



Integración aproximada: Regla del trapecio

Aprenderás a calcular el valor de una Integral Definida de manera aproximada por medio de la regla del trapecio.

LOGIN

Algunas veces no es nada sencillo calcular la antiderivada de una función dada. En esos casos es mejor hacer una aproximación al valor del área debajo de la curva utilizando métodos numéricos ampliamente conocidos. La regla del trapecio consiste utilizar trapecios en lugar de rectángulos al hacer la aproximación del área bajo la curva.

Ya hicimos la primera aproximación del valor del área bajo la parábola $y = x^2$ desde

hasta $x=1$ en alguna lección previa. Ahora vamos a hacer la misma aproximación usando trapecios.

Rendered by QuickLaTeX.com

Ahora, la comparación de las aproximaciones usando rectángulos por un lado y trapecios por otro, se muestra enseguida:

Solo para ver la diferencia, recuerda que el área bajo la curva es exactamente de $\frac{1}{3}$. Si comparas esta gráfica con el uso de rectángulos en lugar de trapecios, verás por qué esta nueva aproximación es mucho mejor: los trapecios se acercan mucho mejor a la curva que los rectángulos. Esa es la idea que está detrás de la regla del trapecio.

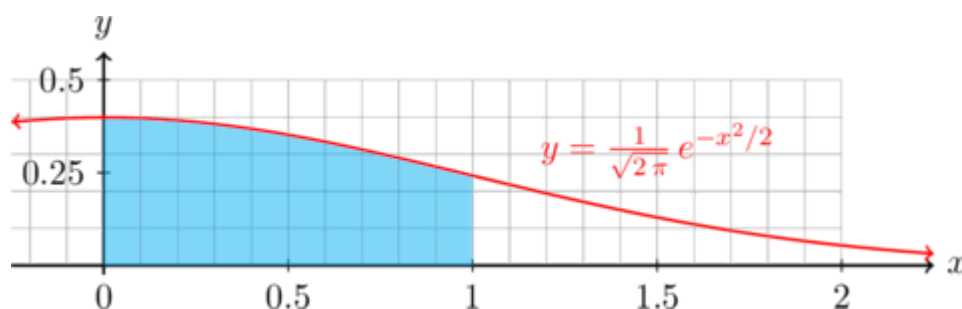
Ejemplo

Calcula el área bajo la curva de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Geométricamente, tenemos que calcular la siguiente área:



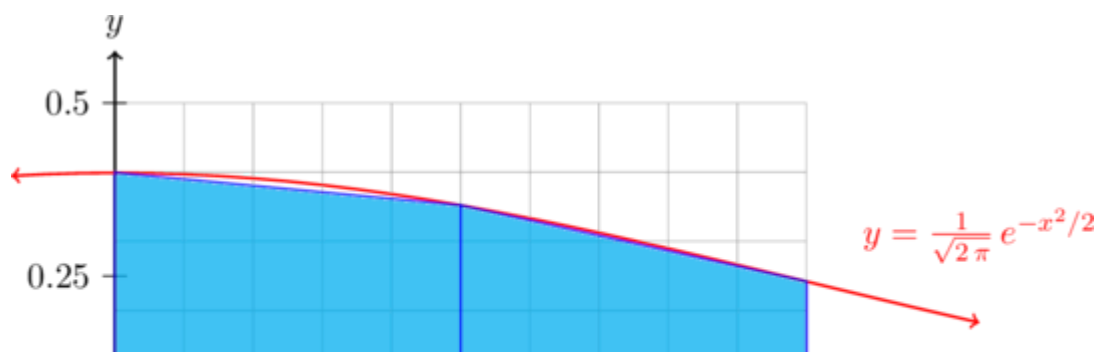
Si intentamos calcular la antiderivada para aplicar el teorema fundamental del cálculo tendremos serias dificultades. En términos de integral definida, el problema se puede pronunciar como:

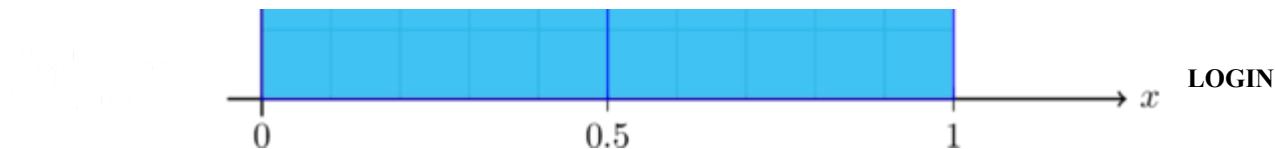
Ejemplo

Calcula:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx$$

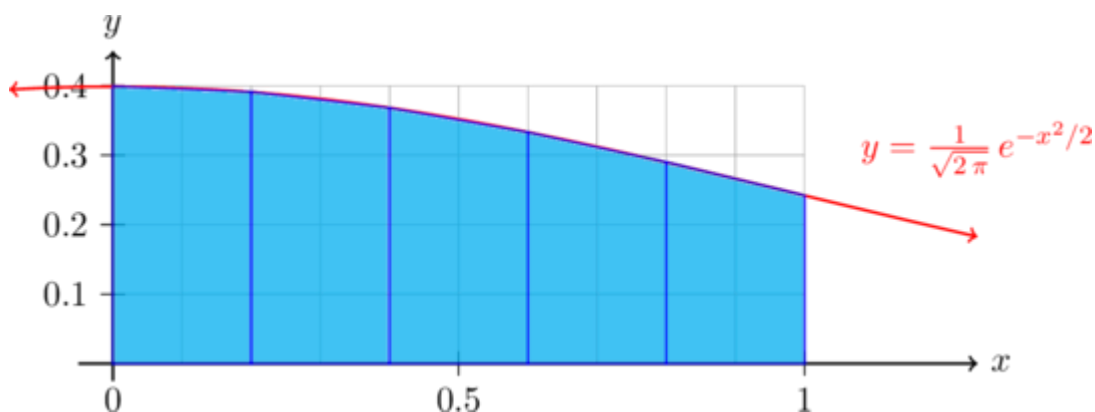
Calcular la antiderivada de esta función es posible a través de métodos de cálculo avanzado. Así que lo más recomendable por ahora es hacer una aproximación. Podemos hacer una primera aproximación ocupando rectángulos como hicimos en la lección *Área bajo la curva*. Pero podemos mejorar la solución si en lugar de dibujar rectángulos en su lugar utilizamos trapecios como se muestra enseguida:





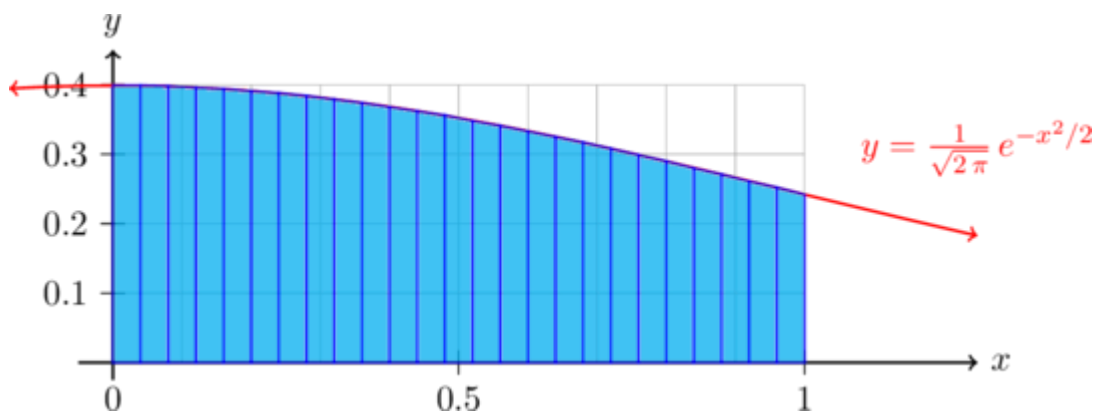
Usando dos trapecios en el intervalo obtenemos los siguientes resultados:

Igual, podemos aumentar el número de particiones y comparar los resultados. Vamos a utilizar $n = 5$ para hacer la comparación con la aproximación anterior ($n = 2$).



Y las áreas de cada una de las particiones es:

Si ahora hacemos $n = 25$ obtenemos una muy buena aproximación al valor real:



En la siguiente tabla se muestran las áreas de cada trapecio dibujado en la gráfica anterior, y la aproximación del área bajo la curva en este caso es: 0.34131 unidades de área.

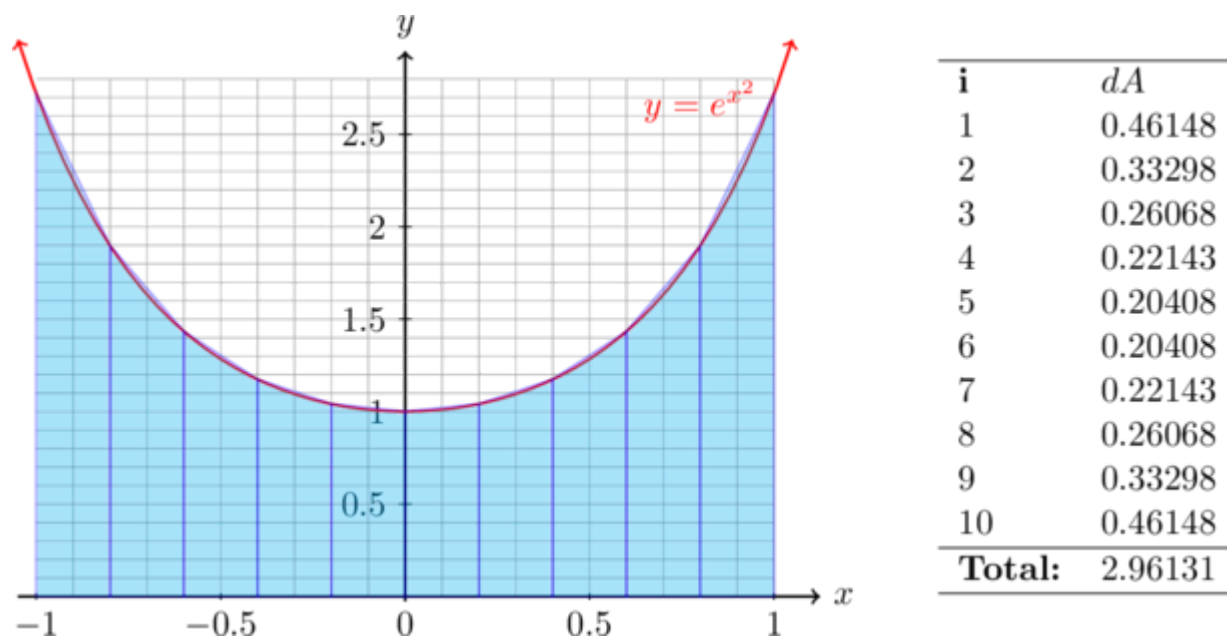
Ejemplo

[LOGIN](#)

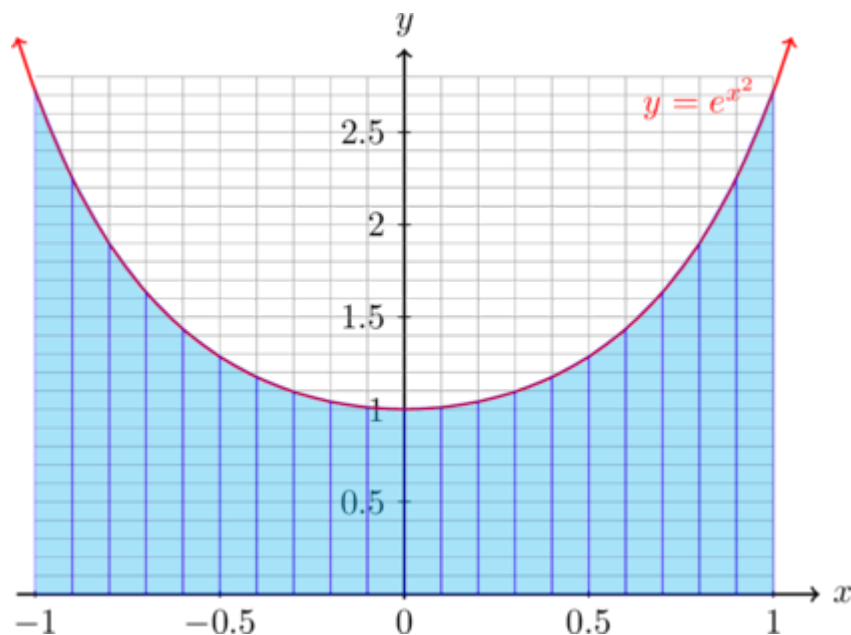
Utiliza la regla del trapecio para aproximar la integral definida:

$$\int_{-1}^1 e^{x^2} dx$$

El cálculo de esta integral de manera analítica es imposible por los métodos que hemos estudiado. Así que empezamos definiendo $n = 10$:



Y haciendo $n = 20$, obtenemos:



Y el valor de esta aproximación es: 2.93435 unidades de área. El valor del área buscada (correcto a 8 decimales) es de 2.925303492 unidades de área.

Observa que para calcular el área ΔA de un trapecio utilizamos la fórmula:

y para calcular la aproximación del área debajo de la curva usando trapecios en lugar de rectángulos ocupamos la sumatoria de todas las áreas de los n trapecios que hemos dibujado debajo de la curva:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2} \right) \cdot \Delta x$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$.

Si definimos: $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2} \right) \cdot \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) \cdot \Delta x \\ &= \frac{\Delta x}{2} \cdot ([f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + f(x_3)] + \cdots + [f(x_{n-1}) + f(x_n)]) \\ &= \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= (\Delta x) \cdot (f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})) + (\Delta x) \cdot \left(\frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} \right) \end{aligned}$$

Mucho software computacional que se utiliza para calcular integrales utiliza algún método como el que se acaba de explicar. La computadora es programada para realizar los cálculos. El usuario solamente debe indicar el número de intervalos que desea utilizar.

Ejemplo

Utiliza la regla trapezoidal para aproximar:

**LOGIN**

haciendo .

Nosotros haremos , luego:

De acuerdo a la regla trapezoidal, tenemos:

En este caso particular, , así que:

LOGIN

Nosotros ya sabemos que:

Así que hemos una aproximación correcta hasta 3 decimales. Representa geométricamente la aproximación que hemos calculado usando la regla del trapecio en papel milimétrico.

Ejemplo

Aplicando la regla del trapecio aproxima:

Geométricamente, tenemos que calcular el área sombreada en la siguiente gráfica:

Observa que el integrando se hace cero exactamente en :

**LOGIN**

Empezamos la primera aproximación haciendo $\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) \cdot (1 - 0)$. Entonces, $\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{2}(0 + 1) \cdot 1 = \frac{1}{2}$, y sustituyendo en la regla del trapecio obtenemos:

Si usamos $\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) \cdot (1 - 0)$ obtenemos una mejor aproximación: 6.20862 unidades de área. Por otra parte, para $\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) \cdot (1 - 0)$ obtenemos: 6.26451 unidades de área. El área buscada es

exactamente:

unidades cuadradas.

LOGIN

Ejemplo

Utiliza la regla del trapecio para aproximar:

Geométricamente, tenemos:

Observa que el integrando no está definido para $x=0$. Pero eso no es problema, porque podemos acercarnos tanto como queramos a $x=0$, pero sin llegar a cero.

Podemos, por ejemplo, empezar desde $x=0.001$ y el error cometido al hacer la aproximación es muy pequeño, además de que el integrando sí está definido en ese punto.

Empezamos haciendo $n=1000$, con lo que obtenemos la primera aproximación:

1.84921 unidades de área. Para obtenermos: 1.85118 unidades de área. Para

obtenemos: 1.85173 unidades de área. El valor aproximado de esta integral definida es: 1.851837052 unidades de área.

CURSOS DE MATEMÁTICAS PARA

Secundaria

Nivel Superior

Bachillerato

MISIÓN

Nuestra misión es divulgar la matemática forma gratuita fuera de clase. Para cualquier amante de los números en internet.

REDES SOCIALES

Facebook

Youtube

Twitter



2020 © APRENDE MATEMÁTICAS. TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS.

[POLÍTICA DE CALIDAD](#)

[CONDICIONES DE USO](#)

[AVISO DE PRIVACIDAD](#)