Ecuaciones Diferenciales

Homogéneas

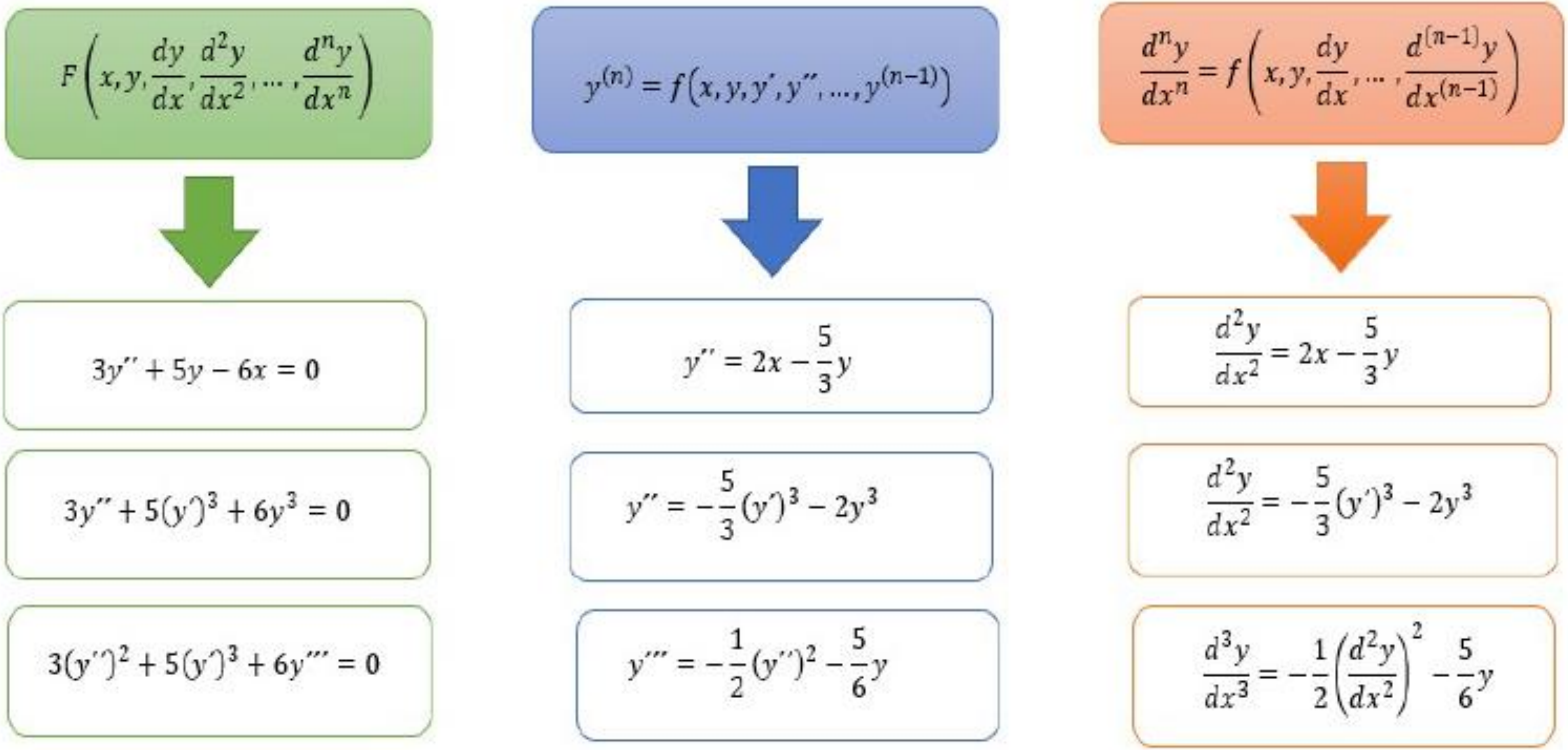

Figura 1.1: Ejemplo de formas de representar una ecuación diferencial.

Ejemplos 1.5.3. *Calcular la anti-derivada, es decir, solucione la ecuación diferencial.*

1. *Dada*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

se procede a encontrar la solución aplicando las técnicas para encontrar integrales, es decir

$$dy = \frac{dx}{1+x^2},$$

luego

$$y(x9 = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctang(x) + c,$$

donde c es una constante de integración arbitraria.

2. *Dada*

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \operatorname{sen} x \, dx,$$

multiplicando esta expresión por dx*, se tiene* $dy = x^2 \sin x dx$ *resulta ser,* $\int x^2 \sin x dx$*, así aplicando la integración por partes se tiene*

$$u = x^2, \, dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad du = 2x \, dx, \, v = -\cos x,$$

es decir

$$y = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx,$$

nuevamente aplicando la integración por partes se tiene:

$$u = x, \, dv = dx \quad dv = \cos x \, dx,$$

es decir

$$v = \operatorname{sen} x.$$

Así

$$y = -x^2 \cos x + 2 \left(x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x, \, dx \right) + c.$$

Finalmente, la solución de la ecuación diferencial dada es

$$y = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c.$$

Valor inicial

Ejemplos 1.5.4. *Solución general y solución particular*

1. *Encontremos la solución general y la solución particular de la ecuación diferencial*

$$3\frac{dy}{dx} - 8x^2 = 1.$$

Si se cumple que $y(0) = 10$, *en efecto* $3\dfrac{dy}{dx} - 8x^2 = 1$ *entonces* $3dy = (1 + 8x^2)dx$. *Integrando ambos miembros se llega* $3y = x + \dfrac{8x^3}{3} + c_1, c_1 = cte$. *Despejando* $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{8}{9}x^3 + c$, *con* $c = \dfrac{c_1}{3} \in \mathbb{R}$ *que corresponde a la solución general de la ecuación diferencial dada. Ahora bien, si* $y(0) = 10 = c$ *así se tiene una solución particular a saber* $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{8}{9}x^3 + 10$ *de la ecuación diferencial* $3\dfrac{dy}{dx} - 8x^2 = 1$.

2. *La solución general de* $\frac{dr}{d\theta} = \theta r^{1/2}$ *se obtendrá mediante el siguiente procedimiento:* $\frac{dr}{d\theta} = \theta r^{1/2}$ *tenemos que* $r^{-1/2}dr = \theta d\theta$. *Integrando ambos miembros se tiene* $2r^{1/2} = \frac{\theta^2}{2} + k$ *donde* k *es la constante de integración; así* $r^{1/2} = \frac{\theta^2}{4} + c$ *con* $c = \frac{k}{2} \in \mathbb{R}$ *que corresponde a la solución general de la ecuación diferencial* $\frac{dr}{d\theta} = \theta^{1/2}$ *Una solución particular de la ecuación diferencial esta dada por la expresión:*

$$r = \left(\frac{\theta^2}{4}\right)^2 = \frac{\theta^4}{16} \qquad \textit{para} \ \ c = 0.$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Nota 2.2.1. *Recuerde que una ecuación diferencial de primer orden y primer grado se puede escribir en una de las siguientes formas*

1. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$

2. $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y).$

Observe que si en la forma 2) f solo depende de x o es una constante, entonces la ecuación diferencial se puede resolver aplicando las técnicas de integración directas ya vistas.

Las ecuaciones diferenciales se han resuelto aplicando técnicas de integración directas. Sin embargo, no siempre es posible encontrar la solución aplicando anti-derivadas. En lo que sigue se analizan métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado cuyas soluciones no pueden obtenerse aplicando anti-derivadas (Ver Figura 2.5).

2.3.1. Ecuación diferencial homogénea

Una ecuación diferencial homogénea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ puede resolverse a través de métodos de sustitución, si cumple la propiedad de homogeneidad. ¿Qué dice esta propiedad?

Propiedad 2.3.1. *La función $f(x,y)$ es homogénea de orden n si*

$$f(tx,ty) = t^b f(x,y).$$

Ejemplos 2.3.1. *Ejemplos de funciones homogéneas*

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ *es una función homogénea de segundo orden. En efecto,*

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty^2) = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x,y).$$

2. $f(x,y)=\sqrt{xy}+\dfrac{y^2}{x}$ *es una función homogénea de orden 1 ya que*

$$f(tx,ty)=\sqrt{tx.ty}+\frac{(ty)^2}{tx}=\sqrt{t^2xy}+\frac{t^2y^2}{tx}=t\left(\sqrt{xy}+\frac{y^2}{x}\right).$$

Teorema 2.3.1. *La ecuación diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

es una ecuación diferencial homogénea si

$$M(x, y) \ y \ N(x, y),$$

son funciones homogéneas del mismo orden; es decir, si se verifica la propiedad de homogeneidad en M y N.

Demostración. Consideramos la ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y). \tag{2.5}$$

La cual verifica la propiedad de homogeneidad; es decir, $f(tx, ty) = f(x, y)$, para todo x, y con $t \neq 0$. Aplicando esta condición para $x = \frac{1}{t}$ a 4.1 se obtiene

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{2.6}$$

Sea $u = \dfrac{y}{x}$, luego $y = ux$ derivando con respecto a x y sustituyendo en (4.5), se tiene

$$u'x + u = f(1, u), \tag{2.7}$$

de donde

$$x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u,$$

la cual es una ecuación de variables separables de primer orden. Sean M y N funciones homogéneas del mismo orden n. Es decir:

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \text{ y } N(tx, ty) = t^n N(x, y).$$

Aplicando esta condición para $t = \frac{1}{x}$ entonces M y N se tiene:

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n M(x, y).$$

Es decir

$$\begin{aligned} M\left(1, \frac{y}{x}\right) &= x^{-n} M(x, y) \\ N\left(1, \frac{y}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x}\right)^n N(x, y) \\ &= x^{-n} N(x, y). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$M(x,y) = x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$N(x,y) = x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Reemplazando en la Ecuación Diferencial homogénea

$$x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Factorizando x^n se obtiene

$$x^n \left[M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy\right] = 0.$$

Como $x^n \neq 0$, entonces

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0. \tag{2.8}$$

Se realiza cambio de variables, siendo $u = \frac{y}{x}$; es decir, $y = ux$, $y' = u'x + u$ Observe que $dy = xdu + udx$. Reemplazando en (2.8) se tiene

$$
\begin{aligned}
M(1,u)dx + N(1,u)[xdu + udx] &= 0 \\
M(1,u)dx + xN(1,u)du + uN(1,u)dx &= 0 \\
M(1,u)dx + uN(1,u)dx + xN(1,u)dy &= 0 \\
xN(1,u)du &= -[M(1,y) + uN(1,u)]dx \\
\frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} &= \frac{-dx}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{M(1,u) + uN(1,u)}{N(1,u)} . \frac{-1}{x} \\
&= g(u).h(x),
\end{aligned}
$$

donde

$$g(u) = \frac{[M(1,u) + N(1,u)u]}{N(1,u)} \text{ y } h(x) = -\frac{1}{x}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial (4.1) es separable. $\square$

Ejemplo

Ejemplo 2.3.1. *Determine si la siguiente ecuación diferencial es homogénea, en caso positivo resolverla*

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$$

En este caso M y N están dados por

$$M(x,y) = x^2 + y^2, \; N(x,y) = x^2 - xy.$$

Luego

$$\begin{aligned}
M(tx,ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 \\
&= t^2(x^2 + y^2) \\
&= t^2 M(x,y) \\
N(tx,ty) &= (xt)^2 - (xt)(ty) \\
&= (xt)^2 - t^2 xy \\
&= t^2(x^2 - xy) \\
&= t^2 N(x,y),
\end{aligned}$$

por lo cual, la ecuación diferencial es homogénea. Sea $y = ux$ *entonces*

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{dy}{dx},$$

o equivalentemente

$$dy = udx + xdu.$$

Reemplazando y, dy, *en la ecuación diferencial se obtiene*

$$\begin{aligned} (x^2 + (ux)^2)dx + (x^2 - x(ux))\,[udx + xdu] &= 0 \\ (x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - ux^2)udx + (x^2 - ux^2)xdu &= 0, \end{aligned}$$

multiplicando y asociando dx se obtiene

$$(x^2 + u^2x^2 + x^2u - u^2x^2)dx + (x^2 - ux^2)xdu = 0,$$

simplificando

$$(x^2 + x^2u)dx = -xx^2(1 - u)du,$$

o equivalentemente

$$x^2(1 + u)dx = -x^3(1 - u)du.$$

Separando variables

$$\frac{x^2}{x^3}dx = \frac{-(1 - u)}{u + 1}du,$$

como $x \neq 0$ *y* $u \neq -1$, *entonces*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{-(1-u)}{u+1} du \\ \frac{dx}{x} &= \left(\frac{u-1}{u+1}.\right) du. \end{aligned}$$

Integrando

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{u-1}{u+1}\right) du,$$

luego

$$\ln x + C = \int \left(1 - \frac{2}{1+u}\right) du = u - 2\ln|1+u|.$$

Dado que $u = \frac{y}{x}$, *entonces*

$$\frac{y}{x} - 2\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \ln(cx),$$

con $c = \ln(c_1)$. *En consecuencia*

$$\frac{y}{x} = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 + \ln(cx) = \ln\left[cx\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2\right],$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.3.2. *Determine si la siguiente ecuación diferencial es homogénea, en caso positivo resolverla*

$$(x^2 - 2y^2)\frac{dx}{dy} = xy,$$

con condición inicial $y(-1) = 1$*. A partir de la ecuación se obtiene*

$$\begin{aligned} (x^2 - 2y^2)dx &= xydy \\ (x^2 - 2y^2)dx - xydy &= 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

luego

$$M(x, y) = x^2 - 2y^2,\ N(x, y) = -xy.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
M(tx,ty) &= (tx)^2+2(ty)^2\\
&= t^2(x^2+2y^2)\\
&= t^2M(x,y)\\
N(tx,ty) &= -txty\\
&= -t^2xy\\
&= t^2N(x,y),
\end{aligned}$$

así la ecuación diferencial dada es homogénea. Sea $u=\dfrac{y}{x}$ *entonces* $y=ux$*, derivando se obtiene* $dy=udx+xdu$*. Reemplazando en la ecuación (2.10) se obtiene*

$$\begin{aligned}
(x^2-2y^2)dx-xydy &= 0\\
(x^2-2u^2x^2)dx-xux\left[udx+xdu\right] &= 0\\
x^2\left[(1-2u^2)dx-u\left[udx+xdu\right]\right] &= 0,
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= \frac{udu}{1-3u^2}\\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{udu}{1-3u^2},\end{aligned}$$

sea $p = 1 - 3u^2$, *entonces* $dp = -6udu$, *lo anterior implica* $-\dfrac{1}{6}dp = udu$. *En consecuencia*

$$\begin{aligned} \ln x &= -\frac{1}{6}\int \frac{dp}{p} \\ &= -\frac{1}{6}\ln|1-3u^2| + \ln c, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \ln x + \frac{1}{6}\ln|1-3u^2| &= lnc \\ \ln|x(1-3u^2)^{1/6}| &= lnc \\ |x(1-3u^2)^{1/6}| &= c \\ |x^6(1-3u^2)| &= c^6 \\ |(1-3u^2)| &= x^{-6}c^6, \end{aligned}$$

A partir de la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
-3u^2 &= x^{-6}c^6 - 1 \\
3u^2 &= -x^{-6}c^6 + 1 \\
u^2 &= \frac{-x^6c^6}{3} + \frac{1}{3} \\
\left(\frac{y}{x}\right)^2 &= \frac{-x^6c^6}{3} + \frac{1}{3} \\
y^2 &= x^2\left(\frac{-x^6c^6}{3} + \frac{1}{3}\right) \\
y(x) &= \pm\sqrt{x^2\left(\frac{-x^6c^6}{3} + \frac{1}{3}\right)}.
\end{aligned}$$