Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2021/2022

Тема № СИ2022-Г2-12

27.06.2022

София

Изготвил: Александра Радева

Ф. No. 62541

Група 2

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по ДУПрил
спец. СИ, 2 курс, летен семесътр, уч. год. 2021/2022

Тема СИ2022-Г2-12. Разпределението на топлината в тънък хомогенен прът се моделира със следната смесена задача

$$\left|\begin{array}{l} u_t = \frac{1}{7}u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ \\ u|_{t=0} = \begin{cases} \sin(3x), & x \in [0,1] \\ \sin(3x) - 5(x-1)^3 \sin^3 x, & x \in (1,\pi], \end{cases} \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0. \end{array}\right.$$

1. (10 т.) Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. (10 т.) Направете (с MATLAB) на анимация анимация на изменението на температурата в пръта за $t \in [0,8]$, като използвате 55-та частична сума на реда за $u(x,t)$. Начертайте в един прозорец една под друга графиките от направената анимация в три различни момента.

Срок за предаване 30.06.2022 г.

2. Решение на задачата

2.1. Теоретична част

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{7} u_{xx}, & t > 0, \ 0 < x < \pi \\ u|_{t=0} = \begin{cases} \sin(3x) & , x \in [0,1] \\ \sin(3x) - 5(x-1)^3 \sin^3 x & , x \in (1, \pi] \end{cases} \\ u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=\pi} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Нека $u|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} \sin(3x) & , x \in [0,1] \\ \sin 3x - 5(x-1)^3 \sin^3 x & , x \in (1, \pi] \end{cases}$

$\varphi(0) = 0, \ \varphi'(\pi) = 0$

Търсим $u(x,t) = X(x) . T(t) \neq 0$

$$X(x) T''(t) = \frac{1}{7} X''(x) T(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T''(t)}{1/7\, T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const$$

$$\Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) + \lambda \frac{1}{7} T(t) = 0$$

$u_x|_{x=0} = X(0) T(t) = 0, \ t \geq 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$u_x|_{x=\pi} = X'(\pi) T(t) = 0, \ t \geq 0 \Rightarrow X'(\pi) = 0$

За $X(x)$ получаваме задачата на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Търсим ненулево решение на у-то $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

То е лин. ур. от 2 ред с характеристичен полином

$$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\lambda$$

1) $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

$\text{ФСР} = \{e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\}$

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $c_1, c_2 \to const$

$X'(x) = \sqrt{-\lambda}\,(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x})$

$X'(\pi) = 0 = \sqrt{-\lambda}\,(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}.\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi})$

$X(0) = 0 = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}0} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}.0} = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2$

$\Rightarrow c_1 = 0 = c_2 \Rightarrow X(x) = 0$

2) $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 0$

$\text{ФСР} = \{1, x\}$

$X(x) = c_1 + c_2 x$

$X'(x) = c_2$

$X(0) = 0 = c_1 + c_2.0 = c_1$, $c_1 = 0$

$X'(\pi) = 0 = c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$

3) $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\text{ФСР} = \{\cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x\}$

$X(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(x) = \sqrt{\lambda}\,(-c_1\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}x))$

$X(0) = 0 = c_1\cos(\sqrt{\lambda}.0) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}.0) = c_1 = 0$

$X'(\pi) = 0 = \sqrt{\lambda}\,(-c_1\sin(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\pi))$

$c_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$

Избираме при $\lambda > 0$, $\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$

$\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1, 2 \ldots$

$\sqrt{\lambda} = \dfrac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\pi} = \dfrac{\pi(\frac{1}{2} + k)}{\pi} = \dfrac{2k+1}{2}$

$\lambda_k = \left(\dfrac{2k+1}{2}\right)^2$, $k = 0, 1, \ldots$

↳ собствени стойности

$X_2(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) = c_2 \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right)$

$X_k(x) = \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right), \quad k = 0, 1, 2 \dots$

За $\lambda = \lambda_k$ решаваме уравнението $T(t)$

1) $T(t) = 0$ е решение

2) $T(t) \neq 0$

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda_k \frac{1}{7} T$$

$$\frac{dT}{T} = -\lambda_k \frac{1}{7} dt \quad / \text{интегрираме } (\int)$$

$$\int \frac{dT}{T} = \int -\lambda_k \frac{1}{7} dt$$

$$\ln|T| = -\lambda_k \frac{1}{7} t + c$$

$$|T| = e^{-\lambda_k \frac{1}{7} t + c} \Rightarrow T(t) = \pm c_1 e^{-\lambda_k \frac{1}{7} t}, \quad T(t) = 0$$

$$\Rightarrow T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 \frac{1}{7} t}, \quad A_k \to \text{произв. константа}$$

Функциите $T_k(t)$, $X_k(x)$ са решения на ур

и удовлетворяват началните ограничения

$$u_k|_{t=0} = T_k(t) X_k(x) |_{t=0} = A_k X_k(x) =$$

$$= A_k \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right)$$

$$\varphi(x) = A_k \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right)$$

Търсим:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot e^{-\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} t} \cdot \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right)$$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right) = \varphi(x)$$

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right) dx$$

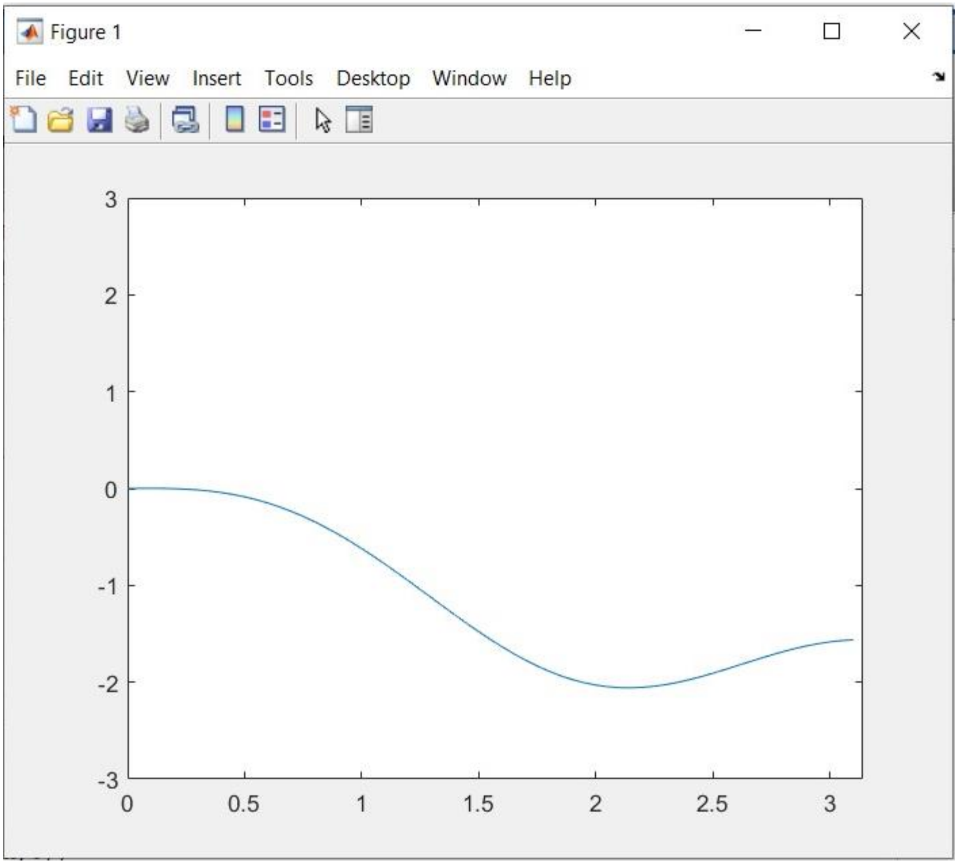
2.2 MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му.

```
function tema12

%Parametri
t_max = 8;
L= pi;
x=0:0.05:L;
t=0:t_max/100:t_max;

%Funkciq phi(x)
function y=phi(x)
    for i=1:length(x)
        if x(i) >= 0 && x(i) <= 1
            y(i) = sin(3*x(i));
        else
            y(i) = sin(3*x(i))-5*(x(i)-1)^3*(sin(x(i)))^3;
        end
    end
end

% Funkciq u(x,t)
function y=u(x,t)
 y=0;
%55-ta chastichna suma
    for k=0:54
         Xk=sin((2*k+1)*x/2); % sobstveni funkcii
         Ak=trapz(x, phi(x).*Xk)*(2/pi);
         Tk=Ak*exp((-((2*k+1)/2).^2)*t/7);
         y=y+Tk*Xk;
    end
end

for n=1:length(t)
     plot(x,u(x,t(n)))
     axis([0,pi,-3,3])
     M(n)=getframe;
end
movie(M,1)

%Grafiki v 3 razlichni momenta ( t1=0, t2=1, t3=8 )
subplot(3,1,1)
plot(x,u(x,0))
title('t1=0')
axis([0,pi,-3,3])
```

```
subplot(3,1,2)
plot(x,u(x,1))
title('t2=1')
axis([0,pi,-3,3])

subplot(3,1,3)
plot(x,u(x,8))
title('t3=8')
axis([0,pi,-3,3])
end
```

2.3. Графики (включително от анимация)

Графика на анимацията



Графики в различни моменти