Конспект по курсу: Теория вероятности и математическая статистика [1]

Александра Лисицына [2]

5 января 2019 г.

[1]читаемый Суслиной Ириной Александровной в 2018-2019 годах
[2]студентка группы M3334

Оглавление

Глава 1

Введение в теорию вероятностей

1.1 Введение

Определение 1.1.1. ***Вероятностное пространство*** *— стандартная модель теории вероятности* (Ω, Σ, P)*.*

Определение 1.1.2. ***Случайный эксперимент****(испытание) — первичное понятие. Может быть повторён в идентичных условиях любое число раз. Результат эксперимента —* ***элементарный исход****.*
В результате эксперимента происходит один и только один исход.

Examples

1. Случайное двукратное бросание монеты $\Omega =${ГГ, ГР, РГ, РР}
2. Случайное извлечение двух карт из колоды в 36 карт. Порядок не важен $card(\Omega) = |\Omega| = C_{36}^2 = 18 \times 35$
3. Бросание монеты до первого герба $\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, $\dots\}$
4. Поезда в метро ходят с интервалом 2 минуты. Человек появляется на платформе в произвольный момент. Сколько ему ожидать поезд? $\Omega = [0$ мин, 2 мин$)$

1.2 Дискретная вероятностная схема

Пусть Ω — не более чем счётно

Определение 1.2.1. $\forall A \subseteq \Omega$ *называют* ***событием****.* Σ *— множество всех подмножеств* Ω*.*

Определение 1.2.2. $P = P(A)$ *— счётно-аддитивная мера, если*

1. $\forall \omega \in \Omega \quad P(\omega) \in [0,1], p(\omega) \geqslant 0$
2. $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$

$$P\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$$

$$\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)$$

Пример. **Классическая схема**

$$|\Omega| = n$$

исходы равновозможны:

$$\omega \in \Omega p(\omega) = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\Omega} 1 = 1$$

В примере априорном 1
$\Omega = \{$ГГ, РГ, ГР, РР$\}$

$$p(\omega_i) = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{4}$$

A — присутствует герб

$$p(A) = p(\text{ГГ}) + p(\text{ГР}) + p(\text{РГ}) = \frac{3}{4}$$

1.3 Несчётное вероятностное пространство

Определение 1.3.1. *Пусть Ω — более чем счётно $\Rightarrow \Sigma$ — выделенная σ-алгебра из пдмножеств Ω.* $A \in \Sigma \quad \Rightarrow A$ *называют* ***соытием****.*

Для определения $\mathcal{A}$ — алгебра, Σ — σ-алгебра нужны действия:

1. Сложение $(A + B)$
2. Умножение $(A \cdot B)$
3. Разность $(A \backslash B)$

1.3.1 Свойства действий

1. $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A \cdot B = B \cdot A$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. $A \cdot \Omega = A$, $A \cdot \emptyset = \emptyset$, $A + \Omega = \Omega$, $A + \emptyset = A$
4. $\overline{A} = \Omega \backslash A$, $A \cdot \overline{A} = \emptyset$
5. $A + \overline{A} = \Omega$
6. $A \cdot B \subseteq A$, $A \cdot B \subseteq B$
7. $\overline{\overline{A}} = A$
8. $A \backslash B = A \cdot \overline{B}$
9. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
10. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
11. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
12. $(A \backslash B) \cdot C = AC \backslash BC$

Замечание. Свойства 9–11 обобщаются на любое число множеств

9. $\overline{\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$
10. $\overline{\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$
11. $B \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} BA_i$

Определение 1.3.2. *$\mathcal{A}$ называют алгеброй множеств если*

1. *Ω — объект $\mathcal{A}$*
2. *Пусть $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$*
3. *Пусть $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A + B \in \mathcal{A}$*

Утверждение 1. *Алгебра замкнута относительно действий в конечном числе*

Доказательство утверждения. 1. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}} \Rightarrow A \cdot B \in \mathcal{A}$

2. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \backslash B = A \cdot \overline{B}$

□

Определение 1.3.3. *Σ называют* ***σ-алгеброй множеств*** *Ω, если Σ — алгебра и $A_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow$* $\sum\limits_{i} A_i \in \Sigma$

Определение 1.3.4. $<\Omega, \Sigma>$ *называют* ***измеримым пространством****.*

1.3.2 Связь $\mathcal{A}$ и Σ

1. Пусть $|\Omega| = n$

   $\mathcal{A}$ — содержит все элементы $\Omega \Rightarrow \mathcal{A} = \Sigma$

2. $|\Omega| = \mathbb{N}$

   Пусть $\mathcal{A}$ — содежит все элемнты Ω

   $\mathcal{A}$ не содержит, например, всех чётных натуральных чисел

3. Ω более чем счётно

   Пусть $\Omega = \mathbb{R} \Rightarrow \Sigma$ порождается множеством интервалов (абсолютн любых). Если только [a, b), то она называется **борелевской** σ-алгеброй.

   Замечание. Борелевская σ-алгебра отличается от Лебега тем, что она не замкнута.

   Пусть $\Omega = \mathbb{R}^{\ltimes} \Rightarrow \Sigma$ порождается n-мерными кубами: $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots$

   Борелевская алгебра для $\mathbb{R}$ представляет собой множество элементов вида: $A = \sum\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \quad [a_i, b_i] \bigcap\limits^{i \neq j} [a_j, b_j) = \emptyset$

Определение 1.3.5. *1. $\Omega = D$ — **достоверное** событие.*

*2. $\emptyset$ — **невозможное** событие.*

*3. $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow A$ и B называют **несовместными**.*

*4. $\overline{A}$ — **противоположное** событие.*