TP4 : Équations Différentielles Ordinaires

Vous êtes invités à télécharger le fichier `tp6_fonctions.py` à partir de moodle, puis à le compléter au fur et à mesure avec les nouvelles procédures.

Rappel méthodes à un pas

L'objectif des méthodes numériques pour les EDO est de calculer une valeur approchée de la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{$\star$}$$

avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

> Dans ce TP, pour simplifier, on se limitera au cas autonome, c'est-à-dire f ne dépendant pas de t, et aux méthodes à pas constant.

Afin de calculer une solution approchée de $(\star)$ sur un intervalle $[0, T]$, on se donne une subdivision régulière de $[0, T]$: $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ avec $t_n = nh$ où $h = T/N$ est le pas de la subdivision. On veut calculer une suite $(u_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que u_n soit une « bonne » approximation de $u(t_n)$ (u solution exacte).
Les méthodes utilisées dans ce TP sont :

Méthode d'Euler explicite : (à programmer)
$u_{n+1} = u_n + hf(u_n)$, avec u_0 pour condition initiale.

Méthode d'Euler implicite : (disponible dans `tp6_fonctions.py`)
$u_{n+1} = u_n + hf(u_{n+1})$, avec u_0 pour condition initiale.

Méthode de Crank-Nicolson : (disponible dans `tp6_fonctions.py`)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f(u_n) + f(u_{n+1})), \text{ avec } u_0 \text{ pour condition initiale.}$$

Méthodes de Runge-Kutta (RK2) : (à programmer)

Euler amélioré (avec $\alpha = \frac{1}{2}$) et Heun (avec $\alpha = 1$) :

$$\begin{cases} k_{n,1} = f(u_n) \\ k_{n,2} = f(u_n + \alpha h k_{n,1}) \\ u_{n+1} = u_n + h\big((1 - \frac{1}{2\alpha})k_{n,1} + \frac{1}{2\alpha}k_{n,2}\big), \end{cases}$$

avec u_0 pour condition initiale.

Méthode de Runge-Kutta (RK4) : (disponible dans `tp6_fonctions.py`)

$$\begin{cases} k_{n,1} = f(u_n) \\ k_{n,2} = f(u_n + \frac{h}{2}k_{n,1}) \\ k_{n,3} = f(u_n + \frac{h}{2}k_{n,2}) \\ k_{n,4} = f(u_n + hk_{n,3}) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}), \end{cases}$$

avec u_0 pour condition initiale.

La méthode d'Euler explicite

Exercice 1 (La méthode d'Euler explicite)

a) Programmer la méthode d'Euler explicite `def=EulerExplicite(f,T,N,U0)` qui étant donnés une fonction `f`, la borne supérieure `T` de l'intervalle $[0, T]$, le nombre de subdivisions `N` de cet intervalle et la condition initiale `U0` (qui est un vecteur colonne), retourne une matrice `U` dont les $N + 1$ colonnes représentent les valeurs approchées (en particulier `U[:,0]` $=$ `U0`).

b) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -10y(t), \quad t \in [0, 1], \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Définissez une fonction `solex` qui est la solution exacte de ce problème.

c) Tracer sur une même figure la solution exacte et les solutions approchées obtenues par la méthode d'Euler explicite pour $N = 2^k$ $(h = 2^{-k})$ avec $k = 4, \ldots, 10$.

d) Comme la solution exacte y du problème est $\mathcal{C}^2$, on rappelle que la méthode d'Euler explicite vérifie :

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \le Ch \sup_{0 \le t \le T} |y^{(2)}(t)|.$$

Dans une autre figure, tracer la norme infinie de l'erreur commise en échelle « log-log » en fonction du pas $h = T/N$, pour les mêmes $N = 2^k$ $(h = 2^{-k})$ avec $k = 4, \ldots, 10$, ainsi qu'une droite de pente 1. Que constatez-vous ?

e) On considère les deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t), & t \in [0,20], \\ y(0) = 1/3. \end{cases} , \quad \begin{cases} y'(t) = -3y(t), & t \in [0,20], \\ y(0) = 1/3. \end{cases}$$

Quelles sont les solutions exactes de ces deux problèmes ? Mettre en évidence pour chacune d'entre elles la sensibilité de la solution numérique par rapport à une petite perturbation aléatoire dans la condition initiale. Pour cela, effectuer une résolution par la méthode d'Euler explicite avec $y(0) = 1/3 + \varepsilon$, où $\varepsilon \leq 10^{-7}$ est une perturbation aléatoire. Représenter les résultats et les commenter.

f) Etude de la A-stabilité .
Appliquer la méthode d'Euler explicite à la résolution du problème de Cauchy $y'(t) = -y(t), \quad y(0) = 1$. Tracer les solutions approchées correspondant à une subdivision de l'intervalle $[0,30]$ en N_i sous-intervalles avec $N_1 = 14$ et $N_2 = 17$. Interpréter les résultats.

Comparaison de quelques schémas numériques

Exercice 2 (Ordres de convergence)

On se propose dans cet exercice de comparer les ordres de convergence des différentes méthodes décrites dans l'introduction de cette feuille.

On rappelle que, en supposant que les solutions y de l'équation différentielle soient de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, une méthode numérique est d'ordre de convergence p si :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \leq Ch^p \sup_{0 \leq t \leq T} |y^{(p+1)}(t)|.$$

Trois des méthodes dont on aura besoin, Euler implicite, Crank-Nicolson et Runge-Kutta 4, sont fournies dans le fichier `tp6_fonctions.py`. Les deux méthodes implicites exige comme paramètre, en plus de la fonction `f`, sa dérivée `Df` pour pouvoir résoudre l'équation de récurrence grâce à la méthode de Newton.

a) En plus de la méthode d'Euler explicite déjà implémentée, programmer les méthodes d'Euler amélioré `def EulerAmeliore(f,T,N,U0)` et de Heun `def Heun(f,T,N,U0)`.

b) On considère l'équation différentielle linéaire :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \ t \in [0,5], \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Comme dans 1.d), on se propose de résoudre puis d'évaluer les erreurs commises en norme infinie pour toutes les méthodes, les trois que vous avez programmées et les trois fournies. Pour cela, faire les calculs pour $N = 2^k$ $(h = \frac{5}{2^k})$ avec $k = 4, \ldots, 10$. Puis mettre en évidence les ordres de convergence en traçant, sur un même graphique, la norme infinie de l'erreur commise en échelle « log-log » pour chacune de ces méthodes, ainsi que 3 droites respectivement de pente

1, 2 et 4.

Que constatez-vous ?

Systèmes différentiels à coefficients constants

Exercice 3 (Un problème raide)

On considère le système :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = -\lambda_1\,\lambda_2 y_1(t) + (\lambda_1 + \lambda_2) y_2(t), \end{cases}$$

avec λ_1 et λ_2 deux réels négatifs distincts tels que $|\lambda_1| >> |\lambda_2|$. On cherche à calculer la solution sur $[0, 20]$.

On fixe pour cet exercice $\lambda_1 = -100$, $\lambda_2 = -1$ et la condition initiale $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

a) En utilisant la fonction `expm` de la bibliothèque `linalg` de `scipy`, donner la solution exacte du problème `y=solexacte(t)`.

b) Résoudre le problème par les méthodes d'Euler explicite et implicite pour les nombres de subdivisions $N = 966$ ($h \sim 0.0207$), $N = 1030$ ($h \sim 0.0194$) et $N = 2000$ ($h = 0.01$). Pour chacune des trois valeurs de N, tracer sur un graphique les deux composantes de Y_n, et sur un autre graphique la trajectoire de Y_n. Que constatez-vous ?

Indication : Pour les méthodes itératives sur $\mathbb{R}^n$, la « dérivée » `Df` est la matrice jacobienne de `f`.

Exercice 4 (Modèle de Lotka-Volterra)

On veut appliquer les méthodes d'Euler explicite, d'Euler implicite, d'Euler amélioré, de Heun, de Crank-Nicolson et de Runge-Kutta 4 à la résolution du modèle de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \tag{1}$$

Pour cet exercice, on fixe les constantes et la condition initiale comme suit :

$$a = 3,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 1,\ x(0) = 1,\ y(0) = 2.$$

a) Calculer la solution sur l'intervalle $[0, T]$, `T=10`, avec `N = 200` subdivisions. Représenter la solution numérique de chaque méthode dans le plan de phase (x, y) (marquer le point initial). Commenter les résultats.

b) On appelle intégrale première la quantité suivante

$$H(x, y) = dx - c\ln x + by - a\ln y,$$

Montrer que si $(x(t), y(t))$ est solution de (1), alors la quantité $H(x(t), y(t))$ est constante.

c) On veut comparer les méthodes d'Euler amélioré, de Heun, de Crank-Nicolson et de Runge-Kutta 4 sur un intervalle plus long $[0, T]$, `T=400`, avec `N = 2000` subdivisions. Pour faire cela, tracer sur un même graphique l'évolution en temps de l'intégrale première $H(x_n, y_n)$. Discuter la stabilité de ces méthodes quand le temps T devient grand.

d) Pour `T=10`, avec `N = 20000` appliquer Euler explicite au système de Lotka-Volterra précédent, en représentant la solution dans le plan de phase et l'evolution des solutions $x(t)$, $y(t)$ pour $t \in [0, 10]$. Comparer vos résultats avec ceux obtenus dans la question **a)**