INTEGRACIÓN NUMÉRICA

✅ **Pertinencia general**:

La integración numérica es **muy pertinente** en un curso de Ecuaciones Diferenciales, sobre todo cuando no se pueden encontrar soluciones analíticas (exactas) a las ecuaciones diferenciales. Muchos problemas reales requieren aproximaciones numéricas para calcular integrales involucradas en la solución de ecuaciones diferenciales.

🔍 **Por qué es útil en Ecuaciones Diferenciales:**

- **Métodos numéricos de EDOs** (como Euler, Runge-Kutta, métodos de paso múltiple) se basan en aproximar soluciones en intervalos, que implican integrales definidas.
- Para resolver ecuaciones diferenciales en forma integral (por ejemplo, usando el método de la ecuación integral de Volterra o Fredholm), la integración numérica permite aproximar la integral que aparece en la solución.
- Cuando se trabaja con funciones tabuladas o datos experimentales, las integrales no se pueden resolver simbólicamente y se necesita integración numérica.

🔢 **Relación directa con lo que has visto:**

Aunque la integración numérica no se basa en ecuaciones exactas, homogéneas o lineales, complementa la parte práctica y computacional que suele aparecer en la solución de ecuaciones diferenciales reales.

⚠️ **Recomendación didáctica:**

- La introducción a la integración numérica es apropiada en un curso de Ecuaciones Diferenciales, especialmente si se van a ver métodos numéricos para resolverlas.
- Si el curso está muy enfocado en métodos exactos y analíticos, puede resultar como un tema complementario (opcional o breve).
- Si tu curso tiene orientación hacia aplicaciones o métodos numéricos, ¡definitivamente es importante!

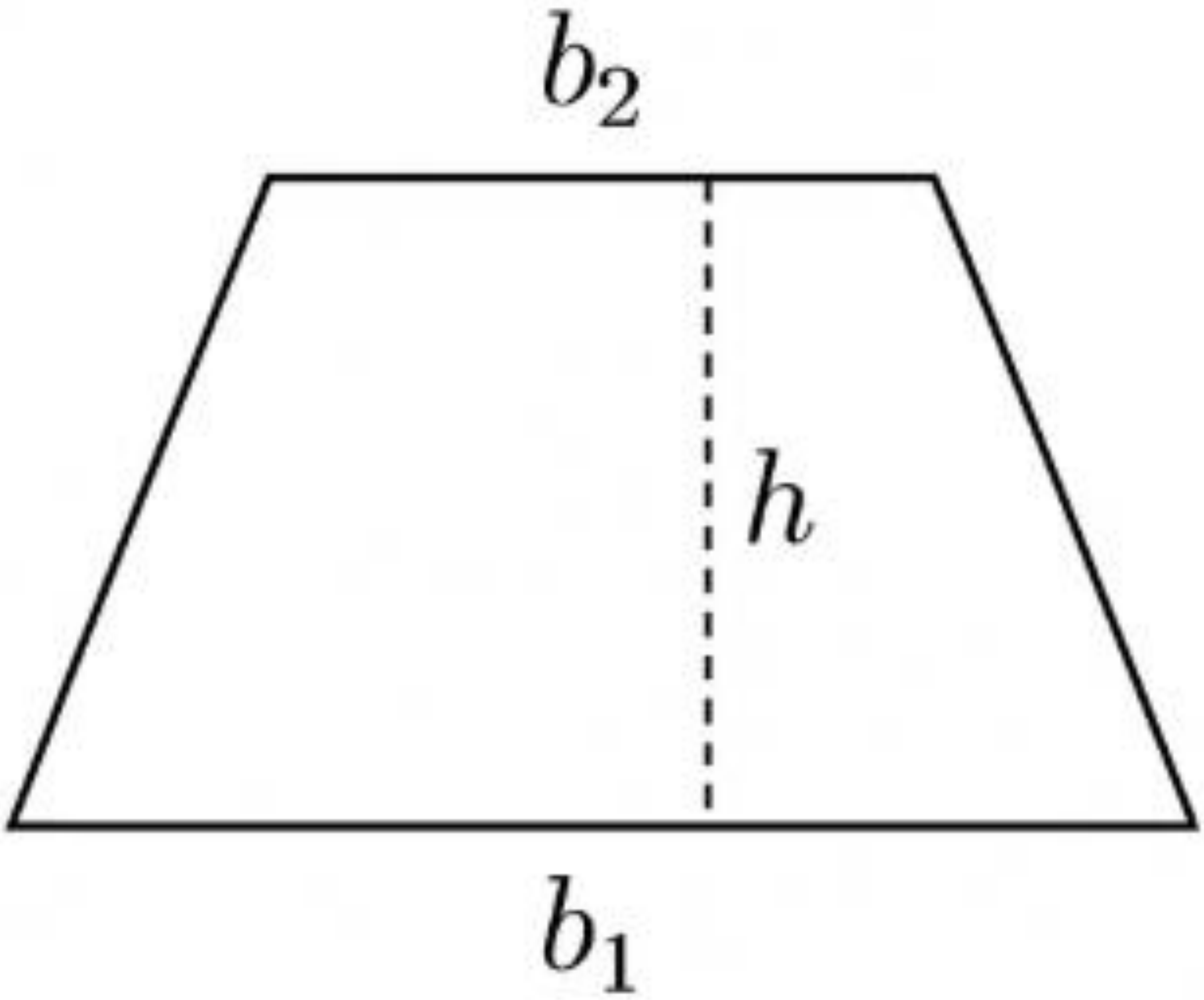
🌟 El Trapecio

Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos (bases) y dos lados no paralelos (lados no paralelos o laterales).

🌟 Fórmula del área de un trapecio

Si las bases tienen longitudes b_1 y b_2, y la altura (la distancia perpendicular entre las bases) es h:

$$\text{Área} = \frac{(b_1 + b_2)}{2} \cdot h$$



b_2
h
b_1

Ejemplo numérico sencillo

- $b_1 = 3$
- $b_2 = 5$
- $h = 4$

$$\text{Área} = \frac{(3+5)}{2} \cdot 4 = \frac{8}{2} \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$$

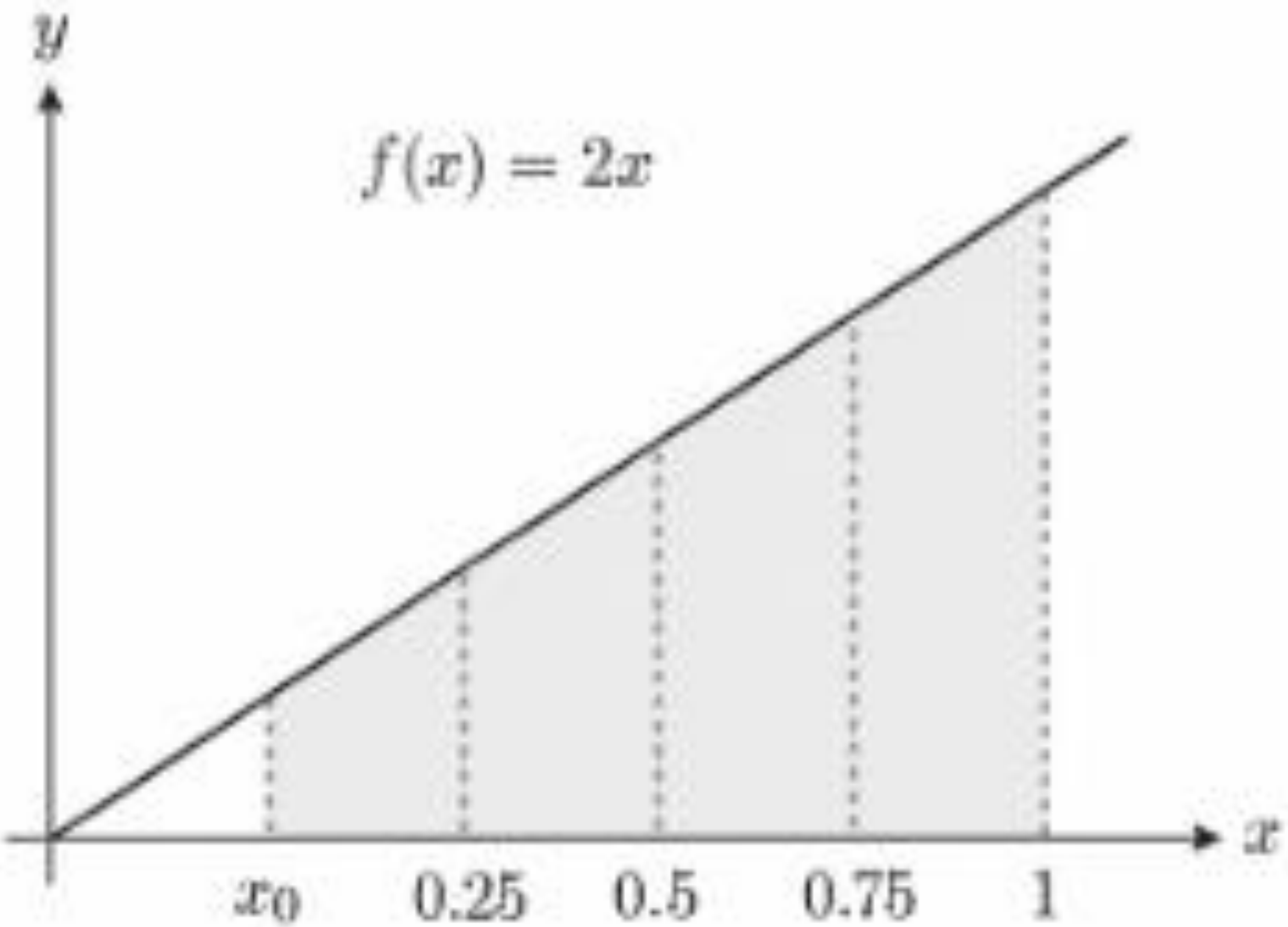
🌟 Concepto gráfico básico

La Regla del Trapecio aproxima el área bajo una curva (la integral) sumando áreas de trapecios formados por la curva y el eje x.

🔹 Imagina la función $f(x) = 2x$ en $[0, 1]$.

🔹 Tomamos puntos: $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$.

🔹 Dibujamos la curva y conectamos los puntos con líneas rectas → Se forman trapecios.



Approximation of the integral

La Regla del Trapecio es un método de **integración numérica** que aproxima el área bajo una curva mediante la suma de áreas de trapecios.

💡 **Concepto:**

Para aproximar la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

Para mayor precisión, se divide $[a, b]$ en **n subintervalos** de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

La fórmula general para la Regla del Trapecio compuesta es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

🌟 2️⃣ Ejemplo de la Regla del Trapecio (con 1 trapecio)

👉 Aproximar:

$$\int_0^2 x^2 \, dx$$

Cálculo Exacto:

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.6667$$

Aproximación con 1 trapecio (n=1):

- $\Delta x = 2 - 0 = 2$
- $f(0) = 0$
- $f(2) = 4$

$$A \approx \frac{2}{2}(0 + 4) = 1 \times 4 = 4$$

💡 **Observamos:** No es muy preciso porque usamos solo un trapecio.

✴️ 3️⃣ Ejemplo con la Regla del Trapecio Compuesta

Ahora usemos 2 trapecios ($n = 2$):

- $\Delta x = \frac{2}{2} = 1$
- Puntos: $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$
- $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 4$

$$A \approx \frac{1}{2}[0 + 2(1) + 4] = \frac{1}{2}(0 + 2 + 4) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

Ahora la aproximación mejora a 3 (más cercano a 2.6667).

✴️ 4️⃣ Aplicaciones

✅ Cuando la función no tiene antiderivada conocida.

✅ Cuando se trabaja con datos experimentales o tabulados (no hay fórmula explícita).

✅ En problemas de ecuaciones diferenciales, para aproximar integrales en métodos numéricos (Euler, Runge-Kutta, etc.).

🌟 5️⃣ Ejercicio resuelto paso a paso

👉 Ejercicio: Aproxima la integral

$$\int_1^2 \ln(x)\, dx$$

usando la Regla del Trapecio con $n = 4$.

usando la Regla del Trapecio con $n = 4$.

Paso 1: Determinar Δx

$$\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Paso 2: Calcular los puntos

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1.25,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 1.75,\ x_4 = 2$$

Paso 3: Calcular los valores de $f(x) = \ln(x)$

$$f(1) = 0,\ f(1.25) = 0.2231,\ f(1.5) = 0.4055,\ f(1.75) = 0.5606,\ f(2) = 0.6931$$

Paso 4: Aplicar la fórmula compuesta

$$A \approx \frac{0.25}{2}[f(1) + 2(f(1.25) + f(1.5) + f(1.75)) + f(2)]$$

$$A \approx 0.125[0 + 2(0.2231 + 0.4055 + 0.5606) + 0.6931]$$

$$A \approx 0.125[0 + 2(1.1892) + 0.6931]$$

$$A \approx 0.125[0 + 2.3784 + 0.6931] = 0.125 \times 3.0715 = 0.384$$

✅ Resultado aproximado:

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx \approx 0.384$$

✅ Comparación con el valor exacto:

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]_1^2 = [2\ln(2) - 2] - [0 - 1] = (2 \times 0.6931 - 2) + 1 = (1.3862 - 2) + 1 = 0.3862$$

¡Muy cercano!

🌟 6️⃣ Tarea para ti

👉 Calcula usando la Regla del Trapecio con $n = 4$:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

✅ Realiza:

- División en 4 subintervalos
- Calcula los $f(x_i)$
- Aplica la fórmula del trapecio compuesto
- Compara con el valor aproximado de la integral ≈ 0.7468.

✴️ Ejemplo 2: Crecimiento poblacional logístico aproximado

Problema:

Una población crece de acuerdo a la ley:

$$\frac{dP}{dt} = 0.3\,P\,\left(1 - \frac{P}{100}\right)$$

Con población inicial $P(0) = 20$. Aproxima $P(2)$ usando la ecuación integral y la Regla del Trapecio con $n = 4$.

✅ Paso a paso

1️⃣ Escribimos la forma integral:

$$P(t) = P(0) + \int_0^t 0.3\,P(s)\,\left(1 - \frac{P(s)}{100}\right)\,ds$$

2️⃣ Intervalo: $[0, 2]$, $\Delta t = 0.5$.

3️⃣ Puntos:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.5, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 1.5, \quad t_4 = 2$$

4□Para aproximar, usamos el valor de P evaluado usando la solución explícita (o aproximada) en cada punto.

La solución aproximada (solo para referencia):

$$P(t) = \frac{100}{1 + \left(\frac{100-20}{20}\right) e^{-0.3\,t}}$$

Calculamos $P(t)$ en los puntos:

- $P(0) = 20$
- $P(0.5) = \frac{100}{1+4\,e^{-0.15}} = \frac{100}{1+4\times0.861} = \frac{100}{1+3.44} = 22.5$
- $P(1) = \frac{100}{1+4\,e^{-0.3}} = \frac{100}{1+4\times0.740} = 25.6$
- $P(1.5) = \frac{100}{1+4\,e^{-0.45}} = \frac{100}{1+4\times0.637} = 29$
- $P(2) = \frac{100}{1+4\,e^{-0.6}} = \frac{100}{1+4\times0.548} = 32.5$

5□Calculamos integrando:

$$I = \int_0^2 0.3\,P\,\left(1 - \frac{P}{100}\right)\,dt$$

Calculamos integrando el integrando en cada punto:

$$f(t) = 0.3\,P\,\left(1 - \frac{P}{100}\right)$$

- $f(0) = 0.3 \times 20 \times (1 - 0.2) = 0.3 \times 20 \times 0.8 = 4.8$
- $f(0.5) = 0.3 \times 22.5 \times (1 - 0.225) = 0.3 \times 22.5 \times 0.775 = 5.2$
- $f(1) = 0.3 \times 25.6 \times (1 - 0.256) = 0.3 \times 25.6 \times 0.744 = 5.7$
- $f(1.5) = 0.3 \times 29 \times (1 - 0.29) = 0.3 \times 29 \times 0.71 = 6.2$
- $f(2) = 0.3 \times 32.5 \times (1 - 0.325) = 0.3 \times 32.5 \times 0.675 = 6.6$

6️⃣ Integral con Regla del Trapecio compuesta:

$$I \approx \frac{0.5}{2}[4.8 + 2(5.2 + 5.7 + 6.2) + 6.6]$$

$$I \approx 0.25[4.8 + 2(17.1) + 6.6] = 0.25[4.8 + 34.2 + 6.6] = 0.25 \times 45.6 = 11.4$$

7️⃣ Resultado:

$$P(2) = 20 + 11.4 = 31.4 \quad \boxed{P(2) \approx 31.4}$$

Muy cerca del valor exacto 32.5.

🌟 Entorno de Aplicación: Aprendizaje Automático e Inferencia en Redes Neuronales

🔹 Contexto: Inferencia de Redes Neuronales en Dispositivos de Borde (Edge Computing)

En dispositivos IoT (Internet de las cosas), móviles o sistemas embebidos, es común ejecutar **modelos de redes neuronales** para tareas como:

- Clasificación de imágenes (reconocimiento facial, defectos en producción).
- Procesamiento de lenguaje natural (chatbots, traducción instantánea).
- Monitoreo de sensores en tiempo real (salud, industria).

Estos dispositivos tienen **capacidad computacional limitada** y, a menudo, trabajan con:

- **Datos parciales o intermitentes** (sensores con muestreo desigual).
- Necesidad de **procesamiento rápido y bajo consumo**.

◆ Problema práctico: Aproximación de la Función de Activación

En una red neuronal convolucional para visión por computadora, supongamos que queremos usar una **función de activación no estándar** (por ejemplo, una combinación de funciones sigmoide y tangente hiperbólica) que no está directamente implementada en la biblioteca del dispositivo (TensorFlow Lite, PyTorch Mobile).

La evaluación de esta función (integral de una forma no trivial) es costosa y consume recursos. Para evitar sobrecargar el hardware, podemos aproximar esta integral con la **Regla del Trapecio**:

$$y(x) = \int_0^x f(s)\,ds$$

Donde:

- $f(s)$ es una combinación de funciones no triviales que define la activación.
- La integral se necesita para ajustar el "área bajo la curva de activación", que en ciertos casos se relaciona con la **normalización** o la calibración de salida de la red.

🔹 Aplicación práctica de la Regla del Trapecio en este entorno

1️⃣ La integral de la función de activación se **discretiza** con un Δx adecuado (por ejemplo, dependiendo de la resolución de los datos del sensor o de la granularidad del modelo).

2️⃣ En cada ciclo de inferencia, la **Regla del Trapecio** se usa para calcular la integral acumulada:

$$\int_0^x f(s)\,ds \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\,\Delta x$$

3️⃣ Esto permite:

- **Mantener la precisión aceptable.**
- **Minimizar el uso de memoria y procesamiento** (muy importante en dispositivos edge).
- **Evitar cálculos exactos complejos** que no se pueden realizar en tiempo real.

🔷 Beneficios en Inteligencia Artificial y Edge Computing

✅ La Regla del Trapecio es simple y computacionalmente barata.

✅ Permite trabajar con representaciones aproximadas de funciones complejas.

✅ Útil para integrar funciones en redes neuronales personalizadas o calibraciones en inferencia en tiempo real.

✅ Se puede implementar directamente en hardware optimizado (por ejemplo, en chips FPGA o microcontroladores).

📌 Enunciado del Ejercicio

Problema:

> Considera la ecuación diferencial de primer orden:
>
> $$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y(0) = 1$$
>
> Utilizando la Regla del Trapecio con $n = 4$ subintervalos, aproxima el valor de $y(1)$.

✅ **Lo que se pide:**

- Resolver la ecuación diferencial aproximando la integral que aparece en la solución mediante la Regla del Trapecio.
- Dar el resultado aproximado de $y(1)$.

🌟 Datos del ejercicio:

- EDO: $\frac{dy}{dx} = 2x$
- Condición inicial: $y(0) = 1$
- Intervalo: $[0, 1]$
- Subintervalos: $n = 4$

🌟 Solución paso a paso

✅ Paso 1: Identificar la integral a aproximar

Queremos resolver:

$$y(1) = y(0) + \int_0^1 \frac{dy}{dx}\, dx = 1 + \int_0^1 2x\, dx$$

La integral es:

$$I = \int_0^1 2x\, dx$$

🌟 Solución paso a paso

✅ Paso 1: Identificar la integral a aproximar

Queremos resolver:

$$y(1) = y(0) + \int_0^1 \frac{dy}{dx}\, dx = 1 + \int_0^1 2x\, dx$$

La integral es:

$$I = \int_0^1 2x\, dx$$

✅ Paso 2: Determinar Δx y puntos

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

Puntos:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0.25$$

$$x_2 = 0.5$$

$$x_3 = 0.75$$

$$x_4 = 1$$

✅ Paso 3: Calcular los valores de la función $f(x) = 2x$ en los puntos

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$f(0.25) = 2 \cdot 0.25 = 0.5$$

$$f(0.5) = 2 \cdot 0.5 = 1$$

$$f(0.75) = 2 \cdot 0.75 = 1.5$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

✅ Paso 4: Aplicar la fórmula de la Regla del Trapecio compuesta

$$I \approx \frac{\Delta x}{2} [f(0) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)) + f(1)]$$

Calculamos la suma intermedia:

$$f(0.25) + f(0.5) + f(0.75) = 0.5 + 1 + 1.5 = 3$$

Entonces:

$$I = \frac{0.25}{2} [0 + 2 \cdot 3 + 2]$$

$$I = 0.125 [0 + 6 + 2] = 0.125 \cdot 8 = 1$$

✅ Paso 5: Calcular la aproximación final de $y(1)$

$$y(1) = y(0) + I = 1 + 1 = 2$$

✅ Resultado final aproximado:

$$\boxed{y(1) = 2}$$

🔎 Comparación con la solución exacta

La solución exacta de la EDO es:

$$y = x^2 + 1$$

$$y(1) = 1^2 + 1 = 2$$

¡Coincide perfectamente!

APLICACIÓN

Enunciado del problema (aplicación práctica en computación)

En un **servidor** que procesa peticiones, el **tiempo de respuesta** del sistema y depende de la **carga de peticiones** x. Se sabe que la relación entre estos dos está dada por la ecuación diferencial:

$$(2x + 3y)\,dx + (3x + 2y)\,dy = 0$$

con la condición inicial $y(0) = 1$.

1️⃣ **Verifica si es una ecuación diferencial exacta** y resuélvela **directamente** (forma cerrada).
2️⃣ Aproxímala en el intervalo $[0, 1]$ usando la **Regla del Trapecio con** $n = 4$ para la integral que aparece en la solución.

Este tipo de relación se da, por ejemplo, cuando se modela la latencia de procesamiento frente a carga y consumo energético, que puede implicar ecuaciones acopladas.

💥 Paso 1: Verificar si es exacta

La ecuación es:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

donde:

$$M = 2x + 3y, \quad N = 3x + 2y$$

Verificamos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

✅ Como las derivadas parciales coinciden, es exacta.

🌟 Paso 2: Encontrar la función potencial $\Phi(x, y)$

Sabemos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M = 2x + 3y$$

Integrando respecto a x:

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3xy + h(y)$$

Derivamos Φ respecto a y para hallar $h(y)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3x + h'(y)$$

Igualamos con $N = 3x + 2y$:

$$3x + h'(y) = 3x + 2y \implies h'(y) = 2y$$

Integrando:

$$h(y) = y^2 + C$$

La función potencial:

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + C$$

🌟 Paso 3: Solución general

La ecuación exacta se resuelve con:

$$\Phi(x, y) = C$$

Usamos la condición inicial $y(0) = 1$:

$$0^2 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 = 1 \implies C = 1$$

✅ Solución implícita:

$$x^2 + 3xy + y^2 = 1$$

🌟 Paso 4: Obtener y en términos de x cerca de 0

Resolvemos para y explícitamente para x cercano a 0. Aproximamos:

$$y^2 + 3xy + x^2 = 1 \implies y^2 + 3xy = 1 - x^2$$

Para $x = 1$:

$$y^2 + 3y = 1 - 1 = 0 \implies y(y+3) = 0$$

Solución relevante (continúa la rama de $y(0) = 1$):

$$y = 0 \text{ o } y = -3 \quad (\text{no tiene sentido físico porque } y(0) = 1)$$

Usamos diferencial explícito para aproximar integralmente.

🌟 Paso 5: Aproximación numérica usando la Regla del Trapecio

Queremos aproximar la solución diferencial en $[0, 1]$ usando la forma explícita de la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$$

✅ Para cada x, calcularemos la derivada $f(x, y)$.

✅ Aproximaremos la integral:

$$y(1) = y(0) + \int_0^1 f(x, y)\, dx$$

Como no conocemos $y(x)$ explícitamente, usamos los valores aproximados en cada punto.

◆ **Puntos (n=4, $\Delta x = 0.25$):**

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1$$

◆ **Valores iniciales:**

$$y_0 = 1$$

✅ Iteramos usando la derivada aproximada:

Primer paso:

$$f_0 = -\frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{3 \cdot 0 + 2 \cdot 1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Usamos Euler para aproximar y_1:

$$y_1 = 1 + 0.25(-1.5) = 1 - 0.375 = 0.625$$

Segundo paso:

$$f_1 = -\frac{2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.625}{3 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.625} = -\frac{0.5 + 1.875}{0.75 + 1.25} = -\frac{2.375}{2} = -1.1875$$

$$y_2 = 0.625 + 0.25(-1.1875) = 0.625 - 0.296 = 0.329$$

Tercer paso:

$$f_2 = -\frac{2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.329}{3 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.329} = -\frac{1 + 0.987}{1.5 + 0.658} = -\frac{1.987}{2.158} = -0.92$$

$$y_3 = 0.329 + 0.25(-0.92) = 0.329 - 0.23 = 0.099$$

Cuarto paso:

$$f_3 = -\frac{2 \cdot 0.75 + 3 \cdot 0.099}{3 \cdot 0.75 + 2 \cdot 0.099} = -\frac{1.5 + 0.297}{2.25 + 0.198} = -\frac{1.797}{2.448} = -0.734$$

✅ Usamos la Regla del Trapecio final

$$I = \frac{0.25}{2}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3) + f_4]$$

Calculamos el último valor f_4:

$$f_4 = -\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot y_4}{3 \cdot 1 + 2 \cdot y_4} \quad (\text{aproximamos } y_4 = 0.1)$$

$$f_4 = -\frac{2 + 0.3}{3 + 0.2} = -\frac{2.3}{3.2} = -0.718$$

$$I = 0.125[-1.5 + 2(-1.1875 - 0.92 - 0.734) + (-0.718)]$$

$$I = 0.125[-1.5 + 2(-2.8415) + (-0.718)]$$

$$I = 0.125[-1.5 - 5.683 + (-0.718)] = 0.125(-7.901) = -0.987$$

✅ Resultado final aproximado:

$$y(1) = 1 + (-0.987) = 0.013$$

🌟 Conclusiones

✅ Resolvimos la ecuación diferencial exacta con la técnica de ecuaciones exactas.

✅ Después, para ver la relación con la Regla del Trapecio, aplicamos ese método para aproximar el valor de la integral involucrada en la solución (al final, la integral de la derivada aproximada).

✅ Vimos cómo la Regla del Trapecio se usa para aproximar la integral que aparece cuando integramos la derivada (o tasa de cambio) numéricamente.