# Repaso unidad 3

# MÉTODO EXACTO

## 1. Método Exacto

La integral de $\frac{1}{1+x^2}$ es:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

Aplicando los límites de integración:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

# TRAPECIO

## Regla del Trapecio Compuesta

La fórmula general es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Donde:

- $a = 0, b = 1$
- $n = 4$, entonces $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

**Puntos de evaluación:**

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad x_4 = 1$$

**Evaluación de la función:**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- $f(0) = 1$
- $f(0.25) = \frac{1}{1+0.0625} = \frac{1}{1.0625} \approx 0.9412$
- $f(0.5) = \frac{1}{1+0.25} = 0.8$
- $f(0.75) = \frac{1}{1+0.5625} = \frac{1}{1.5625} \approx 0.6400$
- $f(1) = 0.5$

Sustituimos en la fórmula:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{0.25}{2}[1 + 2(0.9412 + 0.8 + 0.6400) + 0.5]$$

$$= 0.125 \cdot [1 + 2(2.3812) + 0.5] = 0.125 \cdot [1 + 4.7624 + 0.5] = 0.125 \cdot 6.2624 \approx 0.7828$$

---

Resultado con Trapecios $n = 4$:

$$\boxed{0.7828}$$

# SIMPSON 1/3

**Fórmula de Simpson 1/3 compuesta:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

Con:

- $a = 0, b = 1, n = 4$
- $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$
- Puntos: $x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1$

Ya evaluamos previamente:

- $f(0) = 1$
- $f(0.25) \approx 0.9412$
- $f(0.5) = 0.8$
- $f(0.75) \approx 0.6400$
- $f(1) = 0.5$

Sustituimos en la fórmula:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{0.25}{3}\left[1+4(0.9412)+2(0.8)+4(0.6400)+0.5\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[1+3.7648+1.6+2.56+0.5\right] = \frac{0.25}{3}\cdot 9.4248$$

$$= \frac{1}{12}\cdot 9.4248 \approx 0.7854$$

# NEWTON COTES

## 🔷 1. Newton-Cotes

### ✅ Características:

- Usa **puntos equidistantes** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a, b]$.
- Aproxima $f(x)$ con un **polinomio de interpolación** de Lagrange de grado $n$.
- Tiene fórmulas cerradas (incluyen los extremos $a, b$) y abiertas (no incluyen extremos).
- Ejemplos:
  - Orden 1 (2 puntos): **regla del trapecio**
  - Orden 2 (3 puntos): **regla de Simpson 1/3**
  - Orden 4 (5 puntos): $\text{coef.}\ [\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \ldots]$

## 📌 Fórmula general:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \quad \text{con } x_i = a + ih$$

donde $h = \frac{b-a}{n}$ y los $w_i$ son **constantes conocidas** (derivadas de la integral de los polinomios de Lagrange).

# GAUSS

## 🔷 2. Cuadratura de Gauss

### ✅ Características:

- Usa **puntos no equidistantes** $x_i$ y **pesos** $w_i$ **óptimos.**
- Los puntos $x_i$ son **raíces de los polinomios ortogonales** (por ejemplo, Legendre en [−1, 1]).
- Con $n$ puntos, es exacto para polinomios de grado hasta $2n - 1$ (mejor que Newton-Cotes).
- Requiere **transformar el intervalo** a $[-1, 1]$ si no lo es.

### 📌 Fórmula general (en $[-1, 1]$):

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Donde:

- $x_i$: raíces del polinomio de Legendre de grado $n$
- $w_i$: pesos asociados a esas raíces

Para integrales en $[a, b]$, se transforma con:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x\right) dx$$