◆ Fórmula general de Newton-Cotes:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

Donde:

- w_i: pesos (coeficientes) de Newton-Cotes para cada punto x_i
- x_i: nodos equiespaciados en $[a,b]$
- $f(x_i)$: valor de la función en esos nodos

⚙️ ¿Cómo se usa?

Para una integral en el intervalo $[a, b]$ con n subintervalos (grado n):

1. Divide el intervalo en n partes iguales.
2. Evalúa $f(x_i)$ en esos nodos.
3. Aplica:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

> Donde $h = \frac{b-a}{n}$, y los w_i son los pesos de la tabla.

📊 Tabla de coeficientes w_i en Newton-Cotes cerrada

Grado n	Número de nodos	Nombre común	Coeficientes w_i (normalizados, multiplicar por h)
1	2	Regla del trapecio	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
2	3	Simpson 1/3	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$
3	4	Simpson 3/8	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$
4	5	—	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$
5	6	—	$\frac{19}{288}, \frac{75}{288}, \frac{50}{288}, \frac{50}{288}, \frac{75}{288}, \frac{19}{288}$

◆ ¿Qué es una fórmula **cerrada**?

- Usa los puntos extremos del intervalo $[a, b]$.
- Ejemplo: Simpson 1/3 usa $f(a)$, $f(m)$, $f(b)$

Se llama "cerrada" porque incluye los bordes.

◆ ¿Qué es una fórmula **abierta**?

- No usa los extremos del intervalo.
- Solo usa puntos **dentro del intervalo**, como $a+h$, $a+2h$, etc.

Se llama "abierta" porque los extremos están *abiertos* o excluidos.

📌 Ejemplo: Fórmula de Newton-Cotes abierta de grado 1 (n = 1)

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

🔷 Solo usa el punto medio → **no usa ni $f(a)$ ni $f(b)$**

📊 ¿Cuándo usar fórmulas abiertas?

- Cuando la función **no está definida en los extremos**, por ejemplo, si hay una **discontinuidad o asíntota.**
- Para evitar errores en bordes inestables numéricamente.

Aclaración

📘 1. Fórmula con h

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

Donde:

- $h = \frac{b-a}{n}$: paso uniforme entre los nodos
- w_i: coeficientes normalizados (por ejemplo: $w = 1, 4, 1$ para Simpson)

👉 Esta es la fórmula clásica de Newton-Cotes cuando los nodos están equispaciados.

📗 2. Fórmula sin h

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

Aquí los w_i **ya incluyen a** h. Son los **pesos exactos ajustados** al intervalo $[a, b]$.

👉 Este es el enfoque más general (y más elegante), típico en **cuadratura de Gauss** o Newton-Cotes cuando:

- Ya conoces $w_i \cdot h$ pre-calculado (por ejemplo: $\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$).

🎯 Entonces:

Contexto	Usa h?	¿Cómo se calculan w_i?
Newton-Cotes básico	✅ Sí	Coeficientes combinatorios clásicos
Newton-Cotes pretabulado	❌ No	Ya traen $h \cdot w_i$ embebido
Cuadratura de Gauss	❌ No	Se usa cambio de variable y nodos especiales

Ejemplo:

🔷 Integral definida:

$$\int_1^2 x \cdot \ln(x)\, dx$$

Usaremos la **fórmula de Newton-Cotes cerrada de grado 2**, que equivale a **Simpson 1/3**, y aplicaremos la estructura general:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

¿Qué significa "Newton-Cotes cerrada de grado 2"?

- Se usa un **polinomio de grado 2** (parábola) que interpola 3 puntos: x_0, x_1, x_2
- Es equivalente a la **regla de Simpson 1/3**

📌 Fórmula general de Simpson 1/3 (gr. 2):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Donde:

- $h = \frac{b-a}{2}$
- $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = b$

📌 Datos del problema:

- $a = 1, b = 2, n = 2$
- $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$
- Nodos:
  - $x_0 = 1$
  - $x_1 = 1.5$
  - $x_2 = 2$
- Coeficientes Newton-Cotes grado 2:
  - $w_0 = \frac{1}{6}$
  - $w_1 = \frac{4}{6}$
  - $w_2 = \frac{1}{6}$

□ ¿Cómo se obtiene $w_0 = \frac{1}{6}$, etc.?

Sabemos:

$$\frac{h}{3}[1 \cdot f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 1 \cdot f(x_2)]$$

Factorizamos h:

$$= h \cdot \left[\frac{1}{3} f(x_0) + \frac{4}{3} f(x_1) + \frac{1}{3} f(x_2)\right]$$

Y ahora, como $h = \frac{b-a}{2}$, tenemos:

$$= \frac{b-a}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} f(x_0) + \frac{4}{3} f(x_1) + \frac{1}{3} f(x_2)\right]$$

Multiplicamos:

$$= (b-a) \cdot \left[\frac{1}{6} f(x_0) + \frac{4}{6} f(x_1) + \frac{1}{6} f(x_2) \right]$$

🎯 Entonces:

- $w_0 = w_2 = \frac{1}{6} \cdot (b - a)$
- $w_1 = \frac{4}{6} \cdot (b - a)$

Y como en nuestro caso $b - a = 1$, los coeficientes son simplemente:

- $w_0 = \frac{1}{6}$
- $w_1 = \frac{4}{6}$
- $w_2 = \frac{1}{6}$

📌 Paso 1: Formula general de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

Donde:

- $a = 1, b = 2, n = 2$
- Nodos: $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2$
- Paso: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$
- Coeficientes (Newton-Cotes grado 2):

$$w_0 = \frac{1}{6}(b-a), \quad w_1 = \frac{4}{6}(b-a), \quad w_2 = \frac{1}{6}(b-a)$$

Como $b - a = 1$, se simplifica a:

$$w_0 = \frac{1}{6}, \quad w_1 = \frac{4}{6}, \quad w_2 = \frac{1}{6}$$

📌 Paso 2: Evaluar la función en los nodos

$$f(x) = x\ln(x)$$

- $f(1) = 1 \cdot \ln(1) = 0$
- $f(1.5) = 1.5 \cdot \ln(1.5) \approx 1.5 \cdot 0.4055 = 0.6083$
- $f(2) = 2 \cdot \ln(2) \approx 2 \cdot 0.6931 = 1.3862$

📌 Paso 3: Aplicar fórmula

$$\int_1^2 x\ln(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\cdot f(1) + \frac{4}{6}\cdot f(1.5) + \frac{1}{6}\cdot f(2)$$

$$\approx \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{4}{6}\cdot 0.6083 + \frac{1}{6}\cdot 1.3862$$

$$\approx 0 + 0.4055 + 0.2310 = \boxed{0.6365}$$

✅ Resultado por Newton-Cotes general (grado 2):

$$\int_1^2 x \ln(x)\, dx \approx \boxed{0.6365}$$

FIN