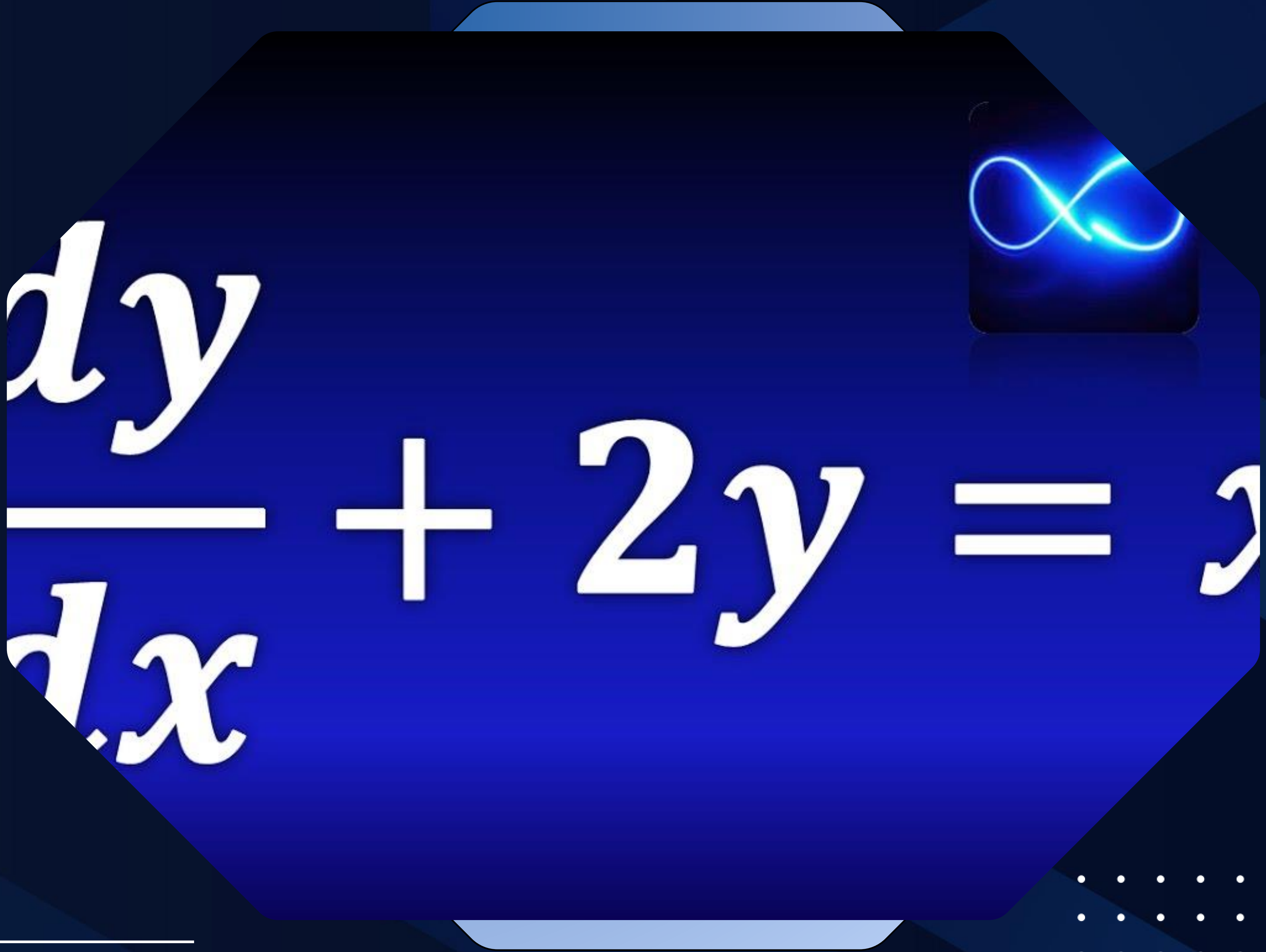
CARRERA DE INFORMÁTICA

Ecuaciones Diferenciales

MODELO MATEMÁTICO



Abril 2025

Contenido

Introducción

Una partícula de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza proporcional al cuadrado de su velocidad:

$$F = -kv^2$$

con $k = 0.5\,\mathrm{kg/m}$.

Además, en el instante inicial $t = 0$, su velocidad es $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$.

Se desea encontrar la expresión de la velocidad en función del tiempo.

02

Modelo:

Segunda Ley de Newton:

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

Sustituimos los valores:

$$1 \cdot \frac{dv}{dt} = -0.5 \cdot v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -0.5v^2$$

DESARROLLO

$$\frac{dv}{v^2} = -0.5dt$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{1}{v^2}dv = \int -0.5dt \Rightarrow -\frac{1}{v} = -0.5t + C \Rightarrow \frac{1}{v} = 0.5t + C$$

Introducción

01

Usamos $v(0) = 10$:

$$\frac{1}{10} = 0.5 \cdot 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{10}$$

Sustituimos:

$$\frac{1}{v} = 0.5t + \frac{1}{10} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{0.5t + \frac{1}{10}}$$

SOLUCI+ÓN

Resultado final

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{0.5t + \frac{1}{10}}}$$

06

Ejercicio porpuesto:

Una partícula de masa $m = 1.5\,\mathrm{kg}$ se mueve bajo la acción de una fuerza de fricción proporcional al cuadrado de su velocidad:

$$F = -kv^2$$

donde $k = 0.3\,\mathrm{kg/m}$. Si en el instante $t = 0$, su velocidad es $v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$,

determina la expresión de la velocidad en función del tiempo.

Respuesta:

Respuesta final

$$v(t) = \frac{1}{0.2t + \frac{1}{8}}$$

Fluidos

📌 Ejercicio con caudal (flujo de fluido)

Un tanque cilíndrico se está vaciando a través de un pequeño orificio en el fondo. La velocidad de salida del agua sigue la **Ley de Torricelli:**

$$v = \sqrt{2gh}$$

donde:

- $h(t)$ es la altura del agua en el tiempo t,
- $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ es la gravedad.

Problema

ECUACIONES DIFERENCIALES

La ecuación diferencial que modela el vaciado es:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

donde k es una constante positiva que depende del área del orificio.

Si inicialmente el tanque tiene $h(0) = 1\,\mathrm{m}$ de altura de agua,

encuentra la expresión de la altura $h(t)$ del agua con el tiempo.

EJERCICIOS

Respuesta final

$$h(t) = \left(1 - \frac{k}{2}t\right)^2$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

✍️ Paso 2: Separar variables

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -k\,dt$$

Recordando que $\frac{1}{\sqrt{h}} = h^{-1/2}$, integramos ambos lados:

$$\int h^{-1/2}\,dh = \int -k\,dt$$

$$2\sqrt{h} = -kt + C$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

✍️ Paso 3: Despejar $h(t)$

Dividimos entre 2:

$$\sqrt{h} = \frac{-kt + C}{2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$h(t) = \left(\frac{-kt + C}{2}\right)^2 = \left(\frac{C - kt}{2}\right)^2$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

✍️ Paso 4: Aplicar la condición inicial

Sabemos que:

$$h(0) = 1 \Rightarrow \left(\frac{C}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{C}{2} = \pm 1 \Rightarrow C = \pm 2$$

Tomamos $C = 2$ (positiva para que la raíz dé valores reales y positivos):

$$h(t) = \left(\frac{2 - kt}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{k}{2}t\right)^2$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

📌 Ejercicio propuesto (vaciado de tanque con caudal)

Un tanque contiene agua a una altura inicial de $h(0) = 2\,\mathrm{m}$ y se vacía por un pequeño orificio en su base. La velocidad del agua que sale está dada por la ley de Torricelli:

$$v = \sqrt{2gh}$$

y el cambio de altura del agua está modelado por:

$$\frac{dh}{dt} = -0.4\sqrt{h}$$

Encuentra la expresión de la altura del agua $h(t)$ en función del tiempo.

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

Respuesta final

$$\boxed{h(t) = (2 - 0.2t)^2}$$

Computación

ECUACIONES DIFERENCIALES

💻📌 Ejercicio aplicado a informática: propagación de un virus informático

En una red de 1000 computadoras, un virus se propaga de tal manera que la tasa de cambio de computadoras infectadas es proporcional tanto al número de computadoras infectadas como al número de computadoras sanas.

Sea $I(t)$ el número de computadoras infectadas en el tiempo t (en horas). El modelo es:

$$\frac{dI}{dt} = k \cdot I(t) \cdot (1000 - I(t))$$

Si al inicio hay 10 computadoras infectadas y se ha estimado que $k = 0.001$,

encuentra la expresión de $I(t)$, el número de computadoras infectadas en el tiempo.

✅ Respuesta final (forma general):

$$\boxed{I(t) = \frac{1000}{1 + 99e^{-k \cdot 1000t}}}$$

Sustituyendo $k = 0.001$:

$$\boxed{I(t) = \frac{1000}{1 + 99e^{-t}}}$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

En una red de 1000 computadoras, un virus se propaga de forma que la tasa de cambio del número de computadoras infectadas es proporcional al producto entre las computadoras infectadas y las que aún están sanas.

La ecuación que modela esta situación es:

$$\frac{dI}{dt} = kI(1000 - I)$$

donde:

- $I(t)$: número de computadoras infectadas en el tiempo t (en horas),
- $k = 0.001$: constante de propagación.

Condición inicial:

$$I(0) = 10$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

✍️ Paso 1: Separar variables

$$\frac{dI}{I(1000 - I)} = k\,dt$$

La izquierda es una fracción racional. Vamos a hacer **fracciones parciales** para integrarla:

$$\frac{1}{I(1000 - I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{1000 - I}$$

Multiplicamos ambos lados por $I(1000 - I)$:

$$1 = A(1000 - I) + B(I)$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

Igualamos coeficientes:

$$1 = 1000A - AI + BI = 1000A + (B - A)I$$

Entonces:

- $1000A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{1000}$
- $B - A = 0 \Rightarrow B = A = \frac{1}{1000}$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

✍ Paso 2: Sustituir e integrar

$$\int \left(\frac{1}{1000} \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{1000 - I} \right) \right) dI = \int 0.001\, dt$$

$$\frac{1}{1000} \int \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{1000 - I} \right) dI = 0.001t + C$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

Integrando:

$$\frac{1}{1000}(\ln|I| - \ln|1000 - I|) = 0.001t + C$$

$$\ln\left(\frac{I}{1000 - I}\right) = 1000(0.001t + C) = t + C_1$$

(Cambiamos la constante a C_1 para simplificar.)

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

✍️ Paso 3: Eliminar logaritmo

Aplicamos exponencial en ambos lados:

$$\frac{I}{1000 - I} = e^{t+C_1} = C_2 e^t$$

$$I = (1000 - I)C_2 e^t \Rightarrow I + IC_2 e^t = 1000C_2 e^t \Rightarrow I(1 + C_2 e^t) = 1000C_2 e^t$$

$$I(t) = \frac{1000C_2 e^t}{1 + C_2 e^t}$$

Desarrollo

ECUACIONES DIFERENCIALES

✍️ Paso 4: Aplicar condición inicial

$$I(0) = 10 \Rightarrow \frac{1000C_2}{1 + C_2} = 10$$

Multiplicamos:

$$1000C_2 = 10(1 + C_2) = 10 + 10C_2 \Rightarrow 990C_2 = 10 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{99}$$

¡Gracias por su atención!