52,70,65,000\text{km}^2$, $1.137581958 \times 10^{12}\text{km}^3$
- 11) 179.67cm^3 12) 1315.81cm^3

अभ्यास 6.3

1. (a) 1386cm^2 , 3952.67cm^3 (b) 847cm^2 , 1392.42cm^3 (c) 654.5cm^2 , 1033.08cm^3
(d) 3696cm^2 , 18685.33cm^3 (e) 423.5cm^2 , 628.83cm^3 (f) 577.5cm^2 , 898.33cm^3
g) 1584cm^2 , 4299.43cm^3 h) 974.42cm^2 , 2173.81cm^3
- 2) 7186.67cm^3 3) 4928cm^2 4) 37370.67cm^3 5) 519.75m^3
- 6) 128333.33 litre 7) 8888cm^2 , 55029.33cm^3 8) 27720cm^3
- 9) 269.5cm^2 , 539cm^3 10) 346.5cm^2 , 494.08cm^3

अभ्यास 7.1

1. a) 17.32 cm^2 , 240 cm^2 , 274.64 cm^2 b) 24 cm^2 , 432 cm^2 , 480 cm^2
c) 20.33 cm^2 , 315 cm^2 , 355.66 cm^2 d) 35.07 cm^2 , 567 cm^2 , 637.14 cm^2
2. a) 840 cm^3 b) 586.72 cm^3 3) 355.66 cm^2 , 304.95 cm
- 4) $\sqrt{240} \text{ cm}$, $\sqrt{240} \text{ cm}$, $\sqrt{480} \text{ cm}$ 5) 36 cm^2 , 347.65 cm^2
- 6) 24 cm^2 , 672 cm^2 , 720 cm^2 , 672 cm^3

अभ्यास 7.2

1. a) 384 cm^2 b) 360 cm^2 c) 138.53 cm^2
2. a) 960 cm^3 , 1200 cm^2 b) 512 cm^3 , 576 cm^2 c) 64 cm^3 , 144 cm^2
3. a) 301.71 cm^2 , 301.71 cm^2 b) 754.29 cm^3 , 942.86 cm^2 c) 314.86 cm^3 , 282.86 cm^2
4. a) 2646 cm^3 b) 672 cm^3 c) 14784 cm^3
5. a) 414.86 cm^2 , 356.57 cm^3 b) 292.29 cm^2 , 367.71 cm^3 c) 487.14 cm^2 , 825 cm^3
6. 544 cm^2 , 1280 cm^3 7) 384 cm^3 8) 240 cm^2 9) 512 cm^3 10) 162 cm^3
- 11) 2160 cm^3 12) 1300 cm^3 13) 352 cm^3 , 319.03 cm^2
- 14) 204.29 cm^2 , 282.86 cm^2 15) 200.34 cm^2 16) 1609.14 cm^3 , 754.29 cm^2

अभ्यास 7.3

1. (a) 18,000 liters b) 9375 liters
2. (a) Rs. 65,000, 481.25 ft^3 (b) 12964.29 litres (c) 13,090 liters
3. (a) 10914.75 litres (b) 2494.8 litres
4. (a) 47.5 m^2 (b) Rs. 13062.5 (c) 21.25 m^2 (d) Rs. 5312.5 (e) 53,125 liters

अभ्यास 8.1

- 1) $(x + 3)$ 2) $(x + 4)$ 3) $(x + 6)$ 4) $2(x + 3)$ 5) $(x + 4)$
- 6) $(x + 1)$ 7) $y(y + 3)^2$ 8) $x(x + y)^2$ 9) $(x + 1)^2$ 10) $(x + 1)^2$
11. $(x - y)$ 12) $(x + y)$ 13) $(x - 2y)$ 14) $(x - y)$ 15) x

- 16) $(a - b - c)$ 17) $(a + b - c)$ 18) $(x + y + z)$ 19) $(x + y - z)$ 20) $(x - y + 1)$
 21) $(x - a)(x + b)$ 22) $(x - b)$ 23) $(x + 1)$ 24) $(x^2 + 1)$ 25) 1
 26) $(x^2 - x + 1)$ 27) $(a^2 - ab + b^2)$ 28) 1 29) $(x^2 + x + 1)$
 30) $(x^2 + xy + y^2)$ 31) $(x^2 + 2x + 4)$ 32) $(9x^2 - 15xy + 25y^2)$
 33) $(4x^2 - 10xy + 25y^2)$ 34) 1 35) $(x^2 - 4xy + 16y^2)$

अभ्यास 8.2

- $2x(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$
- $x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
- $x(x - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
- $x^2(x^2 + ax + b^2)(a + x)^2$
- $y(y^2 - ay + b^2)(y^2 + ay + b^2)$
- $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x^4}{y^4} + 1 + \frac{y^4}{x^4}\right)$
- $x\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$
- $(x^2 + xy - 2y^2)(x^2 - xy - 2y^2)(x^3 - 8y^3)(x^3 + 8y^3)$
- $2x(x^2 + 4xy + 8y^2)(x^2 - 4xy + 8y^2)$
- $x(x^4 + 4y^4)$
- $4x(x^4 - 64)(x^2 + 4x + 16)$
- $3(x + 3)(x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 9)$
- $x(x^2 + 4x + 12)(x^2 - 4x + 12)$
- $2x(x^2 + 6x + 14)(x^2 - 6x + 14)$
- $(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$
- $xy(x^2 + 2xy - y^2)(x^2 - 2xy - y^2)$
- $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$
- $x^4(x^2 - 16)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 8x + 16)$

19. $x(x-2)(x^4+4x^2+16)$

20. $x(x^4+8x^2+144)$

अभ्यास 9.1

1. (क) 8 (ख) 3 (ग) 7 (घ) n

2. (क) $3\sqrt{2}$ (ख) $6\sqrt{2}$ (ग) $2\sqrt[3]{2x}$ (घ) $6a\sqrt{a}$ (ङ) $3ab^2\sqrt[3]{3ab}$

3. (क) $\sqrt{80}$ (ख) $\sqrt[3]{48}$ (ग) $\sqrt[4]{2a}$ (घ) $\sqrt{a^2-b^2}$

4 र 5 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 9.2

1. (क) $16\sqrt{2}$ (ख) $18\sqrt[3]{7}$ (ग) $90\sqrt[7]{192}$ (घ) $325\sqrt[9]{37}$

2. (क) 25 (ख) $12\sqrt[3]{2}$ (ग) $18\sqrt{2}$

3. (क) $\sqrt{10}$ (ख) $\sqrt{33}$ (ग) $\sqrt[6]{32}$ (घ) $\sqrt[4]{16}$

4. (क) $36\sqrt{6}$ (ख) $210\sqrt{2}$ (ग) 1 (घ) $4-5\sqrt{10}$ (ङ) $3\sqrt{2}$ (च) $\sqrt{3}$

अभ्यास 9.3

1. (क) $\sqrt{5}$ (ख) $2\sqrt{7}$ (ग) $\sqrt{2}$ (घ) $\sqrt[3]{12}$

2. (क) $\frac{5}{7}(3-\sqrt{2})$ (ख) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$ (ग) $6-\sqrt{35}$ (घ) $\frac{114-41\sqrt{6}}{30}$

3. (क) 8 (ख) $4x\sqrt{x^2-1}$ (ग) $16-\sqrt{3}$ (घ) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

4. (क) $a=\frac{11}{7}, b=\frac{6}{7}$ (ख) 100 (ग) 12, 142

अभ्यास 9.4

1. (क) 14 (ख) 20 (ग) 33 (घ) 44
2. (क) 144 (ख) 16 (ग) 5 (घ) 1
3. (क) $\frac{4}{3}$ (ख) 25 (ग) 1 (घ) 3

अभ्यास 10.1

1. (क) $\frac{9}{4}$ (ख) 1
2. (क) $\frac{x^{2a-3b}}{y^b}$ (ख) $\frac{1}{a^5b^3c^9}$ (ग) $\frac{3}{7}$ (घ) $\frac{1}{3}$
3. (क) 1 (ख) 1 (ग) 1 (घ) $\left(\frac{x}{y}\right)^{p+q}$

अभ्यास 10.2

1. (क) 0,1 (ख) 0,1 (ग) 1, 2 (घ) 0, 1 (ङ) 3, 4 2. (क) 2, -2 (ख) 2, -2
(ग) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (घ) 2, -1 (ङ) $x = 2$

अभ्यास 11

1. (क) $\frac{2a+5}{a^2+5a+6}$ (ख) $\frac{4a}{(a-6)(a+2)}$ (ग) $\frac{4ax}{a^2-x^2}$ (घ) $\frac{x+2y}{4x^2-9y^2}$
(ङ) $\frac{4x-4}{(x-2)^2(x+2)}$ (च) $\frac{2x^3}{(x^2-y^2)}$
2. (क) $\frac{x}{x-4y}$ (ख) 2b (ग) $\frac{4ab}{4a^2-b^2}$ (घ) $\frac{2x^3}{1-x^4}$
3. (क) $\frac{2x(2y+x)}{y(x^2-y^2)}$ (ख) $\frac{1-6y^2}{1-4y^2}$ (ग) $\frac{4a^2+17b^2}{4a^2-9b^2}$ (घ) 0
4. (क) $\frac{8}{(x^2-1)(x-2)}$ (ख) $\frac{1}{a+2}$ (ग) $\frac{x^2-10}{(x-1)(x-2)(x+3)}$

$$(घ) \frac{2}{(a-1)(a-2)}$$

$$(ङ) \frac{1}{2(1-\sqrt{y})}$$

$$5. (क) 0$$

$$(ख) 0$$

$$(ग) \frac{2b}{4x^2-1}$$

अभ्यास 12.1

$$1. (क) 40, 20 \quad (ख) 18, 6 \quad 2. (क) 15 \text{ मि.}, 12 \text{ मि.} \quad (ख) 3500 \text{ वर्ग मि.}$$

$$3. (क) \text{Rs. } 60, \text{Rs. } 50$$

$$(ख) \text{Rs. } 84, \text{Rs. } 52$$

$$4. (क) \frac{5}{7}$$

$$(ख) \frac{1}{3}$$

$$5. (क) 42 \text{ वर्ष}, 12 \text{ वर्ष}$$

$$(ख) 15 \text{ वर्ष}, 21 \text{ वर्ष}$$

$$6. (क) 53 \quad (ख) 54$$

अभ्यास 12.2

$$1. (क) \pm 5$$

$$(ख) \pm 14$$

$$(ग) 6$$

$$2. (क) 32, 33$$

$$(ख) 12, 14$$

$$3. (क) 37$$

$$(ख) 36$$

$$4. (क) 18 \text{ वर्ष}, 16 \text{ वर्ष}$$

$$(ख) 8 \text{ वर्ष} \quad (ग) 4 \text{ वर्ष}$$

$$5. (क) 5 \text{ मि.}, 12 \text{ मि.}$$

$$(ख) 11 \text{ मि.}, 8 \text{ मि.}$$

अभ्यास 15.1

$$1. (क) 110^\circ$$

$$(ख) 50^\circ$$

$$(ग) (i) 68^\circ$$

$$(ii) 136^\circ$$

$$(घ) 10^\circ$$

अभ्यास 15.2

$$3) 24 \text{ से.मि.}$$

$$4) 24 \text{ से.मि}$$

अभ्यास 16.1

$$1. (a) 60 \text{ cm}^2$$

$$(b) 24 \text{ m}^2$$

$$(c) 84.85 \text{ cm}^2$$

$$(d) 147.22 \text{ cm}^2$$

$$2. (a) 5.4 \text{ cm}^2$$

$$(b) 6.21 \text{ cm}^2$$

$$(c) 16.8 \text{ m}$$

$$(d) 60^\circ$$

$$(e) 28.28 \text{ cm}$$

$$3. (a) 41.57 \text{ cm}^2$$

$$(b) 7 \text{ cm}^2$$

$$(c) 48.50 \text{ cm}^2$$

$$4. (a) 44\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$(b) 15\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$(c) 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$5. (a) 30^\circ, 150^\circ$$

$$(b) 30 \text{ cm}^2$$

$$6 (a) 43.71 \text{ cm}^2$$

$$(b) 68.78 \text{ cm}^2$$

$$(c) 86.61 \text{ cm}^2$$

$$(d) 51.03 \text{ cm}^2$$

अभ्यास 16.2

1. (a) 19 m (b) 53.60 m (c) 26.7 m (d) 94.64 m (e) 78 m
2. (a) $30\sqrt{3}$ m (b) 19 m (c) 36.64 m (d) $10\sqrt{3}$ m, 108.87 m (e) 92.37 m
3. (a) $22\sqrt{3}$ m (b) 30.02 m (c) 2.18 m (d) 6.93 m
4. (a) 123.56 m (b) 45.61 m (c) 60 m (d) 115.35 m
5. (a) 60° (b) 30° (c) 45° (d) 60° (e) (i) 60 m (ii) $30\sqrt{3}$ m

अभ्यास 17.1

1. (a) 27.14 वर्ष (b) 33kg (c) 62 (d) रु. 31,00,000
2. (a) 28.60 (b) 38.33 3. (a) 5 (b) 10

अभ्यास 17.2

1. (a) 28 (b) रु. 2833.33 (c) 36 वर्ष
2. (a) रु. 181.03 (b) रु. 89.38 (c) 23 cm
3. (a) 57.50 (b) 41.40 वर्ष
4. $Q_1 = 13.50$, $Q_3 = 24.25$ 5) 49.50 6) 25 7) 57.50
8. (a) 20 - 30 (b) 10 - 20 (b) 30 - 40

अभ्यास 18.1

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{3}{13}$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) i) $\frac{1}{4}$ ii) $\frac{3}{4}$
7. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{4}{15}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{3}{5}$
8. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (v) $\frac{2}{3}$ (v) 0
- 9) $\frac{4}{11}$ 10) $\frac{6}{11}$

अभ्यास 18.2

- 1) $\frac{1}{12}$ 2) $\frac{7}{15}$ 3. (i) $\frac{14}{45}$ (ii) $\frac{31}{45}$ (iii) $\frac{28}{45}$ 4) $\frac{1}{8}$ 5. (i) $\frac{1}{221}$ (ii) $\frac{8}{663}$