ამოცანათა კრებული მათემატიკურ ანალიზში

ზ. კუჭავა, LATEX

23.7.2025

§ 4. ნამდვილი რიცხვები.

0.1 თეორია

ამ პარაგრაფში ითვლება, რომ მკითხველისთვის ცნობილია რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე და მისი თვისებები.

$A \subset \mathbb{Q}$ სიმრავლის **მაქსიმუმი** ეწოდება a რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება $\Big(a \in A \ \&\ (\forall x \in A)(x \geqslant a \Rightarrow x = a)\Big)$. გამოიყენება აღნიშვნა $a = \max A$.

$A \subset \mathbb{Q}$ სიმრავლის **მინიმუმი** ეწოდება a რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება $\Big(a \in A \ \&\ (\forall x \in A)(x \leqslant a \Rightarrow x = a)\Big)$. გამოიყენება აღნიშვნა $a = \min A$.

$A \subset \mathbb{Q}$ სიმრავლის **უდიდესი** ელემენტი ეწოდება a რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება $\Big(a \in A \ \&\ (\forall x \in A)(x \leqslant a)\Big)$.

$A \subset \mathbb{Q}$ სიმრავლის **უმცირესი** ელემენტი ეწოდება a რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება $\Big(a \in A \ \&\ (\forall x \in A)(x \geqslant a)\Big)$.

$A \subset \mathbb{Q}$ სიმრავლის **მაჟორანტი** (ზევიდან შემომსაზღვრელი) ეწოდება a რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება

$$a \in \mathbb{Q} \ \&\ (\forall x \in A)(x \leqslant a)$$

$A \subset \mathbb{Q}$ სიმრავლის **მინორანტი** (ქვევიდან შემომსაზღვრელი) ეწოდება a რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება

$$a \in \mathbb{Q} \ \&\ (\forall x \in A)(x \geqslant a)$$

$A \subset \mathbb{Q}$ სიმრავლის **სუპრემუმი** (ზედა საზღვარი) ეწოდება a რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება

$$(\forall x \in A)(x \leqslant a) \ \&\ (\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A,\ a - \varepsilon < x_0)$$

გამოიყენება აღნიშვნა $a = \sup A$. ექვივალენტური განმარტება გამოდის, თუ სუპრემუმს განვმარტავთ როგორც A-ს მაჟორანტთა სიმრავლის უმცირესს ელემენტს.

$A \subset \mathbb{Q}$ სიმრავლის **ინფიმუმი** (ქვედა საზღვარი) ეწოდება a რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება

$$\bigl(\forall x \in A\bigr)\bigl(x \geqslant a\bigr)\ \&\ \bigl(\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A,\ a + \varepsilon > x_0\bigr)$$

გამოიყენება აღნიშვნა $a = \inf A$. ექვივალენტური განმარტება გამოდის, თუ სუპრემუმს განვმარტავთ როგორც A-ს მინორანტთა სიმრავლის უდიდესს ელემენტს.

Julius Wilhelm Richard Dedekind 6 October 1831 – 12 February 1916.

რაციონალურ რიცხვთა $\boldsymbol{\alpha}$ სიმრავლეს ეწოდება **განკვეთა** ანუ **ნამდვილი რიცხვი**, თუ სრულდება

1. $\exists q \in \mathbb{Q},\ q \in \boldsymbol{\alpha}$ და $\exists p \in \mathbb{Q},\ q \notin \boldsymbol{\alpha}$
2. $\Bigl(p \in \boldsymbol{\alpha}\ \&\ q \in \mathbb{Q}\ \&\ q < p\Bigr) \Rightarrow q \in \boldsymbol{\alpha}$
3. არ არსებობს $\max \boldsymbol{\alpha}$

$q \in \boldsymbol{\alpha}$ სახის რიცხვებს ეწოდება $\boldsymbol{\alpha}$ განკვეთის ქვედა რიცხვები და $q \notin \boldsymbol{\alpha}$ სახის რიცხვებს კი - $\boldsymbol{\alpha}$ განკვეთის ზედა რიცხვები.

თუ $q \in \mathbb{Q}$ და $\boldsymbol{\alpha} = \{p \in \mathbb{Q}\ \&\ p < r\}$, მაშინ $\boldsymbol{\alpha}$ განკვეთაა და მას ვუწოდებთ $q \in \mathbb{Q}$-ის შესაბამის **რაციონალურ განკვეთას** და აღვნიშნავთ $\boldsymbol{r}^*$ სიმბოლოთი.

დავუშვათ $\boldsymbol{\alpha}$ და $\boldsymbol{\beta}$ განკვეთებია. განმარტებით $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ თუ $(\exists p \in \mathbb{Q})(p \notin \boldsymbol{\alpha}\ \&\ p \in \boldsymbol{\beta})$. და განმარტებით $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{\beta}$ თუ $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ ან $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

დავუშვათ $\boldsymbol{\alpha}$ და $\boldsymbol{\beta}$ განკვეთებია. მაშინ სიმრავლე $\{r : r = p + q,\ p \in \boldsymbol{\alpha}\ \&\ q \in \boldsymbol{\beta}\}$ განკვეთაა, აღინიშნება სიმბოლოთი "$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$"და ვუწოდებთ განკვეთათა ჯამს.

დავუშვათ $\boldsymbol{\alpha}$ განკვეთაა. განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $\boldsymbol{\beta} = \{p : -p \notin \boldsymbol{\alpha}\ \&\ -p \neq \min\{x : x \notin \boldsymbol{\alpha}\}\}$. ასეთი $\boldsymbol{\beta}$-ის მტკიცდება, რომ იგი განკვეთაა, ერთადერთია და $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}^*$. ასე აგებული განკვეთა აღინიშნება "$-\boldsymbol{\alpha}$" სიმბოლოთი. განმარტებით $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$.

დავუშვათ $\boldsymbol{\alpha}$ და $\boldsymbol{\beta}$ განკვეთებია ისეთი, რომ $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}^*$ და $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{0}^*$. მაშინ სიმრავლე $\boldsymbol{\gamma} = \{r : r = p \cdot q, p \in \boldsymbol{\alpha}, q \in \boldsymbol{\beta}, p \geqslant 0, q \geqslant 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q}, r \leqslant 0\}$ წარმოადგენს განკვეთას და აღინიშნება "$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$" სიმბოლოთი და ვუწოდებთ განკვეთათა ნამრავლს.

ყოველ $\boldsymbol{\alpha}$ განკვეთას შეესაბამება განკვეთა $|\alpha|$, რომელსაც ეწოდება $\boldsymbol{\alpha}$-ს აბსოლუტური სიდიდე ანუ მოდული და განიმარტება შემ-

დეგნაირად

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\alpha} \geqslant 0^* \\ -\boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\alpha} < 0^* \end{cases}$$

ნებისმიერი $\boldsymbol{\alpha}$ და $\boldsymbol{\beta}$ განკვეთებისთვის განმარტების მიხედვით

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \begin{cases} -(|\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|), & \boldsymbol{\alpha} < 0^*, \boldsymbol{\beta} > 0^* \vee \boldsymbol{\alpha} > 0^*, \boldsymbol{\beta} < 0^* \\ |\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|, & \boldsymbol{\alpha} < 0^*, \boldsymbol{\beta} < 0^* \end{cases}$$

$\boldsymbol{\alpha} \neq 0^*$ და $\boldsymbol{\alpha} > 0^*$ განკვეთისთვის შებრუნებული განკვეთა $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ განიმარტება ტოლობით

$$\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ r : \frac{1}{r} \notin \boldsymbol{\alpha} \ \& \ \frac{1}{r} \neq \min\{x : x \notin \boldsymbol{\alpha}\} \right\} \cup \{r \in \mathbb{Q}, r \leqslant 0\}$$

ნებისმიერი $\boldsymbol{\alpha} < 0^*$ განკვეთისთვის განმარტებით $\boldsymbol{\alpha}^{-1} = -\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}$

განმარტებით $\boldsymbol{\beta}$ და $\boldsymbol{\alpha} \neq 0^*$ განკვეთებისთვის $\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}}$

განმარტებით n ნატურალური რიცხვისთვის და $\boldsymbol{\alpha}$ განკვეთისთვის $\boldsymbol{\alpha}^0 = 1^*$ და $\boldsymbol{\alpha}^n = \overbrace{\boldsymbol{\alpha} \cdots \boldsymbol{\alpha}}^{n\text{-ჯერ}}$. განმარტებით $\boldsymbol{\alpha}^{-n} = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}^n}$.

განვიხილოთ $\boldsymbol{\alpha} > 0^*$. სიმრავლე $\{r : r \in \mathbb{Q} \ \& \ r > 0 \ \& \ r^n \in \boldsymbol{\alpha}\} \cup \{r \in \mathbb{Q}, r \leqslant 0\}$ წარმოადგენს განკვეთას და აღინიშნება "$\sqrt[n]{\boldsymbol{\alpha}}$" სიმბოლოთი. განმარტებით $\boldsymbol{\alpha} > 0^*$-ის და $m, n \neq 0$ ნატურალური რიცხვებისთვის $\boldsymbol{\alpha}^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{\alpha}}\right)^m$.

განვიხილოთ $\boldsymbol{\alpha} > 1^*$ და ნებისმიერი $\boldsymbol{\beta}$ განკვეთები. განკვეთა განმარტებით $\sup\limits_r\{\boldsymbol{\alpha}^r : r \in \mathbb{Q} \ \& \ r* < \boldsymbol{\beta}\}$ აღინიშნება "$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}}$" სიმბოლოთი.

განკვეთათა ანუ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება $\mathbb{R}$ სიმბოლოთი. რადგან $\mathbb{R}$ სიმრავლეში განმარტებულია უტოლობა და არითმეტიკული ოპერაციები, ამიტომ აქ გადმოიტანება უცვლელად მაქსიმუმის, მინიმუმის, სუპრემუმის და ინფიმუმის ცნებები.

განვიხილოთ ორი სიმრავლე: $\varnothing$ და ყველა რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლეები, რომლებიც შესაბამისად აღვნიშნოთ "$-\infty$" და "$+\infty$" სიმბოლოებით. სიმრავლეს $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ეწოდება გაფართოებული ნამდვილ რიცხთა სიმრავლე. სიმრავლეებისთვის "$-\infty$" და "$+\infty$" ბუნებრივად ნარჩუნდება ნამდვილი რიცხვებისთვის შემოყვანილი მოდულის, არითმეტიკული ოპერაციების და უტოლობის განმარტებები.

არ განიმარტება (მიეკუთვნება განუსაზღვრელ სიმბოლოთა რიცხვს) შემდეგი ჩანაწერები: $\pm\infty - (\pm\infty)$, $\pm\infty \cdot 0$, $\pm\infty + (\mp\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\pm\infty^0$, $1^{\pm\infty}$, $\pm\infty^{\mp\infty}$, $0^{\pm\infty}$. განმარტებით თუ $E \subset \mathbb{R}$ ზევიდან შემოუსაზღვრელი სიმრავლეა (ე.ი. თუ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in E, x > y$), მაშინ $\sup E = +\infty$. ანალოგიურად ქვევიდან შემოუსაზღვრელი სიმრავლისთვის $\inf E = -\infty$.

0.2 მაგალითები და ამოცანები

დაამტკიცეთ ტოლობები

1. $2^* + 3^* = 5^*$
2. $2^* + 2^* = 2 \cdot 2^*$
3. $3^* + 3^* = 2^* \cdot 3^*$
4. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} = 2^* \cdot \boldsymbol{\alpha}$

ნებისმიერი α, β და γ განკვეთებისთვის დაამტკიცეთ

5. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$
6. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$
7. $\boldsymbol{\alpha} + 0^* = \boldsymbol{\alpha}$

დაამტკიცეთ შემდეგი წინადადებები

8. $2^* + 5^* > 2^*$
9. $\sqrt{2^*} < 3^*$
10. $\sqrt{2^*} < \sqrt{3^*}$
11. $\sqrt{2^*} < \sqrt{3^*} \Rightarrow \sqrt{2^*} + \sqrt{5^*} < \sqrt{3^*} + \sqrt{5^*}$
12. $\sqrt{5^*} > \sqrt{3^*}$ & $\sqrt{7^*} > \sqrt{2^*} \Rightarrow \sqrt{7^*} + \sqrt{3^*} > \sqrt{5^*} + \sqrt{2^*}$
13. $\sqrt{2^*} > 1^*$
14. $\sqrt{3^*} \cdot \sqrt{2^*} > 1^* \cdot \sqrt{3^*}$
15. $\sqrt{5^*} \cdot 1^* = \sqrt{5^*}$
16. $\sqrt{5^*} \cdot \sqrt{2^*} = \sqrt{10^*}$
17. $\sqrt{2^*} \cdot \sqrt{3^*} = \sqrt{6^*}$
18. $\sqrt{2^*} + \sqrt{8^*} = \sqrt{18^*}$
19. $1^* + (-1^*) = 0^*$
20. $\sqrt{2^*} \cdot \sqrt{2^*} = 2^*$

დაამტკიცეთ, რომ თუ α, β, δ და γ განკვეთებია, მაშინ:

21. $(\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}) \vee (\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}) \vee (\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta})$
22. $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ & $\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma}$
23. $\forall \boldsymbol{\beta}$ & $\boldsymbol{\alpha} > 0^* \Rightarrow \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$
24. $\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha}$

25. $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q},\ \boldsymbol{\alpha} < r^* < \boldsymbol{\beta}$

26. $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}\ \&\ \boldsymbol{\gamma} > \boldsymbol{\delta} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} > \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}$

27. $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}$

28. $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma})$

29. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}$

30. $\boldsymbol{\alpha} \cdot 0^* = 0^*$

31. $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0^* \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = 0^* \vee \boldsymbol{\beta} = 0^*$

32. $\boldsymbol{\alpha} \cdot 1^* = 1^*$

33. $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}\ \&\ \boldsymbol{\gamma} > 0^* \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} < \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}$

34. $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta} > 0^*\ \&\ \boldsymbol{\gamma} > \boldsymbol{\delta} > 0^* \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} > \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\delta}$

35. $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}$

36. $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}\ \&\ \boldsymbol{\gamma} \neq 0^* \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$

37. $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = 0^*$

38. $\boldsymbol{\alpha} \cdot (-1^*) = -\boldsymbol{\alpha}$

39. $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$

40. $||\boldsymbol{\alpha}| - |\boldsymbol{\beta}|| \leqslant |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$

41. $|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 0^*$

42. $|\boldsymbol{\alpha}| = 0^* \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = 0^*$

დაამტკიცეთ, რომ $\forall p, q \in \mathbb{Q}$-ის და $\boldsymbol{\alpha}$ განკვეთისთვის სამართლიანია

43. $p^* + q^* = (p+q)^*$

44. $p^* \cdot q^* = (p \cdot q)^*$

45. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

46. $p \in \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow p^* < \boldsymbol{\alpha}$

დაამტკიცეთ n, m ნატურალური რიცხვებისთვის და $\boldsymbol{\alpha}$ განკვეთისთვის

47. $\boldsymbol{\alpha}^n \cdot \boldsymbol{\alpha}^m = \boldsymbol{\alpha}^{n+m}$

48. $\boldsymbol{\alpha}^n : \boldsymbol{\alpha}^m = \boldsymbol{\alpha}^{n-m}$

49. $(\boldsymbol{\alpha}^n)^m = \boldsymbol{\alpha}^{n \cdot m}$

50. $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta} > 0^* \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^n > \boldsymbol{\beta}^n$

51. $\boldsymbol{\alpha} > 1^*\ \&\ m > n \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^m > \boldsymbol{\alpha}^n$

52. $0^* < \boldsymbol{\alpha} < 1^*$ & $m > n \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^m < \boldsymbol{\alpha}^n$

დაამტკიცეთ, რომ ყოველი $\boldsymbol{\alpha} > 0^*$ განკვეთისვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

53. $\boldsymbol{\alpha} \cdot \dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}} = 1^*$

54. $\dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{1^*}{\boldsymbol{\alpha}}$

55. $\boldsymbol{\alpha}^{-n} = \dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}^n} = \left(\dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^n$

დაამტკიცეთ, რომ $\boldsymbol{\alpha} > 0^*$-თვის და $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$-ის სამართლიანია

56. $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{\alpha}}\right)^n = \boldsymbol{\alpha}$

57. $\boldsymbol{\alpha}^{r_1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{r_2} = \boldsymbol{\alpha}^{r_1 + r_2}$

58. $(\boldsymbol{\alpha}^{r_1})^{r_2} = \boldsymbol{\alpha}^{r_1 \cdot r_2}$

59. $\boldsymbol{\alpha}^{r_1} : \boldsymbol{\alpha}^{r_2} = \boldsymbol{\alpha}^{r_1 - r_2}$

დაამტკიცეთ, რომ $\boldsymbol{\alpha} > 1^*$ და ნებისმიერი $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ განკვეთებისთვის

60. $\boldsymbol{\beta} > \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}} > \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\gamma}}$

61. $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta} > 1^*$ & $\boldsymbol{\gamma} > 0^* \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\gamma}} > \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{\gamma}}$

62. $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\gamma}}$

დაამტკიცეთ, რომ $0^* < \boldsymbol{\alpha} < 1^*$ და ნებისმიერი $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ განკვეთებისთვის

63. $\boldsymbol{\beta} > \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}} < \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\gamma}}$

64. $1^* > \boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta} > 0^*$ & $\boldsymbol{\gamma} > 0^* \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\gamma}} < \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{\gamma}}$

ქვემოთ სიმბოლო * გამოტოვებულია ჩანაწერების სიმარტივისთვის.

65. ააგეთ განკვეთა $2^{\sqrt{2}}$

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები

66. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad -\infty < a < +\infty$

67. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \pm \infty = \pm\infty$

68. $-(+\infty) = -\infty$

69. $-(-\infty) = +\infty$

70. $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$

71. $|+\infty| = +\infty$

72. $|-\infty| = +\infty$

73. $\forall a > 0, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty$

74. $\forall a < 0, \quad a \cdot (+\infty) = -\infty$

75. $\pm\infty \cdot (\pm\infty) = +\infty$

76. $\pm\infty \cdot (\mp\infty) = -\infty$

77. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0$

78. თუ $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \overline{\mathbb{R}}$, მაშინ $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ როდესაც ტოლობის ორივე მხარეს მდგომი ყველა ოპერაცია განმარტებულია.

შემდეგი სიმრავლეებისთვის იპოვეთ $\max, \min, \sup, \inf$ თუ ისინი არსებობენ

79. $(-1, 1);\ [-7, 2);\ (0, 8];\ [-10, 0]$

80. $n \in \mathbb{N}$-ის $\left\{\frac{1}{n}\right\}; \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}; \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right\}$

81. $\mathbb{Q} \cap \{|x| < 2\}; \left\{x : x \in \mathbb{Q}\ \&\ x^2 < 2\right\}; \left\{\frac{m}{n} : 0 < m < n\ \&\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$

დავუშვათ $A, B \subset \mathbb{R}$ და $A, B \neq \varnothing$. განმარტებით $A \pm B = \{z : z = x \pm y\ \&\ (x, y) \in A \times B\}$ და $A \cdot B = \{z : z = x \cdot y\ \&\ (x, y) \in A \times B\}$. დაამტკიცეთ, რომ

82. $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0, 1)$

83. $(0, 1) + (0, 1) = (0, 2)$

84. $(0, 1) + (-1, 0) = (-1, 1)$

85. $\{2\} \cdot (0, 1) = (0, 2)$

86. $\{1, 3\} \cdot (0, 1) = (0, 3) = \{3\} \cdot (0, 1)$

87. $\{1, 3\} \cdot (1, 2) = (1, 2) \cup (3, 6)$

88. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

89. $\inf(-A) = -\sup A$

90. $\sup(-A) = -\inf A$

91. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

92. $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

93. $\sup(A \setminus B) = \sup A - \inf B$

თუ$x \in A \Rightarrow x \geqslant 0$ & $y \in B \Rightarrow y \geqslant 0$ მაშინ

94. $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

95. $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$

დავუშვათ $A, A_1, A_2 \subset \mathbb{R}, E \subset A, E_1 \subset A_1, E_2 \subset A_2$ და $\varphi : A \to \mathbb{R}, g : A \to \mathbb{R}, f : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ დაამტკიცეთ შემდეგი წინადადებები (იგულისხმება, რომ უტოლობები მხარეებზე მდგომი გამოსახულებები განმარტებულია)

96. $\sup\limits_{x \in E} g(x) = -\inf\limits_{x \in E}(-g(x))$

97. $\sup\limits_{x \in E} g(x) + \inf\limits_{x \in E} \varphi(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E}(g(x) + \varphi(x)) \leqslant \sup\limits_{x \in E} g(x) + \sup\limits_{x \in E} \varphi(x)$

98. $\sup\limits_{(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2} f(x_1, x_2) = \sup\limits_{x_1 \in E_1} \left\{ \sup\limits_{x_2 \in E_2} f(x_1, x_2) \right\} = \sup\limits_{x_2 \in E_2} \left\{ \sup\limits_{x_1 \in E_1} f(x_1, x_2) \right\}$

დაამტკიცეთ, რომ თუ, დამატებით, $\forall x \in E$-თვის $g(x) \geqslant 0$ და $\varphi(x) \geqslant 0$, მაშინ სამართლიანია

99. $\sup\limits_{x \in E} g(x) \cdot \inf\limits_{x \in E} \varphi(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E}(g(x) \cdot \varphi(x)) \leqslant \sup\limits_{x \in E} g(x) \cdot \sup\limits_{x \in E} \varphi(x)$

100. $\sup\limits_{x \in E} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\inf\limits_{x \in E} g(x)}$ $\Bigg($ აქ პირობით ვუშვებთ $\dfrac{1}{0} = +\infty$ და $g(x) > 0\Bigg)$.