UNIDAD 4

RETROALIMENTACIÓN

✅ Propuesta de ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2), \quad y(0) = 0$$

¿Por qué es ideal?

- La función $\cos(x^2)$ **no tiene primitiva elemental** (es decir, no se puede integrar analíticamente usando funciones conocidas).
- No es lineal, homogénea ni exacta.
- Es perfecta para métodos **numéricos de integración**, como:

◆ Método de Newton-Cotes (ej. Simpson 1/3 o trapecios)

- Puedes aproximar:

$$y(b) = \int_0^b \cos(x^2)\, dx$$

◆ Cuadratura de Gauss

- También puedes aproximar esta integral evaluando $\cos(x^2)$ en puntos de Legendre y usando sus respectivos pesos.

◆ MÉTODO 1: **Regla del Trapecio (n = 4 subintervalos)**

 Fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum f(x_i) + f(x_n)\right]$$

- $a = 0, b = 1, n = 4$
- $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$
- Puntos:

  $x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1$

Evaluamos:

$$f(x) = \cos(x^2)$$

x	$\cos(x^2)$
0.00	$\cos(0) = 1$
0.25	$\cos(0.0625) \approx 0.998$
0.50	$\cos(0.25) \approx 0.9689$
0.75	$\cos(0.5625) \approx 0.8467$
1.00	$\cos(1) \approx 0.5403$

📘 **Sustituimos:**

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx \approx \frac{0.25}{2}\left[1 + 2(0.998 + 0.9689 + 0.8467) + 0.5403\right]$$

$$= 0.125 \cdot [1 + 2(2.8136) + 0.5403] = 0.125 \cdot (1 + 5.6272 + 0.5403) = 0.125 \cdot 7.1675 \approx 0.8959$$

✅ **Resultado con trapecios (n=4):**

$$\boxed{0.8959}$$

◆ MÉTODO 2: **Simpson 1/3 (n = 4 subintervalos)**

□ Fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

Con los mismos datos:

- $a = 0, b = 1, n = 4, h = 0.25$
- Puntos:

  $x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1$

Evaluaciones ya conocidas:

$$f(0) = 1$$

$$f(0.25) = \cos(0.0625) \approx 0.9980$$

$$f(0.5) = \cos(0.25) \approx 0.9689$$

$$f(0.75) = \cos(0.5625) \approx 0.8467$$

$$f(1) = \cos(1) \approx 0.5403$$

📘 **Sustituimos:**

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx \approx \frac{0.25}{3}\left[1 + 4(0.9980) + 2(0.9689) + 4(0.8467) + 0.5403\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[1 + 3.992 + 1.9378 + 3.3868 + 0.5403\right] = \frac{0.25}{3} \cdot 10.8569$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 10.8569 \approx 0.9047$$

✅ **Resultado con Simpson 1/3 (n = 4):**

$$\boxed{0.9047}$$

◆ MÉTODO 3: **Newton-Cotes Cerrado de Orden 4** (5 puntos equidistantes)

 Fórmula general:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{45}\left[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right]$$

- $a = 0, b = 1, n = 4$ (5 puntos)
- $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

Puntos y evaluaciones:

$$f(0) = 1$$

$$f(0.25) \approx 0.9980$$

$$f(0.5) \approx 0.9689$$

$$f(0.75) \approx 0.8467$$

$$f(1) \approx 0.5403$$

📘 **Sustituimos en la fórmula:**

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx \approx \frac{0.5}{45}\left[7(1) + 32(0.9980) + 12(0.9689) + 32(0.8467) + 7(0.5403)\right]$$

Calculamos paso a paso:

$$= \frac{0.5}{45}\left[7 + 31.936 + 11.6268 + 27.4944 + 3.7821\right] = \frac{0.5}{45} \cdot 81.8393 \approx \frac{81.8393}{90} \approx 0.9093$$

✅ **Resultado con Newton-Cotes orden 4:**

$$\boxed{0.9093}$$

NEWTON COTES CON PESOS NORMALIZADOS

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{4} w_i f(x_i)$$

Datos:

- Intervalo: $a = 0, b = 1$
- $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$
- Puntos:

  $x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1$

🎯 Pesos normalizados de Newton-Cotes orden 4 (multiplicados por h):

$$w_0 = \frac{7h}{90} = \frac{7 \cdot 0.25}{90} = 0.01944$$
$$w_1 = \frac{32h}{90} = 0.08889$$
$$w_2 = \frac{12h}{90} = 0.03333$$
$$w_3 = \frac{32h}{90} = 0.08889$$
$$w_4 = \frac{7h}{90} = 0.01944$$

Evaluaciones:

$$f(0) = \cos(0^2) = 1$$

$$f(0.25) = \cos(0.0625) \approx 0.9980$$

$$f(0.5) = \cos(0.25) \approx 0.9689$$

$$f(0.75) = \cos(0.5625) \approx 0.8467$$

$$f(1.0) = \cos(1) \approx 0.5403$$

📘 Sustituimos:

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx \approx 0.01944(1) + 0.08889(0.9980) + 0.03333(0.9689) + 0.08889(0.8467) + 0.01944(0.5403)$$

$$= 0.01944 + 0.08871 + 0.03230 + 0.07528 + 0.01050 = \boxed{0.9262}$$

✅ Resultado con pesos normalizados $w_i f(x_i)$:

$$\boxed{0.9262}$$

◆ MÉTODO 4: **Cuadratura de Gauss – 2 puntos**

🎯 Objetivo:

Aproximar:

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$$

Usamos la **cuadratura de Gauss-Legendre**, que está definida originalmente en el intervalo $[-1, 1]$. Para aplicarla en $[0, 1]$, hacemos un **cambio de variable**:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1+t}{2}\right)dt$$

□ Puntos y pesos para Gauss 2 puntos:

t_i	w_i
$-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.577$	1
$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$	1

Transformamos:

$$x_i = \frac{1 + t_i}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 - 0.577}{2} \approx 0.2115, \quad x_2 = \frac{1 + 0.577}{2} \approx 0.7885$$

Evaluaciones:

$$f(x_1) = \cos(0.2115^2) = \cos(0.0447) \approx 0.99899$$
$$f(x_2) = \cos(0.7885^2) = \cos(0.6218) \approx 0.8136$$

📘 **Sustituimos:**

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[f(0.2115) + f(0.7885)\right] = \frac{1}{2}(0.99899 + 0.8136) \approx \frac{1}{2}\cdot 1.8126 = \boxed{0.9063}$$

✅ **Resultado con Cuadratura de Gauss (2 puntos):**

$$\boxed{0.9063}$$

FIN