Método de Bisección

□ ¿Qué es el Método de la Bisección?

Es un método **numérico iterativo** que permite encontrar **raíces reales de una función continua** $f(x)$, es decir, encontrar x tal que:

$$f(x) = 0$$

Se basa en el **Teorema de Bolzano**, que garantiza que si:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

entonces **existe al menos una raíz en el intervalo** $[a, b]$.

□ Pasos del Método de la Bisección

1. Elige un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. Calcula el punto medio:

$$c = \frac{a + b}{2}$$

3. Evalúa $f(c)$:
    - Si $f(c) = 0$: ¡has encontrado la raíz!
    - Si $f(a) \cdot f(c) < 0$: la raíz está en $[a, c]$
    - Si $f(c) \cdot f(b) < 0$: la raíz está en $[c, b]$
4. Reemplaza el intervalo y **repite** hasta que el ancho del intervalo sea menor que una tolerancia ε, por ejemplo 10^{-4}

📘 Aplicación en ecuaciones diferenciales

En el contexto de **EDOs o ED parciales**, la bisección puede servir para:

- Buscar **valores propios** (eigenvalores) que satisfacen ciertas condiciones.
- Ajustar parámetros para que una **solución numérica cumpla condiciones de contorno.**
- Encontrar **intersecciones**, raíces o tiempos en que una función de solución cruza cero.

✨ Ejemplo sencillo

Supón que tienes:

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

Sabes que hay una raíz entre $x = 1$ y $x = 2$, porque:

$$f(1) = -2, \quad f(2) = 4 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$

Aplicas el método y converges a la raíz real ≈ 1.521

◆ Ejemplo:

Queremos encontrar una **raíz de la función:**

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

Sabemos que esta función **cambia de signo** en el intervalo $[1, 2]$, porque:

$$f(1) = 1^3 - 1 - 2 = -2 \quad \text{y} \quad f(2) = 2^3 - 2 - 2 = 4$$

Como $f(1) \cdot f(2) < 0$, hay **al menos una raíz** en ese intervalo.

📘 Objetivo:

Encontrar una aproximación de la raíz con **tolerancia** $\varepsilon = 0.01$

🔁 Iteraciones del Método:

Usamos:

$$c = \frac{a+b}{2}, \quad \text{y evaluamos } f(c)$$

🔷 Iteración 1:

- $a = 1, b = 2$
- $c = \frac{1+2}{2} = 1.5$
- $f(1.5) = (1.5)^3 - 1.5 - 2 = 3.375 - 1.5 - 2 = -0.125$

Resultado:

- $f(1.5) < 0 \Rightarrow$ la raíz está en $[1.5, 2]$

◆ Iteración 2:

- $a = 1.5, b = 2$
- $c = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$
- $f(1.75) = (1.75)^3 - 1.75 - 2 = 5.36 - 1.75 - 2 = 1.61$

Resultado:

- $f(1.75) > 0 \Rightarrow$ la raíz está en $[1.5, 1.75]$

◆ Iteración 3:

- $a = 1.5, b = 1.75$
- $c = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$
- $f(1.625) \approx 4.29 - 1.625 - 2 = 0.665$

Raíz en $[1.5, 1.625]$

🔷 Iteración 4:

- $c = \frac{1.5+1.625}{2} = 1.5625$
- $f(1.5625) \approx 3.82 - 1.5625 - 2 = 0.26$

Raíz en $[1.5, 1.5625]$

🔷 Iteración 5:

- $c = \frac{1.5+1.5625}{2} = 1.53125$
- $f(1.53125) \approx 3.59 - 1.53125 - 2 = 0.06$

Raíz en $[1.5, 1.53125]$

🔷 Iteración 6:

- $c = \frac{1.5+1.53125}{2} = 1.515625$
- $f(1.515625) \approx 3.47 - 1.515625 - 2 = -0.045$

Raíz en $[1.515625, 1.53125]$

✅ Detención

El ancho del intervalo:

$$b - a = 1.53125 - 1.515625 = 0.015625 < 0.01 \quad (\text{aún no})$$

Una iteración más:

🔹 Iteración 7:

- $c = \frac{1.515625+1.53125}{2} = 1.5234375$
- $f(1.5234375) \approx 3.52 - 1.523 - 2 = -0.005$

Raíz en $[1.5234375, 1.53125]$

$$b - a = 1.53125 - 1.5234375 = 0.0078125 < 0.01$$

¡Detenemos aquí!

🎯 Resultado final:

La raíz aproximada es:

$$\boxed{x \approx 1.5234375}$$

Con una **precisión de 2 cifras decimales**, podemos decir:

$$\boxed{x \approx 1.52}$$

EJEMPLO 2:

□ EDO propuesta (de primer orden, lineal y exacta):

$$\frac{dy}{dx} = x - a, \quad y(0) = 0$$

Esta EDO es **lineal, separable y exacta.** Su solución general se puede encontrar, pero la usamos para mostrar cómo aplicar bisección en un caso didáctico.

🎯 Objetivo:

Queremos encontrar el valor de a tal que la solución cumpla:

$$y(2) = 0$$

□ Paso 1: Resolver la EDO (para saber qué función analizar)

Separando variables:

$$dy = (x-a)\,dx \Rightarrow y(x) = \int_0^x (t-a)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} - at\right]_0^x = \frac{x^2}{2} - ax$$

Entonces, la solución es:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - ax$$

□ Paso 2: Aplicar condición de contorno

Queremos que:

$$y(2) = 0 \Rightarrow \frac{4}{2} - 2a = 0 \Rightarrow 2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

✅ Sabemos que la solución exacta es $a = 1$, pero usaremos el **método de la bisección** para obtenerlo **numéricamente.**

🔁 Método de Bisección aplicado a $f(a) = y(2)$

$$f(a) = \frac{4}{2} - 2a = 2 - 2a$$

Buscamos $f(a) = 0$

Probamos:

- $a = 0.5 \Rightarrow f(0.5) = 2 - 1 = 1$
- $a = 1.5 \Rightarrow f(1.5) = 2 - 3 = -1$

Signo cambia ⇒ raíz en $[0.5, 1.5]$

Iteración 1:

- $a = 1.0 \Rightarrow f(1.0) = 2 - 2 = 0$

🎯 ¡Raíz exacta encontrada!

✅ Conclusión:

Aunque esta EDO es resoluble analíticamente, el **método de bisección** nos permite encontrar el valor del parámetro a que **hace cumplir una condición adicional**, como $y(2) = 0$.

FIN