МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2

по дисциплине «ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ»

Тема: Алгоритмы на графах

Студент гр. 8382 Торосян Т.А.

Преподаватель Фирсов М.А.

Санкт-Петербург
2020

Цель работы.

Ознакомится с реализацией жадного алгоритма и алгоритма A*, написать программу на языке программирования C++.

Вариант 3

Написать функцию, проверяющую эвристику на допустимость и монотонность.

Жадный алгоритм.

Постановка задачи.

Разработайте программу, которая решает задачу построения пути в ориентированном графе при помощи жадного алгоритма. Жадность в данном случае понимается следующим образом: на каждом шаге выбирается последняя посещённая вершина. Переместиться необходимо в ту вершину, путь до которой является самым дешёвым из последней посещённой вершины. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес.

Пример входных данных

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины
Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес.

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет

abcde

Описание используемого класса.

Класс путей(class Edge):

Класс путей состоит из следующих свойств:

- char from – имя вершины откуда исходит ребро графа;
- char to – имя вершины куда входит ребро графа;
- double weight – вес ребра графа;

Класс пути содержит следующие методы:

- Edge(char from, char to, double weight) – конструктор класса.
    - Char from – символ вершины, из которой исходит данное ребро
    - char to – символ вершины, в которую ребро входит
    - double weight – вес ребра по условию
- char getFrom() – метод-геттер для получения поля nameFrom класса Edge.
- getTo() – метод-геттер для получения поля nameOut класса Edge.
- double getWeight() – метод-геттер для получения поля weightEdge класса Edge.

Описание алгоритма.

Решение поставленной задачи осуществляется с помощью рекурсивной функции func(std::vector<Edge>* vector, char curChar, char endChar, std::vector<char>* answer), реализующей жадный алгоритм. На этапе инициализации происходит проверка – не является ли подаваемая начальная вершина равной конечной.

Затем создается пустой временный вектор ребер(temporaryVector) и начинается проход по исходному вектору, в ходе которого происходит отбор подходящих путей, т.е. тех, у которых *nameFrom(имя родителя)* равняется текущей вершине, которую мы рассматриваем. Если это так, то записываем путь-ребро (в котором родитель – рассматриваемая вершина) в текущий временный вектор(temporaryVector).

Далее, для нахождения самого “дешевого” пути, вызывается функция сортировки вершин(sort), которая сортирует вершины по наименьшему весу ребер, после чего рекурсивно вызывается функция func() с тем условием, что теперь текущая вершина будет первой (минимальной по весу ребра) в векторе temporaryVector.

Описание main ( ) :

Функция осуществляет ввод начальной и конечной вершин, списка ребер с весами, запуск алгоритма на введенных данных и вывод промежуточных результатов в консоль.

Описание функций.

- Bool func(std::vector<Edge>* vector, char curChar, char endChar, std::vector<char>* answer) – рекурсивная функция жадного алгоритма.
  - std::vector<Edge>* vector — граф, представленный в виде списка рёбер
  - char curChar — символ текущей вершины, которую обрабатывае функция на данном этапе рекурсии.
  - char endChar — символ конечной вершины.
  - std::vector<char>* answer — переменная, хранящая путь в виде массива вершин.
- Функция bool comp(Edge a, Edge b), принимает две переменные класса Edge и сравнивает их по весу.
  - Edge a – первая сравниваемая вершина.
  - Edge b — вторая сравниваемая вершина.

Сложность алгоритма по памяти.

Сложность для жадного алгоритма оценивается как O(V+E), так как в исходном векторе хранится число всех ребер, а с каждой новой вершиной запускается рекурсия и создается новый вектор.

Сложность алгоритма по времени.

Сложность для жадного алгоритма оценивается как O(E logE), так как в худшем случае будет совершаться обход по всем ребрам, а изначальная сортировка ребер по длине имеет сложность O(E logE).

Ал гор итм A*.

Постановка задачи.

Разработайте программу, которая решает задачу построения кратчайшего пути в ориентированном графе методом A*. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес. В качестве эвристической функции следует взять близость символов, обозначающих вершины графа, в таблице ASCII.

Пример входных данных

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины
Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет

ade

Описание используемых классов.

Класс вершин(class Vertex):

Класс вершин состоит из следующих свойств:

- char name – имя вершины;
- double EdgeToVertex – путь до текущей вершины;
- double heuristicF – эвристическая функция;
- char nameFromT – имя, откуда исходит вершина.
- vector<char> coupled – вектор для исходящих из вершины вершин.

Класс вершин содержит следующие методы:

- Vertex(char name) – конструктор, принимающий имя вершины, используется для создания самой первой вершины.
- Vertex() – конструктор, для создания вершин по умолчанию.

Описание алгоритма.

Изначально создаются 2 вектора: с “открытыми” и “закрытыми” вершинами. (Изначально в вектор открытых вершин кладем начальную вершину). Выбор следующей вершины происходит на основании пройденного пути от начальной вершины (в отличие от жадного алгоритма, где учитывается путь от предыдущей вершины) и эвристической оценки, которая суть «оптимистичный» прогноз оставшегося пути до конечной вершины. Математически, алгоритм выбирает вершину по минимальной f(x) = g(x) + h(x), где g(x) – суммарный вес рёбер пройденного пути, h(x) — эвристика. Чем меньше h(x), тем выше приоритет выбранной вершины.

Для каждой вершины алгоритм ищет её потомков и добавляет их в массив открытых вершин, если они не открыты и не пройдены.

Цикл продолжается до тех пор, пока вектор открытых вершин не будет пуст или п о к а функция не дойдёт до конечной вершины, т о г д а вызывается функция для вывода ответа.

Описание дополнительных функций.

- bool comp(Vertex a, Vertex b) – функция принимает 2 переменные типа

Vertex, используется для сортировки открытых вершин по минимальной f(x).

- void answer(std::vector<Vertex>& vectorVertices, char startVertex, char endVertex) – функция, используемая для вывода ответа.
    - std::vector<Vertex>& vectorVertices — граф в виде массива вершин.
    - char startVertex — вершина-начало пути.
    - char endVertex — вершина-конец пути.
- void changeInfo(std::vector<Vertex>& vectorVertices, std::vector<Vertex>& openVertexes, char a, char name, double temp_G, char endVertex) – данная функция вычисляет эвристическую оценку, используется для обновления информации о вершине и ребенке вершины.
    - std::vector<Vertex>& vectorVertices – массив вершин.
    - std::vector<Vertex>& openVertexes — массив открытых вершин.
    - char a — име потомка рассматриваемой вершины.
    - char name — имя рассматриваемой вершины.
    - double temp_G — длина пути до вершины.
    - char endVertex — имя конечной вершины.
- int whatNumber(char a, std::vector<Vertex>& vectorVertices) – Данная функция ищет вершину в векторе и возвращает её индекс.
    - char a — искомая вершина.
    - std::vector<Vertex>& vectorVertices — вектор вершин.
- bool check(std::vector<Edge>& vectorEdge, std::vector<Vertex>& vectorVertices , char endVertex) – функция принимает вектор пути, вектор вершин и имя искомой вершины. Данная функции сначала выполняет проверку эвристики на монотонность, по свойству монотонности: эвристическая функция h(v) называется монотонной, если для любой вершины v1 и её потомка v2 разность h(v1) и h(v2) не превышает фактического веса ребра c(v1,v2) от v1 до v2, а эвристическая оценка целевого состояния равна нулю. Далее, в случае, когда она не монотонна, функция выполняет проверку

эвристики на допустимость по следующему свойству: говорят, что оценка h(v) **допустима**, если для любой вершины v значение h(v) меньше или равно весу кратчайшего пути от v до цели. Данная проверка происходит в случае, когда монотонность не выполнилась, так как существует теорема: *Любая монотонная эвристика допустима, однако обратное неверно.*

- std::vector<Edge>& vectorEdge – вектор, хранящий путь до вершины.
- std::vector<Vertex>& vectorVertices — вектор вершин.
- char endVertex — конечная вершина.

Сложность алгоритма по памяти.

В данной реализации, для графа с конечным и относительно небольшим кол-вом узлов сложность для алгоритма A* оценивается как O(|V+E|), так как программе приходится хранить граф целиком. В худшем случае алгоритм может запоминать экспоненциальное кол-во узлов.

Сложность алгоритма по времени.

Временная сложность алгоритма A* зависит от эвристики. В худшем случае, число исследуемых вершин растет экспоненциально относительно длины оптимального пути, $O(C^{|E+V|})$

Однако если эвристика удовлетворяет условию $|h(x)-h^*(x)|\leq O(\log h^*(x))$, где h^* - точная оценка расстояния от x до цели; сложность становится полиномиальной, $O(|E+V^C|)$.

Тестирование жадного алгоритма.

Входные данные:

a e

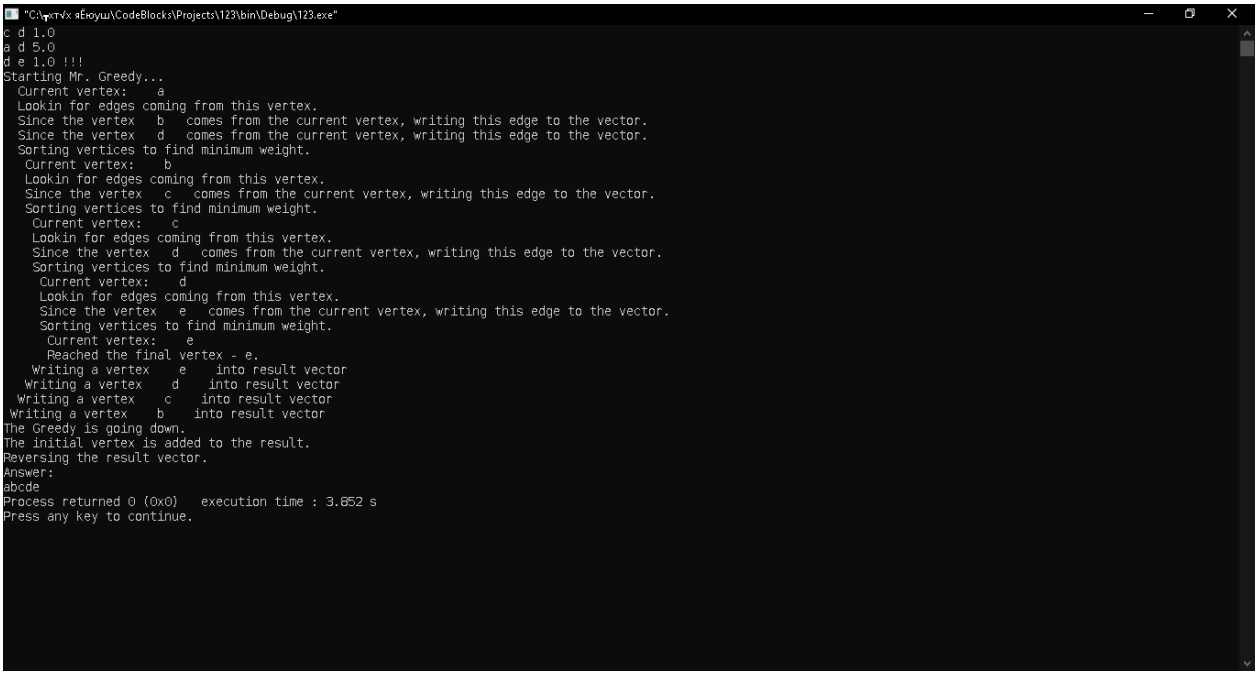
a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0



Входные данные:

a h

a b 3.0
a c 1.0
a d 2.0
b e 5.0
c f 2.0
d g 6.0
e h 1.0
f h 3.0
g h 1.0

Ответ: acfh

Входные данные:

a g

a b 1.0
b c 1.0
a d 3.0
d e 1.0
d f 2.0
f g 4.0

Ответ: adfg

Тестирование алгоритма A*.

Входные данные:

a e

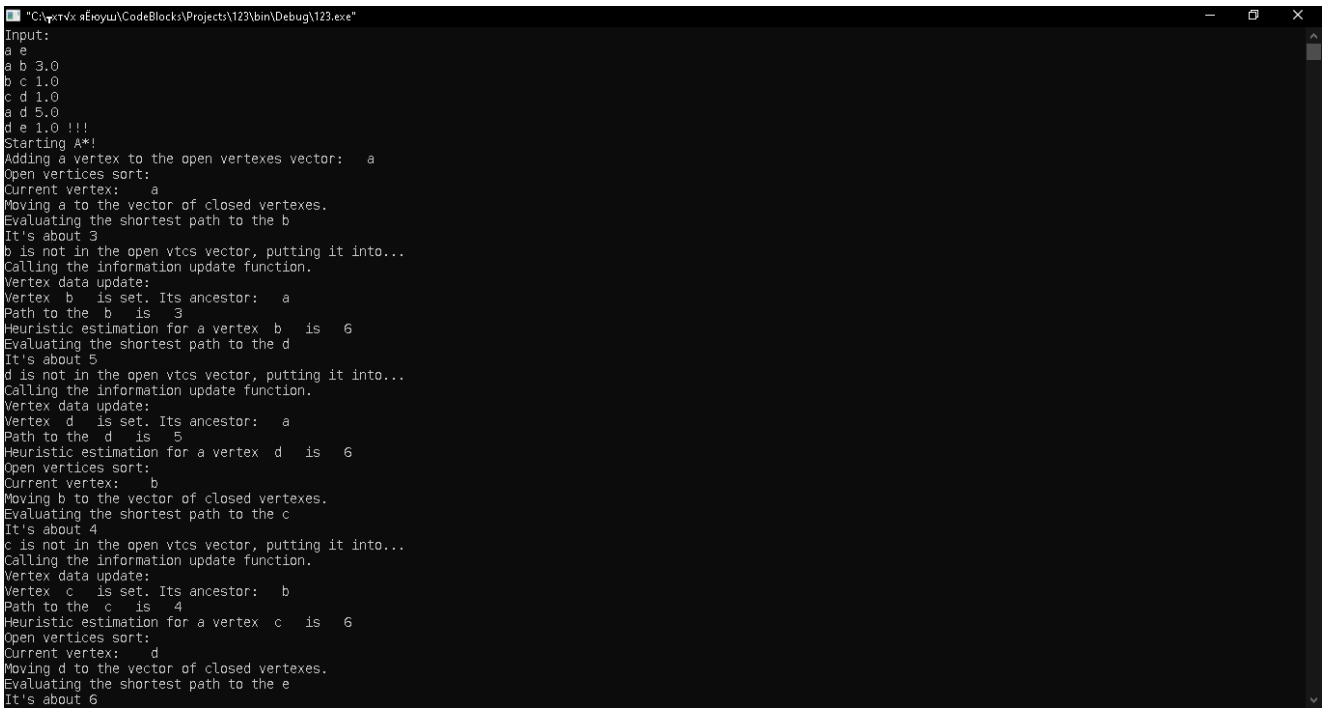
a b 3.0

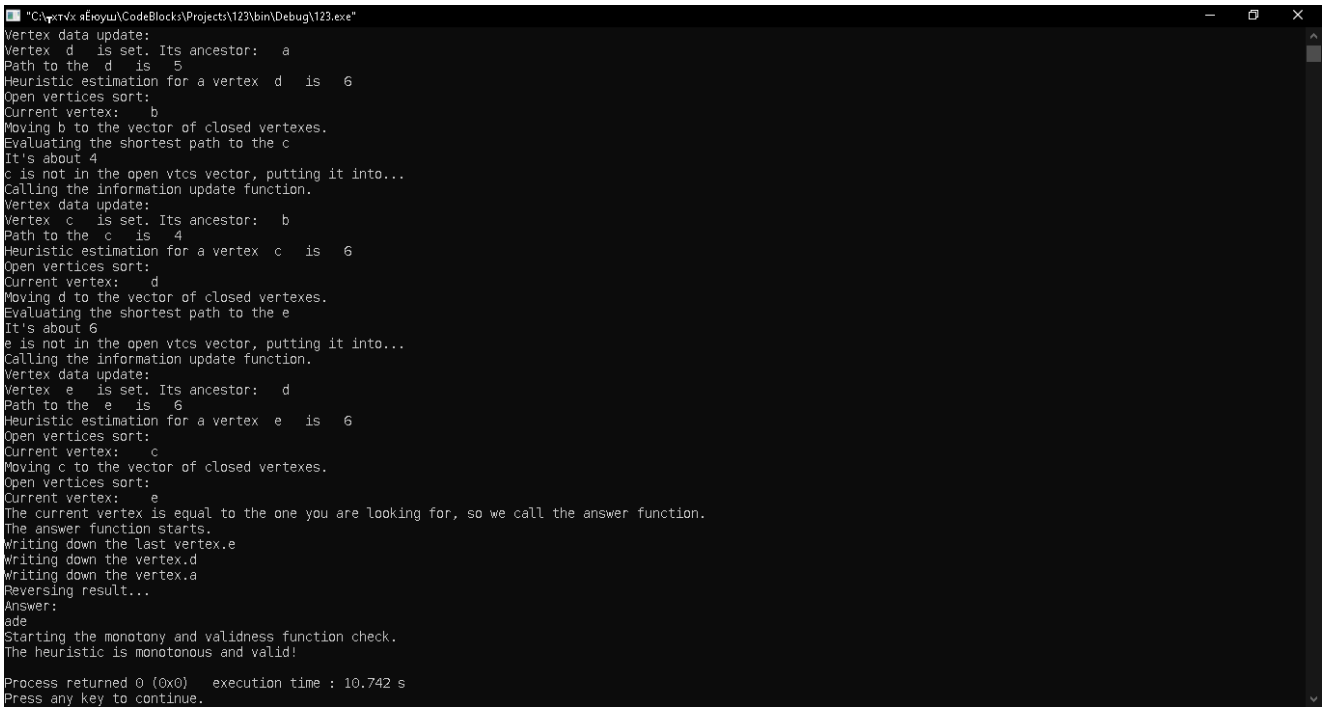
b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0





Входные данные:

a h
a b 3.0
a c 1.0
a d 2.0
b e 5.0
c f 2.0
d g 6.0
e h 1.0
f h 3.0
g h 1.0

Ответ: acfh

Входные данные:

a g
a b 1.0
b c 1.0
a d 3.0
d e 1.0
d f 2.0
f g 4.0

Ответ: adfg

Входные данные:

a e
a b 2.0
b c 1.0
a d 3.0

Ответ: Ошибка! (возникла т. к. невозможно достичь конечной вершины)

Вывод.

В результате работы были реализованы A* и жадный алгоритмы, выполняющие поставленную задачу. Реализован анализ эвристической функции на монотонность и допустимость.

Приложение.

Файл Greedy.cpp(жадный алгоритм):

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <iomanip>      // std::setw

using namespace std;

class Edge {
private:
    char from;
    char to;
    double weight;

public:
    Edge(char from, char to, double weight)
        : from(from), to(to), weight(weight) {}

    char getFrom() const {
        return from;
    }

    char getTo() const {
        return to;
    }

    double getweight() const {
        return weight;
    }
};

bool comp(Edge a, Edge b) {
    return a.getweight() < b.getweight();
}

bool func(std::vector<Edge>* vector, char curChar, char endChar, std::vector<char>* answer, int depth) {
    depth++;
```

```
    std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Current vertex:    " << curChar << std::endl;

    if (curChar == endChar) {    //exit from recursion
        std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Reached the final vertex - " << endChar << "." << std::endl;
        return true;
    }

    std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Lookin for edges coming from this vertex." << std::endl;
    std::vector<Edge> temporaryVector;
    temporaryVector.reserve(0);
    for (Edge Edge : *vector) {// all vertexes in the vector will be passed
        if (Edge.getFrom() == curChar) {//selects all Edges from the desired vertex
            std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Since the vertex   " << Edge.getTo() << "   comes from the current vertex, writing this edge to the vector." << std::endl;
            temporaryVector.emplace_back(Edge);//written to a vector
        }
    }

    //since we need the cheapest way we will cohabit

    std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Sorting vertices to find minimum weight." << std::endl;

    std::sort(temporaryVector.begin(), temporaryVector.end(), comp);

    for (Edge Edge : temporaryVector) {//going through all the vertexes
        if (func(vector, Edge.getTo(), endChar, answer, depth)) {//new variable
            depth--;
            std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Writing a vertex    " << Edge.getTo() <<    "    into result vector" << std::endl;
            answer->emplace_back(Edge.getTo());
            return true;
        }
    }

    return false;
}

int main() {
```

```
setlocale(LC_ALL, "rus");
int depth = 0;
int flag = 1;

std::vector<Edge> vector;
vector.reserve(0);

std::vector<char> answer;
answer.reserve(0);

char startChar;
char endChar;
std::cout << "Input: ";

std::cin >> startChar;
std::cin >> endChar;



char start, end;
double weight;



while (std::cin >> start >> end >> weight) {
    vector.emplace_back(Edge(start, end, weight));
}

std::cout << "Starting Mr. Greedy..." << std::endl;

if (!func(&vector, startChar, endChar, &answer, depth))
{
    std::cout << "Unexpected error!" << std::endl;
    flag = 0;
}

if (flag)
{
    std::cout << "The Greedy is going down." << std::endl;
    std::cout << "The initial vertex is added to the result." << std::endl;
    answer.emplace_back(startChar);
    std::cout << "Reversing the result vector." << std::endl;
```

```
        std::reverse(answer.begin(), answer.end());

        std::cout << "Answer:    " << std::endl;
        for (char sym : answer) {
            std::cout << sym;
        }
    }


    return 0;
}
```

Файл Astar.cpp(алгоритм A*):

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <set>

class Vertex {//vertex class

public:

    char name;
    double pathToVertex;//path to the current vertex - g
    double heuristicF;//heuristic function - f
    char nameFromT;
    std::vector<char> coupled;//vector for vertexes originating from a vertex


    Vertex(char name)//constructor1-required to fill in the initial vertex
        : name(name) {
        heuristicF = 0;
        pathToVertex = -1;//will be used for unprocessed vertexes instead of the infinity sign
        nameFromT = '-';
    }

    Vertex() {                          //constructor2
        name = '!';                 //
        heuristicF = 0;
        pathToVertex = -1;    //
        nameFromT = '-';
```

```
    }

};

class Path {//path class. It stores only the path: from where to where and how much the path weighs

public:

    char nameFromP;
    char nameOutP;
    double weightPath;



    Path(char nameFromP, char nameOutP, double weightPath)
        : nameFromP(nameFromP), nameOutP(nameOutP), weightPath(weightPath) {}




    char getNameFromP() const {
        return nameFromP;
    }

    char getNameOutP() const {
        return nameOutP;
    }

    double getWeightPath() const {
        return weightPath;
    }
};

bool check(std::vector<Path>& vectorPath, std::vector<Vertex>& vectorVertices, char endVertex, bool flagM, bool
flagAd)
{
    std::cout << "Starting the monotony and validness function check." << std::endl;
    if (abs(endVertex - endVertex) != 0) {
        std::cout << "The heuristic estimate of the target state is not zero!" << std::endl;
        flagM = false;


    }
```

```
    for (unsigned int i = 0; i < vectorPath.size(); i++) {


        if ((abs(endVertex - vectorPath[i].nameFromP) - abs(endVertex - vectorPath[i].nameOutP)) >
vectorPath[i].weightPath) {
            std::cout << "The monotony isn't as good." << std::endl;
            flagM = false;


        }
    }
    checking for validity
    if (!flagM)
    {
        for (unsigned int i = 0; i < vectorVertices.size(); i++) {



            if ((abs(endVertex - vectorVertices[i].name) > (vectorVertices[vectorVertices.size() - 1].pathToVertex -
vectorVertices[i].pathToVertex)))
            {
                std::cout << "It isn't valid." << std::endl;
                flagAd = false;
            }




        }
    }
    if (flagM)
    {
        std::cout << "The heuristic is monotonous and valid!" << std::endl;
        return true;
     }
    else if (!flagM && flagAd)
    {
        std::cout << "The heuristic is valid!" << std::endl;
        return true;
    }
    else
    {
        std::cout << "The heuristic is neither monotonous nor valid!" << std::endl;
        return false;
    }
```

```
}




int whatNumber(char a, std::vector<Vertex>& vectorVertices) {

    for (unsigned int i = 0; i < vectorVertices.size(); i++) {
        if (vectorVertices[i].name == a) {
            return i;
        }
    }
    return -1;
}

bool comp(Vertex a, Vertex b) {//comparator, used for sorting in an open list
    return a.heuristicF < b.heuristicF;
}

void answer(std::vector<Vertex>& vectorVertices, char startVertex, char endVertex)
{
    std::cout << "The answer function starts." << std::endl;
    std::vector<Vertex> answer;
    answer.reserve(0);
    Vertex temp = vectorVertices[whatNumber(endVertex, vectorVertices)];
    std::cout << "Writing down the last vertex." << endVertex << std::endl;
    answer.emplace_back(temp);
    while (temp.name != startVertex) {
        temp = vectorVertices[whatNumber(temp.nameFromT, vectorVertices)];
        std::cout << "Writing down the vertex." << temp.name << std::endl;
        answer.emplace_back(temp);
    }
    std::cout << "Reversing result..." << std::endl;
    std::reverse(answer.begin(), answer.end());//since it was filled in the reverse order, we do reverse
    std::cout << "Answer:  " << std::endl;
    for (Vertex ans : answer) {
        std::cout << ans.name;
    }
```

```
    std::cout << std::endl;
}

void changeInfo(std::vector<Vertex>& vectorVertices, std::vector<Vertex>& openVertexes, char a, char name, double temp_G, char endVertex )
{
    std::cout << "Vertex data update:  " << std::endl;

    vectorVertices[whatNumber(a, vectorVertices)].nameFromT = name;

    vectorVertices[whatNumber(a, vectorVertices)].pathToVertex = temp_G;
    openVertexes[whatNumber(a, openVertexes)].nameFromT = name;
    openVertexes[whatNumber(a, openVertexes)].pathToVertex = temp_G;
    openVertexes[whatNumber(a, openVertexes)].heuristicF = temp_G + abs(endVertex - a);
    std::cout << "Vertex  " << a << "   is set. Its ancestor:   " << name << std::endl;
    std::cout << "Path to the  " << a << "   is   " << temp_G << std::endl;
    std::cout << "Heuristic estimation for a vertex  " << a << "   is   " << temp_G + abs(endVertex - a) << std::endl;
}

bool A(std::vector<Path>& vectorPath, std::vector<Vertex>& vectorVertices, char startVertex, char endVertex) {

    Vertex temp;
    double temp_G;
    std::vector<Vertex> closedVertexes;
    closedVertexes.reserve(0);
    std::vector<Vertex> openVertexes;
    openVertexes.reserve(0);

    std::cout << "Adding a vertex to the open vertexes vector:   " << vectorVertices[0].name << std::endl;

    openVertexes.emplace_back(vectorVertices[0]);

    while (!openVertexes.empty()) {
        Vertex min = openVertexes[0];
        std::cout << "Open vertices sort: " << std::endl;
        std::sort(openVertexes.begin(), openVertexes.end(), comp);
        temp = openVertexes[0]; //minimum f from openVertexes
        std::cout << "Current vertex:    "<< temp.name << std::endl;

        if (temp.name == endVertex) {
```

```
        std::cout << "The current vertex is equal to the one you are looking for, so we call the answer function." << std::endl;
        answer(vectorVertices, startVertex, endVertex);
        return true;
    }
    std::cout << "Moving " << openVertexes[0].name << " to the vector of closed vertexes." << std::endl;
    closedVertexes.emplace_back(temp); //adding the processed vertex
    openVertexes.erase(openVertexes.begin()); //deleting the processed vertex

    for (unsigned int i = 0; i < temp.coupled.size(); i++) { //for each neighbor
        if (whatNumber(temp.coupled[i], closedVertexes) != -1) { //if the neighbor is in closedVertexes (already processed)
            continue;
        }
        int j = 0;
        while (true) {
            if (vectorPath[j].nameFromP == temp.name && vectorPath[j].nameOutP == temp.coupled[i]) {
                std::cout << "Evaluating the shortest path to the " << vectorPath[j].nameOutP << std::endl;
                temp_G = vectorPath[j].weightPath + temp.pathToVertex;
                std::cout << "It's about " << temp_G << std::endl;
                break;
            }
            j++;
        }

        if (whatNumber(temp.coupled[i], openVertexes) == -1) { //if the neighbor is not in openVertexes
            std::cout << temp.coupled[i] << " is not in the open vtcs vector, putting it into..." << std::endl;
            openVertexes.emplace_back(vectorVertices[whatNumber(temp.coupled[i], vectorVertices)]); //adding a neighbor
            std::cout << "Calling the information update function."  << std::endl;
            changeInfo(vectorVertices, openVertexes, temp.coupled[i], temp.name, temp_G, endVertex);
        }
        else {
            if (temp_G < openVertexes[whatNumber(temp.coupled[i], openVertexes)].pathToVertex) {
                std::cout << "A shorter path up to  "   << temp.coupled[i] <<   " was found (" << temp_G <<").  Update..."<< std::endl;
                changeInfo(vectorVertices, openVertexes, temp.coupled[i], temp.name, temp_G, endVertex);
            }
        }


    }
```

```
    }
     return false;
 }


int main() {

    setlocale(LC_ALL, "Russian");
    bool flag = true;
    bool flagM = true;
    bool flagAd = true;
    std::vector<Path> vectorPath;//vector paths
    vectorPath.reserve(0);
    std::vector<Vertex> vectorVertices;//vector Vertices
    vectorVertices.reserve(0);

    char startVertex;
    char endVertex;
    std::cout << "Input: " << std::endl;

    std::cin >> startVertex;
    std::cin >> endVertex;

    char start, end;
    double weight;


    while (std::cin >> start >> end >> weight) {
        vectorPath.emplace_back(Path(start, end, weight));
    }

    std::set<char> set;

    set.insert(startVertex);//inserting the first vertex

    vectorVertices.emplace_back(Vertex(startVertex));//creating the initial vertex and putting it in the vector

    int number;

    for (Path path : vectorPath) {//going through the path vector
```

```
    char from = path.getNameFromP();//
    char out = path.getNameOutP();

    if (set.find(from) == set.end()) {//checks that there is no from in the set
        set.insert(from);
        vectorVertices.emplace_back(Vertex(from));
    }
    if (set.find(out) == set.end()) {
        set.insert(out);
        vectorVertices.emplace_back(Vertex(out));

    }
}
//the path vector is full, but the neighbor vector is not =>
//performing a pass through the path vector again
for (Path path : vectorPath) {//going through the path vector
    char from = path.getNameFromP();//
    char out = path.getNameOutP();

    if (set.find(from) != set.end()) {//checks that the set has from
        number = whatNumber(from, vectorVertices);
        vectorVertices[number].coupled.emplace_back(out);//adding a vertex neighbor
    }

}

vectorVertices[0].pathToVertex = 0;
vectorVertices[0].heuristicF = abs(endVertex - startVertex);
std::cout << "Starting A*!" << std::endl;

if (!A(vectorPath, vectorVertices, startVertex, endVertex)) {
    flag = false;
    std::cout << "Unexpected error!" << std::endl;
}


if (flag)
{
    check(vectorPath, vectorVertices, endVertex, flagM, flagAd);
}
```

}