El blog de Leo

Aprendiendo, creando y compartiendo matemáticas

Ecuaciones Diferenciales I: Ecuaciones diferenciales exactas

Por Omar González Franco

Los matemáticos han alcanzado lo más alto del pensamiento humano.
– Havelock Ellis

Introducción

Ahora sabemos que método aplicar si nos encontramos con ecuaciones diferenciales no lineales con variables separables u homogéneas.

Esta entrada la dedicaremos a un tipo de ecuaciones diferenciales no lineales conocidas como **ecuaciones exactas**. Estas ecuaciones suelen ser más complejas e interesantes que las anteriores y su método de resolución involucra un mayor número de pasos a seguir.

Ecuaciones diferenciales exactas

Definición: Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región U del plano XY, entonces su diferencial es

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1}$$

Existe un caso especial en el que $f(x, y) = c$, donde c es una constante, en este caso la diferencial, de acuerdo a la ecuación (1), es

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{2}$$

Esto significa que dada una familia de curvas $f(x, y) = c$ es posible generar una ecuación diferencial de primer orden si se calcula la diferencial de ambos lados de la igualdad.

Ejemplo: Sea

$$f(x, y) = 8x^2y - x^3 + y^2 = c$$

una familia de curvas, calcular su diferencial.

Solución: De acuerdo a la definición de diferencial de una función de dos variables (1), necesitamos calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Por un lado,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16xy - 3x^2$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8x^2 + 2y$$

Por lo tanto, la diferencial de la función dada es

$$(16xy - 3x^2)dx + (8x^2 + 2y)dy = 0$$

□

Definición: Una expresión diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

es una **diferencial exacta** en una región U del plano XY si ésta corresponde a la diferencial de alguna función $f(x, y)$ definida en U.

En el ejemplo anterior vimos que

$$(16xy - 3x^2)dx + (8x^2 + 2y)dy$$

corresponde a la diferencial de la función

$$f(x, y) = 8x^2y - x^3 + y^2$$

Por lo tanto, $(16xy - 3x^2)dx + (8x^2 + 2y)dy$ es una diferencial exacta.

No todas las ecuaciones de primer orden escritas en la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3}$$

corresponden a la diferencial de alguna función $f(x, y) = c$, pero en caso de serlo, entonces la función $f(x, y) = c$ sería una solución implícita de (3). Este tipo de ecuaciones tienen un nombre particular.

Definición: Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

se dice que es una **ecuación exacta** si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta de alguna función $f(x, y)$.

Ejemplo: Sea la función

$$f(x, y) = e^x + xy + e^y = c$$

una familia de curvas. Mostrar que la ecuación diferencial

$$(e^x + y)dx + (e^y + x)dy = 0$$

es una ecuación exacta con respecto a la función $f(x, y)$.

Solución: Para verificar que es una ecuación exacta debemos verificar que el término

$$(e^x + y)dx + (e^y + x)dy$$

sea una diferencial exacta.

Consideremos la función dada

$$f(x, y) = e^x + xy + e^y = c$$

Por un lado,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y + x$$

Por lo tanto, la diferencial de la función $f(x, y)$ es

$$(e^x + y)dx + (e^y + x)dy = 0$$

esto nos indica que el término

$$(e^x + y)dx + (e^y + x)dy$$

es una diferencial exacta ya que corresponde a la diferencial de la función $f(x, y)$. Por lo tanto, la ecuación

$$(e^x + y)dx + (e^y + x)dy = 0$$

es una ecuación exacta. No sólo hemos mostrado que es una ecuación exacta, sino que incluso ahora podemos decir que la ecuación

$$e^x + xy + e^y = c$$

es una solución implícita de la ecuación diferencial.

$\square$

En este ejemplo nos han dado la función $f(x, y) = c$, pero es claro que dada una ecuación diferencial exacta resolverla implica hallar dicha función f. Entonces, ¿cómo podemos saber si una ecuación diferencial es exacta si previamente no conocemos la función f? y en caso de que de alguna manera seamos capaces de mostrar que la ecuación diferencial es exacta, ¿cómo podemos hallar a la función f?.

Antes de aprender a resolver las ecuaciones diferenciales exactas veamos un teorema que nos permite saber si la ecuación diferencial es exacta o no. Si la ecuación es exacta, entonces tenemos garantizado la existencia de una función f tal que $f(x, y) = c$, dicha función será la solución de la ecuación exacta.

Teorema (Criterio para una diferencial exacta): Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ funciones continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular U definida por $a < x < b$ y $c < y < d$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

sea una diferencial exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

Demostración: Supongamos que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es exacta, entonces por definición existe alguna función f tal que para toda x en U se satisface lo siguiente.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Esta relación sólo se cumple si

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad y \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{5}$$

Si derivamos parcialmente la expresión

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

con respecto a y en ambos lados, obtenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

se cumple debido a que las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas en U.

Si es posible encontrar una función f tal que se cumple (5), entonces la condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

es necesaria y suficiente. Encontrar la función f en realidad corresponde a un método de resolución de ecuaciones exactas y lo desarrollaremos a continuación.

$\square$

Solución a las ecuaciones exactas

La ecuación diferencial que queremos resolver es de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Por el teorema anterior sabemos que siempre y cuando se cumpla que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces debe existir una función f para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

Para obtener la función $f(x, y)$ debemos integrar la primer ecuación con respecto a x manteniendo a y constante o integrar la segunda ecuación con respecto a y manteniendo a x constante, vamos a hacer el primer caso y como tarea moral realiza el siguiente procedimiento tomando el segundo caso, notarás que el resultado es equivalente.

Tomando el primer caso, integremos la primer ecuación con respecto a x.

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx &= \int M(x, y) dx \\ f(x, y) &= \int M(x, y) dx + g(y) \qquad (6) \end{aligned}$$

Hemos hecho uso del teorema fundamental del cálculo y la función $g(y)$ corresponde a la *constante* de integración, es constante en x, pero sí puede variar en y ya que en este caso la estamos considerando como una constante al hacer la integral.

Ahora derivemos a (6) con respecto a y.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx + g(y)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + \frac{dg}{dy}\end{aligned}$$

Pero,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + \frac{dg}{dy} = N(x,y)$$

Despejemos a

$$\frac{dg}{dy} = g'(y)$$

Se tiene,

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) \tag{7}$$

Lo que nos interesa en obtener la función $f(x,y)$, así que podemos integrar la ecuación (7) con respecto a y y sustituir $g(y)$ en la ecuación (6). Como sabemos, la solución implícita es $f(x,y)=c$. Integremos la ecuación (7).

$$g(y) = \int N(x,y)dy - \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy \tag{8}$$

Sustituimos el resultado (8) en la ecuación (6) e igualamos el resultado a la constante c.

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy = c \tag{9}$$

De esta manera habremos encontrado una solución implícita de la ecuación diferencial exacta.

Una observación interesante es que la función $g'(y)$ es independiente de x, la manera de comprobarlo es con el siguiente resultado.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right] \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Las ecuaciones (6), (8) y (9) son el resultado de tomar el primer caso. Si realizas el segundo caso en el que a la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

se integra con respecto a y y al resultado se deriva con respecto a x obtendremos las expresiones análogas, dichas expresiones son, respectivamente

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x) \tag{10}$$

$$h(x) = \int M(x,y)dx - \int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)dy\right)\right]dx \tag{11}$$

y

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + \int M(x,y)dx - \int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)dy\right)\right]dx = c \tag{12}$$

Método de solución de ecuaciones diferenciales exactas

Hemos desarrollado la teoría sobre cómo obtener la solución $f(x,y)$ de las ecuaciones diferenciales exactas. Debido a que no se recomienda memorizar los resultados, presentamos a continuación la siguiente serie de pasos o *algoritmo* que se recomiendan seguir para resolver una ecuación diferencial exacta.

1. El primer paso es verificar que la ecuación diferencial

   $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

   sea exacta para garantizar la existencia de la función f tal que $f(x,y) = c$. Para verificar este hecho usamos el criterio para una diferencial exacta que consiste en verificar que se cumple la relación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2. Una vez que verificamos que la ecuación es exacta tenemos garantizado que existe una función f tal que $f(x, y) = c$ es una solución implícita de la ecuación diferencial. Para determinar dicha función definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

3. El siguiente paso es integrar alguna de las ecuaciones anteriores en su respectiva variable, se recomienda integrar la que sea más sencilla de resolver, de esta manera obtendremos

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \qquad o \qquad f(x, y) = \int N(x, y)dy + h(x)$$

4. Después derivamos parcialmente a la función $f(x, y)$ con respecto a la variable y o x según la elección hecha en el paso anterior, de manera que obtendremos el resultado

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right) + \frac{dg}{dy} = N(x, y)$$

o bien,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x, y)dy\right) + \frac{dh}{dx} = M(x, y)$$

5. De los resultados anteriores obtendremos una expresión para $\dfrac{dg}{dy}$, o para $\dfrac{dh}{dx}$, debemos integrar estas expresiones para obtener las funciones $g(y)$ o $h(x)$.

6. El último paso es sustituir las funciones $g(y)$ o $h(x)$ en la ecuación $f(x, y) = c$ lo que nos devolverá, en general, una solución implícita de la ecuación diferencial exacta.

Realicemos un ejemplo en el que apliquemos este método para que todo quede más claro.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$(4x^3 - 4xy^2 + y)dx + (4y^3 - 4x^2y + x)dy = 0$$

Solución: La ecuación diferencial es de la forma (3), de manera que podemos definir

$$M(x, y) = 4x^3 - 4xy^2 + y \qquad y \qquad N(x, y) = 4y^3 - 4x^2y + x$$

Ambas funciones son continuas y tienen derivadas parciales continuas en cualquier región $U \in \mathbb{R}^2$, entonces podemos aplicar el criterio para una diferencial exacta. Verifiquemos que se satisface la relación (4).

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -8xy + 1 \qquad y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -8xy + 1$$

En efecto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial sí es exacta, esto nos garantiza la existencia de una función f tal que $f(x, y) = c$ es solución, entonces podemos definir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) = 4x^3 - 4xy^2 + y \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = 4y^3 - 4x^2y + x$$

El tercer paso nos indica que debemos integrar una de las ecuaciones anteriores, en este caso elegiremos integrar la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^2 + y$$

con respecto a la variable x.

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int (4x^3 - 4xy^2 + y) dx$$

Del lado izquierdo aplicamos el teorema fundamental del cálculo y del lado derecho resolvemos la integrar, el resultado es

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + xy + g(y)$$

La función $g(y)$ es la *constante* que considera a todas las constantes que aparecen al integrar y decimos que es constante porque no depende de la variable x, pero es posible que pueda depender de la variable y.

El cuarto paso es derivar la última ecuación con respecto a la variable y ya que deseamos conocer a $\dfrac{dg}{dy} = g'(y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2y + x + \frac{dg}{dy}$$

Y sabíamos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x^2y + x$$

Igualando ambas ecuaciones, obtenemos

$$-4x^2y + x + \frac{dg}{dy} = 4y^3 - 4x^2y + x$$

Para que esta igualdad se cumpla es necesario que

$$\frac{dg}{dy} = 4y^3$$

Ahora que ya conocemos a $\dfrac{dg}{dy} = g'(y)$, la integramos con respecto a y. Esto corresponde al penúltimo paso.

$$\int \frac{dg}{dy} dy = \int 4y^3 dy$$
$$g(y) = y^4$$

El último paso es sustituir el resultado $g(y)$ en la función $f(x, y) = c$. En la integración anterior omitimos a las constantes porque podemos englobarlas en la constante c.

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + xy + y^4 = c$$

de donde

$$(x^2 - y^2)^2 + xy = c$$

Por lo tanto, la solución (implícita) de la ecuación diferencial exacta

$$(4x^3 - 4xy^2 + y)dx + (4y^3 - 4x^2y + x)dy = 0$$

es

$$(x^2 - y^2)^2 + xy = c$$

$\square$

Por su puesto que hay ecuaciones diferenciales de la forma (3) que no cumplen con la condición (4), es decir, que no son exactas, en estos casos es posible apoyarnos de una función auxiliar tal que si multiplicamos a la ecuación diferencial por esta función se volverá exacta, si esto ocurre a dicha función la llamamos **factor integrante**. Así es, usaremos un método similar al método por factor integrante de las ecuaciones lineales, pero esta vez es para convertir a una ecuación diferencial no exacta en exacta.

Factores integrantes

En entradas anteriores vimos que multiplicar la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{13}$$

por un factor integrante $\mu(x)$ hace que el lado izquierdo de la ecuación sea igual a la derivada del producto de $\mu(x)$ con $y(x)$ permitiendo resolver la ecuación con sólo integrar, esta idea de multiplicar por un factor integrante también nos será de ayuda al trabajar con ecuaciones diferenciales de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

que **no son exactas**. Lo que se espera es que multiplicando por un factor integrante $\mu(x,y)$ a la ecuación no exacta ésta se vuelva una ecuación exacta.

Consideremos la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

pero que **no** es exacta, esto significa que el lado izquierdo de la ecuación no corresponde a la diferencial de alguna función $f(x,y)$. Supongamos que existe una función $\mu(x,y)$ tal que al multiplicar la ecuación diferencial por esta función se vuelve una ecuación diferencial exacta. Es decir, la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{14}$$

ahora es exacta y se puede resolver con el método que ya conocemos. Lo que veremos ahora es un método para determinar el factor integrante $\mu(x,y)$.

Por el criterio de diferencial exacta, la ecuación diferencial (14) es exacta si

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \tag{15}$$

Usando la regla del producto, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y}M = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x}N$$

Reordenando los términos obtenemos la siguiente expresión.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}N - \frac{\partial \mu}{\partial y}M = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \tag{16}$$

Para determinar la función $\mu(x,y)$ debemos resolver esta ecuación diferencial parcial, sin embargo no estamos en condiciones de hacerlo, pues no sabemos resolver ecuaciones diferenciales parciales. Para simplificar el problema vamos a considerar la hipótesis de que la función μ depende sólo de una variable, consideremos por ejemplo que μ depende sólo de x, así se cumple que

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx} \qquad y \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

Con estas hipótesis la ecuación (16) se puede escribir de la siguiente forma.

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \tag{17}$$

Seguimos en problemas si el cociente de la derecha depende tanto de x como de y. En el caso en el que dicho cociente sólo depende de x, entonces la ecuación será *separable* así como *lineal*.

Supongamos que la ecuación (17) sólo depende de la variable x, entonces dividimos toda la ecuación por μ para separar las variables.

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

Integremos ambos lados de la ecuación con respecto a la variable x.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}dx &= \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx \\ \ln|\mu(x)| &= \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx \end{aligned}$$

Finalmente apliquemos la exponencial en ambos lados de la ecuación.

$$\mu(x) = \exp\left[\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\right] \tag{18}$$

Es totalmente análogo el caso en el que el factor integrante es sólo función de la variable y, en este caso se cumple

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$$

Es así que la ecuación (16) queda de la siguiente forma.

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu \tag{19}$$

Si el cociente de la derecha sólo depende de la variable y, entonces se puede resolver la ecuación (19), obteniendo

$$\mu(y) = \exp\left[\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy\right] \tag{20}$$

Las funciones (18) y (20) corresponden a la forma del factor integrante que vuelven a la ecuación no exacta en exacta, según las condiciones que se presenten.

A manera de resumen, para el caso en el que la ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

no es exacta probamos los siguientes dos casos:

- Si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

  es una función sólo de x, entonces un factor integrante para la ecuación (14) es:

$$\mu(x)=\exp\left[\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\right]$$

- Si

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

  es una función sólo de y, entonces un factor integrante para la ecuación (14) es:

$$\mu(y)=\exp\left[\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dy\right]$$

Realicemos un ejemplo para aclarar dudas.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación diferencial no exacta.

$$\left(1-\frac{y}{x}e^{y/x}\right)dx+e^{y/x}dy=0$$

Solución: Verifiquemos que no es una ecuación exacta, definamos

$$M(x,y)=1-\frac{y}{x}e^{y/x} \qquad y \qquad N(x,y)=e^{y/x}$$

Calculemos las derivadas parciales correspondientes.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{x}e^{y/x}-\frac{y}{x^2}e^{y/x} \qquad y \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{y/x}$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces la ecuación diferencial no es exacta. Para hacerla exacta debemos encontrar un factor integrante que dependa de x o de y, para ello primero debemos ver si el cociente

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

es una función sólo de x o si el cociente

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

es una función sólo de y. Calculemos ambos cocientes usando los resultados anteriores.

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\left(1-\frac{y}{x}e^{y/x}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}e^{y/x}+\frac{1}{x}e^{y/x}+\frac{y}{x^2}e^{y/x}\right)=\frac{\frac{1}{x}e^{y/x}}{1-\frac{y}{x}e^{y/x}}$$

y

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=e^{-y/x}\left(-\frac{1}{x}e^{y/x}-\frac{y}{x^2}e^{y/x}+\frac{y}{x^2}e^{y/x}\right)=-\frac{1}{x}$$

Este último cociente es el que nos sirve ya que sólo depende de la variable x. Calculemos el factor integrante, en este caso corresponde a la expresión (18).

$$\begin{aligned}\mu(x)&=\exp\left[\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\right]\\&=\exp\left[\int-\frac{1}{x}dx\right]\\&=-e^{\ln|x|}\\&=x^{-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el factor integrante es

$$\mu(x)=\frac{1}{x}$$

Multipliquemos ambos lados de la ecuación original por el factor integrante.

$$\begin{gathered}\frac{1}{x}\left(1-\frac{y}{x}e^{y/x}\right)dx+\frac{1}{x}e^{y/x}dy=0\\\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\right)dx+\frac{1}{x}e^{y/x}dy=0\end{gathered}$$

Verifiquemos que la última expresión corresponde a una ecuación diferencial exacta. Definamos

$$\hat{M}(x,y)=\mu(x)M(x,y)\qquad y\qquad \hat{N}(x,y)=\mu(x)N(x,y)$$

Entonces,

$$\hat{M}(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\qquad y\qquad \hat{N}(x,y)=\frac{1}{x}e^{y/x}$$

Calculemos las derivadas parciales correspondientes.

$$\dfrac{\partial \hat{M}}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2}e^{y/x} - \dfrac{y}{x^3}e^{y/x} \qquad y \qquad \dfrac{\partial \hat{N}}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2}e^{y/x} - \dfrac{y}{x^3}e^{y/x}$$

En efecto,

$$\dfrac{\partial \hat{M}}{\partial y} = \dfrac{\partial \hat{N}}{\partial x}$$

La nueva ecuación sí es exacta, esto nos garantiza que existe una función f tal que $f(x, y) = c$ es solución de la ecuación exacta, dicha función debe satisfacer que

$$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \hat{M}(x, y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^2}e^{y/x} \qquad y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \hat{N}(x, y) = \dfrac{1}{x}e^{y/x}$$

Es nuestra elección que ecuación integrar, sin embargo notamos que la función $\hat{N}(x, y)$ es la más sencilla de integrar, así que integremos esta ecuación con respecto a y.

$$\begin{gathered}\int \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = \int \dfrac{1}{x}e^{y/x}dy \\ f(x, y) = e^{y/x} + h(x)\end{gathered}$$

Derivemos parcialmente este resultado con respecto a la variable x.

$$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}e^{y/x} + \dfrac{dh}{dx}$$

Pero sabemos que

$$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \hat{M}(x, y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^2}e^{y/x}$$

Igualemos ambas ecuaciones.

$$\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^2}e^{y/x} = -\dfrac{y}{x^2}e^{y/x} + \dfrac{dh}{dx}$$

Para que se cumpla esta igualdad es necesario que

$$\dfrac{dh}{dx} = \dfrac{1}{x}$$

Integremos esta ecuación con respecto a x omitiendo las constantes.

$$\begin{gathered}\int \dfrac{dh}{dx}dx = \int \dfrac{1}{x}dx \\ h(x) = \ln|x|\end{gathered}$$

Sustituimos la función $h(x)$ en la función $f(x, y)$ e igualamos a una constante c.

$$f(x,y) = e^{y/x} + \ln|x| = c$$

Apliquemos la función exponencial

$$\begin{aligned} e^{\left(e^{y/x} + \ln(x)\right)} &= e^c \\ e^{e^{y/x}} e^{\ln(x)} &= k \\ e^{e^{y/x}} x &= k \end{aligned}$$

Donde $k = e^c$. Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial

$$\left(1 - \frac{y}{x} e^{y/x}\right) dx + e^{y/x} dy = 0$$

es

$$x e^{e^{y/x}} = k$$

$\square$

Aquí concluimos nuestro estudio sobre las ecuaciones diferenciales exactas.

Tarea moral

Los siguientes ejercicios no forman parte de la evaluación del curso, pero servirán para entender mucho mejor los conceptos vistos en esta entrada, así como temas posteriores.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas (verificar que son exactas).

- $(2x - 5y + 2)dx + (1 - 6y - 5x)dy = 0$
- $\left(y - \dfrac{y}{x^2} e^{y/x}\right) dx + \left(x + \dfrac{1}{x} e^{y/x}\right) dy = 0$
- $\left[\sin(y) + \dfrac{y}{x^2} \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right] dx + \left[x \cos(y) - \dfrac{1}{x} \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right] dy = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no exactas.

- $[e^x \cos(y)]dx + [-xe^x \sin(y)]dy = 0$
- $[2x \sin(y) + ye^{xy}]dx + [x \cos(y) + e^{xy}]dy = 0$

3. En el procedimiento realizado para resolver ecuaciones diferenciales exactas vimos que hay dos posibilidades para llegar a resultados equivalentes. Desarrolla el otro camino y deduce las expresiones (10), (11) y (12).

Más adelante…

Para concluir con nuestro estudio sobre ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, en la siguiente entrada presentaremos la ecuación de Bernoulli y la ecuación de Riccati, así como sus respectivos métodos de resolución.

Entradas relacionadas

- Página principal del curso: Ecuaciones Diferenciales I
- Entrada anterior del curso: Ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden – Ecuaciones separables y homogéneas
- Siguiente entrada del curso: Ecuación de Bernoulli y ecuación de Riccati

- Video relacionado al tema: Ecuaciones exactas

Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104522 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM – Etapa 2»

Esta entrada se publicó en Matemáticas y está etiquetada con diferencial exacta, Ecuaciones exactas, Ecuaciones no exactas, Factor integrante, forma diferencial en julio 22, 2021 [https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-ecuaciones-diferenciales-exactas/] por Omar González Franco.

---

4 comentarios en “Ecuaciones Diferenciales I: Ecuaciones diferenciales exactas”

Luis Ake
marzo 5, 2024 a las 12:13 pm

Muchas gracias por la entrada de este blog. Ha sido de gran ayuda para recordar y recomendar a mis alumnos.

Saludos cordiales

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

septiembre 4, 2024 a las 1:37 pm

Hola Luis. Muchas gracias por el comentario. Por favor, con confianza sigue usando y compartiendo el material que encuentres y que creas que te pueda ser de ayuda a ti o a tus alumnos. ¡Saludos!

David
agosto 21, 2025 a las 11:11 pm

Muy mal explicado, confunde la diferencial con una ecuación diferencial exacta, estás jodido como maestro

---

David
agosto 21, 2025 a las 11:13 pm

Estás jodido con la explicación
