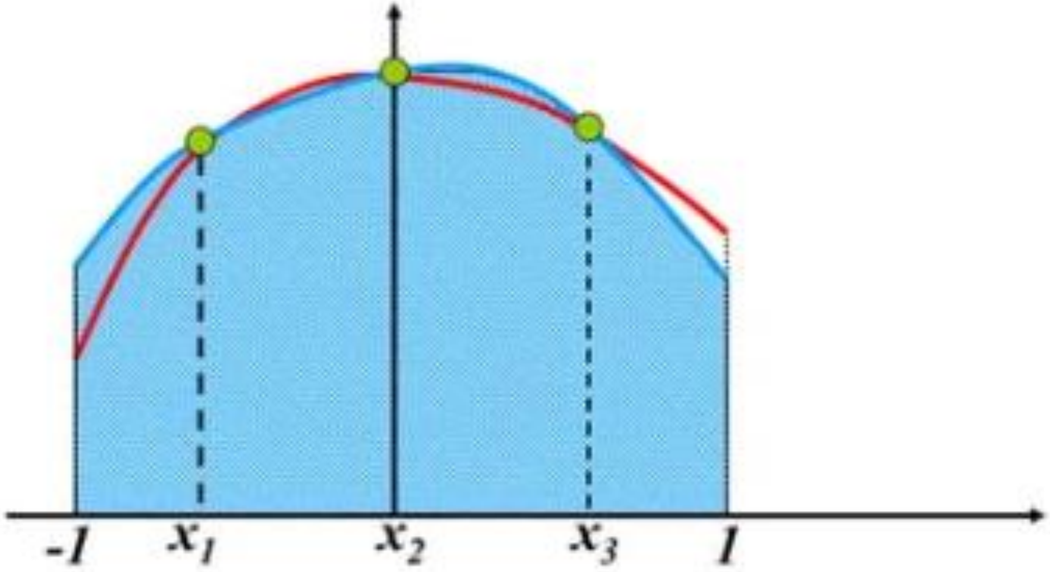
Método de Gauss

Gaussian Quadrature on [-1, 1]

$$\boxed{n = 3:\ \int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)}$$



- **Choose** $(c_1, c_2, c_3, x_1, x_2, x_3)$ **such that the method yields "exact integral" for** $f(x) = x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$

🎓 ¿Qué es la Cuadratura de Gauss?

Es un método numérico avanzado para aproximar integrales definidas de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

Se basa en evaluar la función en puntos especiales (nodos) dentro del intervalo, pesados con coeficientes w_i, que maximizan la precisión para polinomios.

¿Por qué se llama "cuadratura"?

📜 **Origen del término:**

- En la **antigua geometría griega**, **"cuadrar" una figura** significaba **encontrar un cuadrado que tenga la misma área** que otra figura dada.
- Por ejemplo: "la cuadratura del círculo" era el intento de construir un cuadrado con la misma área que un círculo usando solo regla y compás.

📐 En el cálculo moderno:

- El concepto de "**cuadratura**" **pasó a significar:**

  > "**calcular el área bajo una curva**", o sea, **resolver una integral definida.**

🔍 ¿Y por qué “de Gauss”?

- Porque el método fue **desarrollado por Carl Friedrich Gauss**, quien diseñó una técnica **altamente precisa** para aproximar integrales definidas.
- Su idea fue:
  - Evaluar la función no en puntos equidistantes (como en Simpson o trapezoidal),
  - Sino en los **nodos óptimos** (raíces de los polinomios de Legendre),
  - Con **pesos óptimos** que maximizan la precisión.

Época	Enfoque	Qué significa “cuadratura” ahí
Grecia	Geometría pura	Área igual a un cuadrado
Newton-Leibniz	Cálculo integral	Área bajo una curva = integral definida
S. XVIII	Métodos numéricos simples	Sumas aproximadas
Gauss (S. XIX)	Optimización matemática	Máxima precisión con mínimos puntos
Hoy	Computación científica	Cuadratura automatizada y extensiones

🔢 Fórmula general (Gauss-Legendre)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

Donde:

- x_i: nodos (raíces del polinomio de Legendre de grado n)
- w_i: pesos (coeficientes optimizados)
- n: número de nodos = grado de la cuadratura

□ Ventajas del método

- Mucha precisión con pocos puntos
- Integra exactamente todos los polinomios hasta grado $2n - 1$
- No requiere puntos equiespaciados

📘 ¿Qué es un polinomio de Legendre?

Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son una familia de funciones ortogonales sobre $[-1, 1]$, definidos por la relación de recurrencia:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

También puedes obtenerlos con:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

□ Ejemplos concretos:

Grado n	Polinomio $P_n(x)$	Raíces (nodos x_i)
0	$P_0(x) = 1$	—
1	$P_1(x) = x$	0
2	$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$0, \pm\sqrt{3/5}$
4	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	4 raíces dentro de $[-1, 1]$

□ ¿Qué se hace con ellos?

1. Se calcula o consulta $P_n(x)$
2. Se resuelven las raíces x_i
3. Se usan esas raíces como los nodos x_i para la cuadratura de Gauss
4. Los pesos w_i se calculan usando:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}$$

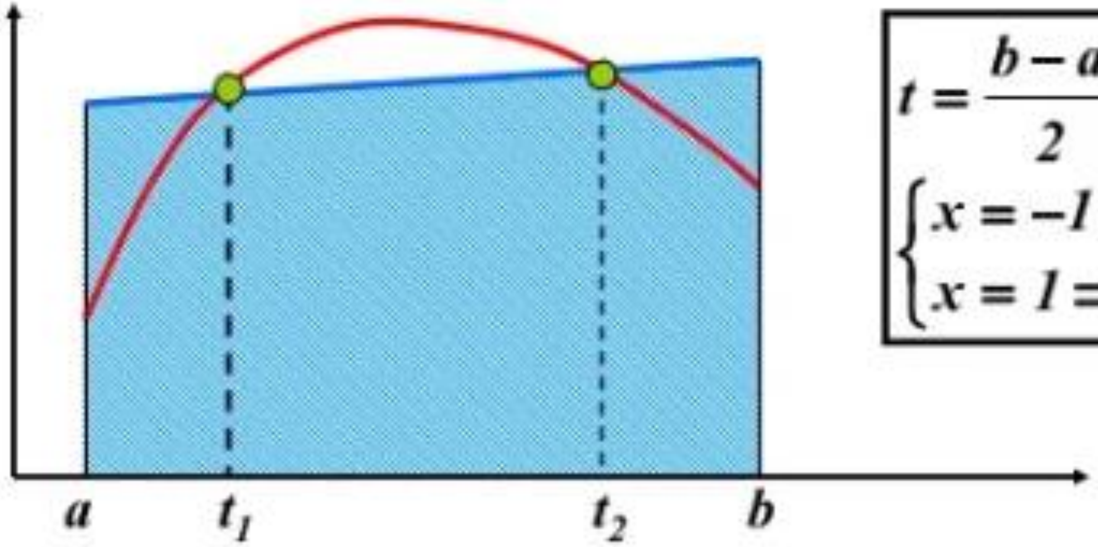
□ Transformación del intervalo

Si la integral no está en $[-1, 1]$, se transforma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

Gaussian Quadrature on [a, b]

Coordinate transformation from [a,b] to [-1,1]



$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = a \\ x = 1 \Rightarrow \quad t = b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx$$

🔧 Ejemplo:

Si quieres integrar en $[1, 2]$:

- El cambio es:

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$$

- Y:

$$dx = \frac{1}{2}dt$$

Entonces la integral se reescribe:

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\right) dt$$

📊 Modelos (valores estándar)

🔷 Gauss-Legendre con 2 puntos (n = 2):

Nodo x_i	Peso w_i
$\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.57735$	1

🔷 Gauss-Legendre con 3 puntos (n = 3):

Nodo x_i	Peso w_i
$-\sqrt{3/5} \approx -0.7746$	$\frac{5}{9} \approx 0.5556$
0	$\frac{8}{9} \approx 0.8889$
$+\sqrt{3/5} \approx +0.7746$	$\frac{5}{9} \approx 0.5556$

◆ $n =$ número de puntos (nodos)

- Son los valores de x_i en los que se evalúa la función $f(x)$
- A cada nodo le corresponde un peso w_i

🔢 ¿Cómo se obtienen los nodos y pesos?

🔷 1. Nodos: raíces del **polinomio de Legendre** $P_n(x)$

Cada grado n tiene un polinomio $P_n(x)$, definido por:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}
$$

Los nodos x_i son las raíces reales de $P_n(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejemplo:

- Para $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, resolvemos:

$$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.5774$$

📌 Fórmula para los pesos w_i:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)\left[P_n'(x_i)\right]^2}$$

🔍 ¿Qué significa cada parte?

- x_i: es el **nodo** (una raíz del polinomio de Legendre $P_n(x)$), ya dado.
- $P_n'(x_i)$: es la **derivada del polinomio de Legendre de grado n**, evaluada en x_i.

⚠️ Importante:

Para usar esta fórmula y **calcular manualmente** w_i necesitas:

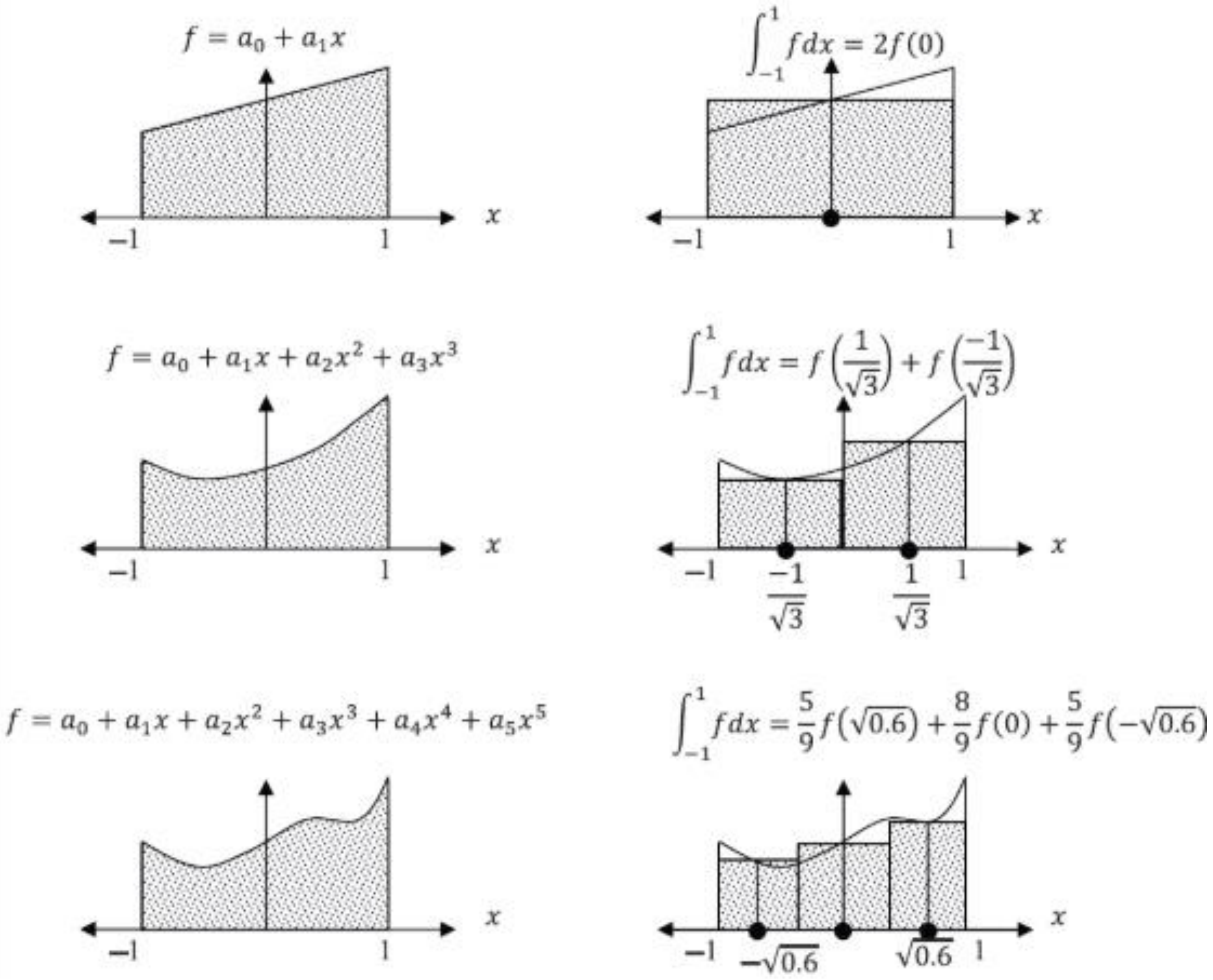
1. Conocer el valor exacto del nodo x_i
2. Derivar el polinomio $P_n(x)$
3. Evaluar esa derivada en x_i
4. Reemplazar todo en la fórmula

❗ Aclaración importante:

En cuadratura de Gauss-Legendre, no existe un caso $n = 0$ porque no hay polinomio de Legendre de grado 0 que proporcione nodos útiles para la integración.

El caso más pequeño válido es $n = 1$, donde hay:

- 1 nodo $x_1 = 0$
- 1 peso $w_1 = 2$



$f = a_0 + a_1 x$
$\int_{-1}^{1} f\,dx = 2f(0)$
$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
$\int_{-1}^{1} f\,dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$
$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$
$\int_{-1}^{1} f\,dx = \frac{5}{9} f\left(\sqrt{0.6}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{0.6}\right)$
x
-1
1
$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$-\sqrt{0.6}$
$\sqrt{0.6}$

📌 Paso 1: Polinomio de Legendre $P_1(x)$

Para $n = 1$, el polinomio de Legendre es:

$$P_1(x) = x$$

📌 Paso 2: Raíz (nodo)

La raíz (único nodo para $n = 1$) es:

$$x_1 = 0$$

📌 Paso 3: Derivada del polinomio

$$P_1'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Entonces:

$$P_1'(x_1) = P_1'(0) = 1$$

📌 Paso 4: Aplicar fórmula del peso w_1

$$w_1 = \frac{2}{(1 - x_1^2)[P_1'(x_1)]^2}$$

Sustituimos:

$$w_1 = \frac{2}{(1 - 0^2)(1)^2} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

📘 Paso 1: Polinomio de Legendre de grado 2

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Paso 2: Derivada del polinomio

$$P_2'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) = 3x$$

📌 Paso 3: Nodos para $n = 2$

Las raíces de $P_2(x)$ son:

- $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.5774$
- $x_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \approx +0.5774$

Vamos a calcular w_2, usando $x_2 = +0.5774$

📚 Resumen

Paso	Explicación
1. Nodos x_i	Se obtienen resolviendo $P_n(x) = 0$
2. Pesos w_i	Se calculan con fórmulas derivadas, o se consultan en tablas
3. Intervalo $[-1, 1]$	Siempre se trabaja en el intervalo estándar
4. Si es otro intervalo	Se hace cambio de variable: $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$

✅ ¿Cuándo usarlo?

- Cuando se necesita alta precisión
- Cuando $f(x)$ es suave (derivable)
- Mejor que Simpson o Trapecio si tienes pocos puntos

RESUMEN

📊 Tabla de nodos x_i, pesos w_i y polinomios de Legendre $P_n(x)$

n	Polinomio $P_n(x)$	Nodos x_i (raíces de P_n)	Pesos w_i
1	$P_1(x) = x$	$x_1 = 0$	$w_1 = 2$
2	$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$x_1 = -0.5774$, $x_2 = +0.5774$	$w_1 = 1$, $w_2 = 1$
3	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$x_1 = -0.7746$, $x_2 = 0$, $x_3 = +0.7746$	$w_1 = 0.5556$, $w_2 = 0.8889$, $w_3 = 0.5556$
4	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	$x_1 = -0.8611$, $x_2 = -0.3399$, $x_3 = 0.3399$, $x_4 = 0.8611$	$w_1 = w_4 = 0.3479$, $w_2 = w_3 = 0.6521$

Ejemplo 1

🔷 Ejemplo:

Resolvamos:

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 + 2x + 1)\, dx$$

Esta es una función polinómica de grado 2, así que con Gauss-Legendre de 2 puntos ($n = 2$) se obtendrá el valor exacto.

📌 Paso 1: Nodos y pesos para $n = 2$

Nodo x_i	Peso w_i
$-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.5774$	1
$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx +0.5774$	1

□ ¿Por qué ambos pesos son 1?

Porque el método de **cuadratura de Gauss-Legendre** está diseñado para que:

- Los pesos **varían dependiendo del grado** n
- Para $n = 2$, los **pesos son exactamente iguales: 1 y 1**

Esto no es una coincidencia. De hecho, los pesos fueron **calculados con la fórmula:**

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)\left[P_2'(x_i)\right]^2}$$

y ambos valores dan 1 cuando se evalúan correctamente en los nodos $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$.

📌 Paso 2: Evaluar la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

✅ En $x_1 = -0.5774$:

$$f(-0.5774) = 3(-0.5774)^2 + 2(-0.5774) + 1$$

$$= 3(0.3334) - 1.1548 + 1 = 1.0002 - 1.1548 + 1 = \boxed{0.8454}$$

✅ En $x_2 = +0.5774$:

$$f(0.5774) = 3(0.5774)^2 + 2(0.5774) + 1$$

$$= 3(0.3334) + 1.1548 + 1 = 1.0002 + 1.1548 + 1 = \boxed{3.155}$$

✅ **Sustituimos:**

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 1 \cdot 0.8454 + 1 \cdot 3.155 = 0.8454 + 3.155 = \boxed{4.0004}$$

Valor exacto

🎯 **Resultado exacto por cálculo simbólico:**

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 + 2x + 1)\, dx = \left[x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= (1 + 1 + 1) - ((-1)^3 + 1 + (-1)) = 3 - (-1 + 1 - 1) = 3 - (-1) = \; 4$$

Ejemplo 2

🔷 Ejemplo ampliado:

$$\int_2^5 (3x^2 + 2x + 1)\, dx$$

Usaremos cuadratura de Gauss-Legendre de 2 puntos, que requiere:

1. Transformar el intervalo $[2, 5]$ a $[-1, 1]$
2. Aplicar los nodos y pesos estándar
3. Evaluar la función transformada
4. Multiplicar por el factor de cambio

🔁 Paso 1: Cambio de variable

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} = \frac{5-2}{2}t + \frac{5+2}{2} = \frac{3}{2}t + \frac{7}{2}$$

$$dx = \frac{3}{2}dt$$

Entonces:

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f\left(\frac{3}{2}t + \frac{7}{2}\right) dt$$

📌 Paso 2: Usar nodos y pesos para $n = 2$

t_i	$x_i = \frac{3}{2}t + \frac{7}{2}$	Peso w_i
-0.5774	$\frac{3}{2}(-0.5774) + \frac{7}{2} \approx 2.6349$	1
$+0.5774$	$\frac{3}{2}(0.5774) + \frac{7}{2} \approx 4.3651$	1

✅ Estos pesos **no cambian** aunque el intervalo original sea diferente, porque se hace una transformación a $[-1, 1]$, donde los pesos **tabulados estándar** se aplican directamente.

📌 ¿Y por qué no cambian los pesos?

Porque el cambio de intervalo $[2, 5] \to [-1, 1]$ se aplica a la **función y a los nodos**, pero los pesos w_i siguen siendo los mismos del intervalo estándar, y el efecto del intervalo se refleja **en el factor de cambio** multiplicado al final:

$$\text{Factor de cambio} = \frac{b-a}{2} = \frac{5-2}{2} = 1.5$$

□ Paso 3: Evaluar $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

En $x = 2.6349$:

$$f(2.6349) = 3(6.9416) + 5.2698 + 1 \approx 20.8248 + 5.2698 + 1 = 27.0946$$

En $x = 4.3651$:

$$f(4.3651) = 3(19.060) + 8.7302 + 1 \approx 57.18 + 8.7302 + 1 = 66.9102$$

✅ Paso 4: Aplicar cuadratura de Gauss

$$\int_2^5 f(x)\,dx \approx \frac{3}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_2)) = \frac{3}{2} \cdot (27.0946 + 66.9102)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 94.0048 \approx \boxed{141.007}$$

✅ Resultado exacto por cálculo simbólico:

$$\int_2^5 (3x^2 + 2x + 1)\, dx = \left[x^3 + x^2 + x\right]_2^5 = (125 + 25 + 5) - (8 + 4 + 2) = 155 - 14 = \boxed{141}$$

🔷 Ejercicio:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

Sabemos que la solución exacta es $\boxed{2}$, pero vamos a aproximarla con **Gauss-Legendre** usando $n = 2$ puntos.

🔁 Paso 1: Cambio de variable

Transformamos $x \in [0, \pi]$ a $t \in [-1, 1]$:

$$x = \frac{\pi - 0}{2}t + \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}$$

$$dx = \frac{\pi}{2}dt$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) dt$$

□ Paso 2: Gauss-Legendre con $n = 2$

t_i	w_i
$-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.5774$	1
$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx +0.5774$	1

□ Paso 3: Evaluar la función transformada

Para $t = -0.5774$:

$$x = \frac{\pi}{2}(-0.5774) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(1 - 0.5774) \approx \frac{\pi}{2}(0.4226) \approx 0.664$$

$$f(x) = \sin(0.664) \approx 0.6156$$

Para $t = 0.5774$:

$$x = \frac{\pi}{2}(1 + 0.5774) \approx \frac{\pi}{2}(1.5774) \approx 2.477$$

$$f(x) = \sin(2.477) \approx 0.6173$$

✅ Paso 4: Aplicar fórmula de Gauss

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx \approx \frac{\pi}{2} \cdot [1 \cdot 0.6156 + 1 \cdot 0.6173] = \frac{\pi}{2} \cdot 1.2329 \approx \boxed{1.935}$$

🎯 Resultado:

- Aproximación por Gauss-Legendre (2 puntos): $\boxed{1.935}$
- Valor exacto: 2
- Error absoluto: ≈ 0.065

FIN