Zadanie 1 (Optymalizacja kosztów diety)**.** Lekarz przepisał pacjentce dokładne ilości dziennego spożycia witaminy A oraz witaminy C. Pacjentka powinna tak dobrać swoją dietę, aby spożywać dokładnie 3 miligramy witaminy A oraz dokładnie 75 miligramów witaminy C. Rozważa ona spożywanie trzech rodzajów żywności, z których każdy zawiera różne ilości witamin oraz ma inną cenę. Chce ustalić, ile jednostek każdego rodzaju żywności powinna zakupić, aby **zminimalizować całkowite wydatki**, zapewniając jednocześnie przepisane ilości witamin.

Niech x_i oznacza ilość żywności typu i, jaką pacjentka powinna kupić, gdzie $i = 1, 2, 3$.

- Jednostka żywności 1 zawiera 1 mg witaminy A oraz 30 mg witaminy C.
- Jednostka żywności 2 zawiera 2 mg witaminy A oraz 10 mg witaminy C.
- Jednostka żywności 3 zawiera 2 mg witaminy A oraz 20 mg witaminy C.

Koszt jednej jednostki żywności:

- żywność 1: 40 zł,
- żywność 2: 100 zł,
- żywność 3: 150 zł.

Wyznaczyć wartości x_1, x_2, x_3 minimalizujące całkowity koszt, przy czym dopuszczamy, że rozwiązanie nie musi być całkowitoliczbowe.

Zadanie 2 (Problem plecakowy)**.** Rozwiąż problem plecakowy dla następujących zestawów danych:

wagi = [12, 7, 11, 8, 9]
ceny = [24, 13, 23, 15, 16]
pojemność plecaka = 26

wagi = [23, 31, 29, 44, 53, 38, 63, 85, 89, 82]
ceny = [92, 57, 49, 68, 60, 43, 67, 84, 87, 72]
pojemność plecaka = 165

wagi = [382745, 799601, 909247, 729069, 467902, 44328, 34610, 698150, 823460, 903959, 853665, 551830, 610856, 670702, 488960, 951111, 323046, 446298, 931161, 31385, 496951, 264724, 224916, 169684]
ceny = [825594, 1677009, 1676628, 1523970, 943972, 97426, 69666, 1296457, 1679693, 1902996, 1844992, 1049289, 1252836, 1319836, 953277, 2067538, 675367, 853655, 1826027, 65731, 901489, 577243, 466257, 369261]
pojemność plecaka = 6404180

Zadanie 3 (Liczba chromatyczna)**.** Znajdź liczbę chromatyczną dla następujących zestawów danych:

wierzchołki = [0, 1, 2, 3, 4]
krawędzie = [(0, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (2, 4), (0, 4), (1, 4), (0, 3), (0, 3)]

wierzchołki = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
krawędzie = [(0, 1), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 6), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 8), (4, 9), (5, 7), (5, 8), (6, 8), (6, 9), (7, 9)]

wierzchołki = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
krawędzie = [(0, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 5)]

Porównaj wyniki z sytuacją, gdy zmienne są ciągłe, otrzymując w ten sposób oszacowanie na liczbę chromatyczną (jakie?).

Zadanie 4. Rozwiąż

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ & x_1 - x_2 \leqslant 4 \\ & x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 8y_1 + 4y_2 \\ & y_1 + y_2 \geqslant 2 \\ & y_1 - y_2 \geqslant 1 \\ & y_1,\ y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ & 0 \leqslant x_1 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 4 \\ & 0 \leqslant x_3 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant x_4 \leqslant 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ & x_1 - 2x_2 = 3 \\ & -x_2 + x_3 \leqslant 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ dowolne} \end{aligned}$$

1 Przykład zastosowania biblioteki PuLP

```python
from pulp import *

# Tworzenie modelu maksymalizacyjnego
model = LpProblem("Example", LpMaximize)

# Zmienne decyzyjne typu calkowitego (Integer)
x = LpVariable("x", lowBound=0, cat="Integer")
y = LpVariable("y", lowBound=0, cat="Integer")

# Funkcja celu: maksymalizacja zysku
model += 3 * x + 2 * y

# Ograniczenia
model += 2.5 * x + y <= 100
model += x + y <= 80

# Rozwiazywanie modelu (domyslnie CBC solver)
status = model.solve()

# Wyswietlanie wynikow
print("Status:", LpStatus[status])
print("x =", x.value())
print("y =", y.value())
```

Listing 1: Model optymalizacyjny w Pythonie z użyciem PuLP

Typ `cat`	**Znaczenie**
`"Continuous"`	Zmienna rzeczywista (domyślnie)
`"Integer"`	Zmienna całkowita
`"Binary"`	Zmienna binarna

Tabela 1: Typy zmiennych w PuLP (`cat`) i ich znaczenie