7.4: Ecuaciones diferenciales separables

Preguntas Motivadoras

- ¿Qué es una ecuación diferencial separable?
- ¿Cómo podemos encontrar soluciones a una ecuación diferencial separable?
- ¿Algunas de las ecuaciones diferenciales que surgen en las aplicaciones son separables?

En las Secciones 7.2 y 7.3, hemos visto varias formas de aproximar la solución a un problema de valor inicial. Dada la frecuencia con la que surgen las ecuaciones diferenciales en el mundo que nos rodea, nos gustaría contar con algunas técnicas para encontrar soluciones algebraicas explícitas de ciertos problemas de valor inicial. En esta sección, nos enfocamos en una clase particular de ecuaciones diferenciales (llamadas *separables*) y desarrollamos un método para encontrar fórmulas algebraicas para sus soluciones.

Una *ecuación diferencial separable* es una ecuación diferencial cuya estructura algebraica permite separar las variables de una manera particular. Por ejemplo, considere la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = ty.$$

Nos gustaría separar las variables$t$ y para$y$ que todas las ocurrencias de$t$ aparezcan en el lado derecho, y todas las ocurrencias de$y$ aparezcan a la izquierda, multiplicadas pordy/dt. Para este ejemplo, dividimos ambos lados por para$y$ que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = t.$$

Tenga en cuenta que cuando intentamos separar las variables en una ecuación diferencial, requerimos que un lado sea un producto en el que la derivadady/dt sea un factor y el otro factor sea únicamente una expresión que involucre$y$.

No todas las ecuaciones diferenciales son separables. Por ejemplo, si consideramos la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = t - y,$$

puede parecer natural separarlo por escrito

$$y + \frac{dy}{dt} = t.$$

Como veremos, esto no será útil, ya que el lado izquierdo no es producto de una función de$y$ con $\frac{dy}{dt}$.

Vista previa de la actividad 7.4.1

En esta actividad de vista previa, exploramos si ciertas ecuaciones diferenciales son separables o no, y luego revisamos algunas ideas clave de trabajos anteriores en cálculo integral.

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son separables? Si la ecuación es separable, escriba la ecuación en la forma revisada$g(y)\frac{dy}{dt} = h(t)$.
   1. $\frac{dy}{dt} = -3y.$
   2. $\frac{dy}{dt} = ty - y.$
   3. $\frac{dy}{dt} = t + 1.$
   4. $\frac{dy}{dt} = t^2 - y^2.$
2. Explique por qué se garantiza que cualquier ecuación diferencial autónoma sea separable.
3. ¿Por qué incluimos el término "$+C$" en la expresión

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C?$$

4. Supongamos que sabemos que una determinada funciónf satisface la ecuación

$$\int f'(x)\,dx = \int x\,dx.$$

¿Qué puedes concluir sobre$f$?

7.4.1 Resolver ecuaciones diferenciales separables

Antes de discutir un enfoque general para resolver una ecuación diferencial separable, es instructivo considerar un ejemplo.

Ejemplo 7.4.1

Encuentra todas las funciones$y$ que son soluciones a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2}.$$

Contestar

Comenzamos separando las variables y escribiendo

$$y^2 \frac{dy}{dt} = t.$$

La integración de ambos lados de la ecuación con respecto a la variable independiente$t$ muestra que

$$\int y^2 \frac{dy}{dt}\, dt = \int t\, dt.$$

A continuación, notamos que el lado izquierdo nos permite cambiar la variable de antidiferenciación [1] de$t$ ay. En particular,$dy = \frac{dy}{dt}\, dt$, así que ahora tenemos

$$\int y^2\, dy = \int t\, dt.$$

Es por ello que requerimos que el lado izquierdo se escribiera como un producto en el quedy/dt se encuentra uno de los términos.

Esta ecuación dice que dos familias de antiderivados son iguales entre sí. Por lo tanto, cuando encontramos antiderivados representativos de ambos lados, sabemos que deben diferir por una constante arbitraria$C$. Antidiferenciando e incluyendo la constante$C$ de integración a la derecha, encontramos que

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + C.$$

No es necesario incluir una constante arbitraria en ambos lados de la ecuación; sabemos que$y^3/3$ y$t^2/2$ estamos en la misma familia de antiderivados y por lo tanto deben diferir por una sola constante.

Finalmente, resolvemos la última ecuación anterior para$y$ como una función de la$t$, cual da

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3C}.$$

Por supuesto, el término del$3C$ lado derecho representa 3 veces una constante desconocida. Es, por lo tanto, sigue siendo una constante desconocida, que vamos a reescribir como$C$. Llegamos así a la conclusión de que la función

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + C}$$

es una solución a la ecuación diferencial original para cualquier valor de$C$.

Observe que debido a que esta solución depende de la constante arbitraria$C$, hemos encontrado una familia infinita de soluciones. Esto tiene sentido porque esperamos encontrar una solución única que corresponda a cualquier valor inicial dado.

Por ejemplo, si queremos resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2},\ y(0) = 2,$$

sabemos que la solución tiene la forma$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + C}$ para alguna constante$C$. Por lo tanto, debemos encontrar el valor apropiado para$C$ eso da el valor inicial$y(0) = 2$. Por lo tanto,

$$2 = y(0) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}0^2 + C} = \sqrt[3]{C},$$

lo que demuestra que$C = 2^3 = 8$. La solución al problema del valor inicial es entonces

$$y(t)=\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2+8}.$$

La estrategia del Ejemplo 7.4.1 puede aplicarse a cualquier ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dt}=g(y)\cdot h(t)$, y se dice que cualquier ecuación diferencial de esta forma es *separable*. Trabajamos para resolver una ecuación diferencial separable mediante la escritura

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dt}=h(t),$$

y luego integrando ambos lados con respecto a t. Después de integrar, tratamos de resolver algebraicamente para para poder escribir y en función de t.

Ejemplo 7.4.2

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt}=3y.$$

Contestar

Siguiendo la misma estrategia que en el Ejemplo 7.4.1, tenemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=3.$$

Integrando ambas partes con respecto a t,

$$\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt=\int 3\,dt,$$

y por lo tanto

$$\int\frac{1}{y}\,dy=\int 3\,dt.$$

Antidiferenciando e incluyendo la constante de integración, encontramos que

$$\ln|y|=3t+C.$$

Por último, tenemos que resolver para y. Aquí, un punto merece una atención cuidadosa. Por la definición de la función de logaritmo natural, se deduce que

$$|y|=e^{3t+C}=e^{3t}e^{C}.$$

Ya que C es una constante desconocida, también lo e^C es, aunque sí sabemos que es positiva (porque e^x es positiva para cualquiera x). Cuando eliminamos el valor absoluto para resolver para y, sin embargo, esta constante puede ser positiva o negativa. Para dar cuenta de una posible $+$ o $-$, denotamos esta constante actualizada por C para obtener

$$y(t)=Ce^{3t}.$$

Hay un punto técnico más que hacer. Observe que $y=0$ es una solución de equilibrio a esta ecuación diferencial. Al resolver la ecuación anterior, comenzamos dividiendo ambos lados por y, lo cual no está permitido si $y=0$. Para tener perfectamente cuidado, por lo tanto, debemos considerar las soluciones de equilibrio por separado. En este caso, observe que la forma final de nuestra solución captura la solución de equilibrio al permitir $C=0$.

Actividad 7.4.2

Supongamos que la población de un pueblo está creciendo continuamente a una tasa anual de 3% anual.

1. Dejar $P(t)$ ser la población del pueblo en año t. Escribe una ecuación diferencial que describa la tasa de crecimiento anual.
2. Encuentra las soluciones de esta ecuación diferencial.
3. Si sabes que la población del pueblo en el año 0 es 10,000, encuentra la población $P(t)$.
4. ¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse la población? Esta vez se llama el *tiempo de duplicación*.
5. Trabajando de manera más general, encuentra el tiempo de duplicación si la tasa de crecimiento anual es k multiplicada por la población.

Actividad 7.4.3

Supongamos que una taza de café está inicialmente a una temperatura de $105°$ F y se coloca en una habitación $75°$ F. La ley de enfriamiento de Newton dice que

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 75),$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

1. Supongamos que mide que el café se está enfriando a un grado por minuto en el momento en que el café es llevado a la habitación. Usar la ecuación diferencial para determinar el valor de la constante k.
2. Encuentra todas las soluciones de esta ecuación diferencial.
3. Qué pasa con todas las soluciones como $t \to \infty$? Explica cómo esto concuerda con tu intuición.
4. ¿Cuál es la temperatura de la taza de café después de 20 minutos?
5. ¿Cuánto tiempo tarda el café en enfriarse $80°$?

Actividad 7.4.4

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales o problemas de valor inicial.

1. $\frac{dy}{dt} - (2 - t)y = 2 - t$
2. $\frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = e^{t^2 - 2y}$
3. $y' = 2y + 2, y(0) = 2$
4. $y' = 2y^2, y(-1) = 2$
5. $\frac{dy}{dt} = \frac{-2ty}{t^2+1}, y(0) = 4$

7.4.2 Resumen

- Una ecuación diferencial separable es aquella que puede ser reescrita con todas las ocurrencias de la variable dependiente multiplicando la derivada y todas las ocurrencias de la variable independiente en el otro lado de la ecuación.
- Podemos encontrar las soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales separables separando variables, integrando con respecto t, y finalmente resolviendo la ecuación algebraica resultante para y.
- Esta técnica nos permite resolver muchas ecuaciones diferenciales importantes que surgen en el mundo que nos rodea. Por ejemplo, las cuestiones de crecimiento y decaimiento y la Ley de Enfriamiento de Newton dan lugar a ecuaciones diferenciales separables. Posteriormente, aprenderemos en la Sección 7.6 que la importante ecuación diferencial logística también es separable.
