Newton Raphson

✅ Definición del Método de Newton-Raphson

El método de Newton es una técnica iterativa para encontrar raíces de una función $f(x)$, es decir, valores x tales que:

$$f(x) = 0$$

□ Fórmula de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- x_n: aproximación actual
- x_{n+1}: siguiente aproximación
- $f'(x_n)$: derivada de la función en x_n

📘 Ejemplo 1: función no lineal

Queremos resolver:

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

Derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

Empezamos con $x_0 = 1.5$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{1.5^3 - 1.5 - 1}{3(1.5)^2 - 1} = 1.5 - \frac{0.875}{5.75} \approx 1.3478$$

Repetimos para x_2, etc., hasta alcanzar la precisión deseada.

📌 Ventajas del Método de Newton:

- Muy rápido si se parte cerca de la raíz
- Convergencia cuadrática

⚠️ Limitaciones:

- Necesita conocer la **derivada** $f'(x)$
- Puede fallar si $f'(x_n) = 0$ o si parte lejos de la raíz
- No garantiza convergencia (a diferencia de bisección)

□ Problema de valor de contorno

Resolvamos la EDO:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y + 1, \quad y(0) = 0$$

Queremos encontrar el valor del parámetro a tal que:

$$y(1) = 1$$

✅ Paso 1: Solución de la EDO

Esta es una ecuación diferencial **lineal**. Su solución general es:

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{1}{a}$$

Aplicamos la condición inicial $y(0) = 0$:

$$0 = C - \frac{1}{a} \Rightarrow C = \frac{1}{a}$$

Entonces la solución es:

$$y(x) = \frac{1}{a}\left(e^{ax} - 1\right)$$

🎯 Paso 2: Aplicamos la condición adicional

Queremos que:

$$y(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a}(e^a - 1) = 1$$

Multiplicamos ambos lados por a:

$$e^a - 1 = a \Rightarrow f(a) = e^a - a - 1 = 0$$

Ahora sí, tenemos una función:

$$f(a) = e^a - a - 1$$

Y queremos encontrar su raíz usando **Newton-Raphson.**

🔁 Paso 3: Método de Newton

Derivada:

$$f'(a) = e^a - 1$$

Fórmula:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{e^{a_n} - a_n - 1}{e^{a_n} - 1}$$

🔢 Iteración inicial:

Elige $a_0 = 1$

- $f(1) = e^1 - 1 - 1 \approx 2.718 - 2 = 0.718$
- $f'(1) = e^1 - 1 \approx 1.718$

$$a_1 = 1 - \frac{0.718}{1.718} \approx 1 - 0.418 = 0.582$$

Segunda iteración:

- $f(0.582) = e^{0.582} - 0.582 - 1 \approx 1.79 - 0.582 - 1 = 0.208$
- $f'(0.582) \approx e^{0.582} - 1 \approx 0.79$

$$a_2 = 0.582 - \frac{0.208}{0.79} \approx 0.582 - 0.263 = 0.319$$

✅ Resultado final:

El método de Newton permite encontrar el valor de a tal que la solución $y(x)$ de la EDO cumple:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

🧠 Interpretación:

Este ejemplo representa cómo **Newton-Raphson permite ajustar un parámetro** para que una solución de EDO **satisfaga condiciones de frontera**, algo muy frecuente en **modelos físicos, biológicos o de ingeniería.**