MÉTODO DE LA SECANTE

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

□ ¿QUÉ ES EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA?

Es un método numérico para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Es decir: se conoce una derivada dy/dx, una condición inicial (x_0, y_0), y se quiere calcular el valor aproximado de y para valores posteriores de x.

✅ ¿CUÁNDO SE USA?

Cuando **no puedes o no deseas** resolver una ecuación diferencial por métodos analíticos, porque:

- La EDO es complicada o no tiene solución exacta.
- Quieres una solución **aproximada y rápida**, por ejemplo con una calculadora o código.
- Estás trabajando con **modelos físicos o de ingeniería** que no tienen solución cerrada.

📘 IDEA GENERAL

Imagina que estás caminando en el plano (x, y) siguiendo una pendiente $f(x, y)$.
El método RK4 te ayuda a "predecir" hacia dónde ir, combinando 4 estimaciones (pendientes) para avanzar con más precisión que un método como Euler.

🔧 FORMULACIÓN DEL MÉTODO RK4

Dado un paso h, y conociendo y_n en x_n, calculamos:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad \text{(pendiente al inicio)}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad \text{(predicción a mitad de paso con } k_1\text{)}$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad \text{(nueva predicción con } k_2\text{)}$$

$$k_4 = f(x_n + h,\ y_n + hk_3) \quad \text{(predicción al final del paso con } k_3\text{)}$$

Luego, combinamos esas pendientes:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Este valor es nuestra mejor predicción de y en $x_{n+1} = x_n + h$.

□ EJEMPLO DETALLADO PASO A PASO

Problema:

Resuelve aproximadamente:

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1, \quad \text{con } h = 0.1$$

Queremos calcular $y(0.1)$.

🔷 Paso 1: Datos iniciales

- $f(x, y) = x + y$
- $x_0 = 0, y_0 = 1$
- $h = 0.1$

◆ Paso 2: Calculamos los 4 pendientes

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 0 + 1 = 1$$

$$k_2 = f\left(0 + \frac{h}{2},\, 1 + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) = f(0.05, 1.05) = 0.05 + 1.05 = 1.1$$

$$k_3 = f(0.05, 1.055) = 0.05 + 1.055 = 1.105$$

$$k_4 = f(0.1, 1.1105) = 0.1 + 1.1105 = 1.2105$$

◆ Paso 3: Aplicamos la fórmula

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6}(1 + 2(1.1) + 2(1.105) + 1.2105)$$

$$= 1 + \frac{0.1}{6}(1 + 2.2 + 2.21 + 1.2105) = 1 + \frac{0.1}{6}(6.6205)$$

$$= 1 + 0.11034 \approx \boxed{1.1103}$$

📊 RESUMEN VISUAL

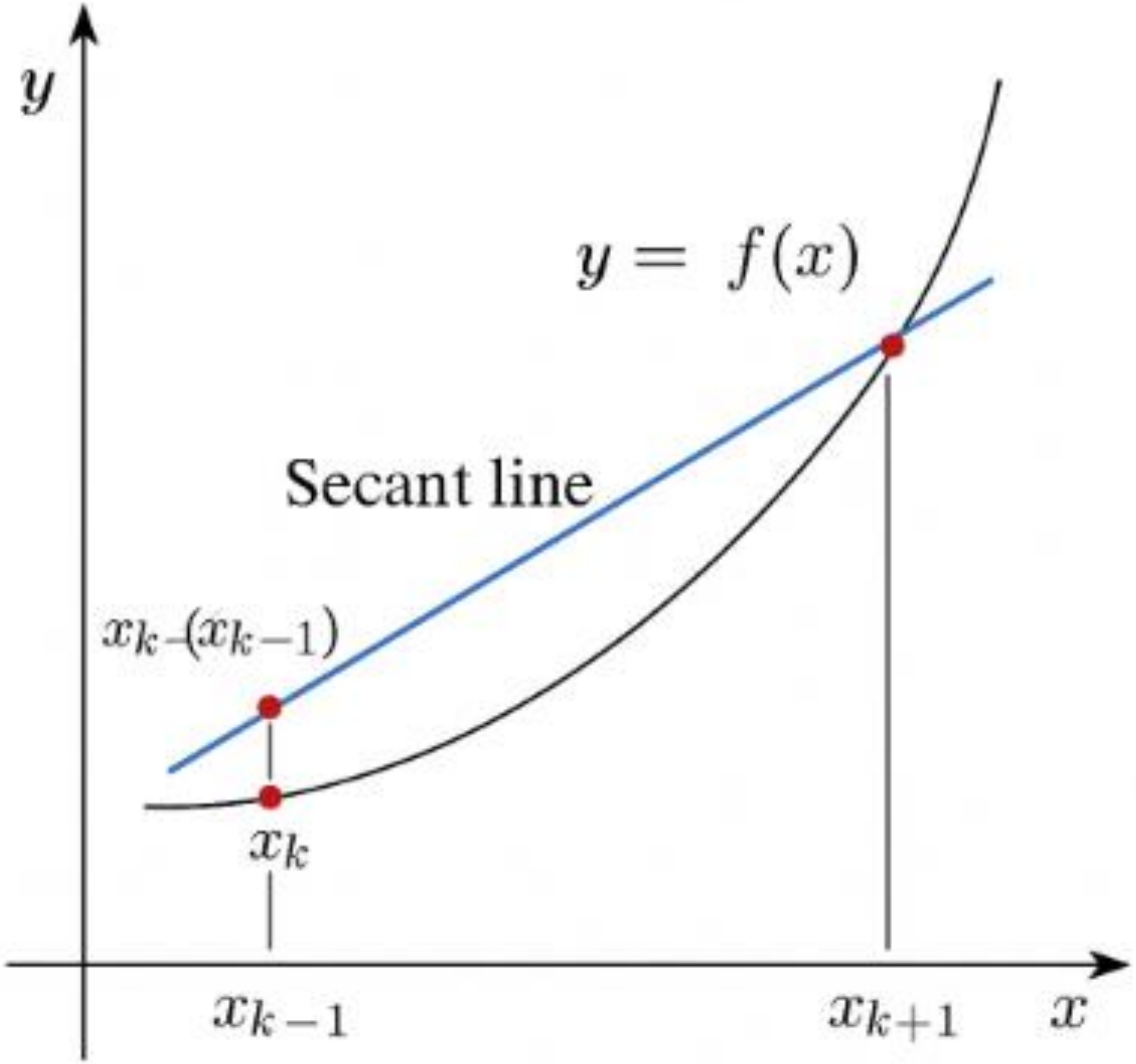
Paso	Explicación
k_1	Pendiente al inicio
k_2	Pendiente en la mitad con k_1
k_3	Pendiente en la mitad con k_2
k_4	Pendiente al final con k_3
y_{n+1}	Promedio ponderado de las pendientes

✅ VENTAJAS DE RK4

- Muy preciso con pocos pasos.
- No necesita derivadas de f, solo evaluaciones.
- Mucho más exacto que métodos como Euler.

□ ¿QUÉ ES EL MÉTODO DE LA SECANTE?

Es un **método iterativo** para encontrar una **raíz** de una función no lineal $f(x)$, sin necesidad de conocer su derivada. Se basa en **aproximar la derivada mediante una recta secante**, en lugar de usar derivación analítica como en Newton-Raphson.



y
$y = f(x)$
Secant line
x_k-(x_{k-1})
x_k
x_{k-1}
x_{k+1}
x

📘 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

Dada una función $f(x)$, la fórmula de iteración es:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Donde:

- x_n y x_{n-1} son aproximaciones sucesivas.
- No se requiere derivada $f'(x)$.
- Se necesitan dos valores iniciales.

□ EN ECUACIONES DIFERENCIALES: ¿CUÁNDO SE USA?

En el contexto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), el método de la secante se usa comúnmente para:

🔷 1. **Método de disparo (shooting method)**

- Se usa para resolver problemas de condiciones de frontera (Boundary Value Problems).
- El método transforma el problema en un problema de valor inicial.
- Se intenta ajustar un parámetro (por ejemplo, la pendiente inicial) para que la solución cumpla las condiciones de frontera.
- Aquí, la secante se usa para ajustar ese parámetro hasta encontrar el valor correcto.

✅ OBJETIVO

Resolver numéricamente un problema de valor de frontera:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \sin(x), \quad y(0) = s,\ y(\pi) = 1$$

Este problema:

- Es no lineal (por el y^2).
- No es homogéneo (por $\sin(x)$).
- No es exacto.
- Requiere ajustar el valor inicial $s = y(0)$ para que se cumpla $y(\pi) = 1$.

⚙️ ESTRATEGIA: Método de Disparo + Método de la Secante

Queremos encontrar un valor de s tal que al resolver la EDO con:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \sin(x), \quad y(0) = s$$

se obtenga:

$$y(\pi) = 1$$

□ PASOS

1. Elegimos dos valores iniciales para s:

Por ejemplo:

- $s_0 = 0.1$
- $s_1 = 0.5$

Resolvemos numéricamente la EDO (por ejemplo con Runge-Kutta) en $x \in [0, \pi]$ para ambos valores y registramos el valor final $y(\pi)$.

📌 Paso a paso con RK4:

Vamos a resolverlo **para un valor dado de s**. Por ejemplo, empecemos con:

$$s = 0.1$$

Y resolvemos en el intervalo $x \in [0, \pi]$ con paso $h = 0.1$.

Fórmulas de RK4:

Dado:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

entonces:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

2. Aplicamos la fórmula de la secante:

$$s_{k+1} = s_k - (y_k(\pi) - 1) \cdot \frac{s_k - s_{k-1}}{y_k(\pi) - y_{k-1}(\pi)}$$

Iteramos hasta que $y_k(\pi) \approx 1$ con el error deseado.

📊 RESULTADO ESPERADO (ilustrativo)

Iteración k	s_k	$y_k(\pi)$	Error
0	0.1	3.45	2.45
1	0.5	1.75	0.75
2	0.73	1.03	0.03
3	0.712	1.0001	~0

Al final, obtenemos:

$$\boxed{y(0) \approx 0.712} \quad \text{para que} \quad y(\pi) = 1$$

Desarrollo amplio

□ Objetivo del problema

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \sin(x)$$

con:

- Condición inicial: $y(0) = s$ (valor desconocido)
- Condición final: $y(\pi) = 1$ (valor deseado)

Queremos encontrar el valor correcto de s tal que al integrar la ecuación, el valor de la solución en $x = \pi$ sea exactamente 1.

□ Método de Disparo + Secante

1. **Método de disparo:**

Consiste en:

- Elegir un valor inicial de s, integrar la ecuación y ver si $y(\pi)$ se acerca a 1.
- Si no, ajustar s y volver a integrar.

2. **Método de la secante:**

Se usa para **ajustar iterativamente el valor de** s con mejor precisión, usando:

$$s_{n+1} = s_n - f(s_n) \cdot \frac{s_n - s_{n-1}}{f(s_n) - f(s_{n-1})}$$

donde:

- $f(s) = y_s(\pi) - 1$
- $y_s(\pi)$: valor final después de integrar usando $y(0) = s$

□ ¿CÓMO SE HACE?

1. Elegimos dos valores iniciales de prueba s_0 y s_1

Por ejemplo:

- $s_0 = 0.1$
- $s_1 = 0.5$

□ ¿Y cómo se usa aquí?

En el método de disparo + secante:

Estamos resolviendo una EDO con condición de frontera (valores en dos puntos), no solo una condición inicial.

- Damos un valor inicial $s = y(0)$ (esto es lo que *disparamos*).
- Integramos la EDO hasta $x = \pi$.
- Calculamos el error: $f(s) = y(\pi) - 1$
- Queremos encontrar s tal que:

$$f(s) = y(\pi) - 1 = 0$$

  es decir:

$$y(\pi) = 1$$

📘 ENUNCIADO: Ecuación Exacta con Condiciones de Frontera

Supongamos el siguiente **problema de valor de frontera**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}, \quad y(1) = s, \quad y(2) = 5$$

Esta es una **ecuación exacta** si se reorganiza como $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 1$, una ecuación lineal también resoluble por métodos clásicos.

👉 Pero nosotros **no la resolveremos así**. Usaremos:

- Método de **disparo**
- Método de la **secante**
- Integración numérica con **RK4**

🎯 OBJETIVO

Encontrar el valor de $s = y(1)$ tal que, al resolver la EDO desde $x = 1$ hasta $x = 2$, se cumpla:

$$y(2) = 5$$

🔧 PASOS

🔷 Paso 1: Elegimos dos valores iniciales

Supongamos:

- $s_0 = 2$
- $s_1 = 3$

Usamos **Runge-Kutta** (RK4) para resolver la EDO desde $x = 1$ hasta $x = 2$ para cada s.

Supongamos que obtenemos:

- $y_0(2) = 4.3$ cuando $s = 2$
- $y_1(2) = 5.7$ cuando $s = 3$

◆ Paso 2: Aplicamos el método de la secante

$$s_2 = s_1 - (y_1(2) - 5) \cdot \frac{s_1 - s_0}{y_1(2) - y_0(2)}$$

$$s_2 = 3 - (5.7 - 5) \cdot \frac{3 - 2}{5.7 - 4.3} = 3 - 0.7 \cdot \frac{1}{1.4} = 3 - 0.5 = \boxed{2.5}$$

🔷 Paso 3: Continuamos

Repetimos el proceso con $s_0 = 3$, $s_1 = 2.5$, etc., hasta que $y(2) \approx 5$ con el error deseado.

FIN