

ECUACIONES DIFERENCIALES

IGNACIO GRACIA RIVAS ¹, NARCISO ROMÁN-ROY ²

*Departamento de Matemática Aplicada IV
C/ Jordi Girona 1. Edificio C-3, Campus Norte UPC
E-08034 Barcelona*

February 16, 2010

¹e-mail: IGNACIO@MAT.UPC.ES

²e-mail: MATNRR@MAT.UPC.ES

Prefacio

Estos *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales* constituyen una guía personal a la asignatura de **Ecuaciones Diferenciales** que se imparte en la E.T.S.E.T.B. en el curso 1-B de la carrera de INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN (*Plan de Estudios 1992*). Por tanto, en ningún momento pretenden ser una guía oficial, ni tan siquiera una pauta a seguir respecto a como debe ser impartida la asignatura.

Debemos agradecer la colaboración de muchos compañeros que han impartido esta asignatura y que, además de hacerme valiosas sugerencias, han detectado erratas y errores que han sido ya corregidos (aunque somos conscientes de que todavía pueden quedar otros muchos por detectar). Especialmente nuestro agradecimiento a L.L. ANDRÉS YEBRA, por permitirnos el uso y transcripción de sus apuntes sobre el tema de la *transformación de Laplace*.

Contents

1 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	1
1.1 Introducción	1
1.2 Definiciones, interpretación geométrica y ejemplos	1
1.2.1 Definiciones básicas	1
1.2.2 Interpretación geométrica	3
1.2.3 Ejemplos de aplicaciones físicas y matemáticas	3
1.3 Resolución de ecuaciones de variables separables, lineales y homogéneas	4
1.3.1 Ecuaciones integrables elementalmente	4
1.3.2 Ecuaciones de variables separadas	5
1.3.3 Ecuaciones lineales	6
1.3.4 Ecuaciones homogéneas: cambio de variables.	8
1.3.5 Ecuaciones de Bernouilli y de Riccati	9
1.4 Aplicaciones: familias de curvas, modelos matemáticos	9
1.4.1 Trayectorias ortogonales	9
1.4.2 Modelos de población	10
1.4.3 Desintegración radiactiva	11
1.5 Resultados de existencia y unicidad y de dependencia continua de soluciones	13
1.5.1 Presentación del problema	13
1.5.2 Teoremas de existencia y unicidad	13
1.5.3 Dependencia continua de las soluciones	16
1.6 Métodos numéricos de resolución	18
1.6.1 Ideas fundamentales	18
1.6.2 Método de Euler	18
1.6.3 Método de Euler modificado	18
1.6.4 Método de Runge-Kutta	18
2 Ecuaciones Diferenciales (Lineales) de Orden Superior	19

2.1	Introducción	19
2.2	Nociones fundamentales. Ecuaciones lineales de orden superior	19
2.2.1	Ecuaciones diferenciales de orden n	19
2.2.2	Ecuaciones diferenciales lineales de orden n	21
2.3	Estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n	23
2.3.1	Dependencia e independencia lineal de funciones. Wronskiano	23
2.3.2	Solución de la ecuación lineal homogénea	25
2.3.3	Solución de la ecuación lineal completa: método de variación de constantes	27
2.4	Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	29
2.4.1	Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes	29
2.4.2	Ecuaciones lineales completas con coeficientes constantes. Método del anulador	32
2.5	Casos particulares y aplicaciones	33
2.5.1	Caso particular: ecuaciones de Euler	33
2.5.2	Aplicaciones físicas	33
3	Sistemas de Ecuaciones Diferenciales	35
3.1	Introducción	35
3.2	Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden	35
3.2.1	Definiciones fundamentales. Teorema de existencia y unicidad de soluciones	35
3.2.2	Sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden superior	36
3.3	Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales	37
3.3.1	Conceptos generales	37
3.3.2	Soluciones de los sistemas de primer orden lineales	38
3.3.3	Dependencia e independencia lineal de soluciones	39
3.3.4	Solución del sistema lineal homogéneo. Matriz Fundamental	40
3.3.5	Solución del sistema lineal completo. Método de variación de constantes	42
3.4	Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes	42
3.4.1	Ideas generales	42
3.4.2	Estudio del sistema homogéneo (con matriz del sistema diagonalizable)	43
3.4.3	Estudio del sistema homogéneo (con matriz del sistema no diagonalizable)	45
3.4.4	Estudio del caso general	47
4	La Transformación de Laplace	49
4.1	Introducción	49
4.2	Definiciones básicas y propiedades	49
4.2.1	Transformadas de Laplace	49

4.2.2	Primeras propiedades	51
4.2.3	Transformadas de Laplace de algunas funciones elementales	54
4.2.4	Inversión (por descomposición en fracciones simples)	56
4.3	Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales	57
4.3.1	Resolución de problemas de valor inicial de ecuaciones y sistemas con coeficientes constantes	57
4.3.2	Excitaciones discontinuas: Función de Heaviside	57
4.3.3	Delta de Dirac	58
4.3.4	Convolución y sistemas lineales	60
5	Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales	63
5.1	Introducción	63
5.2	Ecuaciones en derivadas parciales y problemas de contorno	63
5.2.1	Definiciones básicas	63
5.2.2	Problemas de contorno. Tipos de condiciones de contorno y de valor inicial	64
5.2.3	Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales	65
5.3	Series de Fourier y funciones ortogonales	68
5.3.1	Series y coeficientes de Fourier	68
5.3.2	Convergencia de series de Fourier	70
5.3.3	Funciones pares e impares	72
5.3.4	Extensión a intervalos arbitrarios	73
5.3.5	Funciones ortogonales: series de Fourier generalizadas	73
5.3.6	Convergencia en media cuadrática de series de Fourier	75
5.4	Ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y su resolución	78
5.4.1	Método de separación de variables. Problema de Sturm-Liouville	78
5.4.2	Ecuación de ondas (o de la cuerda vibrante)	79
5.4.3	Ecuación del calor	81
5.4.4	Ecuación de Laplace. Problema de Dirichlet	83

Chapter 1

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1.1 Introducción

En el estudio de un problema de Matemática Aplicada pueden distinguirse esencialmente tres etapas: la *formulación matemática* del problema, la *resolución* del problema matemático y, finalmente, la *interpretación* de los resultados obtenidos. Las dos primeras etapas, que constituirán en principio nuestro objetivo, conducen habitualmente al planteamiento y resolución de *ecuaciones diferenciales*.

En este primer capítulo se van a considerar las denominadas *ecuaciones diferenciales de primer orden* (expresadas en la *forma normal*).

En primer lugar se efectuará una presentación general del tema que incluye definiciones básicas, ejemplos clásicos e interpretaciones geométricas. Se introducirán, a continuación, los primeros *métodos analíticos* de resolución para algunos tipos particulares de ecuaciones de primer orden; analizando, también, algunas aplicaciones de los casos estudiados, mediante la presentación de modelos matemáticos de ciertos fenómenos. Seguidamente se estudiarán los teoremas de *existencia y unicidad* de soluciones y su prolongación analítica y, finalmente, se comentarán los primeros *métodos numéricos* de resolución.

1.2 Definiciones, interpretación geométrica y ejemplos

1.2.1 Definiciones básicas

Comenzaremos con unas definiciones de carácter introductorio.

Definición 1 *Se denomina ecuación diferencial a una relación entre una función (suficientemente derivable), sus variables y una o varias derivadas sucesivas de la función.*

Se denomina ecuación diferencial ordinaria a una ecuación diferencial en la que la función depende sólo de una variable. En este último caso, se dice que la ecuación está expresada en forma normal o explícita si la derivada de orden superior aparece despejada como función de todos los demás ingredientes de la ecuación. En caso contrario se dice que la ecuación está expresada en forma implícita¹.

Dada una ecuación diferencial (ordinaria o no):

1. *Se denomina orden de la ecuación al de la derivada de mayor orden que interviene en la ecuación.*

¹Es obvio que toda ecuación en forma normal puede ser expresada en forma implícita. Lo contrario no siempre es factible.

2. Se denomina grado de la ecuación al exponente de la derivada de mayor orden.

Si $y = y(x)$ indica una función derivable hasta el orden que convenga, una ecuación diferencial ordinaria de orden n ($n \in \mathbb{N}$) en forma implícita es una expresión del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

mientras que expresada en forma explícita adopta la forma

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Comentario:

- Como ya se anunció en la introducción, en este tema sólo se tratarán las *ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden* las cuales, si no se dice lo contrario, se supondrán expresadas en forma normal.

No obstante, las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden pueden expresarse también en *forma diferencial*

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$$

El paso de esta forma a la explícita (y recíprocamente) se efectúa simplemente poniendo $f(x, y) = -\frac{g(x, y)}{h(x, y)}$.

Definición 2 Dada una ecuación diferencial ordinaria $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ (o bien $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$):

1. Se denomina solución particular (o también integral particular o curva integral) de la ecuación en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ a una función $y \equiv \phi(x)$, derivable hasta el orden que convenga en I , tal que

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{o bien} \quad \phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)) \quad ; \quad \forall x \in I$$

2. Se denomina solución general (o también integral general) de la ecuación en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ al conjunto de las soluciones (o integrales) particulares de la ecuación en dicho intervalo.

Comentario:

- Geométricamente hablando, las soluciones de las ecuaciones diferenciales son curvas en \mathbb{R}^2 . Atendiendo a la definición dada, si $y = \phi(x)$ es una solución de una ecuación, dicha curva es, obviamente, graf ϕ . No obstante, la curva en cuestión es, a menudo, difícil e incluso imposible de expresar analíticamente en forma explícita y, por tanto, las soluciones de las ecuaciones diferenciales se presentan con frecuencia en la forma de funciones definidas implícitamente, $\Phi(x, y) = 0$,

Ejemplos:

- Ecuación: $y'' + 4y = 0$.

Solución particular: $y = \sin 2x - 3 \cos 2x$.

Solución general: $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ (C_1, C_2 ctes.).

- Ecuación: $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$.

Solución general: $xy = \ln y + C$ (C cte.).

Definición 3 Dada una ecuación diferencial de orden n (ordinaria o no):

1. Se tiene un problema de valor inicial cuando se conocen los valores de la función (variable dependiente) y de sus derivadas hasta orden $n - 1$ en un mismo punto.
2. Se tiene un problema de contorno cuando se conocen los valores de la función (variable dependiente) y/o de sus derivadas (como máximo hasta orden $n - 1$) en diferentes puntos.

Dar un problema de condiciones iniciales o de contorno para una ecuación diferencial puede permitir obtener una solución particular de la ecuación.

Ejemplos: En el primero de los ejemplos anteriores:

- Problema de condiciones iniciales: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Solución: $y = \frac{1}{2} \sin 2x$.

- Problema de contorno: $y(0) = 1, y(\pi/2) = 2$.

No tiene solución.

- Problema de contorno: $y(\pi/8) = 0, y(\pi/6) = 1$.

Solución: $y = \frac{2}{\sqrt{3}-1} (\sin 2x - \cos 2x)$.

1.2.2 Interpretación geométrica

Toda ecuación diferencial de primer orden y grado 1, expresada en forma normal, $y' = f(x, y)$, se puede interpretar como una expresión que asocia a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en el dominio de la función f , una dirección o, más concretamente, la pendiente de una recta: La tangente a la curva solución en el punto (x, y) en cuestión. De esta manera, una solución de la ecuación, $y = \phi(x)$ ó $\Phi(x, y) = 0$, es una curva en \mathbb{R}^2 , cuya pendiente en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale justamente $f(x, y)$.

1.2.3 Ejemplos de aplicaciones físicas y matemáticas

Es fácil comprender por qué se presentan tan a menudo ecuaciones diferenciales en los problemas de Física: si $y = f(x)$ es una función que representa una magnitud escalar, entonces su derivada $\frac{df}{dx}$ representa la tasa de cambio de y en relación con x . En cualquier fenómeno natural, las variables que aparecen y sus tasas de cambio se relacionan entre sí según los principios básicos que rigen el proceso y, cuando esta relación se expresa mediante símbolos matemáticos, el resultado es habitualmente una ecuación diferencial.

Ejemplos:

1. 2^a ley de Newton: La aceleración a de un cuerpo de masa m es proporcional a la fuerza F que sobre él actúa: $F = ma$.

Si la fuerza depende del tiempo t , de la posición del cuerpo en cada instante $y(t)$ y de su velocidad en ese instante $\frac{dy}{dt}(t)$, esta ley se expresa como

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F \left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t) \right)$$

En el caso particular de un cuerpo cayendo libremente bajo la acción de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra ($g = \text{cte.}$), se tiene

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg$$

Si, además, el aire presenta una resistencia al movimiento proporcional a la velocidad se tendrá

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt}$$

2. Circuitos eléctricos: *Considérese un circuito con las siguientes características:*

- (a) Una fuerza electromotriz (fem) E , suministrada por un generador, que impulsa una carga eléctrica produciendo una corriente de intensidad I (recuérdese que $I = \frac{dQ}{dt}$) que, dependiendo de las características del generador, puede ser constante o función del tiempo (pero conocida en cualquier caso).
- (b) Un resistor de resistencia R que se opone a la corriente, reduciendo la fem en una cantidad $E_R = RI$ (Ley de Ohm).
- (c) Un inductor de inductancia L que se opone a los cambios de corriente, provocando una disminución de la fem $E_L = L\frac{dI}{dt}$.
- (d) Un condensador de capacidad C que almacena una carga Q , la cual se opone a la entrada de carga adicional, provocando una disminución de la fem $E_c = \frac{Q}{C}$.

De acuerdo con las leyes de Kirchoff se tiene que

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

y derivando de nuevo respecto al tiempo

$$\frac{dE}{dt} - R\frac{dI}{dt} - L\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{I}{C} = 0$$

3. Ecuaciones de una familia de curvas: *Las ecuaciones diferenciales, matemáticamente hablando, describen familias de curvas: sus soluciones.*

Considérese, p. ej., la familia de paráolas que pasan por el origen, cuya ecuación es $y = Cx^2$, derivando respecto a la variable x se obtiene $y' = 2Cx$, y eliminando el factor C de ambas ecuaciones se llega a la ecuación

$$y' = 2\frac{y}{x}$$

que expresa la propiedad que caracteriza a esta familia: la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de estas curvas es el doble de la de la recta que une dicho punto con el origen.

En general, si $g(x, y, C) = 0$ representa una familia de curvas, eliminando C de esta ecuación y de su derivada

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}y' = 0$$

se obtiene la ecuación diferencial que caracteriza la familia.

1.3 Resolución de ecuaciones de variables separables, lineales y homogéneas

1.3.1 Ecuaciones integrables elementalmente

Es bien conocido que ciertas funciones como, p. ej., $\sqrt{\cos x}$ ó e^{x^2} no tienen una primitiva que pueda expresarse por medio de una función elemental, es decir, una combinación de funciones racionales, trigonométricas, exponenciales o inversas de éstas. Por consiguiente, hay ecuaciones diferenciales del tipo $y' = f(x, y)$ para las que, aún siendo f una función dependiente de x únicamente (como son los ejemplos mencionados), no siempre es posible encontrar funciones elementales que sean soluciones de ellas. Entonces:

Definición 4 Una ecuación diferencial se dice que es integrable elementalmente si tiene solución y ésta es expresable por medio de funciones elementales, o bien por primitivas de éstas que no tienen por que ser necesariamente funciones elementales².

²Obsérvese, por tanto, que toda ecuación diferencial del tipo $y' = f(x)$, donde f es una función elemental, es integrable elementalmente

En los próximos apartados se van a analizar algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden ser integradas elementalmente. Salvo en el caso de la ecuación lineal, para la que se hará un tratamiento más preciso, se considerará siempre que todas las funciones son diferenciables con continuidad hasta el orden que convenga, por lo que no se efectuarán precisiones en ese sentido.

1.3.2 Ecuaciones de variables separadas

Definición 5 Una ecuación diferencial de variables separadas es una ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$ en la que la función f puede expresarse en la forma $f(x, y) = g(x)k(y)$ o bien $f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}$ (siendo $h(y) = \frac{1}{k(y)}$).

De manera equivalente, es toda ecuación diferencial de primer orden que en forma diferencial se expresa como

$$h(y)dy = g(x)dx \quad (1.1)$$

Resolución:

Proposición 1 La solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad (1.2)$$

está dada por

$$H(y(x)) = G(x) + C \quad (1.3)$$

donde $H(y)$ es una primitiva de $h(y)$, $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$ y C es una constante.

(Dem.) Multiplicando por $h(y)$ la ecuación (1.2) se obtiene

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

y si $H(y)$ es una primitiva de $h(y)$, el primer miembro es justamente $\frac{d}{dx}H(y(x))$, por lo que, si $G(x)$ es, a su vez, una primitiva de $g(x)$, la integral o solución general de la ecuación (1.2), expresada en forma implícita, es justamente (1.3). Si es posible despejar de ahí la función $y(x)$, se tendrá la solución en forma explícita como

$$y = \phi(x, C)$$

■

La manera práctica de proceder consiste en “separar las variables”, escribiendo la ecuación (1.2) en su forma diferencial (1.1) de la que, integrando ambos miembros, se obtiene la solución (1.3) en la forma

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Si se han especificado las condiciones iniciales, $y(x_0) = y_0$, es posible obtener la solución particular que las satisface del siguiente modo:

$$H(y_0) = G(x_0) + C$$

y eliminando C del sistema formado por esta última ecuación y (1.3), se obtiene

$$H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\int_{y_0}^y h(y)dy = \int_{x_0}^x g(x)dx$$

Ejemplos:

- Véase la colección de problemas.

1.3.3 Ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales constituyen uno de los tipos más importantes de ecuaciones diferenciales.

Definición 6 Una ecuación diferencial lineal es una ecuación en la que la derivada de orden superior es una expresión lineal de la función y y sus otras derivadas de orden inferior³; esto es,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_0(x)y + f(x) = 0$$

Se denomina ecuación homogénea asociada a la ecuación lineal (que se llama entonces completa) a

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_0(x)y = 0$$

En este capítulo sólo se van a analizar las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = f(x) \quad (1.4)$$

Comentario:

- El apelativo *lineal* tiene la siguiente justificación: el operador

$$L := \frac{d}{dx} + g(x)$$

que asocia a cada función $y(x)$ la función $L(y) := y' + g(x)y$, es un operador lineal (como se comprueba de inmediato) que actúa entre los espacios vectoriales $C^p(I)$ y $C^{p-1}(I)$, con $I \subset \mathbb{R}$. En este lenguaje de operadores, la ecuación (1.4) se expresa pues como

$$L(y) = f(x)$$

Resolución:

Proposición 2 El conjunto de soluciones de la ecuación (1.4) está dado por $y_P + \text{Ker } L$, donde y_P es una solución particular cualquiera de la ecuación completa y $\text{Ker } L$ es, obviamente, el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0 \quad (1.5)$$

(Dem.) Sea S el conjunto de soluciones de la ecuación completa. Se va a probar que

$$S = \{y_P + y_1 \mid L(y_1) = 0\}$$

En primer lugar, $y_P + \text{Ker } L \subset S$ ya que, teniendo en cuenta la linealidad del operador L , $\forall y_1 \in \text{Ker } L$ se tiene que

$$L(y_P + y_1) = L(y_P) + L(y_1) = f + 0 = f$$

Recíprocamente, $S \subset y_P + \text{Ker } L$ puesto que, $\forall y \in S$ solución de la ecuación completa, se tiene que

$$L(y - y_P) = L(y) - L(y_P) = f - f = 0$$

luego $y - y_P \in \text{Ker } L$, de donde $y = y_P + \text{Ker } L$.

Así pues, para resolver una ecuación lineal es preciso conocer la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la completa. Veamos como se obtienen.

³Obsérvese que los coeficientes funcionales son funciones de x únicamente.

Lema 1 El conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea de primer orden (1.5) es

$$y = Ce^{-\int g(x)dx} \equiv C\phi(x) \quad (C \in \mathbb{R})$$

por lo que dicho conjunto es un espacio vectorial unidimensional.

(Dem.) Considérese la ecuación homogénea (1.5), la cual, asumiendo que $y \neq 0$, se puede escribir en la forma

$$\frac{y'}{y} = -g(x)$$

que muestra claramente que es de variables separadas, luego integrando

$$\ln|y| = - \int g(x)dx + K \Rightarrow y = Ce^{-\int g(x)dx}$$

donde $C \neq 0$. Sin embargo, al dividir por y se ha eliminado la posibilidad $y = 0$, que se recupera poniendo que $C \in \mathbb{R}$. ■

Lema 2 Una solución particular de la ecuación lineal completa de primer orden es

$$y_P = \left(\int \frac{f(x)}{\phi(x)} dx \right) \phi(x)$$

(Dem.) Para obtener una solución particular de la ecuación homogénea se seguirá el denominado *método de variación de las constantes* (en este caso sólo hay una), el cual permite, realmente, integrar la ecuación completa, conocida una solución particular de la homogénea. El método consiste en suponer que la solución de la ecuación completa es de la forma $y(x) = h(x)y_1(x)$, donde $y_1(x)$ es la solución conocida de la ecuación homogénea. Se obtiene así que

$$\begin{aligned} f(x) = L(y(x)) &= h'(x)y_1(x) + h(x)y'_1(x) + g(x)h(x)y_1(x) \\ &= h'(x)y_1(x) + h(x)(y'_1(x) + g(x)y_1(x)) = h'(x)y_1(x) \end{aligned}$$

por tanto,

$$h(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx + K \quad (K \in \mathbb{R})$$

y, dado que se busca una solución particular, se pueden elegir $y_1(x) = \phi(x)$ y $K = 0$, quedando finalmente

$$h(x) = \int \frac{f(x)}{\phi(x)} dx \Rightarrow y_P(x) = \left(\int \frac{f(x)}{\phi(x)} dx \right) \phi(x)$$

■

Como consecuencia de ambos lemas se concluye:

Proposición 3 la solución general de la ecuación lineal de primer orden es

$$y = \left(\int \frac{f(x)}{\phi(x)} dx \right) \phi(x) + C\phi(x) = \left(\int \frac{f(x)}{e^{-\int g(x)dx}} dx + C \right) e^{-\int g(x)dx} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Ejemplos:

- Véase la colección de problemas.

1.3.4 Ecuaciones homogéneas: cambio de variables.

En algunos casos un cambio de variable, ya sea de la variable independiente, de la función o de ambas, puede convertir una ecuación diferencial dada en otra de integración más simple.

Realmente, esta técnica ya ha sido utilizada en el apartado anterior cuando, para integrar la ecuación lineal completa por el método de variación de las constantes, se ha tomado como nueva función incógnita $h(x) = y(x)/y_1(x)$.

En el siguiente caso se muestra otra nueva situación.

Definición 7 Una función $f(x, y)$ es homogénea de grado n si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, para todos x, y, t adecuadamente restringidos.

Ejemplos:

- $f(x, y) \equiv x^2 + xy$ es homogénea de grado 2.
- $f(x, y) \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ es homogénea de grado 1.
- $f(x, y) \equiv \sin \frac{x}{y}$ es homogénea de grado 0.

Definición 8 Una ecuación diferencial homogénea (de primer orden) es aquella en cuya expresión en forma normal, $y' = f(x, y)$, se tiene que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado 0 o, equivalentemente, aquella que puede expresarse en forma diferencial

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$$

siendo g y h funciones homogéneas del mismo grado

Resolución: La resolución de este tipo de ecuaciones pasa por efectuar un cambio de variables que las convierte en ecuaciones de variables separadas.

En efecto, tomando como punto de partida la ecuación escrita en su forma normal, por ser $f(x, y)$ una función homogénea de grado 0 (por definición), se tiene que $f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$, para todo t . Tomando, en particular, $t = 1/x$ y denominando $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, se tiene que

$$f(x, y) = f(tx, ty) = f(1, y/x) \equiv f(1, z)$$

con lo que la ecuación diferencial se expresa como

$$\frac{dy}{dx} = f(1, z) \equiv F(z)$$

y, dado que $y(x) = z(x)x$, aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z$$

por lo que, en la nueva variable, la ecuación es

$$\frac{dz}{dx}x + z = F(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{F(z) - z}{x}$$

que es de variables separadas.

Ejemplos:

- Véase la colección de problemas.

1.3.5 Ecuaciones de Bernouilli y de Riccati

Son sendos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden que se resuelven también mediante el método de *cambio de variables*. (Véanse los problemas 7 y 3 de la colección).

La primera de ellas aparece relacionada con problemas de dinámica de fluidos, mientras que la segunda lo hace en relación a cuestiones de síntesis en control óptimo para procesos lineales con coste cuadrático, métodos de inclusión invariante en problemas de transporte, etc. Esta última constituye el ejemplo más sencillo, e históricamente el primero, de ecuación no integrable elementalmente.

1.4 Aplicaciones: familias de curvas, modelos matemáticos

1.4.1 Trayectorias ortogonales

Como primera aplicación de algunos de los conceptos y procedimientos relativos a ecuaciones diferenciales de primer orden que se han introducido hasta el momento, se va a considerar el problema de hallar las *trayectorias ortogonales* a una familia de curvas dada.

El problema tiene su origen en algunas aplicaciones en las que aparecen dos familias de curvas (planas) que son mutuamente ortogonales; esto es, cada curva de una de las familias es orthogonal en todos sus puntos a cada curva de la otra familia. En tales casos, se dice que cada una de ellas es una *familia de curvas ortogonales* a la otra.

Un ejemplo lo constituyen las *curvas equipotenciales* de un campo escalar, que son ortogonales a las *líneas de fuerza* de dicho campo (el campo vectorial *gradiente* del anterior). Este ejemplo se presenta en multitud de sistemas en Física (p. ej., *campos electrostático, gravitatorio, etc.*).

La resolución de este problema es la siguiente:

Proposición 4 La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas que satisface la ecuación $F(x, y, y') = 0$ es $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$.

Como caso particular, si la ecuación diferencial de la familia de curvas está dada en forma explícita, $y' = f(x, y)$, la de sus trayectorias ortogonales es $y' = -\frac{1}{f(x, y)}$

(Dem.) Inmediata, teniendo en cuenta que el que dos curvas sean ortogonales significa que las tangentes a dichas curvas en los puntos de corte son perpendiculares y, por tanto, si $y'(x)$ es la pendiente de una de ellas, la de la otra es $-1/y'(x)$. ■

De esta manera, obtener las trayectorias ortogonales a una familia de curvas de las cuales se conoce su expresión analítica $f(x, y, C) = 0$, requiere los siguientes pasos:

1. Diferenciar la ecuación $f(x, y, C) = 0$.
2. Eliminar C del sistema formado por la ecuación y su derivada, para así obtener la ecuación diferencial de la familia.
3. Obtener la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales aplicando el resultado precedente.
4. Integrar la ecuación resultante.

Ejemplo:

- Como ya se vio, la ecuación diferencial de la familia de paráolas que pasan por el origen, $y = Cx^2$, es $y' = 2\frac{y}{x}$. La de sus trayectorias ortogonales será, por consiguiente $y' = -\frac{x}{2y}$, que es una ecuación de variables separadas y tiene por solución general $y^2 + \frac{x^2}{2} = C$; esto es, elipses centradas en el origen.

1.4.2 Modelos de población

El análisis del problema de tasar el crecimiento de una población permite ilustrar las diferentes etapas que se presentan en el estudio de un problema de Matemática Aplicada.

1. Problema físico: Se trata de obtener una ley que permita predecir el crecimiento de una población $p(t)$ que varía con el tiempo.
2. Formulación matemática: La primera dificultad que se encuentra al intentar formular matemáticamente el problema es que una población sólo toma valores enteros y, por lo tanto, considerada como función del tiempo, es una función discontinua. El problema se solventa observando que, si se trata de una población elevada, la variación en una unidad es ínfima comparada con el número de individuos que constituye el valor de la población y, por consiguiente, se puede considerar que ésta varía continua e incluso diferenciablemente con el tiempo.
3. Modelo matemático (Primera aproximación): En primera aproximación podría hacerse la hipótesis de que “el número de individuos que nacen y que mueren por unidad de tiempo (un año, por ejemplo) es proporcional a la población existente”. Designando por β (*tasa de natalidad*) y γ (*tasa de mortandad*) a las correspondientes constantes de proporcionalidad, se obtiene pues que

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \beta p - \gamma p$$

que, en forma diferencial, conduce a la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p$$

donde $\alpha = \beta - \gamma$ es la *tasa de crecimiento* de la población. Esta ecuación es la denominada *Ley de Maltus*.

4. Resultados matemáticos: Si se añade la condición inicial de que en el instante t_0 la población es p_0 , la correspondiente solución particular se la ecuación es

$$p = p_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

que expresa el hecho de que *la población crece exponencialmente* con el tiempo.

5. Resultados experimentales. Comparación e interpretación: Tomemos el caso de la población humana, que desde 1960 a 1970 pasó de $3 \cdot 10^9$ a $3,7 \cdot 10^9$. Estos datos suponen una tasa de crecimiento que se calcula del siguiente modo:

$$e^{\alpha 10} = \frac{p(1970)}{p(1960)} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{10} \ln \frac{p(1970)}{p(1960)} = 0,0209 \sim 0,02$$

con lo cual, tomando $t_0 = 1970$ y $p_0 = 3,7 \cdot 10^9$, se tiene

$$p(t) = 3,7 \cdot 10^9 e^{0,02(t-1970)}$$

Comparando los datos obtenidos a partir de esta expresión con los experimentales en los tiempos recientes, se observa que hay gran concordancia entre ellos, por lo que parece acertado aceptar la validez de la ley y utilizarla para estimar la población futura.

Sin embargo, aun cuando los datos estimados para un próximo futuro podrían ser aceptables, veamos que sucedería a más largo plazo. Con la tasa de crecimiento tomada, el modelo prevee que la población se dobla cada 35 años; ya que

$$2p = pe^{\alpha T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\alpha} \ln 2 \sim 35$$

Así pues, la población se multiplica por 1000 (por 1024 exactamente) cada 350 años y por 10^6 cada 750 años aproximadamente. Esto nos conduce a la intolerable cifra de densidad de población de 30 habitantes por metro cuadrado en el año 2670.

6. Reformulación matemática: El fallo en el modelo puede estar en que no se ha tenido en cuenta que el espacio disponible es limitado y que cuando ésto ocurre, los individuos han de competir por los recursos disponibles.
7. Modelo matemático (Segunda aproximación): Para tener en cuenta este hecho, se puede corregir la ecuación inicial basándonos en la hipótesis de que en la disminución del crecimiento de la población influye también un factor que es proporcional al número de encuentros entre dos individuos cuyo valor medio es, a su vez, proporcional a p^2 . Con ello se tendría que el crecimiento de la población está regido por la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2$$

que se conoce con el nombre de *ley logística*, y en la que a es la denominada *tasa de crecimiento natural en un medio ilimitado*.

8. Resultados matemáticos: Integrando esta ecuación (es de variables separadas) con la condición inicial $p(t_0) = p_0$, se tiene

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

Una primera consecuencia que se observa es que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{ap_0}{bp_0} = \frac{a}{b}$$

es decir, independientemente de cual sea la población inicial p_0 , con el transcurso del tiempo la población tiende a estacionarse en el valor límite a/b .

Para la población humana se estima el valor $a = 0,029$ y se puede calcular b utilizando la tasa real de crecimiento en 1970, $\alpha = 0,02$, esto es, comparando el modelo descrito mediante la ley de Maltus (cuyas predicciones para 1970 eran válidas) con el modelo actual se tiene que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp}{dt} \right|_{t_0=1970} &= (a - bp_0)p_0 = \alpha p_0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - bp_0) = \alpha \\ \Rightarrow b &= \frac{a - \alpha}{p_0} = 2,43 \cdot 10^{-12} \end{aligned}$$

Como comprobación se puede evaluar la población en el año 1960, obteniéndose $p(1960) = 3,003 \cdot 10^9$. La población mundial crecería con el transcurso de t pero teniendo como población límite

$$\frac{a}{b} = \frac{0,029}{2,43 \cdot 10^{-12}} = 1,2 \cdot 10^{10}$$

Comentario:

- En ninguno de ambos modelos se han tenido en cuenta otros factores, como: fluctuaciones locales o globales de las tasas de crecimiento, epidemias, catástrofes naturales, etc.

1.4.3 Desintegración radiactiva

Experimentalmente se ha comprobado que el ritmo de desintegración de los elementos radiactivos es proporcional a la cantidad de elemento presente. Así, si $Q(t)$ designa dicha cantidad en cada instante de tiempo, se tiene que la *ley de desintegración* es

$$\frac{dQ}{dt} = KQ \quad (K < 0)$$

ecuación que tiene por solución general

$$Q(t) = Ce^{Kt} \quad (K < 0)$$

Si se fija la condición inicial $Q(t_0) = Q_0$ se obtiene que $C = Q_0$, esto es, la solución particular

$$Q(t) = Q_0 e^{K(t-t_0)} \quad (K < 0) \quad (1.6)$$

Si, además se conoce $Q(t_1) = Q_1$, entonces se puede determinar también K experimentalmente

$$Q_1 = Q_0 e^{K(t_1-t_0)} \Leftrightarrow K = \frac{\ln Q_1 - \ln Q_0}{t_1 - t_0}$$

(y $K < 0$ ya que $Q_1 < Q_0$).

Para expresar el ritmo de descomposición de un elemento radiactivo se utiliza el concepto de *vida media*, T , que se define como *el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de materia presente en una muestra del elemento*. El valor de T está relacionado con K del siguiente modo: haciendo $t - t_0 = T$, por definición se tiene que $Q(t_0 + T) = \frac{1}{2}Q_0$, luego de la ecuación (1.6) se obtiene

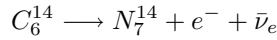
$$K = \frac{\ln \frac{Q_0}{2} - \ln Q_0}{T} = \frac{-\ln 2}{T} \Leftrightarrow KT = -\ln 2$$

Una de las principales aplicaciones de esta ley es la datación geológica o arqueológica, para las cuales se emplean elementos de vida media muy larga (como el U^{238} con $T = 4,5 \cdot 10^9$ años, el K^{40} con $T = 1,4 \cdot 10^9$ años o el Rb^{87} con $T = 6 \cdot 10^{10}$ años). En este sentido, una de las técnicas más fiables y conocidas es la basada en el C^{14} (que tiene una vida media $T = 5568$ años), que fue desarrollada a finales de los años 40 y principios de los 50 por *William Libby* (premio Nobel en 1960) y que permite datar de forma fiable acontecimientos con una antigüedad de hasta 50000 años.

El método se utiliza para calcular la antigüedad de cualquier objeto de origen orgánico y se basa en las siguientes leyes físicas: el carbono radiactivo C^{14} se produce en la alta atmósfera por acción de los rayos cósmicos sobre el nitrógeno:



Puesto que el carbono radiactivo se descompone, a su vez, de nuevo en nitrógeno,



desde hace muchos milenios se ha alcanzado un estado de equilibrio en la proporción de carbono radiactivo y no radiactivo (uno de cada 10^{12} átomos de carbono es radiactivo). Ambos tipos se hallan presentes en la atmósfera en el dióxido de carbono, perfectamente mezclados por la acción de los vientos. De la atmósfera, el carbono radiactivo pasa a fijarse en los tejidos de los seres vivos en esa proporción, ya que las plantas toman dióxido de carbono de la atmósfera durante el proceso de la fotosíntesis, de ellas pasa a los animales vegetarianos y de éstos a los carnívoros. Mientras todos estos seres permanecen con vida esta proporción permanece constante, pero al morir dejan de absorber carbono radiactivo y el que contienen sus tejidos va desintegrándose, con lo que su cantidad va disminuyendo progresivamente. De este modo, si una muestra de materia orgánica muerta contiene la mitad que la de una viva, se puede afirmar que vivió hace aproximadamente 5568 años, y así progresivamente.

Para efectuar los cálculos, lo que se mide es el número de desintegraciones por unidad de tiempo y de materia (p. ej., por minuto y por gramo). En el C^{14} se tiene $K = -1,2449 \cdot 10^{-4}$, entonces, derivando la ecuación (1.6) se tiene $\dot{Q}(t) = KQ_0 e^{K(t-t_0)}$, de donde, para un tiempo fijado t_0 resulta $\dot{Q}(t_0) = KQ_0$, cantidad que se considera constante para la materia orgánica viva. Dividiendo queda

$$\frac{\dot{Q}(t)}{\dot{Q}(t_0)} = e^{K(t-t_0)} \Leftrightarrow t - t_0 = \frac{1}{K} \ln \frac{\dot{Q}(t)}{\dot{Q}(t_0)}$$

Así, p. ej., si una muestra muerta tiene 0,97 desintegraciones por minuto y gramo y otra viva del mismo material presenta 6,67, aplicando la fórmula anterior se obtiene una edad de 15500 años, aproximadamente.

1.5 Resultados de existencia y unicidad y de dependencia continua de soluciones

1.5.1 Presentación del problema

Dada una ecuación diferencial (de primer orden), en las aplicaciones suele interesar determinar el valor de la solución para algún valor de la variable, conocido el de la solución para otro valor inicial de la variable independiente. Ello es así porque, habitualmente, la ecuación rige la evolución de un sistema cuyo estado es conocido en un instante inicial dado t_0 , y se desea conocerlo en un instante posterior $t_0 + T$.

Tal como ya se ha visto, cuando la ecuación diferencial puede ser integrada elementalmente, a partir de su solución general $y = \phi(x, C)$ se determina la solución particular que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ para, posteriormente, calcular $y(x_0 + T)$.

Todo ello presupone, dado un *problema de valor inicial* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$,

1. Que la ecuación puede ser integrada elementalmente.
2. La *existencia y unicidad* de la solución.
3. Que dicha solución está definida, al menos, en un intervalo $[x_0, x_0 + T]$.

Ello no siempre es cierto, como se ve en los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

- La ecuación $(y')^2 + y^2 = 0$ sólo admite la solución $y(x) = 0$, por lo que existe una única solución que pasa por $(x_0, 0)$ y ninguna que pase por (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.
- El problema de valor inicial $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$, no tiene solución única, pues por lo menos $y_1(x) = (x/3)^3$ e $y_2(x) = 0$ son soluciones del problema.
- La solución general de la ecuación $xy' = 2y(y - 1)$ es $y(x) = \frac{1}{1 - Cx^2}$ junto con $y(x) = 0$.

Por cada punto (x_0, y_0) , con $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, pasa una única solución que corresponde al valor $C = \frac{1}{x_0^2} \left(1 - \frac{1}{y_0}\right)$.

$\forall x_0$, por cada punto $(x_0, 0)$, pasa la única solución $y(x) = 0$.

Por el punto $(0, 1)$ pasan infinitas soluciones, todas de la forma $y(x) = \frac{1}{1 - Cx^2}$.

Por los puntos $(0, y_0)$ (con $y_0 \neq 0, 1$) no pasa ninguna solución.

Así pues, ante un problema de valor inicial, el procedimiento a seguir habría de ser:

1. Comprobar que admite una única solución, definida, al menos, en todo el intervalo $[x_0, x_0 + T]$.
2. Si la ecuación no es integrable elementalmente, aproximar el valor de $y(x_0 + T)$ (dada la imposibilidad de calcularlo exactamente) pues, en general, en las aplicaciones basta con disponer de un valor aproximado de $y(x_0 + T)$.

En esta sección se aborda el estudio del primer punto, mientras que el del segundo queda para la sección siguiente.

1.5.2 Teoremas de existencia y unicidad

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de la solución de un problema de valor inicial.

Teorema 1 (de Picard de existencia y unicidad local): *Considérese el problema de valor inicial*

$$y' = f(x, y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.7)$$

y sea el rectángulo $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$ (con $a, b > 0$). Si se verifican las condiciones

1. $f(x, y)$ es una función continua en D .

2. (Condición de Lipschitz)⁴: Para todo par de puntos $(x, y_1), (x, y_2) \in D$, existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Entonces existe una única solución del problema, $y(x)$, definida en un cierto intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (con $0 < \delta \leq a$).

(Dem.) En primer lugar, obsérvese que, en virtud de la primera condición, $f(x, y)$ está acotado en D (por ser D compacto), luego $\exists M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$.

Teniendo ésto en cuenta, la demostración (cuyos detalles se omiten) sigue los siguientes pasos:

1. El problema de valor inicial (1.7) puede formularse en forma de ecuación integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt \quad (1.8)$$

ya que, integrando desde x_0 a x la ecuación (1.7) escrita en la forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$, se obtiene la ecuación

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

y como $y(x_0) = y_0$, de aquí se llega a la ecuación (1.8). Recíprocamente, derivando la ecuación integral se obtiene $y' = f(x, y(x))$ y, por otra parte, dicha ecuación, para $x = x_0$, da $y(x_0) = y_0$.

2. Se define la sucesión funcional $\{y_n(x)\}$ ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), definida como

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t))dt \\ &\vdots \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t))dt \end{aligned}$$

cuyos elementos se denominan *iterantes de Picard*. Se demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n(x)\} = y(x)$, función límite que está definida en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, siendo δ el menor de los números $a, b/M$.

3. Se prueba que $y(x)$ es solución de la ecuación (1.8).

4. Se prueba que esa es la única solución del problema ya que, si $z(x)$ fuera otra solución, llamando $\phi(x) = y(x) - z(x)$, se tendría

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &= |y(x) - z(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))dt \right| \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)|dt = L \int_{x_0}^x \phi(t)dt \end{aligned} \quad (1.9)$$

En este punto es necesario el siguiente resultado:

⁴Toda función que satisfaga esta condición se dice que es *lipschitziana*.

Lema 3 (de Gronwald): *Sea $\phi(x)$ una función continua no negativa tal que satisface*

$$\phi(x) \leq N + M|x - x_0| + L \int_{x_0}^x \phi(t) dt \quad (1.10)$$

con $N, M \geq 0$, $L > 0$. Entonces

$$\phi(x) \leq Ne^{L(x-x_0)} + \frac{M}{L} \left(e^{L(x-x_0)} - 1 \right) \quad (1.11)$$

(Dem.) Sea $x > x_0$ (se razona igual si $x < x_0$). Poniendo $\psi(x) = \int_{x_0}^x \phi(t) dt$, la desigualdad (1.10) se escribe

$$\psi'(x) - L\psi(x) \leq N + M(x - x_0)$$

multiplicandola por $e^{-L(x-x_0)}$ resulta

$$(\psi'(x) - L\psi(x))e^{-L(x-x_0)} = \frac{d}{dt}(\psi(x)e^{-L(x-x_0)}) \leq (N + M(x - x_0))e^{-L(x-x_0)}$$

e integrándola desde x_0 a x , al ser $\psi(x_0) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \psi(x)e^{-L(x-x_0)} &\leq \frac{N}{L}(1 - e^{-L(x-x_0)}) - \frac{M}{L}(x - x_0)e^{-L(x-x_0)} - \frac{M}{L^2}(e^{-L(x-x_0)} - 1) \Leftrightarrow \\ \psi(x) &= \int_{x_0}^x \phi(t) dt \leq \frac{N}{L}(e^{-L(x-x_0)} - 1) - \frac{M}{L}(x - x_0) + \frac{M}{L^2}(e^{-L(x-x_0)} - 1) \end{aligned}$$

de modo que, sustituyendo en la desigualdad (1.10), se llega a la desigualdad (1.11). ■

Y aplicando este lema con $N, M = 0$, de la desigualdad (1.9) se obtiene que $\phi(x) = 0$. ■

Nótese que para probar la unicidad de la solución ha sido esencial la condición de Lipschitz (obsérvese que en el segundo de los ejemplos del apartado anterior no se verifica, como cabe esperar del hecho de que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3y^{1/3}}$ no existe en $y = 0$). Al respecto de esta condición se puede dar el siguiente resultado (que simplifica su evaluación):

Proposición 5 *Sea una función $f(x, y)$ y D una región compacta en su dominio. Si $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es una función continua en D , entonces se satisface la condición de Lipschitz.*

(Dem.) En efecto, si $y_1 < y_2$, se tiene (teorema del valor medio)

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) \quad (y_1 < \xi < y_2)$$

con lo que, tomando valores absolutos, se verifica la condición con $L = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$. ■

El teorema de Picard es insuficiente para resolver el problema planteado (que es calcular $y(x_0 + T)$), ya que sólo asegura la solución en un entorno $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (que puede no contener al punto $x_0 + T$). No obstante, bajo ciertas condiciones, el intervalo de definición de la solución puede ser prolongado del siguiente modo: considérese un punto $(x_1, y(x_1))$, con $x_1 \in I_\delta$. Si las condiciones del teorema vuelven a verificarse en un cierto rectángulo D_1 centrado en ese punto, el teorema garantiza la existencia de una única solución $y_1(x)$ que pasa por ese punto y está definida en un intervalo $I_{\delta_1}(x_1) = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$. Pero como la anterior solución también pasa por el punto $(x_1, y(x_1))$, ambas deben coincidir en $I_\delta \cap I_{\delta_1}$. Si $x_1 + \delta_1 > x_0 + \delta$, la nueva solución permite alargar el intervalo de definición de la solución hasta $x_1 + \delta_1$. Se dice, en estos casos que se ha obtenido una *prolongación* de la solución.

Es adecuado introducir la siguiente nomenclatura:

Definición 9 *Dado un problema de valor inicial, se denomina solución maximal del mismo a una solución cuyo dominio de definición no admite prolongación alguna.*

La cuestión está, pues, en determinar cuál es el máximo intervalo en \mathbb{R} en el que existe una solución maximal. El siguiente resultado da condiciones que garantizan la respuesta.

Teorema 2 (de existencia y unicidad): *Sea el problema de valor inicial (1.7). Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ son funciones continuas en un dominio Ω abierto y conexo, y $(x_0, y_0) \in \Omega$; entonces el problema admite una única solución maximal $y(x)$, que está definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.*

En efecto, si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ son funciones continuas en un dominio Ω abierto y conexo, por cualquier punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ pasa una única solución de la ecuación, pues basta tomar un rectángulo cerrado $D \subset \Omega$ centrado en dicho punto, aplicar el teorema anterior (observar que la condición de Lipschitz se cumple en virtud de la proposición 5, con $L = \left| \max_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$) y utilizar el procedimiento de prolongación anteriormente descrito.

Obsérvese que siempre se tiene que $I \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \Omega\}$. En particular, lo más interesante sería que $I = \mathbb{R}$. Por supuesto, para que se dé este caso es necesario que $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Ejemplo:

- La ecuación $y' = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ no puede tener soluciones definidas fuera del círculo unidad y, con ello, para cualquier solución maximal se tiene que $I \subseteq (-1, 1)$.

No obstante, $\Omega = \mathbb{R}^2$ no es condición suficiente para garantizar que $I = \mathbb{R}$. En efecto:

Ejemplo:

- La ecuación $y' = y^2$ (donde $f(x, y) = y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ son funciones continuas en \mathbb{R}^2), con la condición inicial $y(0) = 1$, tiene por solución $y(x) = \frac{1}{1-x}$ en $(-\infty, 1)$, y, ya que $y(x)$ no está definida en $x = 1$, es imposible prolongarla fuera de ese intervalo.

En este ejemplo, el intervalo de definición de la solución maximal tiene un extremo finito $\alpha = 1$ debido a que $\lim_{x \rightarrow \alpha} |y(x)| = \infty$. El siguiente teorema (que no se demuestra) enuncia que ésa es la única opción posible.

Teorema 3 (de prolongación): *Sea el problema de valor inicial (1.7). Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ son funciones continuas en todo \mathbb{R}^2 y el intervalo de definición de una solución maximal tiene un extremo α , entonces $\lim_{x \rightarrow \alpha} |y(x)| = \infty$.*

Concluyendo, nuestro interés es garantizar que el problema de valor inicial tenga solución definida, al menos, en $[x_0, x_0 + T]$. Bajo las anteriores hipótesis (negando la conclusión de este teorema) se tiene garantizado que ello acurrirá, en particular, si la solución, caso de estar definida, está acotada en dicho intervalo, ya que entonces no puede presentarse la anterior situación.

(Véase un ejemplo de aplicación en: J.L. ANDRÉS YEBRA: *Ecuaciones Diferenciales: Notas y Problemas*, CPET (1995)).

1.5.3 Dependencia continua de las soluciones

En las aplicaciones, los datos del problema de valor inicial son frecuentemente datos experimentales y, por tanto, conocidos con cierta inexactitud. Esto acontece directamente con el valor y_0 , que puede ser el resultado

de alguna medida del estado del sistema para cierto valor x_0 , pero también sucede con la propia función $f(x, y)$ cuando, p. ej., ésta depende de ciertos parámetros que se determinan experimentalmente (p. ej., a, b en la ley logística). Por otra parte, en los métodos numéricos sólo se trabaja con soluciones aproximadas.

Para poder garantizar la validez de los cálculos, se ha de poder conocer $y(x_0 + T)$ con la precisión deseada si se aproximan suficientemente y_0 y $f(x, y)$. En tal caso, se dice que *la solución depende continuamente de los datos*. (Se considera T finito. Si $T \rightarrow \infty$, la propiedad involucrada es la estabilidad del sistema y/o de las soluciones; tema que será tratado posteriormente).

El siguiente resultado muestra que, bajo las hipótesis del teorema de existencia y unicidad, se satisface el anterior requisito.

Teorema 4 (de dependencia continua): *Sea el problema de valor inicial (1.7) con $(x_0, y_0) \in \Omega$, donde Ω es un dominio abierto y conexo, y tal que $f(x, y)$ es continua y lipschitziana (con constante L) en Ω . Para $|x - x_0| \leq T$, sean $y(x)$ la solución exacta y $Y(x)$ una solución aproximada en el siguiente sentido*

$$|Y'(x) - f(x, y(x))| \leq \epsilon \quad , \quad |Y(x_0) - y_0| \leq \epsilon_0$$

(para ϵ, ϵ_0 suficientemente pequeños). Entonces se satisface la desigualdad fundamental

$$|Y(x) - y(x)| \leq \epsilon_0 e^{L|x-x_0|} + \frac{\epsilon}{L} (e^{L|x-x_0|} - 1)$$

o, lo que es lo mismo,

$$|Y(x_0 + T) - y(x_0 + T)| \leq \epsilon_0 e^{LT} + \frac{\epsilon}{L} (e^{LT} - 1) \quad (1.12)$$

(Dem.) Sea $x > x_0$ (se razona igual si $x < x_0$). La solución exacta $y(x)$ satisface la ecuación integral (1.8), mientras que $Y(x)$ satisface

$$-\epsilon \leq Y'(x) - f(x, y(x)) \leq \epsilon$$

de donde integrando se obtiene

$$\begin{aligned} -\int_{x_0}^x \epsilon dt &\leq \int_{x_0}^x (Y'(x) - f(x, y(x))) dt \leq \int_{x_0}^x \epsilon dt \quad \Leftrightarrow \\ -\epsilon(x - x_0) &\leq Y(x) - Y(x_0) - \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dt \leq \epsilon(x - x_0) \end{aligned}$$

por lo que restando la ecuación integral anterior se tiene

$$-\epsilon(x - x_0) \leq Y(x) - y(x) - Y(x_0) + y_0 - \int_{x_0}^x (f(x, Y(x)) - f(x, y(x))) dt \leq \epsilon(x - x_0)$$

es decir,

$$|Y(x) - y(x) - Y(x_0) + y_0 - \int_{x_0}^x (f(x, Y(x)) - f(x, y(x))) dt| \leq \epsilon(x - x_0)$$

o también, utilizando que $|\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|$,

$$\begin{aligned} |Y(x) - y(x)| &- |Y(x_0) - y_0| - \left| \int_{x_0}^x (f(x, Y(x)) - f(x, y(x))) dt \right| \leq \epsilon(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \\ |Y(x) - y(x)| &\leq \epsilon_0 + \epsilon(x - x_0) + \left| \int_{x_0}^x (f(x, Y(x)) - f(x, y(x))) dt \right| \\ &\leq \epsilon_0 + \epsilon(x - x_0) + L \int_{x_0}^x |Y(x) - y(x)| dt \end{aligned}$$

y, usando la desigualdad de Gronwall, se obtiene el resultado deseado, $\forall x$. ■

Comentario:

- Puede observarse que la expresión (1.12) da una acotación a la diferencia entre el valor aproximado de la predicción, $Y(x_0 + T)$, y el valor real, $y(x_0 + T)$, en función de las cotas ϵ, ϵ_0 ; de tal manera que, si estos valores son pequeños y el intervalo en la medida, T , no es muy grande, dicha diferencia tampoco va a ser muy grande.

(Véase un ejemplo de aplicación en: J.L. ANDRÉS YEBRA: *Ecuaciones Diferenciales: Notas y Problemas*, CPET (1995)).

1.6 Métodos numéricos de resolución

1.6.1 Ideas fundamentales

En anteriores secciones se ha visto cómo resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales por métodos analíticos. Desgraciadamente ésto no siempre es posible para todos los tipos de ecuaciones diferenciales que se presentan en la práctica.

En estos casos, al igual que sucede en otras ramas de la Matemática (como es el caso, p, ej., del cálculo de integrales definidas mediante el *método de Simpson*), hay ciertos métodos numéricos que permiten calcular, con el grado de exactitud que se desee, la solución numérica de todas las ecuaciones diferenciales de primer orden con una condición inicial dada. Dichos métodos se pueden aplicar independientemente de que la ecuación sea o no integrable analíticamente, en términos de funciones elementales conocidas.

Los métodos numéricos más usados son el *método de Euler*, el *método de Euler modificado* y el *método de Runge-Kutta*.

1.6.2 Método de Euler

(Se explica en las sesiones de **Laboratorio**. Véase, por tanto, el guión de *Prácticas*).)

1.6.3 Método de Euler modificado

(Se explica en las sesiones de **Laboratorio**. Véase, por tanto, el guión de *Prácticas*).)

1.6.4 Método de Runge-Kutta

(Se explica en las sesiones de **Laboratorio**. Véase, por tanto, el guión de *Prácticas*).)

Chapter 2

Ecuaciones Diferenciales (Lineales) de Orden Superior

2.1 Introducción

Si en el capítulo anterior se ha comenzado el estudio de las ecuaciones diferenciales con el análisis de las de primer orden, en éste se van a tratar las *ecuaciones diferenciales de orden superior*.

Comenzaremos dando las nociones fundamentales sobre las ecuaciones diferenciales de orden superior (en particular, las *lineales*), tales como definiciones básicas, teoremas de existencia y unicidad, etc. A continuación se estudiarán las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales (homogéneas y completas), incluyendo la exposición del método de *variación de constantes* para encontrar soluciones particulares de la ecuación completa. Después se considerará el problema de obtener la solución general de las *ecuaciones lineales con coeficientes constantes*, para lo cual se analizarán, primero, las de tipo homogéneo (estudiándose los diversos casos posibles) y, después, el caso general (incluyendo el *método del anulador* para hallar una solución particular). Tras presentar brevemente algún caso de especial interés (*ecuación de Euler*), se concluirá, finalmente, comentando las principales aplicaciones de las *ecuaciones diferenciales de segundo orden* en Física.

Igual que en el capítulo anterior, siempre que no se haga alguna precisión más concreta, se asumirá que todas las funciones son diferenciables con continuidad hasta el orden que se deseé.

2.2 Nociones fundamentales. Ecuaciones lineales de orden superior

2.2.1 Ecuaciones diferenciales de orden n

Definición 10 Una ecuación diferencial de orden n es toda ecuación que, expresada en forma implícita, es del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

o bien, expresada en forma explícita,

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

La solución general de estas ecuaciones es una familia de curvas cuya expresión analítica depende de n constantes arbitrarias; escribiéndose $y = y(x; C_1, \dots, C_n)$ en forma explícita, o $f(x, y; C_1, \dots, C_n) = 0$ en forma implícita. Dichas constantes se determinan una vez dado un conjunto de *condiciones iniciales*

$$x_0 , \quad y(x_0) = y_0 , \quad y'(x_0) = y'_0 , \quad \dots , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

o bien el correspondiente problema de contorno.

El primer resultado fundamental es el que relaciona las ecuaciones diferenciales de orden superior con los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

Proposición 6 *Toda ecuación diferencial de orden n (expresada en forma normal)*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

es equivalente a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y_1(x) \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2(x) \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1}(x) \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= f(x, y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $y(x), y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)$ son funciones desconocidas.

(Dem.) Inmediata. ■

De este modo, resolver la ecuación diferencial de orden n equivale a resolver el sistema anterior, esto es, a buscar las n funciones $y(x), y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)$. Cada una de ellas contendrá una constante arbitraria y el total de éstas se determinará a partir de las condiciones iniciales, que ahora se escribirán

$$x_0, \quad y(x_0) = y_0^0, \quad y_1(x_0) = y_1^0, \quad \dots, \quad y_{n-1}(x_0) = y_{n-1}^0$$

La cuestión que se plantea ahora es la de la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de orden superior en general. En virtud de la proposición precedente ello es equivalente a estudiar la existencia y unicidad de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden¹.

Teorema 5 (de existencia y unicidad local para sistemas de 1^{er} orden): *Considérese el sistema de ecuaciones de primer orden*

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales

$$x_0, \quad y_1(x_0) = y_1^0, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_n^0$$

y sea el rectángulo

$$D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_1^0 - b_1, y_1^0 + b_1] \times \dots \times [y_n^0 - b_n, y_n^0 + b_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

(con $a, b_1, \dots, b_n > 0$). Si se verifican las condiciones

1. $f_i(x; y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, \dots, n$) son funciones continuas en D .

¹Aunque los sistemas de ecuaciones serán objeto de estudio en el próximo capítulo, adelantamos este resultado por razones obvias.

2. Cada una de estas funciones satisface la condición de Lipschitz; es decir, para todo par de puntos $(x, y_1^0, \dots, y_n^0), (x, y_1^1, \dots, y_n^1) \in D$ y $\forall i$ existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f_i(x, y_1^1, \dots, y_n^1) - f_i(x, y_1^0, \dots, y_n^0)| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j^1 - y_j^0|$$

Entonces existe una única solución del problema, $y_1(x), \dots, y_n(x)$, definida en un cierto intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (con $0 < \delta \leq a$).

(Dem.) Sigue los mismos pasos que la del teorema de Picard:

1. f_i están acotadas en D (por ser D compacto), luego $\exists M_i > 0$ tales que $|f_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M_i, \forall i$.
2. Se construyen las n sucesiones funcionales $\{y_i^n(x)\}$ (con $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $i = 1, \dots, n$), definidas como

$$\begin{aligned} y_i^0(x) &= y_i^0 \\ y_i^1(x) &= y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(t, y_1^0(t), \dots, y_n^0(t)) dt \\ &\vdots \\ y_i^{n+1}(x) &= y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(t, y_1^n(t), \dots, y_n^n(t)) dt \end{aligned}$$

Se demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_i^n(x)\} = y_i(x)$, funciones límite que están definidas en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (δ depende de todas las constantes involucradas en el teorema).

3. Se prueba que $y_i(x)$ constituyen la solución del sistema.
4. Se prueba que esa es la única solución del problema (usando la condición de Lipschitz).

■

Comentarios:

- Análogamente al resultado para funciones de dos variables, se tiene ahora el siguiente:
Sea una función $f(x, y_1, \dots, y_n)$ y $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una región compacta en su dominio. Si, $\forall i$ ($i = 1, \dots, n$), $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ existen y son funciones continuas en D , entonces f satisface la condición de Lipschitz.
- En el caso de las $n - 1$ primeras ecuaciones del sistema (2.1), los segundos miembros, $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, son funciones continuas que tienen derivadas parciales continuas en D ; por consiguiente para que se verifiquen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad en este caso, basta con que las cumplan la función f del segundo miembro de la última ecuación.
- Los resultados sobre prolongación de soluciones y de existencia y unicidad de solución maximal se establecen de manera análoga a como se estudió en el capítulo anterior para las ecuaciones de primer orden.
- También se pueden extender estos resultados a ecuaciones diferenciales de variable compleja y la función f analítica.

2.2.2 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Dentro del conjunto de las ecuaciones diferenciales de orden superior, prestaremos especial atención a las lineales.

Definición 11 Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación de orden n que es una expresión lineal de la función y sus derivadas²; por tanto, tiene la forma

$$f_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_0(x)y + f(x) = 0$$

Se denomina ecuación lineal homogénea de orden n (asociada o no a una ecuación lineal completa) a toda ecuación lineal en la que $f(x) = 0$; esto es,

$$f_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_0(x)y = 0$$

Si $f_n(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, entonces la ecuación se puede expresar en forma normal

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \dots - \frac{f_1(x)}{f_n(x)} \frac{dy}{dx} - \frac{f_0(x)}{f_n(x)} y - \frac{f(x)}{f_n(x)} = 0$$

que habitualmente escribiremos

$$\frac{d^n y}{dx^n} + F_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + F_1(x) \frac{dy}{dx} + F_0(x)y = F(x) \quad (2.2)$$

Los puntos en los que $f_n(x) = 0$ se denominan puntos singulares de la ecuación lineal.

Al igual que ya se hizo con la ecuación lineal de primer orden, se puede traducir la ecuación lineal al lenguaje de operadores. Así, si se considera el espacio de las funciones en \mathbb{R} infinitamente derivables, $C^\infty(\mathbb{R})$, se puede definir el operador de derivación

$$\begin{array}{rccc} D & : & C^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}) \\ & & y & \mapsto & y' \end{array}$$

y se puede escribir $y = D^0(y) \equiv I(y)$, $y' = D^1(y)$, $y'' = D^2(y)$, \dots , $y^{(n)} = D^n(y)$. A partir de aquí, se introduce el operador

$$L := D^n + F_{n-1}D^{n-1} + \dots + F_0I$$

del cual puede probarse con facilidad que es lineal, y que permite escribir la ecuación (2.2) como

$$L(y) = F(x)$$

(con lo que el nombre dado queda justificado).

Se plantea ahora la cuestión de la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Aún cuando sigue vigente el teorema 5, en este caso concreto se puede precisar algo más.

Teorema 6 (de existencia y unicidad para ecuaciones lineales): *Considérese la ecuación (2.2) con la condición inicial*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

y tal que las funciones $F(x), F_0(x), \dots, F_{n-1}(x)$ son continuas en un cierto intervalo $I = (x_0 - a, x_0 + a)$ (con $0 < a$). Entonces existe una única solución $y = y(x)$ definida en el intervalo I , que es derivable con continuidad hasta el orden n .

(Dem.) Expresando la ecuación lineal en forma normal

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -F_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \dots - F_1(x) \frac{dy}{dx} - F_0(x)y + F(x) \equiv G(x, y, y', \dots, y^{n-1})$$

²Obsérvese que los coeficientes funcionales son funciones de x únicamente.

dado que las funciones $F_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) son continuas por hipótesis, también lo son G y $\frac{\partial G}{\partial y^{(i)}} = F_i$, por lo que son aplicables los teoremas generales de existencia y unicidad, concluyéndose, pues, que el problema de valor inicial dado tiene una única solución maximal $y(t)$ definida en un cierto intervalo abierto. Ahora se trata de comprobar que dicho intervalo es I .

Por simplicidad, se hará la demostración para el caso de la ecuación lineal de primer orden. Se comienza comprobando que, dado $T > 0$, la solución está definida para todo $x \in [x_0, x_0 + T]$. En efecto, a partir de la expresión (1.8), que en este caso es

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x (-g(t)y(t) + f(t))dt$$

se obtiene

$$|y(x)| \leq |y_0| + \int_{x_0}^x |g(t)||y(t)|dt + \int_{x_0}^x |f(t)|dt$$

por lo que, llamando $\phi(x) = |y(x)|$ y con $L = \max_I |g(x)|$, $M = \max_I |f(x)|$, se tiene

$$\phi(x) \leq |y_0| + L \int_{x_0}^x \phi(t)dt + M(x - x_0)$$

y utilizando el lema de Gronwall,

$$\phi(x) = |y(x)| \leq |y_0|e^{L(x-x_0)} + \frac{M}{L} \left(e^{L(x-x_0)} - 1 \right) = |y_0|e^{LT} + \frac{M}{L} (e^{LT} - 1)$$

acotación que prueba que la solución maximal está definida en el intervalo $[x_0, x_0 + T]$ y como esto vale para cualquier T , se ha demostrado que $y(x)$ está definida para todo $x \geq x_0$ en I . De igual manera se probaría que lo está también para todo $x \leq x_0$ en I , luego se concluye que existe solución maximal en I y, en particular, en todo \mathbb{R} , si $I = \mathbb{R}$. ■

Comentario:

- Es importante resaltar que, si los coeficientes funcionales son continuos en todo \mathbb{R} , entonces la existencia de la solución está garantizada también en todo \mathbb{R} .

Sobre la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior se tiene el mismo resultado que para las de primer orden:

Proposición 7 *El conjunto de soluciones de la ecuación (2.2) está dado por $y_P + y_H$, donde y_P es una solución particular cualquiera de la ecuación completa e y_H es la solución general de la ecuación homogénea asociada.*

(Dem.) Análoga a la de la proposición 2. ■

2.3 Estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n

2.3.1 Dependencia e independencia lineal de funciones. Wronskiano

Antes de tratar el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, es preciso introducir algunos conceptos y resultados sobre dependencia e independencia lineal de funciones.

Definición 12 *Dado un conjunto de funciones $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ definidas en el mismo dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, estas funciones son linealmente independientes en D si se cumple que, $\forall x \in D$,*

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Enunciaremos, a continuación, algunas condiciones suficientes para garantizar la independencia lineal de funciones.

Dado el conjunto de funciones $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ en D , se observa, en primer lugar que, si se verifica que, $\forall x \in D$,

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

para algunos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, entonces también se cumplen las siguientes relaciones, $\forall x \in D$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) &= 0 \\ \alpha_1 y'_1(x) + \dots + \alpha_n y'_n(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definición 13 Sea un conjunto de funciones $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ definidas en el mismo dominio $D \subseteq \mathbb{R}$. La matriz asociada al sistema (2.3)

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

se denomina matriz wronskiana del conjunto y su determinante en cada punto $x \in D$, que denotaremos por $W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x))$, recibe el nombre de wronskiano.

Con esta nomenclatura el primero de los resultados anunciados, que se obtiene como consecuencia directa de lo expuesto, es el siguiente:

Proposición 8 Sea el conjunto de funciones $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ en D . Si $W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0$ para algún $x \in D$, entonces las funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente independientes en D .

Equivalentemente, si $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente dependientes en D entonces $W(y_1(x), \dots, y_n(x)) = 0$, para todo $x \in D$.

(Dem.) En efecto, si $W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0$ para algún $x \in D$, entonces la única solución posible del sistema (2.3) en ese punto es que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ y, por tanto, en cualquier otro punto de D se tendrá que $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ con $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, luego las funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente independientes en D . ■

El recíproco de este enunciado no es cierto, en general (véase el ejemplo en el próximo comentario), a menos que se imponga alguna hipótesis adicional, tal como enuncia el siguiente resultado que relaciona el concepto de independencia lineal con las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

Teorema 7 Sea el conjunto de funciones $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente independientes en I y además son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea $L(y) = 0$, cuyos coeficientes $F_i(x)$ son funciones continuas, entonces $W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0$, $\forall x \in I$,

(Dem.) Supóngase que $W(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) = 0$ para algún $x_0 \in I$. Entonces, se pueden elegir las constantes α_i de manera que se satisfaga el sistema de ecuaciones (2.3) y tales que no todas ellas sean nulas (ya que al ser el determinante del sistema nulo en algún punto, existen soluciones no triviales del mismo). Para tales valores de las constantes, la combinación lineal

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$$

es solución de la ecuación lineal homogénea dada (véase el teorema 8) y, en virtud de las ecuaciones (2.3), satisface además las condiciones iniciales

$$y(x_0) = 0 , \quad y'(x_0) = 0 , \dots , \quad y^{n-1}(x_0) = 0$$

Pero también estas condiciones iniciales son satisfechas por la solución trivial $y(x) = 0$, luego, en virtud del teorema de existencia y unicidad, ésta es la única solución posible y, por tanto

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

por lo que $y_1(x), \dots, y_n(x)$ han de ser linealmente dependientes, en contra de la hipótesis. ■

Comentario:

- Si las funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ linealmente independientes no son soluciones de una ecuación lineal homogénea, pueden tener el wronskiano nulo, no sólo en algunos puntos, sino idénticamente en todo I .

Ejemplo: En $I = [0, 2]$ considérense las funciones

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}; \quad y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Evidentemente $W(y_1(x), y_2(x)) = 0, \forall x \in I$. Sin embargo, se trata de dos funciones linealmente independientes, ya que la igualdad $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$, considerada en el segmento $0 \leq x < 1$, da como solución $\alpha_1 = 0$; mientras que considerada en el segmento $1 < x \leq 2$, da como solución $\alpha_2 = 0$; por consiguiente $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2.3.2 Solución de la ecuación lineal homogénea

Una vez aclarados los puntos precedentes, se puede iniciar ya el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n .

En primer lugar se tiene:

Teorema 8 (Principio de superposición): *Si $y_1(x), \dots, y_m(x)$ son soluciones (particulares) de la ecuación lineal homogénea $L(y) = 0$ en un dominio $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces cualquier combinación lineal de ellas, $y(x) = \sum_{i=1}^m c_i y_i(x)$, es también solución de dicha ecuación.*

(Dem.) Es una consecuencia trivial de la linealidad del operador L . ■

Teniendo ésto en cuenta, el siguiente paso es:

Teorema 9 *Sea $L(y) = 0$ una ecuación lineal homogénea de orden n cuyos coeficientes $F_0(x), \dots, F_{n-1}(x)$ son funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, el conjunto de soluciones de dicha ecuación (esto es, $\ker L$) es un espacio vectorial de dimensión n .*

(Dem.) Evidentemente el núcleo de un operador lineal es un espacio vectorial. Hay que comprobar que su dimensión es n .

Sea $x_0 \in I$. Considérense los siguientes problemas de valores iniciales

$$\begin{aligned} L(y(x)) &= 0 & y(x_0) &= 1, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ L(y(x)) &= 0 & y(x_0) &= 0, y'(x_0) = 1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ L(y(x)) &= 0 & y(x_0) &= 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{aligned}$$

como se satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, existe solución única para cada uno de ellos. Sean $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^\infty(I)$ las soluciones respectivas, las cuales satisfacen obviamente que $W(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) = 1 \neq 0$, luego son linealmente independientes en I y, por tanto $\dim \ker L \geq n$.

Probemos, seguidamente, que $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ es una base de $\ker L$. Sea $y \in \ker L$; esto es, tal que $L(y) = 0$, y supóngase que $y(x_0) = \lambda_1, y'(x_0) = \lambda_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \lambda_n$. La función $y(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(x)$ también es solución de $L(y) = 0$ y satisface las condiciones iniciales dadas, luego por el teorema de existencia y unicidad, es la solución $\forall x \in I$. Así pues, $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ es base de $\ker L$ y, por consiguiente, $\dim \ker L = n$. ■

De este modo, hallar la solución general de una ecuación lineal homogénea con coeficientes continuos pasa por encontrar n soluciones particulares linealmente independientes. Ello da origen a la siguiente definición:

Definición 14 Se denomina sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n (cuyos coeficientes sean funciones continuas en un intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$) a cualquier conjunto de n soluciones particulares linealmente independientes.

El conocimiento de un conjunto de n soluciones linealmente independientes define de manera unívoca la ecuación diferencial lineal homogénea de la cual ese conjunto es un sistema fundamental de soluciones, ya que:

Teorema 10 Sean dos ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes continuos en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L_1(y) &\equiv \frac{d^n y}{dx^n} + F_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + F_1(x) \frac{dy}{dx} + F_0(x)y = 0 \\ L_2(y) &\equiv \frac{d^n y}{dx^n} + G_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + G_1(x) \frac{dy}{dx} + G_0(x)y = 0 \end{aligned}$$

tales que tienen un mismo sistema fundamental de soluciones $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$. Entonces $F_i(x) = G_i(x)$, $\forall x \in I$ (ambas ecuaciones son iguales).

(Dem.) En efecto, si $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son soluciones de ambas ecuaciones también lo son de su diferencia

$$0 = L_1(y) - L_2(y) = (F_{n-1}(x) - G_{n-1}(x)) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + (F_1(x) - G_1(x)) \frac{dy}{dx} + (F_0(x) - G_0(x))y$$

y si $F_{n-1}(x) \neq G_{n-1}(x)$ se tendría una ecuación lineal homogénea de orden $n-1$ con n soluciones linealmente independientes, en contradicción con el teorema anterior, luego $F_{n-1}(x) = G_{n-1}(x)$. Iterando el razonamiento se llega al mismo resultado para el resto de coeficientes. ■

El procedimiento para hallar la ecuación lineal homogénea definida por un sistema fundamental de soluciones es como sigue:

Sea $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ un conjunto que es sistema fundamental de soluciones de una ecuación homogénea $L(y) = 0$ en $I = [a, b]$ (por tanto son funciones derivables con continuidad hasta el orden que haga falta). Necesariamente (teorema 7) $W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0$, $\forall x \in I$. Sea $y(x)$ otra solución cualquiera de la ecuación, entonces $y_1(x), \dots, y_n(x), y(x)$ son linealmente dependientes en I y, por tanto, $\forall x \in I$,

$$W(y_1(x), \dots, y_n(x), y(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) & y'(x) \\ \vdots & & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

(obsérvese que la última columna es una combinación lineal de las anteriores). Desarrollando el determinante por la última columna se obtiene, por tanto, una ecuación diferencial lineal homogénea

$$f_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_0(x)y = 0$$

donde $f_n(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0, \forall x \in I$, y el resto de los coeficientes son los determinantes de las submatrices de orden n que aparecen en el desarrollo del determinante. Por tanto, dividiendo por $f_n(x)$ queda

$$\frac{d^n y}{dx^n} + F_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + F_1(x) \frac{dy}{dx} + F_0(x)y = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes $F_i(x)$ continuos, ya que son productos y sumas de las funciones $y_i(x)$.

A partir de aquí se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 9 *Sea $\{y_p(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ un conjunto de funciones tales que:*

1. $y_p(x)$ es una solución particular de una ecuación lineal con coeficientes continuos, $L(y) = F(x)$ en $I = [a, b]$.
2. $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ en $I = [a, b]$.

Entonces dicho conjunto de funciones determina únicamente la ecuación lineal completa $L(y) = F(x)$

(Dem.) En efecto, el conjunto $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ determina, de manera única, la ecuación homogénea según el procedimiento descrito; esto es, el operador $L(y)$. Entonces $F(x)$ se determina haciendo $L(y_p) = F(x)$. ■

(Véase un ejemplo de aplicación en la colección de problemas).

Comentario:

- En las condiciones de aplicación de los anteriores teoremas, el conocimiento de una solución particular de la ecuación homogénea permite reducir el orden del problema en una unidad. Éste procedimiento se conoce con el nombre de *método de D'Alembert*, y se va a ilustrar con la ecuación lineal homogénea de 2º orden

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

Si $y_p(x)$ es una solución particular, haciendo el cambio de variable $y = zy_p$ se tiene que $y' = zy'_p + z'y_p$ y $y'' = zy''_p + 2z'y'_p + z''y_p$, luego sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = zy''_p + 2z'y'_p + z''y_p + f_1zy'_p + f_1z'y_p + f_0zy_p \\ &= z(y''_p + f_1y'_p + f_0y_p) + 2z'y'_p + z''y_p + f_1z'y_p = z''y_p + z'(2y'_p + f_1y_p) \end{aligned}$$

y esta es una ecuación lineal homogénea de primer orden para la función $u = z'$.

2.3.3 Solución de la ecuación lineal completa: método de variación de constantes

Analicemos, ahora, el problema de hallar la solución de la ecuación lineal completa. El método que vamos a presentar consiste en obtener dicha solución a partir de n soluciones linealmente independientes conocidas de la ecuación lineal homogénea asociada.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, si se tiene una ecuación lineal de orden n (con coeficientes continuos), $L(y) = F(x)$, y un sistema fundamental de soluciones $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$, de la ecuación lineal homogénea asociada $L(y) = 0$, la solución general de esta última ecuación es una combinación lineal $y_H(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$, por lo que para tener la solución general de la ecuación lineal completa basta con obtener una solución particular de la misma (proposición 7). Entonces:

Proposición 10 Sea una ecuación lineal de orden n (con coeficientes continuos), $L(y) = F(x)$, y sea $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada $L(y) = 0$. Entonces, una solución particular de la ecuación lineal completa es la combinación lineal (con coeficientes funcionales)

$$y_P(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i(x)$$

donde las funciones $C_i(x)$ son la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ F(x) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

(Dem.) La demostración se basa en la aplicación del método de variación de constantes o de Lagrange. El método consiste en suponer que una solución particular es $y_P(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i(x)$; expresión que, poniendo $\mathbf{C}(x) = (C_1(x), \dots, C_n(x))$ e $\mathbf{Y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$, se puede escribir en forma compacta como

$$y_P(x) = \langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}(x) \rangle \quad (2.5)$$

teniéndose que

$$L(\mathbf{Y}(x)) \equiv L(y_1(x), \dots, y_n(x)) = (0, \dots, 0) \equiv \mathbf{0}$$

Derivando la expresión (2.5) se obtiene

$$y'_P(x) = \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}(x) \rangle + \langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}'(x) \rangle$$

y, dado que buscamos una solución particular, se pueden, en principio, elegir las funciones $\{C_i(x)\}$ de manera que $\langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}(x) \rangle = 0$. A partir de aquí, derivando sucesivamente y tomando en cada paso $\langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}^{(i-1)}(x) \rangle = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}(x) \rangle + \langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}'(x) \rangle \quad \text{con } \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}(x) \rangle = 0 \\ y''_P(x) &= \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}'(x) \rangle + \langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}''(x) \rangle \quad \text{con } \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}'(x) \rangle = 0 \\ &\vdots \\ y_P^{(n)}(x) &= \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}^{(n-1)}(x) \rangle + \langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}^{(n)}(x) \rangle \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación diferencial lineal resulta

$$\begin{aligned} L(y_P(x)) &\equiv \frac{d^n y_P}{dx^n} + F_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y_P}{dx^{n-1}} + \dots + F_1(x) \frac{dy_P}{dx} + F_0(x)y_P \\ &= \langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}^{(n)}(x) \rangle + \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}^{(n-1)}(x) \rangle + F_{n-1}(x)\langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}^{(n-1)}(x) \rangle + \\ &\quad \dots + F_1(x)\langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}'(x) \rangle + F_0(x)\langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}(x) \rangle \\ &= \langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}^{(n)}(x) \rangle + F_{n-1}(x)\langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}^{(n-1)}(x) \rangle + \dots + F_0(x)\langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}(x) \rangle + \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}^{(n-1)}(x) \rangle \\ &= \langle \mathbf{C}(x), \mathbf{Y}^{(n-1)}(x) \rangle = F(x) \end{aligned}$$

luego para que $y_P(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i(x)$ sea solución de la ecuación lineal completa es suficiente con que se satisfagan las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}(x) \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}'(x) \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}^{(n-1)}(x) \rangle &= F(x) \end{aligned}$$

Así pues, el vector $\mathbf{C}(x)$ está completamente determinado como solución del sistema (2.4)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}(x) \rangle &\equiv C'_1(x)y_1(x) + \dots + C'_n(x)y_n(x) = 0 \\ &\vdots \\ \langle \mathbf{C}'(x), \mathbf{Y}^{(n-1)}(x) \rangle &\equiv C'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = F(x) \end{aligned}$$

(que es compatible y determinado, ya que $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y, por tanto, $W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0, \forall x \in I$, luego existe solución $\mathbf{C}'(x)$ y de aquí $\mathbf{C}(x)$). ■

(Véase un ejemplo de aplicación en la colección de problemas).

Llegados a este punto está claro que lo único que queda por hacer para tener la solución general de una ecuación lineal de orden n es conocer un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada. Obtener tal sistema no es, en general, un problema elemental, salvo cuando los coeficientes son constantes, tal como vamos a ver en la siguiente sección.

Para finalizar, es conveniente señalar que también para las ecuaciones lineales completas se puede establecer un *principio de superposición* de soluciones, en el siguiente sentido:

Proposición 11 Sean $L(y) = F_1(x), \dots, L(y) = F_n(x)$ ecuaciones diferenciales lineales. Si $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son soluciones respectivas de ellas, entonces $y_1(x) + \dots + y_n(x)$ es solución de la ecuación lineal $L(y) = F_1(x) + \dots + F_n(x)$

(Dem.) Trivial. ■

2.4 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

2.4.1 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Comenzaremos el estudio de las *ecuaciones diferenciales lineales (de orden n) con coeficientes constantes* con el caso de las ecuaciones homogéneas. Se trata, pues, de resolver la ecuación del tipo

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

con $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. En forma abreviada, y como ya es costumbre, escribiremos $L(y) = 0$, donde en este caso el operador lineal L es

$$L := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0I$$

Entonces se define:

Definición 15 La ecuación

$$p(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

se denomina ecuación característica y el polinomio $p(x)$ es el polinomio característico de la ecuación diferencial lineal homogénea dada.

Y para hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal se utiliza el siguiente teorema de Álgebra lineal:

Teorema 11 (de la 1^a descomposición): Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K y $\mathcal{F}: E \rightarrow E$ un endomorfismo. Sea $p(x) \in K(X)$ un polinomio y $p(x) = p_1(x) \dots p_r(x)$ una descomposición tal que m.c.d. $(p_i(x), p_j(x)) = 1, \forall i, j$. Entonces

$$\text{Ker } p(\mathcal{F}) := \text{Ker } p_1(\mathcal{F}) \oplus \dots \oplus \text{Ker } p_r(\mathcal{F})$$

donde los subespacios $\text{Ker } p_i(\mathcal{F})$ son invariantes por \mathcal{F} .

En el caso que nos ocupa $E = C^\infty(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = D$ y $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ es un polinomio que anula D en $\text{Ker } L$; es decir, $p(D)(y) = 0$, $\forall y \in \text{Ker } L$; o lo que es lo mismo, $p(D)(y) = L(y)$. Entonces hay que distinguir los siguientes casos:

$p(x)$ tiene n raíces reales simples

En este caso resulta:

Proposición 12 *Si la ecuación característica de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene n raíces reales distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$$

es un sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación y, por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}$$

(Dem.) En primer lugar se tiene la descomposición

$$p(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$$

luego, aplicando el teorema de la 1^a descomposición,

$$\text{Ker } L = \text{Ker } p(D) = \text{Ker } (D - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker } (D - \lambda_n I)$$

y ahora hay que calcular $\text{Ker } (D - \lambda_i I)$; esto es, hallar $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que solucione la ecuación

$$(D - \lambda_i I)y = y' - \lambda_i y = 0$$

que es de variables separadas y tiene como solución

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_i x} \Leftrightarrow \text{Ker } (D - \lambda_i I) = \{e^{\lambda_i x}\}$$

Por consiguiente

$$\text{Ker } L = \text{Ker } p(D) = \{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$$

luego ese conjunto es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y la proposición queda probada.

(Obsérvese que, efectivamente, se trata de un conjunto de funciones linealmente independientes, ya que, como puede comprobarse fácilmente, $W(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) \neq 0$. P. ej., el wronskiano en $x = 0$ es

$$W(0) = ((\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}))((\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1})) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \neq 0$$

y recibe el nombre de determinante de Vandermonde). ■

$p(x)$ tiene raíces reales múltiples

En este caso se tiene:

Proposición 13 *Si la ecuación característica de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene m raíces reales $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ($1 \leq m < n$) con multiplicidades μ_1, \dots, μ_m respectivamente ($\mu_1 + \dots + \mu_m = n$); entonces*

$$\{e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{\mu_1 - 1} e^{\lambda_1 x}; \dots; e^{\lambda_m x}, x e^{\lambda_m x}, \dots, x^{\mu_m - 1} e^{\lambda_m x}\}$$

es un sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación y, por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = \sum_{i=1}^m (c_i^1 e^{\lambda_i x} + c_i^2 x e^{\lambda_i x} + \dots + c_i^{\mu_i - 1} x^{\mu_i - 1} e^{\lambda_i x})$$

(Dem.) Se procede como en el caso anterior. En primer lugar se tiene la descomposición

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (x - \lambda_m)^{\mu_m}$$

luego, aplicando el teorema de la 1^a descomposición,

$$\text{Ker } L = \text{Ker } p(D) = \text{Ker } (D - \lambda_1 I)^{\mu_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker } (D - \lambda_m I)^{\mu_m}$$

y ahora hay que calcular $\text{Ker } (D - \lambda_i I)^{\mu_i}$; esto es, como $\dim(\text{Ker } (D - \lambda_i I)^{\mu_i}) = \mu_i$, se trata de hallar μ_i funciones $y_j(x) \in \text{Ker } (D - \lambda_i I)^{\mu_i}$ linealmente independientes. Unos simples (aunque largos y tediosos) ejercicios de cálculo permiten comprobar que las funciones

$$y_{1_i}(x) = e^{\lambda_i x}, \quad y_{2_i}(x) = x e^{\lambda_i x}, \quad \dots, \quad y_{\mu_i}(x) = x^{\mu_i-1} e^{\lambda_i x}$$

1. Son elementos de $\text{Ker } (D - \lambda_i I)^{\mu_i}$.
2. Son linealmente independientes (ya que $W(y_{1_i}(x), \dots, y_{\mu_i}(x)) \neq 0$); luego forman una base de $\text{Ker } (D - \lambda_i I)^{\mu_i}$.

Con lo cual queda probada la proposición. ■

$p(x)$ tiene n raíces complejas simples

En primer lugar debe observarse que, puesto que la ecuación característica es de coeficientes reales, si tiene una raíz compleja $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), también lo es su conjugada $\bar{\lambda} = a - bi$. Entonces:

Proposición 14 *Si la ecuación característica de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene alguna raíz compleja $\lambda_j = a_j + b_j i \in \mathbb{C}$, también tiene su conjugada $\bar{\lambda}_j = a_j - b_j i \in \mathbb{C}$ (con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$); entonces*

$$\text{Ker } (D - \lambda_j I) \oplus \text{Ker } (D - \bar{\lambda}_j I) = \{e^{a_j x} \cos b_j x, e^{a_j x} \sin b_j x\}$$

(Dem.) Es igual que en los casos anteriores. En primer lugar se tiene la descomposición

$$p(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_j)(x - \bar{\lambda}_j) \dots (x - \lambda_m)$$

luego, aplicando el teorema de la 1^a descomposición,

$$\text{Ker } L = \text{Ker } p(D) = \text{Ker } (D - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker } (D - \lambda_j I) \oplus \text{Ker } (D - \bar{\lambda}_j I) \oplus \dots \oplus \text{Ker } (D - \lambda_m I)$$

Procediendo como en el caso de las raíces reales simples se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{Ker } (D - \lambda_j I) &= \{e^{\lambda_j x}\} = \{e^{(a_j + b_j i)x}\} = \{e^{a_j x} (\cos b_j x + i \sin b_j x)\} \\ \text{Ker } (D - \bar{\lambda}_j I) &= \{e^{\bar{\lambda}_j x}\} = \{e^{(a_j - b_j i)x}\} = \{e^{a_j x} (\cos b_j x - i \sin b_j x)\} \end{aligned}$$

Ahora se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Ker } (D - \lambda_j I) \oplus \text{Ker } (D - \bar{\lambda}_j I) &= K_1 e^{a_j x} (\cos b_j x + i \sin b_j x) + K_2 e^{a_j x} (\cos b_j x - i \sin b_j x) \\ &= (K_1 + K_2) e^{a_j x} \cos b_j x + i(K_1 - K_2) e^{a_j x} \sin b_j x \end{aligned}$$

donde $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$ son constantes arbitrarias. Así pues

$$\text{Ker } (D - \lambda_j I) \oplus \text{Ker } (D - \bar{\lambda}_j I) = \{e^{a_j x} \cos b_j x, e^{a_j x} \sin b_j x\}$$

Finalmente queda por comprobar que las funciones halladas son linealmente independientes, para lo cual basta con comprobar que $W(e^{a_j x} \cos b_j x, e^{a_j x} \sin b_j x) \neq 0$, para algún x . ■

$p(x)$ tiene raíces complejas múltiples

Nótese, primero, que una raíz compleja y su conjugada tienen la misma multiplicidad. Entonces:

Proposición 15 *Si la ecuación característica de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene alguna raíz compleja $\lambda_j = a_j + b_j i \in \mathbb{C}$ y su conjugada $\bar{\lambda}_j = a_j - b_j i \in \mathbb{C}$ (con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$), ambas con multiplicidad μ ; entonces*

$$\begin{aligned} \text{Ker } (D - \lambda_j I)^\mu \oplus \text{Ker } (D - \bar{\lambda}_j I)^\mu &= \{e^{a_1 x} \cos b_1 x, e^{a_1 x} \sin b_1 x, \dots, e^{a_{\mu-1} x} \cos b_{\mu-1} x, \\ &\quad e^{a_{\mu-1} x} \sin b_{\mu-1} x, \dots, e^{a_1 x} \cos b_1 x, e^{a_1 x} \sin b_1 x\} \end{aligned}$$

(Dem.) Es igual que en el caso de raíces reales múltiples. ■

2.4.2 Ecuaciones lineales completas con coeficientes constantes. Método del anulador

Pasemos a analizar el caso general de la ecuación lineal completa con coeficientes constantes

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = F(x)$$

con $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (y $F(x)$ continua). En forma abreviada, $L(y) = F(x)$.

Tal como ya se vio en la sección anterior, a partir de un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada y aplicando el método de variación de constantes, se puede encontrar una solución particular de esta ecuación, con lo que se tendría su solución general.

Sin embargo, cuando el término independiente $F(x)$ tiene la propiedad de que se anula bajo la acción de algún operador con coeficientes constantes, hay un método alternativo al de variación de constantes que permite obtener una solución particular de la ecuación lineal completa. Este procedimiento recibe el nombre de *método del anulador* o también de *la conjectura prudente*.

Proposición 16 *Sea $L(y) = F(x)$ una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes (y $F(x)$ continua). Si $K \equiv K(D)$ es un operador diferencial con coeficientes constantes que anula $F(x)$, entonces una solución particular de la ecuación se obtiene resolviendo la ecuación lineal homogénea*

$$(K \circ L)(y) = 0$$

(Dem.) Basta observar que si $K(F(x)) = 0$ entonces

$$K(F(x)) = K(L(y)) = (K \circ L)(y) = 0$$

■

A continuación se muestran los resultados del procedimiento para algunos casos típicos en los que el término independiente $F(x)$ tiene una forma particular.

Casos particulares:

1. $F(x) = e^{\alpha x}(b_p x^p + \dots + b_1 x + b_0)$.

Hay dos opciones:

- (a) Si α no es raíz del polinomio característico entonces una solución particular es de la forma

$$y_P(x) = e^{\alpha x} \mathcal{P}^p(x)$$

donde $\mathcal{P}^p(x)$ es un polinomio de grado p .

- (b) Si α es raíz del polinomio característico y tiene multiplicidad μ entonces una solución particular es de la forma

$$y_P(x) = x^\mu e^{\alpha x} \mathcal{P}^p(x)$$

donde $\mathcal{P}^p(x)$ es un polinomio de grado p .

2. $F(x) = \cos \alpha x(b_p x^p + \dots + b_1 x + b_0)$ ó $F(x) = \sin \alpha x(b_p x^p + \dots + b_1 x + b_0)$.

Hay dos opciones:

- (a) Si αi no es raíz del polinomio característico entonces una solución particular es de la forma

$$y_P(x) = \cos \alpha x \mathcal{P}_1^p(x) + \sin \alpha x \mathcal{P}_2^p(x)$$

donde $\mathcal{P}_1^p(x), \mathcal{P}_2^p(x)$ son polinomios de grado p .

- (b) Si αi es raíz del polinomio característico y tiene multiplicidad μ entonces una solución particular es de la forma

$$y_P(x) = x^\mu (\cos \alpha x \mathcal{P}_1^p(x) + \sin \alpha x \mathcal{P}_2^p(x))$$

donde $\mathcal{P}_1^p(x), \mathcal{P}_2^p(x)$ son polinomios de grado p .

3. $F(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x (b_p x^p + \dots + b_1 x + b_0)$ ó $F(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x (b_p x^p + \dots + b_1 x + b_0)$.

Hay dos opciones:

- (a) Si $\alpha + \beta i$ no es raíz del polinomio característico entonces una solución particular es de la forma

$$y_P(x) = e^{\alpha x} (\cos \beta x \mathcal{P}_1^p(x) + \sin \beta x \mathcal{P}_2^p(x))$$

donde $\mathcal{P}_1^p(x), \mathcal{P}_2^p(x)$ son polinomios de grado p .

- (b) Si $\alpha + \beta i$ es raíz del polinomio característico y tiene multiplicidad μ entonces una solución particular es de la forma

$$y_P(x) = x^\mu e^{\alpha x} (\cos \beta x \mathcal{P}_1^p(x) + \sin \beta x \mathcal{P}_2^p(x))$$

donde $\mathcal{P}_1^p(x), \mathcal{P}_2^p(x)$ son polinomios de grado p .

(Véanse ejemplos de aplicación en la colección de problemas).

2.5 Casos particulares y aplicaciones

2.5.1 Caso particular: ecuaciones de Euler

Un caso particularmente interesante de ecuación diferencial lineal son las denominadas *ecuaciones de Euler*, que tienen la siguiente expresión general:

$$a_n(bx + c)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(bx + c)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(bx + c) \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

con $a_0, \dots, a_n, b, c \in \mathbb{R}$. En el caso en que $f(x) = 0$ se tienen las *ecuaciones de Euler homogéneas*.

Estas ecuaciones se transforman en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes haciendo el cambio de variable $bx + c = e^t$.

En el caso particular de ecuaciones de Euler homogéneas con $b = 1, c = 0$; esto es, las ecuaciones de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

se pueden probar directamente soluciones particulares del tipo $y = x^k$. En efecto, pues, si con el cambio $x = e^t$ se transformara en una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes cuya solución particular fuese de la forma $y = e^{kt}$, entonces una solución como la propuesta, $y = x^k$, conduciría directamente a $y = x^k = e^{kt}$.

2.5.2 Aplicaciones físicas

El estudio analítico del comportamiento de muchos sistemas en Física conduce a ecuaciones lineales.

Un ejemplo típico en Mecánica son los osciladores armónicos:

1. El *oscilador armónico simple*: su ecuación es

$$my'' + ky = 0$$

2. El oscilador armónico amortiguado: su ecuación es

$$my'' + \beta y' + ky = 0$$

3. El oscilador armónico (amortiguado) forzado: su ecuación es

$$my'' + \beta y' + ky = F(t)$$

En todos los casos se trata de ecuaciones lineales con coeficientes constantes. (Su resolución ha sido tratada en los cursos de Física).

El estudio analítico del comportamiento de muchos sistemas eléctricos conduce también a ecuaciones lineales. Un ejemplo típico son los *circuitos eléctricos RCL*, cuya ecuación es:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$

que es, también, una ecuación lineal con coeficientes constantes. (Su resolución ha sido tratada en los cursos de Física).

Chapter 3

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

3.1 Introducción

En este capítulo se va a tratar del estudio de los *sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden* y, en particular, de los *sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*.

Se comenzará dando una serie de conceptos y resultados sobre *sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden* en general para, inmediatamente, entrar en el estudio de los del tipo *lineal*. Concretamente se investigarán las soluciones de los sistemas lineales homogéneos y posteriormente de los no homogéneos, donde se incluirá la exposición del método de *variación de constantes* para encontrar soluciones particulares de la ecuación completa. Después se considerará el problema de obtener la solución general de los *sistemas lineales con coeficientes constantes*, para lo cual se analizarán, primero, los de tipo homogéneo (estudiándose los dos casos posibles: matriz del sistema diagonalizable y no diagonalizable) y, después, el caso general (incluyendo el *método del anulador* para hallar una solución particular).

Igual que en los capítulos anteriores, siempre que no se haga alguna precisión más concreta, se asumirá que todas las funciones son diferenciables con continuidad hasta el orden que se deseé.

3.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

3.2.1 Definiciones fundamentales. Teorema de existencia y unicidad de soluciones

Definición 16 Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden *es un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden que, expresado en forma implícita, es*

$$\begin{aligned} F_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t)) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t)) &= 0 \end{aligned}$$

o bien, expresado en forma explícita¹,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

¹Que es como se darán en adelante.

Se denomina solución del sistema a cualquier familia de funciones $x_1(t), \dots, x_n(t)$ diferenciables en $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaga idénticamente las ecuaciones del sistema

Es muy habitual utilizar la notación vectorial: introduciendo los vectores

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) , \quad \mathbf{x}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) , \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = (f_1(t, \mathbf{x}(t)), \dots, f_n(t, \mathbf{x}(t)))$$

el sistema se puede escribir en forma compacta como

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

Escrito de esta manera, un sistema de ecuaciones de primer orden tiene un aspecto análogo a las ecuaciones de primer orden.

Esta analogía no es meramente formal. En efecto; lo que interesa es hallar la solución al problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_1(t_0) &= x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \end{aligned}$$

que, expresado en forma vectorial, es

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

Entonces, el teorema de existencia y unicidad de soluciones (teorema 5) se establece en los mismos términos que para una sola ecuación. Con esta notación su enunciado sería:

Teorema 12 (de existencia y unicidad local para sistemas de 1^{er} orden): *Considérese el problema de valor inicial (3.1) y sea un rectángulo $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ con centro en (t_0, \mathbf{x}_0) . Si f_1, \dots, f_n son funciones continuas y lipschitzianas en D (para lo cual es suficiente con que $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) sean funciones continuas en D), entonces existe una única solución del problema, $\mathbf{x}(t)$, definida en un cierto intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$*

Comentario:

- A partir de aquí los teoremas relativos a prolongación de las soluciones se establecen también de manera análoga al caso de una sola ecuación.

La solución $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ del problema de valor inicial determina en el espacio euclídeo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, de coordenadas $\{t, x_1, \dots, x_n\}$, una curva diferencial que es la *curva integral* del sistema. Cuando se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, por cada punto de dicho espacio pasa una sola curva integral del sistema, el conjunto de las cuales forma una familia de curvas dependiente de n parámetros que constituyen la solución general del sistema.

3.2.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden superior

Como ya se vio (proposición 6), toda ecuación diferencial de orden n (expresada en forma normal)

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

es equivalente a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-2}}{dt} &= x_{n-1}(t) \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(t, x_1(t), \dots, x_n(t))\end{aligned}$$

y, dado un conjunto de condiciones iniciales de la ecuación lineal,

$$t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0^1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$$

se tienen como condiciones iniciales para el sistema

$$t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_1(t_0) = x_0^1, \quad \dots, \quad x_{n-1}(t_0) = x_0^{n-1}$$

Este resultado se puede generalizar a sistemas como sigue:

Proposición 17 *Todo sistema de n ecuaciones diferenciales de órdenes r_1, \dots, r_n (expresado en forma normal)*

$$\begin{aligned}x_1^{(r_1)}(t) &= f_1(t; x_1(t), \dots, x_1^{(r_1-1)}(t); \dots, x_n(t), \dots, x_n^{(r_n-1)}(t)) \\ &\vdots \\ x_n^{(r_n)}(t) &= f_n(t; x_1(t), \dots, x_1^{(r_1-1)}(t); \dots, x_n(t), \dots, x_n^{(r_n-1)}(t))\end{aligned}$$

es equivalente a un sistema de $r_1 + \dots + r_n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

(Dem.) Basta aplicar la proposición 6 y reducir cada ecuación del sistema inicial a un subsistema de r_i ecuaciones de primer orden. ■

También se puede plantear el problema recíproco; es decir, si es posible, a partir de un sistema de n ecuaciones de primer orden, obtener una ecuación de orden n equivalente, cuya integración permita resolver el sistema. La respuesta es afirmativa (bajo ciertas condiciones) y el proceso constituye, además, uno de los métodos fundamentales de integración de sistemas ecuaciones diferenciales.

El método, en líneas generales sería el siguiente:

1. Se construye un sistema formado por las ecuaciones del sistema inicial y derivadas de éstas.
2. Se excluyen (por sustitución) todas las funciones incógnita salvo una, que aparecerá como la única incógnita de una ecuación de orden superior.
3. Se integra esta última ecuación (si es posible), determinando dicha función incógnita.
4. Se determinan (en lo posible) las restantes funciones incógnita sin integrar, utilizando las ecuaciones del sistema original y sus derivadas.

(Véanse ejemplos de aplicación en la colección de problemas).

3.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales

3.3.1 Conceptos generales

Definición 17 *Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden lineal es un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, que, expresado en forma explícita, es*

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1^1(t)x_1(t) + \dots + g_1^n(t)x_n(t) + f_1(t)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \begin{matrix} \vdots \\ g_n^1(t)x_1(t) + \dots + g_n^n(t)x_n(t) + f_n(t) \end{matrix}$$

o en forma vectorial,

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \quad o \text{ bien} \quad \mathbf{x}'(t) - A(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

donde se han introducido las funciones vectoriales

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) , \quad \mathbf{x}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) , \quad \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

$$\text{y la matriz } A(t) = \begin{pmatrix} g_1^1(t) & \dots & g_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ g_n^1(t) & \dots & g_n^n(t) \end{pmatrix}$$

El sistema es un sistema lineal homogéneo si $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$.

Al igual que ya se hizo con las ecuaciones lineales, se puede traducir la ecuación lineal al lenguaje de operadores. Así, si se considera $I \subseteq \mathbb{R}$, se puede definir el operador vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{L} : \quad C^\infty(I, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^\infty(I, \mathbb{R}^n) \\ \mathbf{x}(t) &\mapsto \mathbf{x}'(t) - A(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

esto es,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) := \mathbf{x}'(t) - A(t)\mathbf{x}(t)$$

del cual puede probarse con facilidad que es lineal y permite escribir la ecuación (2.2) como

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(t) \tag{3.2}$$

o en el caso homogéneo

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

(con lo que el nombre dado queda justificado).

La cuestión de la existencia y unicidad de soluciones para estos sistemas tiene la siguiente respuesta:

Teorema 13 (de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones lineales): *Considérese el sistema (3.2) con la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0) \equiv \mathbf{x}_0$ y tal que las funciones $f_i(t), g_i^j(t)$ son continuas en un cierto intervalo $I = (x_0 - a, x_0 + a)$ (con $0 < a$). Entonces existe una única solución $\mathbf{x}(t)$ definida en el intervalo I , que es derivable con continuidad hasta el orden n .*

(En particular, si los coeficientes funcionales son continuos en todo \mathbb{R} , entonces la existencia y unicidad de la solución está garantizada también en todo \mathbb{R}). ■

(Dem.) Se basa en los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para sistemas de ecuaciones de primer orden (teorema 12) y para ecuaciones diferenciales lineales (teorema 6). ■

3.3.2 Soluciones de los sistemas de primer orden lineales

Comenzaremos el estudio de las soluciones de los sistemas de primer orden lineales con el siguiente resultado:

Proposición 18 *Sea el sistema de primer orden lineal (3.2) y $\mathbf{x}^1(t) \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ una solución. Entonces $\mathbf{x}^2(t) \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ es solución del sistema si, y sólo si, $\mathbf{x}^2(t) - \mathbf{x}^1(t) \in \text{Ker } \mathbf{L}$; esto es, es solución del sistema lineal homogéneo asociado $\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$.*

(Dem.) Si $\mathbf{L}(\mathbf{x}^1(t)) = \mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{L}(\mathbf{x}^2(t)) = \mathbf{f}(t)$ entonces

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^2(t) - \mathbf{x}^1(t)) = \mathbf{L}(\mathbf{x}^2(t)) - \mathbf{L}(\mathbf{x}^1(t)) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t) = 0$$

Recíprocamente, si $\mathbf{x}^2(t) - \mathbf{x}^1(t) \in \text{Ker } \mathbf{L}$ entonces

$$0 = \mathbf{L}(\mathbf{x}^2(t) - \mathbf{x}^1(t)) = \mathbf{L}(\mathbf{x}^2(t)) - \mathbf{L}(\mathbf{x}^1(t)) \Rightarrow \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}^2(t)) = \mathbf{L}(\mathbf{x}^1(t))$$

■

Corolario 1 La solución general del sistema de primer orden lineal (3.2) está dada por $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_P(t) + \text{Ker } \mathbf{L}$ donde $\mathbf{x}_P(t)$ es una solución particular cualquiera del sistema y $\text{Ker } \mathbf{L}$ designa la solución general del sistema lineal homogéneo asociado.

(Dem.) Inmediata. (Véase también la demostración de la proposición 2). ■

Teniendo en cuenta que $\text{Ker } \mathbf{L}$ es un subespacio vectorial de $C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$, es inmediato probar el siguiente resultado:

Proposición 19 Sea el sistema de primer orden lineal homogéneo (3.3). Entonces cualquier combinación lineal de soluciones del sistema es también solución.

Y para finalizar este estudio preliminar se tiene:

Proposición 20 Sea el sistema de primer orden lineal homogéneo (3.3). Sea la función vectorial compleja $\mathbf{z}(t) \in C^\infty(I, \mathbb{C}^n)$, que se puede expresar como $\mathbf{z}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, donde $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ (son funciones vectoriales reales). Entonces $\mathbf{z}(t)$ es una solución compleja del sistema si, y sólo si, $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ son también soluciones (reales); es decir, las partes real e imaginaria de la solución son soluciones por separado.

(Dem.) Evidente ya que

$$0 = \mathbf{L}(\mathbf{z}(t)) = \mathbf{L}(\mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)) = \mathbf{L}(\mathbf{u}(t)) + i\mathbf{L}(\mathbf{v}(t)) \Leftrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{u}(t)) = 0, \mathbf{L}(\mathbf{v}(t)) = 0$$

puesto que $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ son funciones vectoriales reales. ■

3.3.3 Dependencia e independencia lineal de soluciones

Se van a introducir, a continuación, algunos conceptos y resultados sobre dependencia e independencia lineal de soluciones de sistemas de primer orden lineales.

Definición 18 Dado un conjunto de funciones vectoriales $\{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)\} \subset C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$, estas funciones son linealmente independientes si, $\forall t \in I$, se cumple que, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^n(t) = \mathbf{0} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Como primer resultado se tiene:

Proposición 21 Sea el conjunto de funciones vectoriales de $C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(t) &= (x_1^1(t), \dots, x_n^1(t)) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^n(t) &= (x_1^n(t), \dots, x_n^n(t)) \end{aligned}$$

y el determinante

$$\det(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) \equiv \det \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

Si $\det(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) \neq 0$ para algún $t \in I$, entonces las funciones $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ son linealmente independientes en I .

Equivalentemente, si $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ son linealmente dependientes en I entonces $\det(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) = 0, \forall t \in I$. ■

(Dem.) Evidente, ya que el sistema $\alpha_1\mathbf{x}^1(t) + \dots + \alpha_n\mathbf{x}^n(t) = \mathbf{0}$ ha de tener solución $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ no trivial para todo $t \in I$. ■

El recíproco de este enunciado no es cierto, en general, a menos que se imponga alguna hipótesis adicional, tal como se verá posteriormente.

Ejemplo:

- En \mathbb{R} , considérense las funciones

$$\mathbf{x}^1(t) = (0, \cos t) ; \quad \mathbf{x}^2(t) = (0, \sin t)$$

se tiene que $\det(\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ y, sin embargo, se trata de dos funciones linealmente independientes, ya que

$$\alpha_1\mathbf{x}^1(t) + \alpha_2\mathbf{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t \end{pmatrix}$$

y el resultado es nulo $\forall t \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

3.3.4 Solución del sistema lineal homogéneo. Matriz Fundamental

Teniendo en cuenta lo expuesto en los apartados precedentes, ahora se puede probar que:

Proposición 22 Para cualquier operador \mathbf{L} (de orden n) con coeficientes continuos se tiene que $\dim(\text{Ker } \mathbf{L}) = n$.

(Dem.) Sea $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base de \mathbb{R}^n y $t_0 \in \mathbb{R}$. Considérense los siguientes problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{e}_1 \end{cases} ; \quad \dots ; \quad \begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{e}_n \end{cases}$$

y sean $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t) \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ las soluciones únicas respectivas. Entonces

$$\det(\mathbf{x}^1(t_0), \dots, \mathbf{x}^n(t_0)) = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \neq 0$$

ya que $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ son vectores constantes y linealmente independientes, luego también $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ lo son. Sólo queda probar que son también un sistema generador. Para ello considérese cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema; será

$$\mathbf{x}(t_0) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n$$

lo que significa que $\mathbf{x}(t)$ es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}(t_0) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n \end{cases}$$

pero también $\lambda_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t)$ es solución de dicho problema, por tanto, como la solución es única, se concluye que

$$\mathbf{x}(t) = \lambda_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t)$$

luego $\{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)\}$ es un sistema generador de $\dim(\text{Ker } \mathbf{L})$ y, por consiguiente, forman base, con lo cual $\dim(\text{Ker } \mathbf{L}) = n$. \blacksquare

Como corolario inmediato de esta proposición se tiene:

Teorema 14 *Sea el sistema de primer orden lineal homogéneo con coeficientes continuos (3.3) y sean $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t) \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ soluciones linealmente independientes del mismo. Entonces la solución general es una combinación lineal de ellas (con coeficientes constantes)*

$$\mathbf{x}_H(t) = \lambda_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t)$$

Finalmente, se puede enunciar el resultado análogo al del teorema 7:

Teorema 15 *Sea el conjunto de funciones vectoriales $\{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)\} \subset C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$. Si $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ son linealmente independientes en I y además son soluciones de un sistema lineal homogéneo, $\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$, con coeficientes continuos, entonces $\det(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) \neq 0, \forall t \in I$.*

(Dem.) Supóngase que $\exists t_0 \in I$ tal que $\det(\mathbf{x}^1(t_0), \dots, \mathbf{x}^n(t_0)) = 0$, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que $\lambda_1 \mathbf{x}^1(t_0) + \dots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t_0) = \mathbf{0}$ y, en consecuencia, $\mathbf{x}(t) = \lambda_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t)$ es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{0} \end{cases}$$

Pero $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ es también solución, y como ésta ha de ser única, hay que concluir que, $\forall t \in I$,

$$\lambda_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t) = \mathbf{0}$$

con los λ_i no todos nulos; en consecuencia $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ son linealmente dependientes, contra la hipótesis. La contradicción proviene de suponer que $\exists t_0 \in I$ tal que $\det(\mathbf{x}^1(t_0), \dots, \mathbf{x}^n(t_0)) = 0$; luego $\det(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) \neq 0, \forall t \in I$. \blacksquare

Teniendo presentes estos resultados, el siguiente concepto es el símil para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos de la noción de *sistema fundamental de soluciones* de una ecuación lineal homogénea.

Definición 19 *Una matriz fundamental de un sistema de n ecuaciones de primer orden lineal homogéneo con coeficientes constantes (3.3) es toda matriz de orden n cuyas columnas son soluciones linealmente independientes del sistema:*

$$V(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

Las propiedades más relevantes de las matrices fundamentales (cuya demostración es inmediata tras lo expuesto en este apartado) son las siguientes:

Proposición 23 *Sea $V(t)$ una matriz fundamental de un sistema de primer orden lineal homogéneo (3.3). Entonces*

1. $\det V(t) \neq 0, \forall t$.
2. La solución general de $\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x}(t) = V(t)\mathbf{c}$ con $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
3. Si M es cualquier matriz constante tal que $\det M \neq 0$, entonces $V(t)M$ es también una matriz fundamental.

3.3.5 Solución del sistema lineal completo. Método de variación de constantes

Analicemos, ahora, el problema de hallar la solución general del sistema lineal completo. Como en el caso de una ecuación diferencial lineal completa, el método consiste en partir de una matriz fundamental del sistema; es decir, de n soluciones linealmente independientes conocidas del sistema lineal homogéneo asociado (esto es, su solución general), de modo que para tener la solución general del sistema lineal completo basta con obtener una solución particular del mismo. Entonces:

Proposición 24 *Sea un sistema lineal completo de n ecuaciones diferenciales de primer orden (con coeficientes continuos), $\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(t)$, y sea $\{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)\}$ un sistema de soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo asociado $\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$. Entonces, una solución particular del sistema lineal completo es la combinación lineal (con coeficientes funcionales)*

$$\mathbf{x}_P(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{x}^i(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix} \equiv V(t) \mathbf{C}(t)$$

donde las funciones $C_i(x)$ se obtienen a partir de la solución del sistema $V(t) \mathbf{C}'(t) = \mathbf{f}(t)$; esto es,

$$\begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

(Dem.) La demostración se basa nuevamente en la aplicación del *método de variación de constantes* o de Lagrange. El método consiste en suponer que una solución particular es $\mathbf{x}_P(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{x}^i(t)$. Derivando esta expresión y sustituyendo en la expresión del sistema lineal completo resulta

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_P(t)) = \mathbf{x}'_P(t) - A(t) \mathbf{x}_P(t) = \sum_{i=1}^n C'_i(t) \mathbf{x}^i(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{x}^{i'}(t) - \sum_{i=1}^n C_i(t) A(t) \mathbf{x}^i(t) = \mathbf{f}(t)$$

Pero $\mathbf{L}(\mathbf{x}^i(t)) = \mathbf{0}$, $\forall i$, luego $\mathbf{x}^{i'}(t) = A(t) \mathbf{x}^i(t)$ y, por tanto, para que $\mathbf{x}_P(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{x}^i(t)$ sea solución de la ecuación lineal completa es suficiente con que

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_P(t)) = \sum_{i=1}^n C'_i(t) \mathbf{x}^i(t) = \mathbf{f}(t)$$

expresión que, en forma explícita es el sistema (3.4), el cual es compatible y determinado, ya que $\{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo y, por tanto, $\det(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) \neq 0$, $\forall t \in I$, luego existe solución $\{C'_i(t)\}$ y de aquí $\{C_i(t)\}$. ■

3.4 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes

3.4.1 Ideas generales

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden lineal con coeficientes constantes es un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que, expresado en forma explícita, es

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1^1 x_1(t) + \dots + a_1^n x_n(t) + f_1(x) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_n^1 x_1(t) + \dots + a_n^n x_n(t) + f_n(x) \end{aligned}$$

con $a_j^i \in \mathbb{R}$ (y $f_j \in C^\infty(\mathbb{R})$). En forma vectorial se tiene

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \quad \text{o bien} \quad \mathbf{x}'(t) - A\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

donde la matriz de coeficientes es constante

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

También se puede traducir al lenguaje de operadores poniendo $\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) := \mathbf{x}'(t) - A\mathbf{x}(t)$, con lo que el sistema se expresa igual que en el caso general

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(t)$$

El sistema es un sistema lineal homogéneo si $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$; esto es,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$$

Los resultados expuestos para el caso general siguen siendo válidos, por supuesto. En concreto, la solución general de un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden lineal con coeficientes constantes está dada por $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_P(t) + \text{Ker } \mathbf{L}$ donde $\mathbf{x}_P(t)$ es una solución particular cualquiera del sistema y $\text{Ker } \mathbf{L}$ designa la solución general del sistema lineal homogéneo asociado. Como, además, para el operador \mathbf{L} del sistema se tiene que $\dim(\text{Ker } \mathbf{L}) = n$, dicha solución general será del tipo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_P(t) = \lambda_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t) + \mathbf{x}_P(t)$$

En general la forma más sencilla de integrar un sistema de esta índole suele ser convertirlo en una sola ecuación de orden superior, que será necesariamente lineal con coeficientes constantes; siguiendo el método expuesto en el apartado 3.2.2. Sin embargo, existen métodos para calcular una matriz fundamental (esto es, un *sistema fundamental de soluciones*) del sistema homogéneo asociado a un sistema lineal con coeficientes constantes. De aquí se obtiene directamente la solución general del sistema homogéneo y, por aplicación del método de variación de las constantes, una solución particular del sistema completo. Estudiaremos dichos métodos a continuación.

3.4.2 Estudio del sistema homogéneo (con matriz del sistema diagonalizable)

Se va a analizar el problema de hallar la solución general de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) \equiv \mathbf{x}'(t) - A\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

donde A es una matriz de constantes como (3.5).

Comenzaremos considerando el caso en que la matriz A del sistema es diagonalizable. Esta situación se presenta cuando todas las raíces λ del polinomio característico de A tienen multiplicidad algebraica (multiplicidad de la raíz) es igual a la dimensión del subespacio de vectores propios asociados a ese valor propio; es decir, es igual a $\dim \ker(A - \lambda \text{Id})$.

El primer resultado es el siguiente:

Proposición 25 *Sea el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes (3.6) y sea $\mathbf{v} \equiv (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector propio de A de valor propio real $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} (v_1, \dots, v_n) \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$$

es solución (real) del sistema.

(Dem.) Basta con sustituir

$$\mathbf{L}(e^{\lambda t}\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}e^{\lambda t}\mathbf{v} - A(e^{\lambda t}\mathbf{v}) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} - e^{\lambda t}A\mathbf{v} = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} - e^{\lambda t}\lambda\mathbf{v} = 0$$

■

Si el vector y el valor propio no son reales, el resultado se establece de forma similar.

Proposición 26 *Sea el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes (3.6) y sea $\mathbf{v} \equiv (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ un vector propio de A de valor propio $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Entonces*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{\lambda t}(v_1, \dots, v_n) \in C^\infty(I, \mathbb{C}^n)$$

es solución (compleja) del sistema.

■

(Dem.) Igual que en el caso anterior.

Dado que el sistema de ecuaciones diferenciales es de coeficientes y funciones reales, también sus soluciones han de poder expresarse por medio de funciones reales; luego en este último caso hay que ver como obtener soluciones reales a partir de la solución compleja hallada. Entonces:

Proposición 27 *Sea el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes (3.6) y sea $\mathbf{v} \equiv (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ un vector propio de A de valor propio complejo $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Entonces $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$, con $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \in \mathbb{R}^n$, y*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^1(t) &= \operatorname{Re}(\mathbf{x}(t)) = e^{\alpha t} \cos \beta t \mathbf{v}^1 - e^{\alpha t} \sin \beta t \mathbf{v}^2 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n) \\ \mathbf{x}^2(t) &= \operatorname{Im}(\mathbf{x}(t)) = e^{\alpha t} \sin \beta t \mathbf{v}^1 + e^{\alpha t} \cos \beta t \mathbf{v}^2 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

son soluciones (reales) linealmente independientes del sistema.

(Dem.) La primera parte es una consecuencia del resultado anterior y de la proposición 20.

Veamos que son linealmente independientes.

Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es valor propio del vector propio $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$ (con $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \in \mathbb{R}^n$), también lo es su conjugada $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, del vector propio $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^1 - i\mathbf{v}^2$. En efecto, ya que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \bar{A}\bar{\mathbf{v}} = A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$$

(pues $A = \bar{A}$ por ser los coeficientes del sistema reales). Como $\lambda \neq \bar{\lambda}$, entonces \mathbf{v} y $\bar{\mathbf{v}}$ son vectores linealmente independientes por ser vectores propios de autovalores diferentes, luego

$$\begin{aligned}0 &\neq \det(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) = \det(\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^1 - i\mathbf{v}^2) = \det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^1 - i\mathbf{v}^2) + \det(i\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^1 - i\mathbf{v}^2) \\ &= \det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^1) - i \det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) + i \det(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^1) + \det(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^2) = -2i \det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)\end{aligned}$$

de donde $\det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \neq 0$ y, por tanto, $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ son linealmente independientes. Teniendo ésto en cuenta resulta

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t)) &= \det(e^{\alpha t} \cos \beta t \mathbf{v}^1 - e^{\alpha t} \sin \beta t \mathbf{v}^2, e^{\alpha t} \sin \beta t \mathbf{v}^1 + e^{\alpha t} \cos \beta t \mathbf{v}^2) \\ &= e^{2\alpha t} \cos \beta t \sin \beta t \det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^1) + e^{2\alpha t} \cos^2 \beta t \det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \\ &\quad - e^{2\alpha t} \sin^2 \beta t \det(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^1) - e^{2\alpha t} \cos \beta t \sin \beta t \det(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^2) \\ &= e^{2\alpha t} \det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) (\sin^2 \beta t + \cos^2 \beta t) = e^{2\alpha t} \det(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \neq 0\end{aligned}$$

luego $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t)$ son linealmente independientes. ■

Teniendo todo ésto en cuenta, para obtener la solución general de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes hará falta únicamente disponer de n vectores propios de A linealmente independientes. Entonces:

Teorema 16 *Sea un sistema de n ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes (3.6). Sea $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ una base de vectores (en \mathbb{R}^n o en \mathbb{C}^n) formada por vectores propios de A y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios respectivos, (que pueden ser reales o complejos, distintos o repetidos). Entonces las funciones*

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{x}^n(t) = e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n$$

forman una base de $\ker \mathbf{L}$ (quizás en \mathbb{C}) y, por consiguiente, $\det(\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) \neq 0, \forall t$.

(Dem.) Se obtiene como consecuencia inmediata de los anteriores resultados. ■

Observación:

- En el caso en que la base de la proposición anterior no sea real, es posible hallar una base de funciones reales aplicando la proposición 27. En efecto, considérese el vector propio \mathbf{v}^i y su conjugado $\bar{\mathbf{v}}^i$, cuyos autovalores son $\lambda_i \in \mathbb{C}$ y su conjugado $\bar{\lambda}_i$, respectivamente. Tomando la parte real e imaginaria de $e^{\lambda_i t} \mathbf{v}^i$ se obtienen dos funciones reales linealmente independientes, mientras que si se toman la parte real e imaginaria de $e^{\bar{\lambda}_i t} \bar{\mathbf{v}}^i$ se obtienen dos funciones reales linealmente independientes entre sí, pero linealmente dependientes de las dos anteriores (de este modo, el número final de funciones solución es el mismo).

Concluyendo, la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes se obtiene del siguiente modo:

1. Se calculan los valores y vectores propios de la matriz A del sistema.
2. Para cada vector propio \mathbf{v}^i se construye la función $\mathbf{x}^i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{v}^i$ (y si es complejo, a partir de él o su conjugado, las funciones reales $\mathbf{x}^{i1}(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{x}^i(t))$, $\mathbf{x}^{i2}(t) = \operatorname{Im}(\mathbf{x}^i(t))$).
3. Si se tienen n vectores propios linealmente independientes (esto es, la matriz A es diagonalizable), se construye la solución general como una combinación lineal (con coeficientes constantes) de las anteriores funciones.

3.4.3 Estudio del sistema homogéneo (con matriz del sistema no diagonalizable)

En el caso en que la matriz A de un sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes no sea diagonalizable, no va a ser posible hallar una base de \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n formada por vectores propios de la misma y, por consiguiente, no es aplicable el teorema 16 para encontrar la solución general del sistema.

Esta situación se presenta cuando hay alguna raíz λ del polinomio característico de A cuya multiplicidad algebraica (multiplicidad de la raíz) es mayor que la dimensión del subespacio de vectores propios asociados a ese valor propio; es decir, mayor que $\dim \ker(A - \lambda \operatorname{Id})$.

Para resolver este problema se intentará seguir un método análogo al caso de las ecuaciones diferenciales de orden superior cuando había alguna raíz del polinomio característico con multiplicidad mayor que 1. En tal caso, se tratará de encontrar soluciones del tipo $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{v}^i t^i e^{\lambda t}$.

En primer lugar se tiene:

Lema 4 *Sea un sistema de n ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes (3.6) tal que el polinomio característico de A tiene una o varias raíces λ de multiplicidad $\mu \geq 1$. Entonces $\dim \ker(A - \lambda \operatorname{Id})^\mu = \mu$.*

(Dem.) Por simplicidad, se demostrará para el caso en que el polinomio característico de A tiene una sola raíz λ de multiplicidad $\mu = n$. El polinomio característico de la matriz A , $\mathcal{P}(A) = (-1)^n(x - \lambda)^n$, anula dicha matriz (teorema de Cayley-Hamilton), luego $(A - \lambda \operatorname{Id})^n = 0$ y de aquí

$$\dim \ker(A - \lambda \operatorname{Id})^n = n - \operatorname{rg}(A - \lambda \operatorname{Id})^n = n$$

En el caso en que haya más de una raíz la demostración se generaliza de manera inmediata. ■

Como ya se ha dicho, la situación de partida es que no existe una base de \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n formada por vectores propios, ya que $\dim \ker(A - \lambda \text{Id}) < \mu$. Como

$$\ker(A - \lambda \text{Id}) \subseteq \ker(A - \lambda \text{Id})^2 \subseteq \dots \subseteq \ker(A - \lambda \text{Id})^m \subseteq \dots \subseteq \ker(A - \lambda \text{Id})^\mu$$

resulta que las respectivas dimensiones de estos subespacios verifican las desigualdades

$$d_1 < d_2 < \dots < d_m = d_{m+1} = \dots = d_\mu = \mu$$

Entonces, el procedimiento se basa en hallar una base de $\ker(A - \lambda \text{Id})^\mu$, para lo cual se puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Hallar una base de $\ker(A - \lambda \text{Id})$.
2. Completar la base hallada hasta obtener una de $\ker(A - \lambda \text{Id})^2$.
3. Iterar el proceso hasta obtener una base de $\ker(A - \lambda \text{Id})^\mu$.

Entonces la obtención de la solución general se basa en el siguiente resultado:

Proposición 28 *Sea un sistema de n ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes (3.6). Sea λ una raíz del polinomio característico de la matriz del sistema A , de multiplicidad $\mu > 1$, y sean $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^r$ vectores de una base de $\ker(A - \lambda \text{Id})^\mu$ pero que no pertenecen a $\ker(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}$. Entonces, para cada vector \mathbf{v}^j ($j = 1, \dots, r$), las funciones*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^j(t) &= e^{\lambda t}(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j \\ \mathbf{x}_2^j(t) &= e^{\lambda t}(t(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j + (A - \lambda \text{Id})^{\mu-2}\mathbf{v}^j) \\ \mathbf{x}_3^j(t) &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j + t(A - \lambda \text{Id})^{\mu-2}\mathbf{v}^j + (A - \lambda \text{Id})^{\mu-3}\mathbf{v}^j\right) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_m^j(t) &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j + \dots + t(A - \lambda \text{Id})\mathbf{v}^j + \mathbf{v}^j\right) \end{aligned}$$

son linealmente independientes y, además, son la soluciones del sistema homogéneo.

(Dem.) En primer lugar, estas funciones son linealmente independientes, pues

$$\det(\mathbf{x}_1^j(0), \dots, \mathbf{x}_m^j(0)) = \det((A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j, \dots, (A - \lambda \text{Id})\mathbf{v}^j, \mathbf{v}^j) \neq 0$$

pues los vectores columna son linealmente independientes. En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha_1(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j + \dots + \alpha_{\mu-1}(A - \lambda \text{Id})\mathbf{v}^j + \alpha_\mu\mathbf{v}^j &= 0 \implies \\ 0 = (A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}(\alpha_1(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j + \dots + \alpha_{\mu-1}(A - \lambda \text{Id})\mathbf{v}^j + \alpha_\mu\mathbf{v}^j) &= \alpha_\mu(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j \end{aligned}$$

y como $(A - \lambda \text{Id})^{\mu-1}\mathbf{v}^j \neq 0$ esto implica que $\alpha_\mu = 0$. Repitiendo el razonamiento multiplicando por el factor $(A - \lambda \text{Id})^{\mu-2}$ se obtendría que $\alpha_{\mu-1} = 0$ e iterando el proceso lo mismo para el resto de coeficientes α_i .

Además son soluciones del sistema homogéneo, pues

$$\mathbf{x}_i^{j'}(t) = \lambda\mathbf{x}_i^j(t) + \mathbf{x}_{i-1}^j(t) \quad \text{y} \quad (A - \lambda \text{Id})\mathbf{x}_i^j(t) = \mathbf{x}_{i-1}^j(t)$$

de donde

$$A\mathbf{x}_i^j(t) = \lambda\mathbf{x}_i^j(t) + \mathbf{x}_{i-1}^j(t) = \mathbf{x}_i^{j'}(t)$$

■

De esta manera, el cálculo de n soluciones linealmente independientes de un sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes en el caso en que la matriz A del sistema no es diagonalizable se resuelve aplicando los siguientes pasos:

1. Hallar todos los valores propios de A . Entonces, para cada valor propio λ (con multiplicidad $\mu > 1$):
2. Se buscan todos los vectores propios de A , esto es, los vectores \mathbf{v}^{j_0} ($j_0 = 1, \dots, d_1$) de una base de $\ker(A - \lambda \text{Id})$. Si A tiene sólo $d_1 < n$ vectores propios linealmente independientes, de acuerdo con los resultados del apartado anterior, se dispone de d_1 soluciones linealmente independientes del tipo

$$e^{\lambda t} \mathbf{v}^{j_0}$$

3. Se buscan todos los vectores \mathbf{v}^{j_1} ($j_1 = 1, \dots, d_2 - d_1$) de una base de $\ker(A - \lambda \text{Id})^2$ tales que

$$(A - \lambda \text{Id})^2 \mathbf{v}^{j_1} = 0 \quad \text{pero} \quad (A - \lambda \text{Id}) \mathbf{v}^{j_1} \neq 0$$

De acuerdo con la anterior proposición, para cada uno de estos vectores hay una solución del tipo

$$e^{\lambda t} (t(A - \lambda \text{Id}) \mathbf{v}^{j_1} + \mathbf{v}^{j_1})$$

y todas ellas ($d_2 - d_1$) son linealmente independientes entre si y en relación a las d_1 del punto anterior.

4. Si aún no se tienen n soluciones linealmente independientes, se buscan todos los vectores \mathbf{v}^{j_2} ($j_2 = 1, \dots, d_3 - d_2 - d_1$) de una base de $\ker(A - \lambda \text{Id})^3$ tales que

$$(A - \lambda \text{Id})^3 \mathbf{v}^{j_2} = 0 \quad \text{pero} \quad (A - \lambda \text{Id})^2 \mathbf{v}^{j_2} \neq 0$$

De acuerdo con la anterior proposición, para cada uno de estos vectores hay una solución del tipo

$$e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2!} (A - \lambda \text{Id})^2 \mathbf{v}^{j_2} + t(A - \lambda \text{Id}) \mathbf{v}^{j_2} + \mathbf{v}^{j_2} \right)$$

y todas ellas ($d_3 - d_2 - d_1$) son linealmente independientes en relación a las de los puntos anteriores (según se ha probado en la proposición precedente).

5. Se itera el proceso hasta completar las n soluciones linealmente independientes ².

Comentario:

- Otra manera equivalente de proceder sería la siguiente: se buscan todos los vectores \mathbf{v}^j ($j = 1, \dots, \mu$) de una base de $\ker(A - \lambda \text{Id})^\mu$ (que obviamente contendrá vectores $\mathbf{v}^{j_0}, \mathbf{v}^{j_1}, \mathbf{v}^{j_2} \dots$ de bases de $\ker(A - \lambda \text{Id}), \ker(A - \lambda \text{Id})^2, \dots$ respectivamente). Entonces, para cada uno de esos vectores hay una solución del tipo

$$e^{\lambda t} \left(\mathbf{v}^j + t(A - \lambda \text{Id}) \mathbf{v}^j + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda \text{Id})^2 \mathbf{v}^j + \dots \right)$$

y todas ellas son linealmente independientes. Obsérvese que cuando \mathbf{v}^j coincide con alguno de los vectores $\mathbf{v}^{j_0}, \mathbf{v}^{j_1}, \mathbf{v}^{j_2} \dots$ se van obteniendo, en particular, las soluciones anteriores de manera sucesiva.

3.4.4 Estudio del caso general

Finalmente, se va a analizar el problema de encontrar la solución general de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineal no homogéneo con coeficientes constantes

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) \equiv \mathbf{x}'(t) - A\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{3.7}$$

donde A es una matriz de constantes como (3.5).

La única cuestión es cómo hallar una solución particular del sistema. Para ello se puede utilizar el *método de variación de constantes*. Sin embargo, al igual que ya se hizo en el caso de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, también se puede emplear el *método del anulador* o de la *conjetura prudente*, cuando el término independiente $\mathbf{f}(t)$ tiene la propiedad de que se anula bajo la acción de algún operador vectorial con coeficientes constantes.

Daremos, a continuación, el resultado de la aplicación de dicho método en un caso particular:

²A este respecto, existe un resultado de Álgebra lineal que garantiza que este algoritmo siempre funciona, dando además una cota superior del número de pasos que se requiere para alcanzar el objetivo (véase M. BRAUN, *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*, Grupo Ed. Iberoamérica (1990))

Proposición 29 Sea un sistema de n ecuaciones diferenciales lineal no homogéneo con coeficientes constantes (3.7). Si

$$\mathbf{f}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{v}^p t^p + \dots + \mathbf{v}^1 t + \mathbf{v}^0)$$

donde λ no es valor propio de la matriz del sistema A y $\mathbf{v}^i \in \mathbb{R}^n$ ($0 \leq i \leq p$), entonces una solución particular del sistema es

$$\mathbf{x}_P(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{u}^p t^p + \dots + \mathbf{u}^1 t + \mathbf{u}^0)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^p &= (\lambda \text{Id} - A)^{-1} \mathbf{v}^p \\ \mathbf{u}^{p-1} &= (\lambda \text{Id} - A)^{-1}(\mathbf{v}^{p-1} - p\mathbf{u}^p) \\ \mathbf{u}^{p-2} &= (\lambda \text{Id} - A)^{-1}(\mathbf{v}^{p-2} - (p-1)\mathbf{u}^{p-1}) \\ &\vdots \\ \mathbf{u}^0 &= (\lambda \text{Id} - A)^{-1}(\mathbf{v}^0 - \mathbf{u}^1)\end{aligned}$$

(obsérvese que $(\lambda \text{Id} - A)$ es inversible ya que λ no es valor propio de A).

(Dem.) Es una mera cuestión de cálculo (algo tedioso). ■

(Véanse ejemplos en la colección de problemas).

Chapter 4

La Transformación de Laplace

4.1 Introducción

La transformación de Laplace es un método directo y muy potente para la resolución de problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Su uso permite transformar una ecuación diferencial (o un sistema) de esta índole, junto con sus condiciones iniciales, en una ecuación algebraica. En particular se va a estudiar su aplicación al caso de ecuaciones diferenciales con segundos miembros discontinuos, que es cuando este método se muestra especialmente útil.

El uso de la transformación de Laplace en este contexto y, en particular su aplicación a problemas de ingeniería eléctrica, comenzó en los años treinta (siglo y medio después de que *Laplace* introdujese su transformación), como consecuencia de los trabajos de *Van der Pool* y *Doestch* que llevaron a abandonar el método operacional de *Heaviside*, de aplicación más restringida e incómoda y carente de una adecuada justificación en aquellos tiempos.

En la primera sección del capítulo se van a introducir los conceptos básicos y propiedades fundamentales sobre la transformación de Laplace, que se utilizarán para calcular las transformadas de algunas funciones elementales. También se estudiará la cuestión de la *inversión de la transformación de Laplace* por el método de *descomposición en fracciones simples*. En la segunda sección se aplicarán las nociones anteriores para la resolución de problemas de valor inicial planteados por ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y ecuaciones íntegro-diferenciales con coeficientes constantes. El análisis de algunos casos especiales (*excitaciones discontinuas* y *excitaciones puntuales*) conducirá a la introducción de la *función de Heaviside* y la *delta de Dirac*. Finalmente se estudiará el *producto de convolución* y su aplicación a la resolución de problemas de valor inicial con excitaciones en cuya expresión aparecen varios términos de forma diversa.

Igual que en los capítulos anteriores, siempre que no se haga alguna precisión más concreta, se asumirá que todas las funciones son diferenciables con continuidad hasta el orden que se deseé.

4.2 Definiciones básicas y propiedades

4.2.1 Transformadas de Laplace

Comenzaremos definiendo formalmente la transformación de Laplace.

Definición 20 Sea $f: [0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se denomina transformada de Laplace de la función $f(t)$ a la función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (si existe) definida del siguiente modo

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-st} f(t) dt$$

En los ejemplos de cálculo que se muestran en la sección 4.2.3 puede observarse que la transformada de Laplace de una función dada puede no existir para algunos valores de s o, incluso, para ningún valor de s , tal como muestra el siguiente caso:

Ejemplo:

- La función $f(t) = e^{t^2}$ no admite transformada de Laplace ya que, para cualquier s , se tiene que

$$e^{-st} e^{t^2} = e^{t(t-s)} > e^t$$

para $t > s + 1$, luego para $x > s + 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-st} e^{t^2} dt > \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{s+1}^x e^t dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - e^{s+1}) = +\infty$$

El siguiente resultado establece condiciones suficientes que garantizan la existencia de la transformada de Laplace y precisan su dominio de definición (esto es, los valores de s para los que existe).

Teorema 17 (de existencia de la transformada de Laplace): *Sea $f: [0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. La restricción de f a cualquier intervalo finito $[0, x] \subset \mathbb{R}$ es una función continua (por lo menos a trozos).
2. f es de orden exponencial γ ; es decir, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $\forall t \in [0, \infty)$.

Entonces la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ existe $\forall s \in (\gamma, \infty)$.

(Dem.) La primera condición garantiza la existencia de la integral $\int_0^x e^{-st} f(t) dt$ para todo $x > 0$. Sólo es necesario, pues, garantizar la convergencia de la integral en el intervalo $[0, \infty)$; pero, por ser $f(t)$ de orden exponencial γ , se tendrá que para $s > \gamma$

$$\int_0^x |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_0^x |e^{-(s-\gamma)t}| dt \leq M \int_0^\infty |e^{-(s-\gamma)t}| dt = \frac{1}{s-\gamma} \quad (4.1)$$

independientemente de x , por lo que la integral impropia es *absolutamente convergente* y, por tanto, convergente. ■

Definición 21 $f: [0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función admisible si:

1. La restricción de f a cualquier intervalo finito $[0, x] \subset \mathbb{R}$ es una función continua (por lo menos a trozos).
2. f es de orden exponencial γ .

Comentarios:

- La clase de funciones admisibles es suficientemente amplia para la mayoría de las aplicaciones. En ella se incluyen las funciones *polinómicas*, las *exponentiales*, las *logarítmicas* y las *periódicas* que sean continuas a trozos en cada periodo.
- Es inmediato probar, además, que la combinación lineal y el producto de funciones admisibles es otra función admisible

El siguiente resultado (cuya demostración se omite) permitirá invertir la transformación de Laplace en muchas ocasiones, sin necesidad de recurrir a una fórmula general de inversión que requiere integración en el campo complejo. Para ello bastará con descomponer la función $F(s)$ en suma de funciones que sean transformadas de funciones conocidas, ya que:

Teorema 18 (de unicidad de la transformada de Laplace): *Si $f(t), g(t)$ son funciones admisibles y $F(s) = G(s)$, para todo s grande, entonces $f(t) = g(t)$ en cada punto donde ambas son continuas. En particular, si f y g son continuas para todo $t \geq 0$, entonces $f = g$.*

4.2.2 Primeras propiedades

Para estudiar las propiedades de la transformación de Laplace resulta útil introducir el operador

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &: C^\infty([0, \infty)) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ f(t) &\mapsto F(s)\end{aligned}$$

Entonces, como primeras propiedades de las transformadas de Laplace se pueden establecer las siguientes:

Proposición 30 (Linealidad): *\mathcal{L} es un operador lineal; esto es, si $f(t), g(t)$ son funciones admisibles, entonces $af(t) + bg(t)$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) es también admisible y*

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t)) \equiv aF(s) + bG(s)$$

(Dem.) En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))dt = a \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt \\ &= a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t)) \equiv aF(s) + bG(s)\end{aligned}$$

■

La siguiente propiedad es el fundamento de la aplicación de las transformadas de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales. Así, teniendo en cuenta que si $f(t)$ es una función derivable tal que $f'(t)$ es admisible, entonces $f(t)$ también lo es, se tiene:

Proposición 31 (Derivación): *Sea $f(t)$ una función derivable tal que $f'(t)$ es admisible, entonces*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) \equiv sF(s) - f(0) \quad (4.2)$$

y, en general, si $f(t)$ es derivable hasta el orden n y $f^{(n)}(t)$ es una función admisible, entonces

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

(Dem.) Integrando por partes resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}(f(t)) = sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

y, en general, procediendo por inducción

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= s\mathcal{L}(f^{(n-1)}(t)) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s(s^{n-1} F(s) - s^{n-2} f(0) - \dots - f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)) \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

■

Comentario:

- En la anterior proposición se asume que $f(t)$ está definida en $t = 0$. De no ser así, al ser $f(t)$ admisible y, por tanto, continua a trozos, ha de existir $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ y se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^\infty e^{-st} f'(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (e^{-st} f(t)|_\epsilon^\infty + s \int_\epsilon^\infty e^{-st} f(t) dt) \\ &= -f(0^+) + s\mathcal{L}(f(t)) \equiv sF(s) - f(0^+)\end{aligned}$$

y lo mismo para el caso general.

La inversión de la transformación de Laplace se verá facilitada en gran medida por las siguientes propiedades:

Proposición 32 (Integración): *Si $f(u)$ una función integrable y admisible (con transformada de Laplace $F(s)$), entonces $\int_0^t f(u)du$ es admisible y*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(s)}{s}$$

(Dem.) Poniendo $g(t) = \int_0^t f(u)du$ se tiene que $g'(t) = f(t)$ con $g(0) = 0$, por lo que utilizando la propiedad de derivación

$$F(s) = \mathcal{L}(g'(t)) = s\mathcal{L}(g(t)) = s\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)$$

■

Proposición 33 (Valores inicial y final): *Si $f(t)$ es una función admisible (con transformada de Laplace $F(s)$) cuya derivada es admisible y existen los límites de $f(t)$ cuando $t \rightarrow 0^+$ y $t \rightarrow +\infty$, entonces*

1. $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$.
2. $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$.
3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$.

(Dem.) En efecto.

1. Es una consecuencia inmediata de la acotación $|F(s)| \leq \frac{M}{s - \gamma}$, que se obtiene, a su vez, de la acotación (4.1).

2. Se parte de la propiedad de derivación expresada como

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

Haciendo $s \rightarrow +\infty$ y teniendo en cuenta que, al ser $f'(t)$ admisible, se tiene que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f'(t)) = 0$, el resultado es inmediato.

3. Se parte de nuevo de la propiedad de derivación escrita ahora en la forma

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-st} f'(t) dt = sF(s) - f(0)$$

de donde, haciendo $s \rightarrow +\infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-st} f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^x e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0) \end{aligned}$$

(Se ha utilizado el hecho de que es posible intercambiar el orden de ejecución de los límites, por estar $F(s)$ definida en un entorno de $s = 0$). ■

Proposición 34 (Multiplicación por t): Si $f(t)$ es una función admisible (con transformada de Laplace $F(s)$), entonces

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{dF(s)}{ds}$$

(Dem.) En efecto, pues

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt$$

■

Proposición 35 (División por t): Si $\frac{f(t)}{t}$ es una función admisible, para lo cual, si $f(t)$ es admisible (con transformada de Laplace $F(s)$), es suficiente con que exista $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$, entonces

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u) du$$

(Dem.) Si $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ se tiene que $f(t) = tg(t)$, y utilizando la propiedad anterior

$$F(s) = -\frac{dG(s)}{ds}$$

de donde

$$\int_s^\infty F(u) du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_s^x F(u) du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_s^x -\frac{dG(u)}{du} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} (G(s) - G(x)) = G(s) = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$$

donde se ha utilizado la propiedad 1 de la proposición 33. ■

Proposición 36 (Multiplicación por e^{at}): Si $f(t)$ es una función admisible (con transformada de Laplace $F(s)$), entonces

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a)$$

(Dem.) En efecto, pues

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$$

■

Proposición 37 (Traslación): Si $f(t)$ es una función admisible (con transformada de Laplace $F(s)$), entonces la función

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

es admisible y

$$\mathcal{L}(\tilde{f}(t)) = e^{-as} F(s)$$

(Dem.) En efecto, pues

$$\mathcal{L}(\tilde{f}(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \tilde{f}(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt = (*)$$

y haciendo $t-a=u$,

$$(*) = \int_0^\infty e^{-su} e^{-sa} f(u) du = e^{-as} F(s)$$

■

Proposición 38 (Cambio de escala): *Si $f(t)$ es una función admisible (con transformada de Laplace $F(s)$) y $a > 0$, entonces*

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

(Dem.) En efecto, haciendo $at = u$

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

■

Proposición 39 (Funciones periódicas): *Si $f(t)$ es una función admisible periódica de periodo T ; es decir, $f(t+T) = f(t)$, entonces*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

(Dem.) En efecto,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = (*)$$

y haciendo $t = T + u$ en la última integral

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_0^\infty e^{-s(T+u)} f(T+u) du \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

■

4.2.3 Transformadas de Laplace de algunas funciones elementales

Vamos a utilizar algunas de las propiedades expuestas para calcular, a modo de ejemplo, las transformadas de Laplace de algunas funciones elementales.

1. $f(t) = 1$.

$$\mathcal{L}(1) := \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-st} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-sx}}{s} = \frac{1}{s}$$

si $s > 0$, no existiendo si $s \leq 0$.

2. $f(t) = t^n$.

Para $n = 1$ se tiene

$$\mathcal{L}(t) := \int_0^\infty e^{-st} t dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}$$

si $s > 0$, no existiendo si $s \leq 0$. (También se obtiene a partir del primer resultado y usando la propiedad de multiplicación por t).

Para $n = 2$, partiendo del anterior resultado y usando la propiedad de multiplicación por t ,

$$\mathcal{L}(t^2) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

Finalmente, por inducción

$$\mathcal{L}(t^n) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(t^{n-1}) = -\frac{d}{ds} \frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

3. $f(t) = t^n e^{at}$.

Partiendo del resultado anterior y usando la propiedad de multiplicación por e^{at} :

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

4. $f(t) = e^{at}$.

$$\mathcal{L}(e^{at}) := \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

si $s > a$, no existiendo si $s \leq a$. (También se obtiene a partir del primer resultado y usando la propiedad de multiplicación por e^{at}).

5. $f(t) = \cos bt$, $g(t) = \sin bt$.

Sus transformadas de Laplace se pueden determinar directamente como en los otros ejemplos, pero es más cómodo utilizar la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos bt) + i\mathcal{L}(\sin bt) &:= \int_0^\infty e^{-st} \cos bt dt + i \int_0^\infty e^{-st} \sin bt dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} (\cos bt + i \sin bt) dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{ibt} dt = \frac{1}{s - ib} = \frac{s + ib}{s^2 + b^2} \end{aligned}$$

e igualando partes real e imaginaria se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos bt) &= \frac{s}{s^2 + b^2} \\ \mathcal{L}(\sin bt) &= \frac{b}{s^2 + b^2} \end{aligned}$$

6. $f(t) = e^{at} \cos bt$, $g(t) = e^{at} \sin bt$.

Partiendo del resultado anterior y usando la propiedad de multiplicación por e^{at} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{at} \cos bt) &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \\ \mathcal{L}(e^{at} \sin bt) &= \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \end{aligned}$$

7. $f(t) = t \cos bt$, $g(t) = t \sin bt$.

Partiendo del mismo resultado que antes y usando la propiedad de multiplicación por t :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \cos bt) &= \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2} \\ \mathcal{L}(t \sin bt) &= \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2} \end{aligned}$$

Comentario:

- Naturalmente el uso de las propiedades expuestas puede reiterarse. Así, p. ej., para obtener la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \int_0^t e^{-u} u \sin u du$$

se parte de la transformada de $f(t) = \sin t$ y basta con aplicar sucesivamente las propiedades de multiplicación por t , de multiplicación por e^{at} y de integración, para obtener

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-u} u \sin u du\right) = \frac{2(s+1)}{s((s+1)^2 + 1)^2}$$

4.2.4 Inversión (por descomposición en fracciones simples)

Se va a estudiar, finalmente, el problema de *invertir la transformación de Laplace*. En general ello requiere considerar s como variable compleja e integrar en el plano complejo. Afortunadamente, en muchos casos de las aplicaciones, la transformada de Laplace es una función racional con el polinomio del numerador de grado menor que el del denominador (ésto es una consecuencia de la propiedad del *valor inicial* (1)). En tales casos es más fácil invertir la transformación utilizando el método que a continuación se describe.

Sea la función racional $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios con coeficientes reales y grado($P(s)$) < grado($Q(s)$). El procedimiento consiste en descomponer la función en suma de fracciones simples. Entonces, pueden darse los siguientes casos, según las características de las raíces de $Q(s)$:

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz de $Q(s)$ con multiplicidad μ , entonces en la descomposición en fracciones simples aparecen los factores

$$\frac{A_1}{s - \alpha}, \quad \frac{A_2}{(s - \alpha)^2}, \quad \dots, \quad \frac{A_\mu}{(s - \alpha)^\mu} \quad (A_k \in \mathbb{R})$$

y, de acuerdo con los resultados del apartado anterior, para cada uno de ellos se tiene, en general, $\forall k = 1, \dots, \mu$,

$$\frac{A_k}{(s - \alpha)^k} = \frac{A_k}{(k - 1)!} \frac{(k - 1)!}{(s - \alpha)^k} = \mathcal{L} \left(\frac{A_k}{(k - 1)!} t^{k-1} e^{\alpha t} \right)$$

- Si $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ es una raíz de $Q(s)$, también lo es su conjugada $\alpha - i\beta \in \mathbb{C}$, ambas con la misma multiplicidad μ . Entonces se pueden englobar los factores correspondientes a estas dos raíces en un sólo sumando, debiéndose distinguir los siguientes casos:

- Si la multiplicidad es $\mu = 1$: Entonces el término correspondiente a estas raíces que aparece en la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{As + B}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{A(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A\alpha + B}{\beta} \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} = \mathcal{L} \left(Ae^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{A\alpha + B}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \right)$$

- Si la multiplicidad es $\mu = 2$: Entonces, en la descomposición en fracciones simples correspondiente a estas raíces aparece, además del anterior, el término

$$\frac{Cs + D}{((s - \alpha)^2 + \beta^2)^2} = \frac{C}{2\beta} \frac{2\beta(s - \alpha)}{((s - \alpha)^2 + \beta^2)^2} + (C\alpha + D) \frac{1}{((s - \alpha)^2 + \beta^2)^2}$$

Para el primer sumando se tiene

$$\frac{2\beta(s - \alpha)}{((s - \alpha)^2 + \beta^2)^2} = \mathcal{L} (e^{\alpha t} t \sin \beta t)$$

y para el segundo

$$\begin{aligned} \frac{1}{((s - \alpha)^2 + \beta^2)^2} &= \frac{1}{2\beta^2} \frac{(s - \alpha)^2 + \beta^2 - (s - \alpha)^2 + \beta^2}{((s - \alpha)^2 + \beta^2)^2} \\ &= \frac{1}{2\beta^3} \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{1}{2\beta^3} \frac{(s - \alpha)^2 - \beta^2}{((s - \alpha)^2 + \beta^2)^2} \\ &= \frac{1}{2\beta^3} \mathcal{L}(e^{\alpha t} \sin \beta t) - \frac{1}{2\beta^2} \mathcal{L}(e^{\alpha t} \cos \beta t) \end{aligned}$$

- Si la multiplicidad es $\mu > 2$, entonces la inversión de los correspondientes términos es más cómoda si se utilizan los métodos de *convolución* que se expondrán al final del capítulo.

Comentario:

- Obsérvese que, al expresar la función racional como suma de fracciones simples e invertir la transformación de Laplace, se está haciendo uso de la propiedad expresada en el *teorema de unicidad de la transformada de Laplace*.

- El cálculo de los coeficientes que aparecen en la descomposición en fracciones simples puede hacerse por el conocido método de *coeficientes indeterminados*. Sin embargo, para los términos correspondientes a raíces reales (y, en particular, cuando son simples) es más cómodo el siguiente método:

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz de $Q(s)$ con multiplicidad μ , se tiene

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{A_k}{(s - \alpha)^k} + R(s)$$

donde $R(s)$ es una función racional cuyo denominador ya no contiene la raíz α . Multiplicando ambos miembros por $(s - \alpha)^{\mu}$ se obtiene

$$\frac{P(s)}{Q(s)/(s - \alpha)^{\mu}} = \sum_{k=1}^{\mu} A_k (s - \alpha)^{\mu-k} + (s - \alpha)^{\mu} R(s)$$

e identificando el segundo miembro como el desarrollo de Taylor del primero, se obtiene que

$$A_{\mu} = \left. \frac{P(s)}{Q(s)/(s - \alpha)^{\mu}} \right|_{s=\alpha}, \quad A_{\mu-1} = \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{P(s)}{Q(s)/(s - \alpha)^{\mu}} \right) \right|_{s=\alpha}$$

y, en general

$$A_k = \frac{1}{(\mu - k)!} \left. \frac{d^{\mu-k}}{ds^{\mu-k}} \left(\frac{P(s)}{Q(s)/(s - \alpha)^{\mu}} \right) \right|_{s=\alpha}$$

4.3 Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales

4.3.1 Resolución de problemas de valor inicial de ecuaciones y sistemas con coeficientes constantes

Utilizando únicamente las propiedades de *linealidad* y de *derivación* de la transformación de Laplace, se está ya en condiciones de resolver algunos problemas de valor inicial para:

1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
3. Ecuaciones íntegro-diferenciales.

(Véanse ejemplos en la colección de problemas).

4.3.2 Excitaciones discontinuas: Función de Heaviside

El uso de la transformada de Laplace para la resolución de los problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales señalados en el apartado anterior muestra toda su eficacia cuando la función que aparece en el término independiente de la ecuación (o sistema) presenta discontinuidades de salto en uno o varios puntos de su dominio ¹.

Para tratar este tipo de problemas con el método de la transformación de Laplace es de gran utilidad la siguiente función:

Definición 22 Se denomina función de Heaviside o función de salto unidad a la función

$$u(t - a) \equiv u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si } a \leq t \end{cases}$$

Si $a = 0$ se escribe simplemente $u(t)$.

¹Ello corresponde a que el sistema modelado por dicha ecuación presente saltos bruscos en uno o varios instantes.

El resultado de mayor interés para nosotros es:

Proposición 40 La transformada de Laplace de $u_a(t)$ es

$$\mathcal{L}(u_a(t)) = \frac{e^{-sa}}{s}$$

En particular $\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s}$.

(Dem.) Inmediata, pues

$$\mathcal{L}(u_a(t)) := \int_0^\infty e^{-st} u_a(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-sa}}{s}$$

■

Comentarios:

- Una función que presente discontinuidades de salto tal como

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } 0 \leq t < a \\ f_2(t) & \text{si } a \leq t < b \\ f_3(t) & \text{si } b \leq t \end{cases}$$

se puede expresar en términos de la función de Heaviside de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t)(u(t) - u(t-a)) + f_2(t)(u(t-a) - u(t-b)) + f_3(t)u(t-b) \\ &= f_1(t) + (f_2(t) - f_1(t))u(t-a) + (f_3(t) - f_2(t))u(t-b) \end{aligned}$$

- La propiedad de traslación puede expresarse ahora en términos de la función de Heaviside como

$$\mathcal{L}(\tilde{f}(t)) = \mathcal{L}(u(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

(donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$), fórmula que permite el cálculo de la transformada de Laplace de una función con discontinuidades de salto y también su inversión.

(Véanse ejemplos en la colección de problemas).

4.3.3 Delta de Dirac

Hay muchas aplicaciones cuya modelización matemática conduce a ecuaciones diferenciales lineales (con coeficientes constantes) en las que la función $f_\epsilon(t)$ del término independiente es nula fuera de un estrecho intervalo $[a, a + \epsilon]$ en el que toma valores arbitrariamente grandes. Normalmente, además, estos valores son desconocidos, disponiéndose únicamente del valor de la integral $\mathcal{I} = \int_\alpha^\beta f_\epsilon(t)dt$ (si $\alpha \leq a < a + \epsilon \leq \beta$).

Este tipo de situaciones se presenta en problemas de naturaleza impulsiva. Por ejemplo, en un sistema mecánico formado por una masa sujeta mediante un resorte elástico, al golpear con un martillo en un instante $t = a$, comunicando un impulso de valor \mathcal{I} durante un breve intervalo de tiempo $[a, a + \epsilon]$, en el cual el martillo está en contacto con la masa (en este caso, $f_\epsilon(t)$ representa la fuerza aplicada en ese lapso de tiempo). También en el caso de un circuito eléctrico RCL , cuya ecuación

$$e(t) = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau$$

se deriva para obtener la ecuación diferencial

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{de}{dt} = f_\epsilon(t)$$

cuando la tensión cambia bruscamente en el instante α (de hecho entre α y $\alpha + \epsilon$) desde un valor e_0 hasta el valor $e_0 + \mathcal{I}$.

Para tratar estas situaciones se va a considerar el caso ideal que se obtiene al hacer que $\epsilon \rightarrow 0$. Fijando $\mathcal{I} = 1$, si $f_\epsilon \rightarrow f_0$, esta “función” f_0 debería satisfacer

$$f_0(t) = 0 \quad \text{para } t \neq \alpha \quad ; \quad \int_{\alpha}^{\beta} f_0(t) dt = 1 \quad \text{si } \alpha \leq a < \beta$$

condiciones que no puede verificar ninguna función ordinaria.

Obsérvese, no obstante, que lo que realmente interesa no es obtener el valor del límite de f_ϵ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, sino resolver el problema de valor inicial

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f_\epsilon(t) \quad ; \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad (4.3)$$

para el caso $\epsilon \rightarrow 0$, y que en la resolución de un problema como éste (que para simplificar se ha tomado con condiciones iniciales homogéneas) no es preciso conocer los valores de $f_\epsilon(t)$ sino simplemente el valor de integrales de la forma $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)f_\epsilon(t)dt$, donde $g(t)$ es una función continua. En efecto, la solución de (4.3) obtenida por el método de variación de constantes a partir de dos soluciones y_1 e y_2 de la ecuación lineal homogénea asociada es, como se puede comprobar,

$$y(t) = y_1(t) \int_0^t \frac{-y_2(\tau)}{a_2 W(\tau)} f_\epsilon(\tau) d\tau + y_2(t) \int_0^t \frac{y_1(\tau)}{a_2 W(\tau)} f_\epsilon(\tau) d\tau$$

Análogamente, la resolución del problema de valor inicial (4.3) utilizando la transformación de Laplace conduce a la ecuación

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_\epsilon(t) dt$$

de donde se obtiene $Y(s)$ e, invirtiendo, $y(t)$. En ambos casos $f_\epsilon(t)$ sólo interviene como integrando multiplicado por una función continua.

Así pues, para resolver el caso ideal planteado ($\epsilon \rightarrow 0$) hay que calcular $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)f_\epsilon(t)dt$ cuando $g(t)$ es una función continua. Se tiene:

Lema 5 Si $g(t)$ es continua en $[\alpha, \beta]$, entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)f_\epsilon(t)dt = \begin{cases} g(a) & \text{si } \alpha \leq a < \beta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(Dem.) Si α es tal que $\alpha \leq a < \beta$, para ϵ suficientemente pequeño $\alpha \leq a < a + \epsilon < \beta$, y como $f_\epsilon(t) = 0$ para $t \notin [a, a + \epsilon]$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)f_\epsilon(t)dt = \int_a^{a+\epsilon} g(t)f_\epsilon(t)dt$$

Ahora, con $m_\epsilon = \min_{[a, a+\epsilon]} g(t)$ y $M_\epsilon = \max_{[a, a+\epsilon]} g(t)$, se tiene

$$m_\epsilon \int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon(t)dt \leq \int_a^{a+\epsilon} g(t)f_\epsilon(t)dt \leq M_\epsilon \int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon(t)dt$$

es decir

$$m_\epsilon \leq \int_a^{a+\epsilon} g(t)f_\epsilon(t)dt \leq M_\epsilon$$

pero como g es continua, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, tanto m_ϵ como M_ϵ tienden a $g(a)$, luego

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)f_\epsilon(t)dt = g(a)$$

Si $a \geq \beta$ entonces $f_\epsilon(t) = 0$ en $[\alpha, \beta]$, y si $a \leq \alpha$ entonces, para ϵ suficientemente pequeño, $a + \epsilon < a$, luego también $f_\epsilon(t) = 0$ en $[\alpha, \beta]$, por tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)f_\epsilon(t)dt = 0$$

■

Este resultado permite considerar el caso ideal $\epsilon \rightarrow 0$ (en que $f_\epsilon \rightarrow f_0$) en la situación descrita. Para ello se define la siguiente “función” ²:

Definición 23 Se denomina delta de Dirac a la “función” $\delta(t - a)$ tal que, para toda función continua $g(t)$ en $[\alpha, \beta]$, verifica que

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\delta(t - a)dt = \begin{cases} g(a) & \text{si } \alpha \leq a < \beta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esta definición, el caso $\epsilon \rightarrow 0$ en un problema de valor inicial como (4.3) (pero con condiciones iniciales cualesquiera) conduce a la ecuación

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = \mathcal{I}\delta(t - a) ; \quad y(0) = y_0 , \quad y'(0) = y_1$$

para cuya resolución basta con conocer $\mathcal{L}(\delta(t - a))$.

Proposición 41 La transformada de Laplace de $\delta(t - a)$ es

$$\mathcal{L}(\delta(t - a)) = e^{-sa}$$

En particular, para $a = 0$, $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$.

(Dem.) Inmediata, pues de la propia definición se obtiene que

$$\mathcal{L}(\delta(t - a)) := \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t - a)dt = e^{-sa}$$

■

(Véanse ejemplos en la colección de problemas).

4.3.4 Convolución y sistemas lineales

A menudo se presenta el problema de determinar la respuesta de un sistema sometido a varias excitaciones de diverso tipo simultáneamente. Considérese como modelo el caso en que la formulación matemática del sistema conduce al problema de valor inicial (4.3)

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) ; \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0 \quad (4.4)$$

con $f(t)$ conteniendo diferentes expresiones tipos de funciones (para simplificar se han considerado condiciones iniciales homogéneas). Su resolución mediante la transformada de Laplace lleva a

$$Y(s) = \frac{1}{a_2s^2 + a_1s + a_0}F(s) \equiv H(s)F(s) \quad (4.5)$$

y sólo resta invertir la transformación de Laplace para obtener $y(t)$. Sin embargo, sería deseable hacerlo de tal forma que al cambiar $f(t)$ y, por tanto $F(s)$, no hubiera que rehacer todos los cálculos. Para ello, se comienza observando que en la anterior expresión $H(s) = \frac{1}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$ es la transformada de Laplace de la función $h(t)$, solución del problema de valor inicial dado cuando $F(s) = 1$, es decir, cuando $f(t) = \delta(t)$. Entonces:

$$a_2h''(t) + a_1h'(t) + a_0h(t) = \delta(t) ; \quad h(0) = 0 , \quad h'(0) = 0$$

²Realmente no se trata de una verdadera función en el sentido ordinario, sino de una distribución.

Definición 24 Dado un problema de valor inicial

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) \quad ; \quad y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y_1$$

se denomina función de transferencia o respuesta impulsional del sistema a la función $h(t)$ solución del problema de valor inicial

$$a_2h''(t) + a_1h'(t) + a_0h(t) = \delta(t) \quad ; \quad h(0) = 0 \quad , \quad h'(0) = 0 \quad (4.6)$$

esto es a la función cuya transformada de Laplace es $\frac{1}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$.

Comentario:

- Nótese que sólo pueden darse los siguientes casos:

1. La solución general de la ecuación (4.6) es $h(t) = (c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)e^{at}$, si las raíces del polinomio característico asociado son del tipo $\lambda = a + bi$.

En este caso, la solución particular del problema de valor inicial da $c_1 = 0$.

2. La solución general de la ecuación (4.6) es $h(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$, si las raíces del polinomio característico son $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

En este caso, la solución particular del problema de valor inicial da $c_1 = -c_2$.

3. La solución general de la ecuación (4.6) es $h(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}$, si las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda \in \mathbb{R}$.

En este caso, la solución particular del problema de valor inicial da $c_1 = 0$.

- Obsérvese que la función de transferencia de un sistema depende únicamente de “la parte fija” del problema, correspondiente a los coeficientes a_i .

La expresión (4.5) sugiere que $y(t)$ esté relacionada directamente con $h(t)$ y $f(t)$. Se trata de discernir cómo. En general se tiene que $y(t) \neq h(t)f(t)$, ya que $\mathcal{L}(h(t)f(t)) \neq \mathcal{L}(h(t))\mathcal{L}(f(t))$. El resultado correcto es:

Proposición 42 El problema de valor inicial (4.4) (cuya resolución por el método de Laplace conduce a la expresión (4.5)) tiene como solución la función

$$y(t) \simeq \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

(Dem.) Se va a aproximar la función $f(t)$ mediante

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i)(u(t-t_i) - u(t-t_{i+1}))$$

y, a su vez, se va a utilizar la aproximación

$$u(t-t_i) - u(t-t_{i+1}) \simeq \Delta t_i \delta(t-t_i)$$

con lo que, si $c_i = f(t_i)\Delta t_i$,

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{N-1} c_i \delta(t-t_i)$$

A continuación se van a utilizar dos propiedades básicas de las soluciones de problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales lineales. En primer lugar, es válido el principio de superposición, por lo que la solución correspondiente a una combinación lineal de excitaciones es la correspondiente combinación de las soluciones a cada una de las excitaciones. Así pues, se puede aproximar la solución $y(t)$ por

$$y(t) \simeq \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i(t)$$

donde $y_i(t)$ son las soluciones de

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = \delta(t - t_i) ; \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0$$

En segundo lugar, por la propiedad de *invariancia en el tiempo* del sistema se ha de tener que $y_i(t) = h(t - t_i)u(t - t_i)$, lo que se traduce en

$$\mathcal{L}(y_i(t)) = H(s)\mathcal{L}(\delta(t - t_i)) = H(s)e^{-st_i}$$

obteniéndose, así, que

$$y(t) \simeq \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i)\Delta t_i h(t - t_i)u(t - t_{i+1})$$

El segundo miembro de esta expresión puede verse como una *suma de Riemann*, por lo que, al hacer $N \rightarrow \infty$ y $\max\{\Delta t_i, 0 \leq i \leq N-1\} \rightarrow 0$, se tendrá

$$y(t) \simeq \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)u(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

ya que $u(t - \tau) = 1$ para $\tau < t$. ■

Definición 25 *Dadas dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, se denomina producto de convolución de las mismas a la función (si existe)*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

De la discusión precedente se obtiene inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 19 (de Convolución): *Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones admisibles, entonces $f(t) * g(t)$ también lo es y*

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))$$

Comentario:

- El producto de convolución es muy útil para invertir la transformación de Laplace, ya que, del *teorema de convolución* se obtiene de inmediato que si $Y(s) = F(s)G(s)$ y $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ y $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$ entonces $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = (f * g)(t)$.

Utilizando la definición y/o este teorema es inmediato comprobar las siguientes propiedades:

Proposición 43 *Sean $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ funciones admisibles, entonces:*

1. $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.
2. $(f * (g + h))(t) = (f * g)(t) + (f * h)(t)$.
3. $((f * g) * h)(t) = (f * (g * h))(t)$.
4. $(\delta * f)(t) = f(t)$.

Teniendo presente todo ésto, se puede ahora afirmar que la solución del problema de valor inicial (4.4) es

$$y(t) = (f * h)(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

y si se modifica $f(t)$ sólo será necesario modificar, en consecuencia, el cálculo del producto de convolución con la función de transferencia del sistema.

(Véanse ejemplos en la colección de problemas).

Chapter 5

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

5.1 Introducción

Igual que en los capítulos anteriores, siempre que no se haga alguna precisión más concreta, se asumirá que todas las funciones son diferenciables con continuidad hasta el orden que se deseé.

5.2 Ecuaciones en derivadas parciales y problemas de contorno

5.2.1 Definiciones básicas

Antes de comenzar conviene recordar que, como se definió en el primer capítulo, una ecuación diferencial es una relación entre una función (suficientemente derivable), sus variables y una o varias derivadas sucesivas de la función. En forma implícita es una expresión del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Entonces:

Definición 26 Se denomina ecuación diferencial en derivadas parciales a una ecuación diferencial en la que la función incógnita es de varias variables, $u \equiv u(x_1, \dots, x_n)$. Esto es, una expresión del tipo:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots\right) = 0$$

(Las ecuaciones en derivadas parciales se suelen expresar siempre en forma implícita).

1. Se denomina orden de la ecuación al de la derivada de mayor orden que interviene en la ecuación.
2. Se denomina grado de la ecuación al exponente de la derivada de mayor orden.

Igual que con las ecuaciones diferenciales ordinarias, se van a tratar, en particular, las ecuaciones en derivadas parciales de tipo lineal:

Definición 27 Una ecuación diferencial en derivadas parciales es de tipo lineal si es de primer grado en la función incógnita u y en sus derivadas parciales. Se suele escribir $L(u) = f$ (donde u y f son funciones de varias variables y L es un operador lineal que puede contener en su expresión funciones de las variables independientes).

La ecuación lineal es homogénea si no tiene término independiente; esto es, $f = 0$.

Ejemplos:

- Una ecuación en derivadas parciales lineal es, por ejemplo,

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^x\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)$$

donde $L = 2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^x\frac{\partial}{\partial y}$.

- No es una ecuación en derivadas parciales lineal la siguiente

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

ya que $L = u\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ no es un operador lineal, como puede comprobarse fácilmente.

En este capítulo se prestará especial atención a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden ya que, como se verá, son las que aparecen en las principales aplicaciones.

5.2.2 Problemas de contorno. Tipos de condiciones de contorno y de valor inicial

En el contexto de este capítulo, un *problema de contorno* consiste en resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales, esto es, en hallar una función u que satisfaga dicha ecuación en algún dominio de las variables independientes, así como ciertas condiciones de la función y/o sus derivadas parciales en el contorno de este dominio. También se acostumbra a exigir condiciones de continuidad de u y sus derivadas en el dominio en cuestión y su contorno.

Las condiciones de contorno que se van a considerar principalmente son las siguientes:

Definición 28 Un problema de contorno es lineal si la ecuación en derivadas parciales a la que está asociado es lineal y las propias condiciones de contorno también son lineales. Se tiene, por tanto:

$$\text{e.d.p. lineal:} \quad L(u) = f$$

$$\text{Conds. cont. lineales:} \quad L_1(u) = f_1, \dots, L_k(u) = f_k$$

Si $f_1 = \dots = f_k = 0$ se dice que las condiciones de contorno son homogéneas.

Ejemplo:

- En el recinto $0 < x < 1, y > 0$ se define

$$\text{e.d.p. lineal:} \quad L(u(x, y)) := \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin \pi x$$

$$\text{Conds. cont. lineales:} \quad L_1(u(x, 0)) := u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$L_2(u(x, 0)) := \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$L_3(u(0, y)) := u(0, y) = 0, \quad y \geq 0$$

$$L_4(u(1, y)) := u(1, y) = 0, \quad y \geq 0$$

En este ejemplo se tiene $f = \sin \pi x$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$; luego las condiciones de contorno son lineales y homogéneas.

Igual que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 44 (Principio de superposición de soluciones): *Sea una ecuación en derivadas parciales lineal y homogénea $L(u) = 0$. Si u_1, \dots, u_n son soluciones, entonces:*

1. *Cualquier combinación lineal de las mismas, $u = \sum_{k=1}^n c_k u_k$, es también solución.*
2. *Si u_1, \dots, u_n son soluciones que satisfacen una condición de contorno lineal y homogénea, entonces cualquier combinación lineal de las mismas, $u = \sum_{k=1}^n c_k u_k$, satisface también la condición dada.*

(Dem.) Evidente pues, por ser L lineal

$$L(u) = L\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k\right) = \sum_{k=1}^n c_k L(u_k) = 0$$

y la segunda parte de la proposición es inmediata. ■

A continuación se van a introducir las diversas maneras en que pueden presentarse las condiciones de contorno.

Definición 29 *Un problema de contorno es de tipo Dirichlet si las condiciones de contorno consisten en dar los valores de la función incógnita u en el contorno del dominio de definición del problema.*

Definición 30 *Un problema de contorno es de tipo Newmann si las condiciones de contorno consisten en dar los valores de la derivada direccional $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ de la función incógnita u , en la dirección normal al contorno del dominio de definición del problema, sobre los puntos de dicho contorno.*

Definición 31 *Un problema de contorno es de tipo mixto si las condiciones de contorno consisten en dar los valores de una combinación lineal de la función incógnita u y de la derivada direccional $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ (en la dirección normal al contorno del dominio de definición del problema) sobre los puntos de dicho contorno. Es decir, de*

$$hu + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$$

donde h es una constante arbitraria o una función de las variables independientes.

Definición 32 *Un problema de contorno es de tipo Cauchy si la ecuación en derivadas parciales es de segundo orden en alguna de las variables (p. ej., y) y las condiciones de contorno consisten en dar los valores de la función incógnita u y de la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial y}$ en $y = 0$.*

Más adelante se verá cómo se resuelven diversos tipos de ecuaciones en derivadas parciales sometidas a diferentes clases de condiciones de contorno.

5.2.3 Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales

Considérese una ecuación en derivadas parciales de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes. Por simplicidad se tratará la cuestión en dos dimensiones; esto es, se supondrá que la función incógnita depende de dos variables, $u = u(x, y)$. Con estas hipótesis, se están considerando ecuaciones cuya expresión general es

$$L(u) := A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (5.1)$$

donde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ son constantes. En estas condiciones se tiene el siguiente resultado general:

Proposición 45 Toda ecuación en derivadas parciales de segundo orden lineal con coeficientes constantes (en dos dimensiones) del tipo (5.1) puede convertirse (por medio de transformaciones lineales) en una de los tres siguientes tipos:

1. Una ecuación lineal con coeficientes constantes con un único término de segundo orden en el que aparecen las derivadas parciales cruzadas de la función incógnita.
2. Una ecuación lineal con coeficientes constantes con un único término de segundo orden en el que no aparecen las derivadas parciales cruzadas de la función incógnita.
3. Una ecuación lineal con coeficientes constantes con dos términos de segundo orden (con el mismo coeficiente) en los que no aparecen las derivadas parciales cruzadas de la función incógnita.

(Dem.) Si se efectúa el siguiente cambio lineal de coordenadas

$$t = \alpha x + \beta y, \quad s = \mu x + \lambda y \quad (5.2)$$

(con $\alpha, \beta, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ parámetros arbitrarios) y se designa por $\tilde{u} = \tilde{u}(t, s)$ a la función transformada de $u(x, y)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \beta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \alpha \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial s} + \mu \alpha \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s \partial t} + \mu^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + 2\alpha\mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial s} + \mu^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \alpha \beta \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \alpha \lambda \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial s} + \mu \beta \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s \partial t} + \mu \lambda \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} = 2\alpha\beta \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + (\alpha\lambda + \mu\beta) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial s} + 2\mu\lambda \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \beta \lambda \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial s} + \lambda \beta \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s \partial t} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + 2\beta\lambda \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial s} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} \end{aligned}$$

con lo que la ecuación (5.1) se transforma en

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha^2 A + \alpha\beta B + \beta^2 C) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (2\alpha\mu A + (\alpha\lambda + \mu\beta)B + 2\beta\lambda C) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + (\mu^2 A + \mu\lambda B + \lambda^2 C) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \\ &D(\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + E(\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial s} + Fu \end{aligned}$$

Analicemos la forma de los términos de segundo orden, de manera que se obtenga una de las tres opciones consideradas.

1. La ecuación tiene un sólo término de segundo orden en el que aparecen las derivadas parciales cruzadas de la función incógnita.

Hay dos posibilidades:

- Si $A = C = 0$ el resultado es directo sin necesidad de realizar la transformación (5.2).
- Supóngase que $A \neq 0$ (y/o $C \neq 0$). Entonces ha de tenerse que

$$\alpha^2 A + \alpha\beta B + \beta^2 C = 0, \quad \mu^2 A + \mu\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

o, equivalentemente

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 A + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) B + C = 0, \quad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) B + C = 0$$

de donde, despejando, se obtiene la siguiente relación

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{2A}(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}), \quad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{1}{2A}(-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}) \quad (5.3)$$

(en una de las igualdades se toma el signo + y en la otra el -). Para que la transformación (5.2) no sea singular ha de ser $\frac{\alpha}{\beta} \neq \frac{\mu}{\lambda}$, por lo que la ecuación adopta la forma deseada

$$B \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial s} + D' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + E' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + F \tilde{u} = 0$$

si, y sólo si, $B^2 - 4AC > 0$.

2. La ecuación tiene un sólo término de segundo orden en el que no aparecen las derivadas parciales cruzadas de la función incógnita.

Hay dos posibilidades:

- (a) Si $B = C = 0$ ó $B = A = 0$ el resultado es directo sin necesidad de realizar la transformación (5.2).
- (b) Suponiendo de nuevo que $A \neq 0$ (y/o $C \neq 0$), entonces ha de tenerse que

$$\alpha^2 A + \alpha\beta B + \beta^2 C = 0 , \quad 2\alpha\mu A + (\alpha\lambda + \mu\beta)B + 2\beta\lambda C = 0$$

Si $B^2 - 4AC = 0$, de la primera de las expresiones (5.3) se obtiene que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-B}{2A}$, con lo que se logra la anulación del primer coeficiente. Por otra parte, si se toma $\mu = 1$ y $\lambda = 0$; es decir, se realiza la transformación

$$t = -Bx + 2Ay , \quad s = x$$

la segunda ecuación se reduce a

$$2\alpha A + \beta B = 0$$

con lo que se obtiene una ecuación en derivadas parciales del tipo ¹:

$$A \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} + D' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + E' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + F \tilde{u} = 0$$

3. La ecuación tiene dos términos de segundo orden en los que no aparecen las derivadas parciales cruzadas de la función incógnita.

Hay dos posibilidades:

- (a) Si $B = 0$ el resultado es directo sin necesidad de realizar la transformación (5.2).
- (b) Si $B \neq 0$, la transformación

$$t = \frac{-Bx + 2Ay}{\sqrt{4AC - B^2}} , \quad s = x$$

(es pues necesario que $B^2 - 4AC < 0$) convierte la ecuación en derivadas parciales inicial en una de la forma

$$A \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} \right) + D' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + E' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + F \tilde{u} = 0$$

■

La discusión precedente da origen a la siguiente definición que clasifica las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales con coeficientes constantes:

Definición 33 *Dada una ecuación en derivadas parciales de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes (en dos dimensiones) del tipo (5.1).*

1. La ecuación es del tipo hiperbólico (y el operador lineal L es hiperbólico) si $B^2 - 4AC > 0$; es decir, es del primer tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

¹Si se desea que el término que aparezca sea $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}$, el análisis a efectuar es análogo.

2. La ecuación es del tipo parabólico (y el operador lineal L es parabólico) si $B^2 - 4AC = 0$; es decir, es del segundo tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

3. La ecuación es del tipo elíptico (y el operador lineal L es elíptico) si $B^2 - 4AC < 0$; es decir, es del tercer tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

Comentario:

- Esta clasificación es de gran relevancia ya que, para cada clase de ecuación, el tipo de condición de contorno y la naturaleza de la solución son diferentes (como ya se verá). Además, cada una de ellas corresponde, en las aplicaciones, a un tipo diferente de problema físico:
 1. Las hiperbólicas describen problemas de vibraciones (y requieren dos condiciones iniciales, además de las de contorno).
 2. Las parabólicas describen problemas de difusión (y requieren una condición inicial, además de las de contorno).
 3. Las elípticas describen problemas de estados de equilibrio (y no requieren condiciones iniciales, además de las de contorno).

Antes de abordar el estudio y resolución de estos tipos de ecuaciones sometidos a diferentes condiciones de contorno, es preciso dar algunas nociones sobre las *series de funciones trigonométricas* conocidas como *series de Fourier*.

5.3 Series de Fourier y funciones ortogonales

5.3.1 Series y coeficientes de Fourier

En el estudio de muchos problemas físicos que se modelizan por medio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (p. ej., problemas de *vibraciones mecánicas*, *conducción del calor*, *transmisión de ondas*, *electromagnetismo*, etc.) es necesario trabajar con *series de funciones trigonométricas* del tipo

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.4)$$

Aparte de ello, el estudio puramente teórico de estas series ha influido notablemente en el desarrollo del análisis matemático en los últimos 250 años.

Una ventaja de estas series es que son capaces de representar funciones de tipo muy general con muchas discontinuidades (como, p. ej., las funciones discontinuas de *impulso* en ingeniería electrónica); mientras que, p. ej., las *series de potencias* sólo pueden representar funciones de clase C^∞ .

Se va a comenzar su estudio presentando algunos cálculos clásicos que fueron realizados inicialmente por *Euler*, y que se recogen en la siguiente:

Proposición 46 *Sea una serie trigonométrica del tipo*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.5)$$

tal que converge uniformemente a una función $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces los coeficientes de la serie son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

(Dem.) Por ser la serie uniformemente convergente en $[-\pi, \pi]$ es integrable término a término en dicho intervalo, por lo que, teniendo en cuenta que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

la integración término a término conduce a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

(obsérvese que el término $\frac{a_0}{2}$ es, por tanto, el valor medio de $f(x)$ en el intervalo considerado). Multiplicando ahora (5.4) por $\cos nx$ resulta

$$f(x) \cos nx = \frac{1}{2} a_0 \cos nx + a_1 \cos x \cos nx + b_1 \sin x \cos nx + \dots + a_n \cos^2 x + b_n \sin nx \cos nx + \dots \quad (5.7)$$

y, teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x) \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x) \\ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) \end{aligned}$$

es fácil comprobar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad ; \quad (\text{si } m \neq n)$$

por lo que, integrando término a término (5.7) se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

Realizando un proceso análogo, pero multiplicando por $\sin nx$ y usando que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad ; \quad (\text{si } m \neq n)$$

se llega a que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = b_n \pi \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

■

La situación presentada en esta proposición es, no obstante, demasiado restrictiva, ya que se asume que la serie trigonométrica es uniformemente convergente a la función $f(x)$ o, lo que es lo mismo, que esta función es desarrollable por medio de una serie trigonométrica uniformemente convergente. Estas hipótesis no estarán, en general, aseguradas previamente y, por consiguiente, tampoco la existencia de los coeficientes a_n y b_n . El punto de vista que se va a tomar será, pues, dada una función $f(x)$, definir los coeficientes mediante las expresiones (5.6) y, con ellos, construir la serie trigonométrica (5.5).

Definición 34 Dada una función $f(x)$ integrable² en $[-\pi, \pi]$, se denominan coeficientes de Fourier de $f(x)$ a los valores a_n , b_n obtenidos mediante las expresiones (5.6) y serie de Fourier de $f(x)$ a la serie trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

y como corolario de la proposición anterior se tiene:

Corollary 1 Dadas dos funciones $f(x)$, $g(x)$ integrables en $[-\pi, \pi]$, los coeficientes de Fourier de $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) son la suma de α veces los de $f(x)$ y β veces los de $g(x)$.

Es de desear que la serie de Fourier de una función $f(x)$ converja (uniformemente) y tenga como suma la función dada (cumpliéndose, por tanto, la igualdad (5.4)). Desgraciadamente no siempre ocurre así y hay muchas funciones integrables (e incluso continuas) cuya serie de Fourier diverge en uno o más puntos.

Comentario:

- Del mismo modo que una serie de Fourier no tiene por qué ser convergente, una serie trigonométrica no tiene por qué ser serie de Fourier de alguna función; esto es, los coeficientes de dicha serie no podrían obtenerse mediante expresiones del tipo (5.6) para ninguna función $f(x)$ (ni aun tomando como función la suma de dicha serie, en el caso de que fuera convergente).

Ejemplo:

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log(1+n)}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ pero se sabe que no es de Fourier.

5.3.2 Convergencia de series de Fourier

El problema fundamental consiste, pues, en investigar las propiedades de una función integrable que garanticen que su serie de Fourier, no sólo es convergente, sino que tiene dicha función como suma.

En primer lugar, de la igualdad (5.4) y observando que cada término de la serie trigonométrica que en ella aparece tiene periodicidad 2π , se obtiene de inmediato que:

Proposición 47 Si $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ es la serie de Fourier de una función $f(x)$ y converge sumando $f(x)$ (es decir, se cumple la igualdad (5.4)), entonces $f(x)$ es periódica de periodo 2π .

Puede también demostrarse que:

Lema 6 Sea $f(x)$ una función tal que³:

1. $f(x)$ está acotada.
2. $f(x)$ tiene un número finito de puntos de discontinuidad.
3. $f(x)$ tiene un número finito de máximos y mínimos.

Entonces todos los puntos de discontinuidad de $f(x)$ son simples; es decir, existen los límites laterales $f(x^+)$ y $f(x^-)$ de $f(x)$ en todos los puntos x de su dominio.

²Obsérvese que no es necesario que sea una función continua.

³Estas condiciones se denominan condiciones de Dirichlet.

Y a partir de aquí, el siguiente resultado (que se enuncia sin demostración):

Teorema 20 (de Dirichlet): *Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $I = [-\pi, \pi]$, tal que:*

1. $f(x)$ está acotada en I .
2. $f(x)$ tiene un número finito de puntos de discontinuidad en I .
3. $f(x)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en I .
4. Fuera de $[-\pi, \pi]$ está definida por periodicidad; es decir, es periódica de periodo 2π .

Entonces existe la serie de Fourier de $f(x)$, que converge a $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, converge a la función $f(x)$ en todos los puntos donde la función es continua.

(En particular, si en los puntos de discontinuidad la función se define tomando el valor medio de sus límites laterales en dichos puntos, la serie de Fourier converge a la función en todos los puntos del dominio).

Comentario:

- Obsérvese que la continuidad de una función no es, por tanto, condición necesaria ni suficiente para la convergencia de su serie de Fourier (si ésta existe).

De este modo, puede darse el caso de que una función discontinua sea representable por una serie de Fourier en todos los puntos de su dominio, siempre que sus discontinuidades sean simples y se comporte suficientemente bien entre los puntos de discontinuidad.

Ejemplo:

- Para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \pi & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^\pi \pi dx \right) = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \pi \cos nx dx = 0 \quad (n \geq 1) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \pi \sin nx dx = \frac{1}{n}(1 - (-1)^n) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

es decir, $b_{2n} = 0$ y $b_{2n-1} = \frac{2}{2n-1}$; por consiguiente la serie de Fourier de esta función es

$$\frac{\pi}{2} + 2 \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Esta serie converge a la función dada en todos los puntos de los intervalos $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, pero no en los puntos de discontinuidad $-\pi, 0, \pi$ donde su suma vale $\pi/2$.

Si la función se extiende por periodicidad a todo \mathbb{R} , el resultado sobre la convergencia de la serie es el mismo en todos los intervalos $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ ($n \in \mathbb{Z} - \{0\}$).

5.3.3 Funciones pares e impares

En los apartados anteriores se ha trabajado con funciones definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y extendidas por periodicidad fuera de ese intervalo. En estos casos, también podría haberse tomado como intervalo de trabajo $[0, 2\pi]$ u otro cualquiera de longitud 2π . Sin embargo, el haber tomado la primera opción (intervalo simétrico respecto al origen) tiene notorias ventajas a la hora de explotar las propiedades de simetría o antisimetría de las funciones. Así, como primer resultado se tiene:

Proposición 48 *Sea $f(x)$ una función integrable en $[-\pi, \pi]$.*

1. *$f(x)$ es una función par si, y sólo si, sus coeficientes de Fourier son*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0$$

es decir, su serie de Fourier contiene sólo términos en $\cos nx$.

2. *$f(x)$ es una función impar si, y sólo si, sus coeficientes de Fourier son*

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx$$

es decir, su serie de Fourier contiene sólo términos en $\sin nx$.

(Dem.) Inmediata. ■

Y de aquí:

Definición 35 *Una serie de Fourier se dice que es de tipo seno para x (resp. de tipo coseno para x) si sólo contiene términos en $\sin nx$ (resp. en $\cos nx$).*

Y como caso particular del teorema de Dirichlet en este contexto se tiene:

Teorema 21 (de Dirichlet): *Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $I = [0, \pi]$, tal que satisface las condiciones de Dirichlet en I ⁴. Entonces $f(x)$ se puede desarrollar en una serie de Fourier de tipo coseno o de tipo seno, con la salvedad, en este último caso, de que la serie no puede converger a $f(x)$ en los puntos $x = 0, \pi, \dots, n\pi, \dots$, a menos que la función tome valor 0 en ellos.*

(Dem.) Es una consecuencia directa del teorema de Dirichlet. ■

Comentario:

- Para hallar la serie de Fourier de tipo seno de $f(x)$, se redefine la función $f(x)$ (si es necesario) dándole el valor 0 en $x = 0, \pi$ y extiéndola, a continuación, al intervalo $[-\pi, 0]$ de manera que la función extendida en $[-\pi, \pi]$ sea impar. Fuera de este intervalo se define por periodicidad (si es necesario).
- De igual forma, para hallar la serie de Fourier de tipo coseno de $f(x)$, se extiende la función al intervalo $[-\pi, 0]$ de manera que la función extendida en $[-\pi, \pi]$ sea par. Fuera de este intervalo se define por periodicidad (si es necesario).

Ejemplo:

- *Para la función $f(x) = \cos x$ definida en $[0, \pi]$, la serie de Fourier de tipo seno es*

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}$$

mientras que la de tipo coseno es simplemente la propia función.

⁴Nótese que no se pide que sea par ni impar, ni tan siquiera periódica, sino que sólo esté definida en ese intervalo verificando esas condiciones.

5.3.4 Extensión a intervalos arbitrarios

Hasta el momento todo lo que se ha enunciado sobre series de Fourier es válido para funciones definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (y extendidas por periodicidad fuera de él). No obstante, en muchas aplicaciones será necesario manejar series de Fourier de funciones periódicas de periodo $2L$ definidas en el intervalo $[-L, L]$ (con $L > 0$).

Para obtener dichas series el procedimiento a seguir es el siguiente:

- Efectuar el cambio de variable $t = \frac{\pi x}{L}$ o, equivalentemente, $x = \frac{Lt}{\pi}$.

Con ello la función $f(x)$, $x \in [-L, L]$, periódica de periodo $2L$, se transforma en $\tilde{f}(t) = f(Lt/\pi)$, $t \in [-\pi, \pi]$, que es periódica de periodo 2π .

- Si $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en $[-L, L]$, también lo hace $\tilde{f}(t)$ en $[-\pi, \pi]$. Entonces se desarrolla $\tilde{f}(t)$ en serie de Fourier de la forma expuesta.
- Se deshace el cambio de variable en la serie hallada a fin de obtener la serie de Fourier de $f(x)$.

Comentario:

- Otra forma de obtener el mismo resultado consistiría en calcular directamente la serie de Fourier de $f(x)$, pero calculando los coeficientes de Fourier del siguiente modo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos nx dx \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin nx dx \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

aunque, en general es más rápido el anterior procedimiento.

5.3.5 Funciones ortogonales: series de Fourier generalizadas

Definición 36 Una sucesión funcional $\{\theta_n(x)\}$ ($n \in \mathbb{N}$) es una sucesión de funciones ortogonales sobre el intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b \theta_n(x) \theta_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ k_n & \text{si } m = n \end{cases}$$

La sucesión se denomina ortonormal si $k_n = 1$, $\forall n$, y en tal caso, se dice que las funciones de la sucesión están normalizadas.

Comentario:

- Si la sucesión funcional $\{\theta_n(x)\}$ es ortogonal pero no ortonormal entonces es inmediato observar que $\{\phi_n(x)\}$ con

$$\phi_n(x) = \frac{\theta_n(x)}{\sqrt{k_n}}$$

es una sucesión ortonormal⁵.

Ejemplo:

⁵Obsérvese que $k_n > 0$ ya que $\int_a^b (\theta_n(x))^2 dx$.

- La sucesión funcional

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

que se ha usado en los apartados anteriores para construir las series de Fourier de funciones, es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$ pero no en el $[0, \pi]$, pues

$$\int_0^\pi 1 \sin x dx = 2 \neq 0$$

y dado que

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$$

la sucesión ortonormal en $[-\pi, \pi]$ obtenida a partir de esta es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

En el siglo XIX y principios del XX algunos matemáticos y físicos observaron que se podían construir series del tipo de Fourier utilizando cualquier sucesión de funciones ortogonales⁶. En efecto; supóngase que se tiene una sucesión ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ ($n \in \mathbb{N}$) en $[a, b]$ y una función $f(x)$ integrable en $[a, b]$ y que se quiere desarrollar dicha función en una serie que converja a la función, del siguiente modo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \tag{5.8}$$

Intentemos definir cuáles son los coeficientes a_n . Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $\phi_n(x)$ se obtiene

$$f(x)\phi_n(x) = a_1\phi_1(x)\phi_n(x) + \dots + a_n\phi_n^2(x) + \dots$$

y, asumiendo que se puede integrar término a término y teniendo en cuenta la propiedad de ortonormalidad de las funciones $\phi_n(x)$, resulta

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx = a_n \int_a^b \phi_n^2(x) dx = a_n$$

luego, tomando esto como modelo se puede definir:

Definición 37 Sea una sucesión ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ ($n \in \mathbb{N}$) en $[a, b]$ y una función $f(x)$ integrable en $[a, b]$. Se denomina serie de Fourier generalizada de $f(x)$ respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

donde los coeficientes son

$$a_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x) dx$$

y se denominan coeficientes de Fourier generalizados de $f(x)$ respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$.

Comentario:

- Obsérvese que, en el desarrollo anterior, se han asumido las hipótesis de que la función $f(x)$ puede ser expresada por medio de una serie de la forma descrita y que dicha serie es integrable término a término. En realidad, estas dos condiciones no van a estar aseguradas de entrada para cualquier función y, por tanto, la igualdad (5.8) no se va a cumplir en general (igual que ya ocurría con las series de Fourier ordinarias, que son un caso particular de éstas).

⁶Posteriormente, estas series pasaron a ser instrumentos indispensables de trabajo en muchas ramas de la física matemática, principalmente en Mecánica Cuántica.

5.3.6 Convergencia en media cuadrática de series de Fourier

Se va a estudiar, a continuación en qué condiciones se puede garantizar que una serie de Fourier generalizada converja a la función que la define. Previamente hay que introducir un nuevo concepto sobre convergencia de series de funciones.

Sea una función $f(x)$ y una sucesión de funciones $\{p_n(x)\}$, definidas todas ellas en $[a, b] \in \mathbb{R}$. Si se desea aproximar $f(x)$ por medio de los términos de esta sucesión, cada uno de los números $|f(x) - p_n(x)|$ y $(f(x) - p_n(x))^2$ da una medida del error de la aproximación en el punto x . Sin embargo, puede ser preferible dar una medida del error que se refiera a todo el intervalo $[a, b]$, lo cual puede conseguirse mediante las integrales

$$\int_a^b |f(x) - p_n(x)| dx \quad , \quad \int_a^b (f(x) - p_n(x))^2 dx$$

siendo la segunda mejor elección que la primera ya que evita el valor absoluto en el integrando y hace más convenientes los cálculos necesarios (como se verá). Así pues:

Definición 38 *Dada una función $f(x)$ y una sucesión de funciones $\{p_n(x)\}$, definidas e integrables en $[a, b] \in \mathbb{R}$.*

1. *Se denomina error cuadrático medio de $f(x)$ por la sucesión $\{p_n(x)\}$* ⁷ a

$$E_n = \int_a^b (f(x) - p_n(x))^2 dx$$

2. *Se dice que $\{p_n(x)\}$ converge en media a $f(x)$ si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - p_n(x))^2 = 0$$

y se escribe⁸ $\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$.

Comentario:

- El error cuadrático medio es justamente el cuadrado de la norma $\|f - p_n\|$ en el espacio métrico de funciones integrables en $[a, b]$. Por consiguiente, la convergencia en media de $\{p_n(x)\}$ a $f(x)$ es equivalente a la convergencia de esta sucesión al límite $f(x)$ en ese espacio métrico; es decir

$$d(f, p_n) = \|f - p_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

El resultado crucial de este apartado es el siguiente:

Teorema 22 *Sea una función $f(x)$ y una sucesión ortonormal de funciones $\{\phi_n(x)\}$, definidas e integrables en $[a, b] \in \mathbb{R}$. Para cada entero positivo k , la k -ésima suma parcial de la serie de Fourier generalizada de $f(x)$ respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$; es decir, $\sum_{n=1}^k a_n \phi_n(x)$, produce un error cuadrático medio*

$$E_{k_{\min}} = \int_a^b [f(x) - \sum_{n=1}^k a_n \phi_n(x)]^2 dx \tag{5.9}$$

que es menor que el de cualquier otra combinación lineal $p_k = \sum_{n=1}^k b_n \phi_n(x)$.

⁷Esta terminología es adecuada por cuanto, si se divide E_n por $b - a$, se obtiene el valor medio del error cuadrático $(f(x) - p_n(x))^2$ de la aproximación.

⁸l.i.m. significa límite in media.

(Dem.) Se trata de minimizar el error cuadrático medio

$$E_k = \int_a^b (f(x) - p_k(x))^2 dx = \int_a^b (f(x) - \sum_{n=1}^k b_n \phi_n(x))^2 dx$$

mediante una adecuada elección de los coeficientes b_n . Desarrollando el cuadrado del integrando se tiene

$$E_k = \int_a^b f(x)^2 dx - 2 \int_a^b f(x) \sum_{n=1}^k b_n \phi_n(x) dx + \int_a^b (\sum_{n=1}^k b_n \phi_n(x))^2 dx$$

Recordando que los coeficientes de Fourier de $f(x)$ respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ son $a_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx$, la segunda integral del desarrollo es

$$\int_a^b f(x) \sum_{n=1}^k b_n \phi_n(x) dx = \sum_{n=1}^k b_n \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx = \sum_{n=1}^k b_n a_n$$

mientras que la tercera, teniendo en cuenta la ortonormalidad de las funciones $\phi_n(x)$, se transforma en

$$\int_a^b (\sum_{n=1}^k b_n \phi_n(x))^2 dx = \int_a^b (\sum_{n=1}^k b_n \phi_n(x)) (\sum_{n=1}^k b_n \phi_n(x)) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^k b_n^2 \phi_n(x)^2 dx = \sum_{n=1}^k b_n^2$$

De este modo resulta

$$E_k = \int_a^b f(x)^2 dx - 2 \sum_{n=1}^k b_n a_n + \sum_{n=1}^k b_n^2 = \int_a^b f(x)^2 dx - \sum_{n=1}^k a_n^2 + \sum_{n=1}^k (b_n - a_n)^2$$

y, observando que los términos de la última suma son $(b_n - a_n)^2 \geq 0$, se obtiene finalmente que E_k es mínimo en el caso en que $b_n = a_n$. ■

A partir de este teorema se obtiene:

Teorema 23 *Sea una función $f(x)$ y una sucesión ortonormal de funciones $\{\phi_n(x)\}$, definidas e integrables en $[a, b] \in \mathbb{R}$. Si los números a_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$, entonces la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente y satisface la desigualdad de Bessel:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx$$

(Dem.) De acuerdo con el teorema anterior, como $E_n \geq 0$ para toda elección de b_n , es claro que el valor mínimo de E_n (que ocurre cuando $b_n = a_n$) es también no negativo; luego (5.9) implica que

$$\int_a^b (f(x))^2 dx - \sum_{n=1}^k a_n^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^k a_n^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx$$

de donde, al hacer $k \rightarrow \infty$, se obtiene el resultado. ■

Y, como el término n -ésimo de una serie convergente ha de tender a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene como corolario que:

Teorema 24 *Sea una función $f(x)$ y una sucesión ortonormal de funciones $\{\phi_n(x)\}$, definidas e integrables en $[a, b] \in \mathbb{R}$. Si los números a_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Con estos resultados se está ya en condiciones de responder a la pregunta de bajo qué condiciones la serie de Fourier (generalizada) de una función converge en media a dicha función o, lo que es equivalente, cuando las sumas parciales de la mencionada serie convergen en media a la función. La respuesta es:

Teorema 25 *Sea una función $f(x)$ y una sucesión ortonormal de funciones $\{\phi_n(x)\}$, definidas e integrables en $[a, b] \in \mathbb{R}$. La serie de Fourier generalizada de $f(x)$ respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ converge en media a $f(x)$; es decir,*

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n \phi_n(x) = f(x) \quad (5.10)$$

si, y sólo si, la desigualdad de Bessel se transforma en la identidad de Parseval:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \int_a^b (f(x))^2 dx$$

(Dem.) Teniendo en cuenta el teorema 22, es evidente que la expresión (5.10) es válida si, y sólo si, $E_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, y de la fórmula (5.9) se obtiene que ello es equivalente a que se satisfaga la igualdad en la desigualdad de Bessel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \int_a^b (f(x))^2 dx = 0$$

que es la identidad de Parseval. ■

Definición 39 *Una sucesión ortonormal de funciones $\{\phi_n(x)\}$, definidas e integrables en $[a, b] \in \mathbb{R}$ se dice que es completa si para cualquier función $f(x)$ (integrable en $[a, b] \in \mathbb{R}$) su serie de Fourier generalizada respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ converge en media a $f(x)$; es decir, se verifica la expresión (5.10).*

Así pues, una sucesión ortonormal completa en $[a, b]$ es útil para construir aproximaciones en media cuadrática de funciones integrables en $[a, b]$.

Finalmente se enuncia (sin demostración) el siguiente resultado:

Teorema 26 *La sucesión ortonormal trigonométrica*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

es completa en $[\pi, \pi]$.

Por consiguiente, toda función integrable en $[-\pi, \pi]$ puede ser aproximada por su serie de Fourier (en el sentido de que dicha serie converge en media cuadrática a la función dada)⁹.

Comentario:

- Recordemos ahora que, dado un espacio vectorial euclídeo \mathcal{E} y una base de vectores ortonormales $\{\mathbf{u}_i\}$, cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathcal{E}$ se puede expresar como una combinación

$$v = \sum_i \alpha_i \mathbf{u}_i \quad (5.11)$$

con los coeficientes determinados mediante las expresiones

$$\alpha_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \quad (5.12)$$

⁹Conviene recordar que esta afirmación es falsa si se considera la convergencia puntual, como ya se ha visto en alguno de los ejemplos dados en los apartados anteriores.

Teniendo ésto en mente, se puede establecer la siguiente analogía: el conjunto de funciones integrables de Riemann en un intervalo $[a, b]$ tiene estructura de espacio vectorial (de dimensión infinita) en el cual se puede definir el siguiente *producto escalar* de funciones

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

De este modo, una sucesión de funciones ortonormales $\{\phi_n(x)\}$ se puede considerar como una base ortonormal de dicho espacio (respecto a este producto escalar) y el último teorema expresa el hecho de que cualquier función, elemento de este espacio, se puede expresar como combinación de elementos de esta base, con los coeficientes determinados del mismo modo que en el caso de cualquier espacio euclídeo normal.

Es en base a esta analogía que la expresión (5.11) se puede denominar *desarrollo en serie de Fourier* del vector \mathbf{v} respecto a la base $\{\mathbf{u}_i\}$, y los coeficientes de (5.12) *coeficientes de Fourier* del vector \mathbf{v} respecto a la base $\{\mathbf{u}_i\}$.

5.4 Ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y su resolución

5.4.1 Método de separación de variables. Problema de Sturm-Liouville

Para resolver ecuaciones en derivadas parciales el método más simple es el denominado *método de separación de variables*, que consiste en asumir la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1 (Método de separación de variables): *La solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales es factorizable en producto de funciones de cada una de las variables independientes*

Cuando se aplica este método para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (en dos dimensiones, como son las que se van a estudiar), con condiciones de contorno (de tipo Dirichlet) lineales y homogéneas, el problema queda reconvertido en un problema de contorno de ecuaciones diferenciales ordinarias, del cual se trata de hallar soluciones no triviales. En el caso más general, dicho problema se plantea en los siguientes términos:

Definición 40 Se denomina problema de Sturm-Liouville al problema de resolver una ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + [\lambda q(x) + f(x)]y(x) = 0 \quad (\forall x \in [a, b])$$

con condiciones de contorno lineales y homogéneas.

Si las condiciones de contorno consisten en dar los valores de la función incógnita $y(x)$ en los extremos del intervalo; esto es, $y(a)$ e $y(b)$, y las funciones $p(x)$ y $q(x)$ se restringen adecuadamente se tiene el siguiente resultado:

Teorema 27 Sea el problema de contorno

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + [\lambda q(x) + f(x)]y(x) &= 0 \quad (x \in [a, b]) \\ y(a) = y(b) &= 0 \end{aligned}$$

tal que $p(x) > 0$ y $q(x) > 0$ y son funciones continuas en $[a, b]$ ($p(x)$ de clase C^1). Entonces existen soluciones no triviales a dicho problema si, y sólo si, existe una sucesión creciente y positiva $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ tal que el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ coincide con alguno de estos valores λ_n . En tal caso, para cada valor λ_n se tiene un problema de contorno cuya solución (no trivial) $y_n(x)$ es única salvo un factor constante arbitrario.

Y se adopta la siguiente terminología:

Definición 41 En el teorema anterior, los términos de la sucesión $\{\lambda_n\}$ se denominan *valores propios o autovalores* y las funciones $y_n(x)$ correspondientes *funciones propias o autofunciones del problema de contorno dado*.

En los tres casos que se van a analizar, el problema de Sturm-Liouville que se planteará es un caso particular del anterior en el que $p(x) = q(x) = 1$ y $f(x) = 0$:

Corolario 2 Dado el problema de contorno

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \lambda y(x) = 0 \quad ; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

- Si $\lambda \leq 0$ entonces la única solución del problema es la trivial $y(x) = 0$.
- Si $\lambda > 0$, el problema tiene solución no trivial si, y sólo si, $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, para algún valor $n \in \mathbb{N}$; en cuyo caso dicha solución es la función

$$y(x) = k_n \sin \frac{n\pi}{L}x \quad (a_n \in \mathbb{R} - \{0\})$$

(y cualquier otra que se obtenga multiplicando ésta por un factor constante).

(Dem.) Trivial (se propone como ejercicio). ■

5.4.2 Ecuación de ondas (o de la cuerda vibrante)

La primera ecuación que se va a estudiar es la que describe la *transmisión de ondas* en un medio. Como caso concreto se va a analizar la siguiente situación: se tiene una cuerda tensa sujetada entre los puntos $x = 0$ y $x = L$, la cual se somete a una deformación inicial representada por una curva plana $f(x)$. La forma de la cuerda va a cambiar en función del tiempo y, por consiguiente, vendrá representada por una función $y = y(x, t)$. Tras hacer algunas hipótesis basadas en principios físicos se encuentra que la ecuación del movimiento de los puntos de la cuerda es la siguiente

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{5.13}$$

en la cual a es una constante que depende de las características físicas del problema ¹⁰, y se denomina *ecuación de la cuerda vibrante* o *ecuación de ondas unidimensional*.

Se trata, pues, de una *ecuación en derivadas parciales en dos dimensiones, lineal, homogénea, con coeficientes constantes* de tipo *hiperbólico*. (ya que, en este caso, $B^2 - 4AC > 0$, según la definición 33).

Vamos a resolver pues el problema clásico de física matemática que consiste en hallar la solución a esta ecuación ¹¹, siguiendo el método de separación de variables.

Proposición 49 (solución de Bernouilli de la ecuación de ondas): *Sea el problema de la cuerda vibrante, que se plantea en los siguientes términos:*

¹⁰Se tiene que $a^2 = \frac{H}{\rho}$, donde H es la componente horizontal de la tensión (que es constante si se asume que sólo hay movimiento transversal) y ρ es la densidad.

¹¹Este problema fue propuesto por *Daniel Bernouilli* en 1753 y acabado de resolver por *Euler* en 1777 quien, de este modo, abrió el vasto campo del estudio de las series de Fourier.

- Ecuación diferencial: la ecuación de ondas en una dimensión (lineal, homogénea e hiperbólica)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (x \in [0, L])$$

- Condiciones de contorno: Extremos fijos (condiciones de Dirichlet (lineales homogéneas))

$$y(0, t) = 0 \quad , \quad y(L, t) = 0 \quad (5.14)$$

- Condiciones iniciales: Cuerda inicialmente en reposo de forma dada

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad , \quad y(x, 0) = f(x) \quad (5.15)$$

donde $f(x)$ es una función desarollable en serie de Fourier en $[0, L]$, con $f(0) = f(L) = 0$.

Su solución es

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} at \quad (n \in \mathbb{N})$$

donde b_n son los coeficientes de Fourier (de tipo seno) de la función $f(x)$ en $[0, L]$.

(Dem.) El punto de partida será, pues, asumir que

$$y(x, t) = u(x)v(t)$$

de modo que, sustituyendo en la ecuación (5.13)

$$a^2 u''(x)v(t) = u(x)v''(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{v''(t)}{v(t)}$$

Dado que cada miembro de esta última ecuación depende de una variable diferente, la igualdad sólo puede ser cierta si, y sólo si, ambos son iguales a una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ (constante de separación); con lo cual se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \lambda u(x) = 0 \quad , \quad \frac{d^2 v(t)}{dt^2} - \lambda a^2 v(t) = 0 \quad (5.16)$$

Para la primera de ellas, las condiciones de contorno (5.14) se traducen en $u(0) = 0$, $u(L) = 0$ y, en virtud del corolario 2, las soluciones no triviales para $u(x)$ se van a dar cuando $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, y serán las autofunciones

$$u_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Por otra parte, para cada uno de esos autovalores λ la segunda de las ecuaciones (5.16) tiene como solución general

$$v(t) = c_1 \sin \frac{n\pi}{L} at + c_2 \cos \frac{n\pi}{L} at$$

Pero para esta ecuación la primera de las condiciones iniciales (5.15) se traduce en que $\frac{dv}{dt}(0) = 0$, con lo que $c_1 = 0$ y, por consiguiente, todas las funciones

$$v_n(t) = \cos \frac{n\pi}{L} at$$

son soluciones no triviales de dicho problema.

De esta manera se tiene que todas las funciones del tipo

$$K_n y_n(x, t) \equiv K_n u_n(x)v_n(t) \equiv K_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} at \quad (K_n \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{N})$$

son solución no trivial del problema inicialmente planteado (con las condiciones de contorno inicialmente establecidas). Entonces se puede considerar que toda serie del tipo ¹²

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} at \equiv \sum_{n=1}^{\infty} K_n y_n(x, t)$$

es también solución y satisface las condiciones de contorno (5.14) y la primera de las condiciones iniciales (5.15). Sólo queda por imponer la segunda de las condiciones iniciales (5.15). Por una parte se tiene

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

y por otra, desarrollando $f(x)$ en serie de Fourier de tipo seno en el intervalo $[0, L]$, resulta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

con lo que $y(x, 0) = f(x)$ lleva a que $K_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Comentario:

- Obsérvese que la resolución completa de la ecuación de ondas (esto es la obtención de la solución con todas las constantes determinadas) requiere la imposición de condiciones de contorno (de tipo Dirichlet) y dos condiciones iniciales.

5.4.3 Ecuación del calor

El análisis matemático del problema de la *conducción del calor* en un cuerpo fué realizado por el físico matemático francés *Fourier* en un tratado de 1822. Basándose en datos experimentales físicos y en razonamientos analíticos dedujo que, si $T(x, y, z, t)$ era la función que describía la temperatura de un cuerpo en cada punto (x, y, z) y en cada instante t , se satisfacía la siguiente expresión

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.17)$$

en la cual a es una constante que depende de las características físicas del cuerpo en cuestión ¹³. Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de transmisión del calor tridimensional*,

En el estudio que se va a hacer nos limitaremos a considerar el caso de transmisión del calor en una sola dimensión, en el que se toma la función $T = T(x, t)$ y, por tanto, estudiaremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Se trata, pues, de una *ecuación en derivadas parciales en dos dimensiones, lineal, homogénea, con coeficientes constantes de tipo parabólico*.

Vamos a abordar ahora el problema de la resolución de la ecuación de transmisión del calor a lo largo de una barra de longitud L . Para ello se seguirá el mismo método que para la ecuación de ondas; es decir, el método de separación de variables. Con ello demostraremos el siguiente resultado:

Proposición 50 *Sea el problema de la transmisión del calor (en una dimensión), que se plantea en los siguientes términos:*

¹² Asumiendo la convergencia y derivabilidad término a término de dicha serie.

¹³ Se tiene que $a^2 = \frac{K}{c\rho}$, donde K es la *conductividad térmica*, c es el *calor específico* y ρ es la *densidad*.

- Ecuación diferencial: la ecuación de transmisión del calor unidimensional (lineal, homogénea y parabólica)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (x \in [0, L]) \quad (5.18)$$

- Condiciones de contorno: Extremos a temperatura nula (condiciones de Dirichlet (lineales homogéneas))

$$T(0, t) = 0 \quad , \quad T(L, t) = 0 \quad (5.19)$$

- Condición inicial: Temperatura inicial dada

$$T(x, 0) = f(x) \quad (5.20)$$

donde $f(x)$ es una función desarollable en serie de Fourier en $[0, L]$, con $f(0) = f(L) = 0$.

Su solución es

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} a^2 t} \quad (n \in \mathbb{N})$$

donde b_n son los coeficientes de Fourier (de tipo seno) de la función $f(x)$ en $[0, L]$.

(Dem.) El punto de partida será, pues, asumir que

$$T(x, t) = u(x)v(t)$$

que, al sustituir en la ecuación (5.18), conducirá a

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{v'(t)}{v(t)}$$

y de aquí se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \lambda u(x) = 0 \quad , \quad \frac{dv(t)}{dt} - \lambda a^2 v(t) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (5.21)$$

Para la primera de ellas, las condiciones de contorno (5.19) se traducen en $u(0) = 0$, $u(L) = 0$ y, en virtud del corolario 2, las soluciones no triviales para $u(x)$ se van a dar cuando $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, y serán las autofunciones

$$u_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (n \in \mathbb{N})$$

Por otra parte, para esos autovalores λ la segunda de las ecuaciones (5.21) tiene como solución general no trivial las funciones

$$v_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} a^2 t} \quad (n \in \mathbb{N})$$

De esta manera se tiene que todas las funciones del tipo

$$K_n T_n(x, t) \equiv K_n u_n(x)v_n(t) \equiv K_n \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} a^2 t} \quad (K_n \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{N})$$

son solución no trivial del problema inicialmente planteado (con las condiciones de contorno establecidas). Entonces se puede considerar que toda serie del tipo ¹⁴

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} a^2 t} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} K_n T_n(x, t)$$

es también solución y satisface las condiciones de contorno (5.19). Sólo queda por imponer la condición inicial (5.20). Por una parte se tiene

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

¹⁴Asumiendo nuevamente la convergencia y derivabilidad término a término de dicha serie.

y, por otro, desarrollando $f(x)$ en serie de Fourier de tipo seno en el intervalo $[0, L]$, resulta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

con lo que $T(x, 0) = f(x)$ lleva a que $K_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Comentario:

- Obsérvese que la resolución completa de la ecuación del calor unidimensional (esto es la obtención de la solución con todas las constantes determinadas) requiere la imposición de condiciones de contorno (tipo Dirichlet) y una condición inicial.

5.4.4 Ecuación de Laplace. Problema de Dirichlet

Como punto de partida para obtener la tercera de las ecuaciones que nos interesan, considérese la ecuación de transmisión del calor (5.17) y, como caso particular de ella, una situación en la que hay un *estado estable*.

Entonces, denominando $\omega = \omega(x, y, z)$ a la función incógnita, se tiene que $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ y la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0 \quad (5.22)$$

que se denomina *ecuación de Laplace*, y es una de las más importantes que aparecen en matemática aplicada.

Nos vamos a limitar a considerar el caso bidimensional en el que se toma la función $\omega = \omega(x, y)$ y, por tanto, estudiaremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$$

Se trata de una *ecuación en derivadas parciales en dos dimensiones, lineal, homogénea, con coeficientes constantes de tipo elíptico*.

La resolución de la ecuación de Laplace con unas condiciones de contorno dadas recibe el nombre de *problema de Dirichlet* y se puede enunciar así:

Definición 42 Sean una región compacta $D \subset \mathbb{R}^n$, con borde $\partial D = C$, y una función $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset \mathbb{R}^n$, continua (al menos a trozos). Se denomina *Problema de Dirichlet* al problema de determinar una función continua (al menos a trozos) $\omega: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. Sea solución de la ecuación de Laplace en D (esto es, armónica).
2. Coincida con f sobre la frontera C de D .

Vamos a resolver la ecuación de Laplace en el plano, primero en un rectángulo, siguiendo nuevamente el método de separación de variables.

Proposición 51 Sea el problema de Dirichlet en un rectángulo del plano, que se plantea en los siguientes términos:

- Ecuación diferencial: la ecuación de Laplace en un rectángulo $D \subset \mathbb{R}^2$ (lineal, homogénea y elíptica)

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad ((x, y) \in [0, a] \times [0, b]) \quad (5.23)$$

- Condiciones de contorno: (condiciones de Dirichlet (lineales homogéneas))

$$\omega(x, 0) = 0 \quad , \quad \omega(x, b) = 0 \quad , \quad \omega(0, y) = 0 \quad , \quad \omega(a, y) = f(y) \quad (5.24)$$

donde $f(y)$ es una función desarrollable en serie de Fourier en $[0, b]$.

Su solución es

$$\omega(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (n \in \mathbb{N})$$

donde $K_n = \frac{b_n}{\sinh \frac{n\pi}{b}}$, siendo b_n son los coeficientes de Fourier (de tipo seno) de la función $f(y)$ en $[0, b]$.

(Dem.) Asumiendo que

$$\omega(x, y) = u(x)v(y)$$

y sustituyendo en la ecuación (5.23) se llega a

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = -\frac{v''(y)}{v(y)}$$

y de aquí se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \lambda u(x) = 0 \quad , \quad \frac{d^2v(y)}{dy^2} + \lambda v(y) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (5.25)$$

Comencemos por resolver la segunda ecuación, para la cual las dos primeras condiciones de contorno (5.24) se traducen en $v(0) = 0$, $v(b) = 0$ y, en virtud del corolario 2, las soluciones no triviales para $v(y)$ se van a dar cuando $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, y serán las autofunciones

$$v_n(y) := \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (n \in \mathbb{N})$$

Por otra parte, para esos autovalores λ la primera de las ecuaciones (5.25), junto con la condición de inicial $u(0) = 0$ en que se traduce la tercera de las condiciones de contorno (5.24), tiene como solución general no trivial las funciones

$$u_n(x) = \sinh \frac{n\pi}{b} x \quad (n \in \mathbb{N})$$

De esta manera se tiene que todas las funciones del tipo

$$K_n \omega_n(x, t) \equiv K_n u_n(x) v_n(y) \equiv K_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (K_n \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{N})$$

son solución no trivial del problema inicialmente planteado (con las condiciones de contorno establecidas). Entonces se puede considerar que toda serie del tipo ¹⁵

$$\omega(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{b} y \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x, t)$$

es también solución y satisface las tres primeras condiciones de contorno (5.24).

Sólo queda por imponer la última condición de contorno (5.24). Por una parte se tiene

$$\omega(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sinh \frac{n\pi}{b} a \sin \frac{n\pi}{b} y$$

y, por otro, desarrollando $f(y)$ en serie de Fourier de tipo seno en el intervalo $[0, b]$, resulta

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{b} x$$

con lo que $\omega(a, y) = f(y)$ lleva a que $K_n = \frac{b_n}{\sinh \frac{n\pi}{b} a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Vamos a resolver, a continuación, la ecuación de Laplace en un círculo (esto es, la ecuación de Laplace en coordenadas polares), siguiendo otra vez el método de separación de variables. Se tiene el siguiente resultado:

¹⁵Asumiendo la convergencia y derivabilidad término a término de dicha serie.

Proposición 52 Sea el problema de Dirichlet en un círculo del plano, que se plantea en los siguientes términos:

- Ecuación diferencial: la ecuación de Laplace en coordenadas polares, en el círculo unidad (lineal, homogénea y elíptica)

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad ((r, \theta) \in D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}) \quad (5.26)$$

- Condición de contorno: (condición de Dirichlet (lineal homogénea))

$$\omega(1, \theta) = f(\theta) \quad (5.27)$$

donde $f(\theta)$ es una función desarollable en serie de Fourier en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Su solución es

$$\omega(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (n \in \mathbb{N})$$

donde a_n, b_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(\theta)$.

(Dem.) Asumiendo que

$$\omega(r, \theta) = u(r)v(\theta)$$

y sustituyendo en la ecuación (5.26) se llega a

$$\frac{r^2 u''(r) + ru'(r)}{u(r)} = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}$$

y de aquí se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$r^2 \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + r \frac{du(r)}{dr} - \lambda u(r) = 0 \quad , \quad \frac{d^2 v(\theta)}{d\theta^2} + \lambda v(\theta) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (5.28)$$

Comencemos por resolver la segunda ecuación, que está definida en $[0, 2\pi]$ y, por tanto, en virtud del corolario 2, las soluciones no triviales para $v(\theta)$ se van a dar cuando $\lambda = n^2$, y serán las combinaciones lineales

$$v(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

Por otra parte, para esos autovalores λ la primera de las ecuaciones (5.28) se convierte en

$$r^2 \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + r \frac{du(r)}{dr} - n^2 u(r) = 0$$

que es una ecuación de Euler cuyas soluciones no triviales son

$$\begin{aligned} u(r) &= A + B \log r && \text{si } n = 0 \\ u(r) &= Ar^n + Br^{-n} && \text{si } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

como se desea que $u(r)$ sea continua en $r = 0$, ha de ser $B = 0$, con lo que resulta la solución general no trivial de esta ecuación son las funciones

$$u_n(r) = r^n \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

De esta manera se tiene que todas las funciones del tipo $\omega_0(r, \theta)$ son constantes y valen $\frac{1}{2}A_0$, y

$$\omega_n(r, \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (A_n, B_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

son solución no trivial del problema inicialmente planteado (con las condiciones de contorno establecidas). Entonces se puede considerar que toda serie del tipo ¹⁶

$$\omega(r, \theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \equiv \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(r, \theta)$$

¹⁶Asumiendo la convergencia y derivabilidad término a término de dicha serie.

es también solución.

Sólo queda por imponer la condición de contorno (5.27). Por una parte se tiene

$$\omega(1, \theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

y, por otro, desarrollando $f(\theta)$ en serie de Fourier en el intervalo $[0, 2\pi]$, resulta

$$f(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

con lo que $\omega(1, \theta) = f(\theta)$ lleva a que $A_n = a_n$ y $B_n = b_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. ■

Comentario:

- Obsérvese que la resolución completa de la ecuación de Laplace bidimensional (esto es la obtención de la solución con todas las constantes determinadas) no requiere la imposición de condiciones iniciales adicionales a las condiciones de contorno (de tipo Dirichlet).