POOCNS : PROJET 1 D'ANALYSE NUMERIQUE

Jean Hiouani
Maydine Ghestin

March 2019

1 Schémas numériques pour l'équation des ondes

Question 1 :

Explication des algorithmes itératifs :

- Euler Explicite : On peut directement exprimer u^{n+1} à partir de u^n. En effet :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta x^2} = 0$$
$$\iff \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_i^{n-1}\right) + 2u_i^n - u_i^{n-1} = u_i^{n+1}.$$

- Euler Crank-Nicolson : $\forall\, 0 < t < T, \quad u_0^t = u_{N+1}^t = 0$.
  Ce qui explique que lors la résolution du système présenté ci-dessous, nous ne considérerons pas les bords du vecteur $u^n, \forall n \geqslant 0$ ainsi les matrices seront de taille $N-1$.

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{\Delta x^2}\right) = 0$$
$$\iff \left(\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2}A_{N-1} - I_{N-1}\right)u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1}.$$

  Où I_{N-1} est la matrice identité de taille $N-1$ et A_{N-1} la matrice du Laplacien :

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

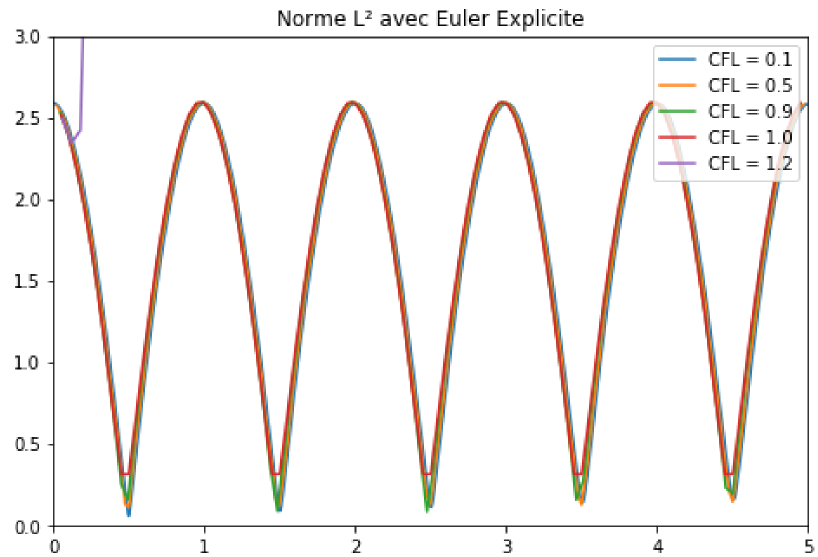
  En posant $B = \left(\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2}A_{N-1} - I_{N-1}\right)$ et $b = 2u^n - u^{n-1}$, on obtient un système linéaire $Au^{n+1} = b$ que nous résoudrons à l'aide d'une décomposition LU.

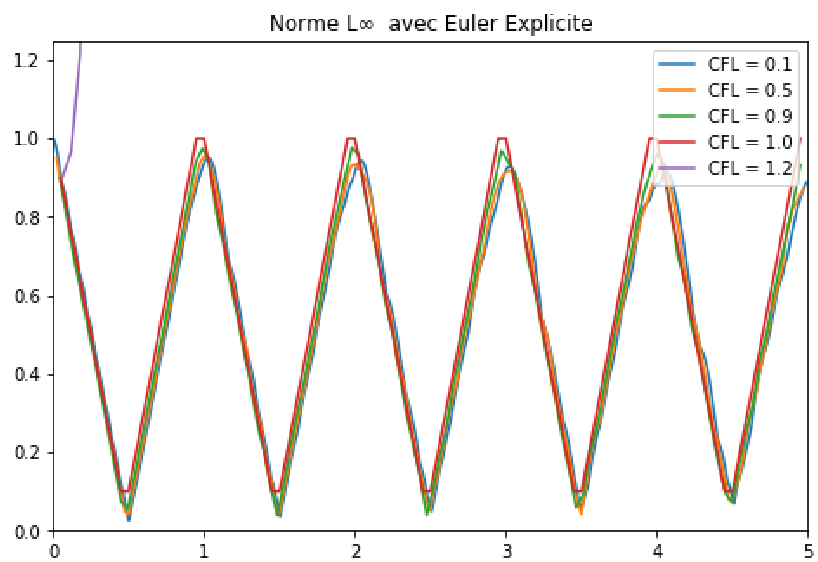
- Euler Implicite : On procède comme dans le cas précédent :

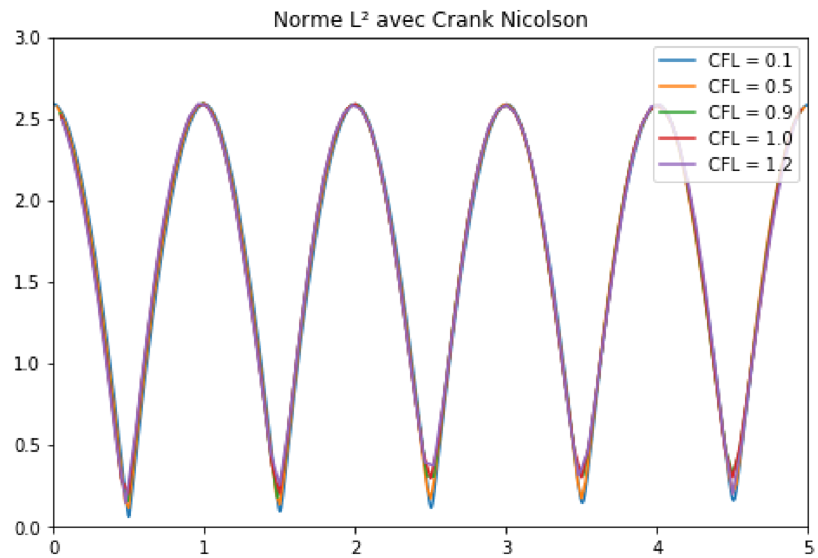
$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$
$$\iff \left(\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2}A_{N-1} - I_{N-1}\right)u^{n+1} = \left(\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2}A_{N-1} - I_{N-1}\right)u^{n-1} + 2u^n.$$

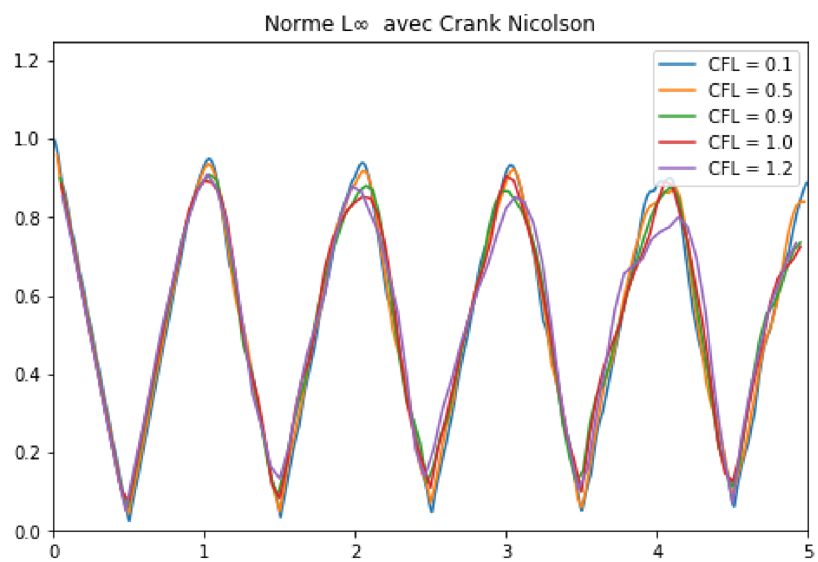
  En posant $B = \left(\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2}A_{N-1} - I_{N-1}\right)$ et $b = \left(\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2}A_{N-1} - I_{N-1}\right)u^{n-1} + 2u^n$, on obtient un système linéaire $Au^{n+1} = b$ que nous résoudrons également à l'aide d'une décomposition LU.

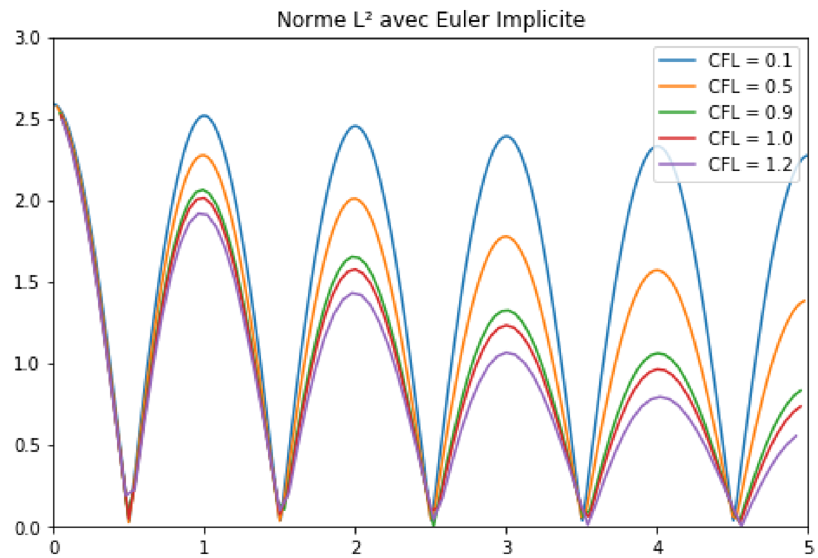
Question 3 :

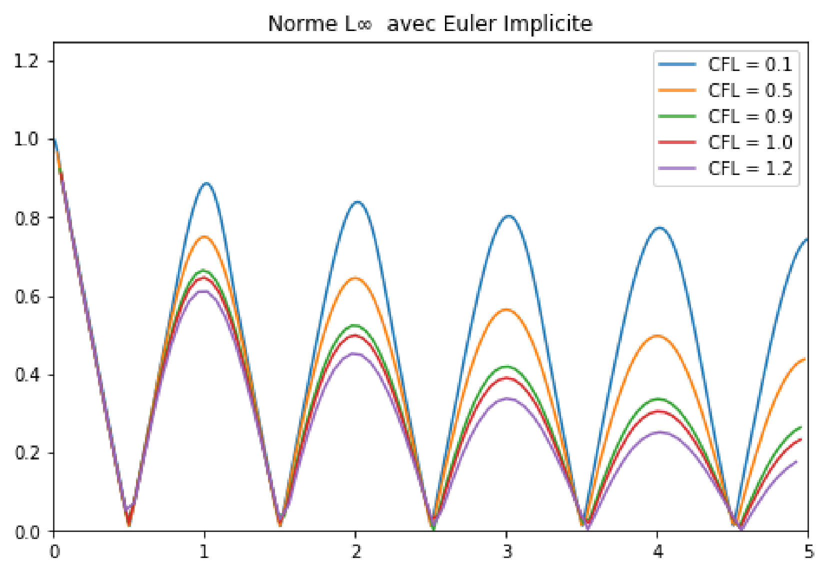

Norme L² avec Euler Explicite
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
5
CFL = 0.1
CFL = 0.5
CFL = 0.9
CFL = 1.0
CFL = 1.2


Norme L∞ avec Euler Explicite
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
2
3
4
5
CFL = 0.1
CFL = 0.5
CFL = 0.9
CFL = 1.0
CFL = 1.2


Norme L² avec Crank Nicolson
CFL = 0.1
CFL = 0.5
CFL = 0.9
CFL = 1.0
CFL = 1.2
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
5


Norme L∞ avec Crank Nicolson
CFL = 0.1
CFL = 0.5
CFL = 0.9
CFL = 1.0
CFL = 1.2
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
2
3
4
5





Pour toute CFL¡1 pour le shéma de Crank Nikolson et le shéma explicite les normes L^2 et Linf se confondent . Pour CFL $= 1$ la solution diverge pour le shéma explicite , pour crank nikolson elle reste la même. Pour le shéma implicite la norme Linf $etL^2nedivergentjamais,maislanormedelasolutionbaissepluslaCFLestgrandepeutetreàcauseducaracteredissipatifdel'éner$

Question 4 :

On suppose que $u \in L^2(0,1) \cap L^\infty$. L'énergie continue est ici définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 u_t^2(x,t)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 u_x^2(x,t)\ \mathrm{d}x\right). \qquad 0 < t < T.$$

Montrons que E est constante au cours du temps :

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^1 u_t^2(x,t)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 u_x^2(x,t)\ \mathrm{d}x\right)$$

Comme u_t et u_x sont continues sur [0,1], on peut permuter dérivées et intégrales :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\partial u_t^2(x,t)}{\partial t}\ \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\partial u_x^2(x,t)}{\partial t}\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 2u_{tt}(x,t)u_t(x,t)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 2u_{tx}(x,t)u_x(x,t)\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \int_0^1 u_{tt}(x,t)u_t(x,t) + u_{tx}(x,t)u_x(x,t)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or u est solution de l'équation d'ondes et vérifie donc :

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T.$$

Ainsi, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_0^1 u_{xx}(x,t)u_t(x,t) + u_{tx}(x,t)u_x(x,t)\ \mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\partial u_x(x,t)u_t(x,t)}{\partial x}\ \mathrm{d}x\\
&= [u_x(x,t)u_t(x,t)]_{x=0}^{x=1}\\
&= u_x(1,t)u_t(1,t) - u_x(0,t)u_t(0,t).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait aussi que u vérifie :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \quad (*)$$

Puis en écrivant un développement limité de u en temps en $x = 0$ et $x = 1$, on trouve que :

$$u_t(0,t) = u_t(1,t) = 0.$$

En effet :

$$\frac{\partial u(0,t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{h\to+\infty} \frac{u(0,t+h) - u(0,t)}{h}, \qquad \forall t \in [0,T]$$

En utilisant (*), on déduit directement que $u_t(0,t) = 0$. De même pour $u_t(1,t)$.

Finalement, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

E est donc une quantité constante au cours du temps.

Question 5 :

Dans cette question, nous allons exprimer $E(t)$ dans sa version discrète au temps $(n+\frac{1}{2})\Delta t$.
Rappelons que le maillage en espace est constitué de N mailles et qu'on note $\Delta x = \frac{1}{N+1}$.

- Discrétisation de $\displaystyle\int_0^1 u_t^2(x,t)\mathrm{d}x$:
  Pour N assez grand, on peut utiliser la méthode des rectangles à gauche et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_t^2(x,t)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{N}\left(\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} u_t^2(x,t)\mathrm{d}x\right)\\ &\simeq \sum_{i=0}^{N} u_t^2(i\Delta x,t)\left((i+1)\Delta x - i\Delta x\right)\\ &\simeq \Delta x\sum_{i=0}^{N} u_t^2(i\Delta x,t).\end{aligned}$$

  Puis on utilise la méthode de différences finies centrée d'ordre 1 pour exprimer $u_t^2(i\Delta x,t)$ au temps $t=(n+\frac{1}{2})\Delta t$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_t^2(x,(n+\frac{1}{2})\Delta t)\mathrm{d}x &\simeq \Delta x\sum_{i=0}^{N} u_t^2(i\Delta x, n\Delta t+\frac{1}{2}\Delta t)\\ &\simeq \Delta x\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{u(i\Delta x,(n+1)\Delta t)-u(i\Delta x,n\Delta t)}{2\frac{\Delta t}{2}}\right)^2\\ &\simeq \Delta x\sum_{i=0}^{N}\frac{(u_i^{n+1}-u_i^n)^2}{\Delta t^2}\\ &\simeq \Delta x\sum_{i=0}^{N+1}\frac{(u_i^{n+1}-u_i^n)^2}{\Delta t^2}.\end{aligned}$$

  Car $\forall t\in[0,T],\quad u(1,t)=0.$

- Discrétisation de $\displaystyle\int_0^1 u_x^2(x,t)\mathrm{d}x$:
  En considérant N assez grand, on utilise encore la méthode des rectangles à gauche :

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_x^2(x,t)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{N}\left(\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} u_x^2(x,t)\mathrm{d}x\right)\\ &\simeq \sum_{i=0}^{N} u_x^2(i\Delta x,t)\left((i+1)\Delta x - i\Delta x\right)\\ &\simeq \Delta x\sum_{i=0}^{N} u_x^2(i\Delta x,t).\end{aligned}$$

  On pose maintenant la fonction f telle que :

$$f(t)=\Delta x\sum_{i=0}^{N} u_x^2(i\Delta x,t).$$

  On utilise cette fois la méthode des trapèzes (en considérant N assez grand) pour approcher $f((n+\frac{1}{2})\Delta t)$:

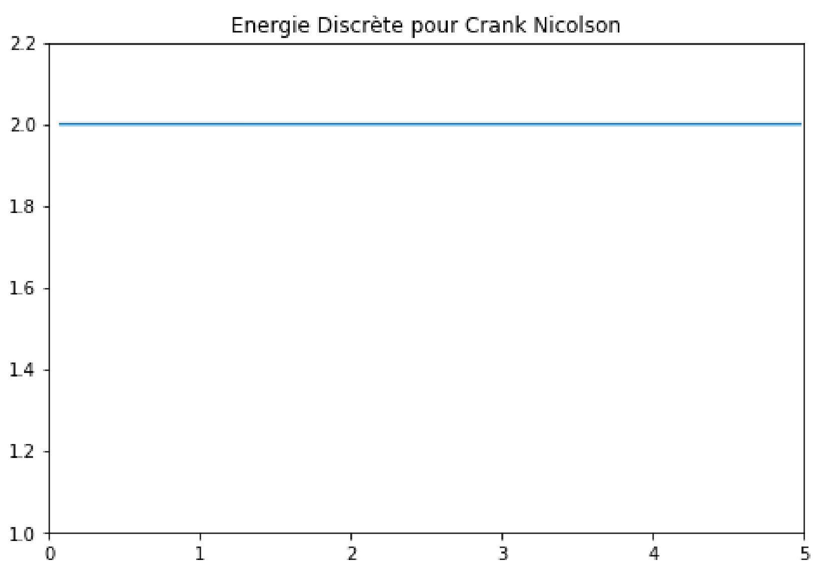
$$\begin{aligned}f((n+\frac{1}{2})\Delta t) &\simeq \frac{f(n\Delta t)+f((n+1)\Delta t)}{2}\\ &\simeq \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{N}\left(u_x^2(i\Delta x,n\Delta t)+u_x^2(i\Delta x,(n+1)\Delta t)\right).\end{aligned}$$

Enfin on obtient grâce aux différences finies amont appliquées pour approcher u_x :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_x^2(x,(n+\frac{1}{2})\Delta t))\mathrm{d}x &\simeq \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{N}\big(u_x^2(i\Delta x,n\Delta t)+u_x^2(i\Delta x,(n+1)\Delta t)\big)\\
&\simeq \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{u((i+1)\Delta x,n\Delta t)-u(i\Delta x,n\Delta t)}{\Delta x}\right)^2\\
&+ \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{u((i+1)\Delta x,(n+1)\Delta t)-u(i\Delta x,(n+1)\Delta t)}{\Delta x}\right)^2\\
&\simeq \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\left(u_{i+1}^n-u_i^n\right)^2}{\Delta x^2}+\frac{\left(u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}\right)^2}{\Delta x^2}\right).
\end{aligned}$$

- Expression de E_N^n : En faisant la somme des deux expressions trouvées précédemment, on obtient la formule souhaitée

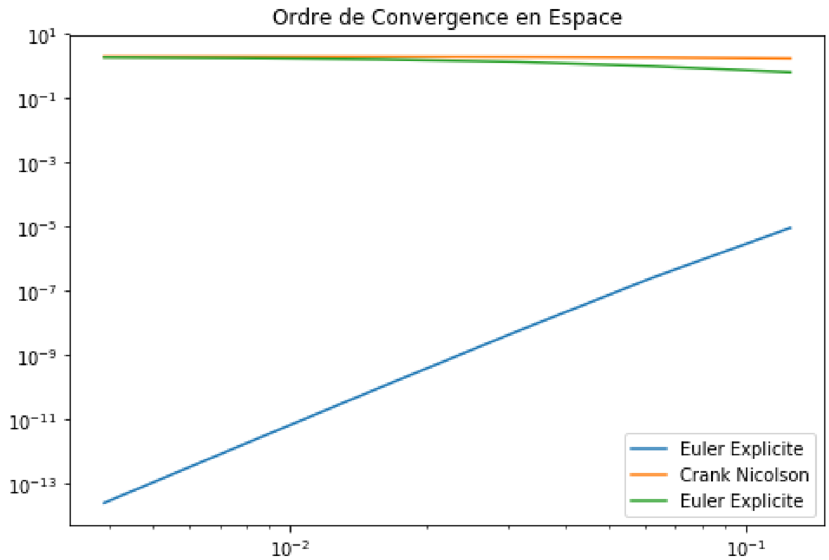
$$\begin{aligned}
E_N^n &\simeq \frac{1}{2}\left(\Delta x\sum_{i=0}^{N+1}\frac{(u_i^{n+1}-u_i^n)^2}{\Delta t^2}+\frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\left(u_{i+1}^n-u_i^n\right)^2}{\Delta x^2}+\frac{\left(u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}\right)^2}{\Delta x^2}\right)\right)\\
&\simeq \frac{\Delta x}{2}\left(\sum_{i=0}^{N+1}\frac{(u_i^{n+1}-u_i^n)^2}{\Delta t^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\left(u_{i+1}^n-u_i^n\right)^2}{\Delta x^2}+\frac{\left(u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}\right)^2}{\Delta x^2}\right)\right)
\end{aligned}$$



On voit que l'énergie lorsqu'on utilise le shéma de Crank Nikolson est constante au cours du temps . Cela est du au caractére conservatif au niveau de l'énergie du shéma de Crank Nikolson .

Question 6 :

Convergence en Espace :



Pour le shéma explicite on a une droite linéaire qui nous indique donc que l'erreur baisse avec un pas plus fin . Pour les deux autres shémas il est plus dur de distinguer un ordre de convergence .