Método de Gauss

🎓 ¿Qué es la Cuadratura de Gauss?

Es un método numérico avanzado para aproximar integrales definidas de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

Se basa en evaluar la función en puntos especiales (nodos) dentro del intervalo, pesados con coeficientes w_i, que maximizan la precisión para polinomios.

🔢 Fórmula general (Gauss-Legendre)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

Donde:

- x_i: nodos (raíces del polinomio de Legendre de grado n)
- w_i: pesos (coeficientes optimizados)
- n: número de nodos = grado de la cuadratura

□ Ventajas del método

- Mucha precisión con pocos puntos
- Integra exactamente todos los polinomios hasta grado $2n - 1$
- No requiere puntos equiespaciados

📘 ¿Qué es un polinomio de Legendre?

Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son una familia de funciones ortogonales sobre $[-1, 1]$, definidos por la relación de recurrencia:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

También puedes obtenerlos con:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

□ Ejemplos concretos:

Grado n	Polinomio $P_n(x)$	Raíces (nodos x_i)
0	$P_0(x) = 1$	—
1	$P_1(x) = x$	0
2	$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$0, \pm\sqrt{3/5}$
4	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	4 raíces dentro de $[-1, 1]$

□ ¿Qué se hace con ellos?

1. Se calcula o consulta $P_n(x)$
2. Se resuelven las raíces x_i
3. Se usan esas raíces como los nodos x_i para la cuadratura de Gauss
4. Los pesos w_i se calculan usando:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}$$

□ Transformación del intervalo

Si la integral no está en $[-1, 1]$, se transforma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

Ejemplo:

Si quieres integrar en $[1, 2]$:

- El cambio es:

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$$

- Y:

$$dx = \frac{1}{2}dt$$

Entonces la integral se reescribe:

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\right) dt$$

📊 Modelos (valores estándar)

🔷 Gauss-Legendre con 2 puntos (n = 2):

Nodo x_i	Peso w_i
$\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.57735$	1

◆ Gauss-Legendre con 3 puntos (n = 3):

Nodo x_i	Peso w_i
$-\sqrt{3/5} \approx -0.7746$	$\frac{5}{9} \approx 0.5556$
0	$\frac{8}{9} \approx 0.8889$
$+\sqrt{3/5} \approx +0.7746$	$\frac{5}{9} \approx 0.5556$

🔢 ¿Cómo se obtienen los nodos y pesos?

🔷 1. Nodos: raíces del **polinomio de Legendre** $P_n(x)$

Cada grado n tiene un polinomio $P_n(x)$, definido por:

$$
\begin{gathered}
P_0(x) = 1 \\
P_1(x) = x \\
P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{gathered}
$$

Los nodos x_i son las raíces reales de $P_n(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejemplo:

- Para $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, resolvemos:

$$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.5774$$

🔷 2. Pesos w_i: se derivan de fórmulas especiales

Una fórmula general para los pesos es:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}$$

Donde:

- x_i es el nodo (raíz)
- $P_n'(x)$ es la derivada del polinomio de Legendre

□ Pero en la práctica, **estos valores están tabulados**, porque:

- Resolver a mano estas derivadas es muy pesado
- Para $n \leq 6$, se pueden encontrar en tablas estándar

📚 Resumen

Paso	Explicación
1. Nodos x_i	Se obtienen resolviendo $P_n(x) = 0$
2. Pesos w_i	Se calculan con fórmulas derivadas, o se consultan en tablas
3. Intervalo $[-1, 1]$	Siempre se trabaja en el intervalo estándar
4. Si es otro intervalo	Se hace cambio de variable: $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$

✅ ¿Cuándo usarlo?

- Cuando se necesita alta precisión
- Cuando $f(x)$ es suave (derivable)
- Mejor que Simpson o Trapecio si tienes pocos puntos

Ejemplo 1

🔷 Ejemplo:

Resolvamos:

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 + 2x + 1)\, dx$$

Esta es una **función polinómica de grado 2**, así que con **Gauss-Legendre de 2 puntos** ($n = 2$) se obtendrá el valor **exacto**.

📌 Paso 1: Nodos y pesos para $n = 2$

Nodo x_i	Peso w_i
$-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.5774$	1
$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx +0.5774$	1

📌 Paso 2: Evaluar la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

En $x_1 = -0.5774$:

$$f(-0.5774) = 3(-0.5774)^2 + 2(-0.5774) + 1 = 3(0.3333) - 1.1548 + 1 \approx 1 - 1.1548 + 1 = 1.8451$$

En $x_2 = +0.5774$:

$$f(0.5774) = 3(0.5774)^2 + 2(0.5774) + 1 = 1 + 1.1548 + 1 = 3.1548$$

📌 Paso 3: Aplicar cuadratura de Gauss

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{2} w_i \cdot f(x_i) = 1 \cdot 1.8451 + 1 \cdot 3.1548 = \boxed{5.000}$$

Valor exacto

🎯 **Resultado exacto por cálculo simbólico:**

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 + 2x + 1)\, dx = \left[x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= (1 + 1 + 1) - ((-1)^3 + 1 + (-1)) = 3 - (-1 + 1 - 1) = 3 - (-1) = \boxed{5}$$

Ejemplo 2

◆ Ejemplo ampliado:

$$\int_2^5 (3x^2 + 2x + 1)\, dx$$

Usaremos cuadratura de Gauss-Legendre de 2 puntos, que requiere:

1. Transformar el intervalo $[2, 5]$ a $[-1, 1]$
2. Aplicar los nodos y pesos estándar
3. Evaluar la función transformada
4. Multiplicar por el factor de cambio

🔁 Paso 1: Cambio de variable

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} = \frac{5-2}{2}t + \frac{5+2}{2} = \frac{3}{2}t + \frac{7}{2}$$

$$dx = \frac{3}{2}dt$$

Entonces:

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{3}{2}t + \frac{7}{2}\right) dt$$

📌 Paso 2: Usar nodos y pesos para $n = 2$

t_i	$x_i = \frac{3}{2}t + \frac{7}{2}$	Peso w_i
-0.5774	$\frac{3}{2}(-0.5774) + \frac{7}{2} \approx 2.6349$	1
$+0.5774$	$\frac{3}{2}(0.5774) + \frac{7}{2} \approx 4.3651$	1

□ Paso 3: Evaluar $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

En $x = 2.6349$:

$$f(2.6349) = 3(6.9416) + 5.2698 + 1 \approx 20.8248 + 5.2698 + 1 = 27.0946$$

En $x = 4.3651$:

$$f(4.3651) = 3(19.060) + 8.7302 + 1 \approx 57.18 + 8.7302 + 1 = 66.9102$$

✅ Paso 4: Aplicar cuadratura de Gauss

$$\int_2^5 f(x)\,dx \approx \frac{3}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_2)) = \frac{3}{2} \cdot (27.0946 + 66.9102)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 94.0048 \approx \boxed{141.007}$$

✅ Resultado exacto por cálculo simbólico:

$$\int_2^5 (3x^2 + 2x + 1)\,dx = \left[x^3 + x^2 + x\right]_2^5 = (125 + 25 + 5) - (8 + 4 + 2) = 155 - 14 = \boxed{141}$$

◆ Ejercicio:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

Sabemos que la solución exacta es $\boxed{2}$, pero vamos a aproximarla con **Gauss-Legendre** usando $n = 2$ puntos.

🔁 Paso 1: Cambio de variable

Transformamos $x \in [0, \pi]$ a $t \in [-1, 1]$:

$$x = \frac{\pi - 0}{2}t + \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}$$

$$dx = \frac{\pi}{2}dt$$

Entonces:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) dt$$

□ Paso 2: Gauss-Legendre con $n = 2$

t_i	w_i
$-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.5774$	1
$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx +0.5774$	1

□ Paso 3: Evaluar la función transformada

Para $t = -0.5774$:

$$x = \frac{\pi}{2}(-0.5774) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(1 - 0.5774) \approx \frac{\pi}{2}(0.4226) \approx 0.664$$

$$f(x) = \sin(0.664) \approx 0.6156$$

Para $t = 0.5774$:

$$x = \frac{\pi}{2}(1 + 0.5774) \approx \frac{\pi}{2}(1.5774) \approx 2.477$$

$$f(x) = \sin(2.477) \approx 0.6173$$

✅ Paso 4: Aplicar fórmula de Gauss

$$\int_0^\pi \sin(x)dx \approx \frac{\pi}{2} \cdot [1 \cdot 0.6156 + 1 \cdot 0.6173] = \frac{\pi}{2} \cdot 1.2329 \approx \boxed{1.935}$$

🎯 Resultado:

- Aproximación por Gauss-Legendre (2 puntos): $\boxed{1.935}$
- Valor exacto: 2
- Error absoluto: ≈ 0.065