《数学分析》讲稿

复旦大学　陈 纪 修

一、　《数学分析》这门课程

《数学分析》是一门对数学系的学生讲授微积分的课程。

微积分是人类思维最伟大的成果之一，是人类文明史上一颗光辉灿烂的明珠。

任何一门学科的产生与发展，都离不开外部世界的推动。任何科学技术的发展都与时代的发展密切相关。微积分的产生也是受到了物理学、天文学、几何学等学科发展的推动。

牛顿与莱布尼兹的最大贡献在于发现了微分与积分之间的深刻联系，从而使微积分成为一门学科。

科学技术的发展历史告诉我们，人类的任何一个伟大的发明与创造，都是站在巨人的肩膀上取得的。

通过学习《数学分析》，希望做到：

（1）掌握微积分的思想与原理、掌握微积分的核心内容与精髓；

（2）加强逻辑思维能力的训练与培养，提高数学推理与论证的能力；

（3）通过严格的训练，具备熟练的运算能力与技巧；

（4）重视微积分的应用，掌握数学模型的思想与方法，提高应用微积分这一有力的数学工具分析问题、解决问题的能力。

二.　微积分的发现与发展历程

1．极限、无穷小、微分、积分的思想在中国古代早已有之

公元前 4 世纪，中国古代思想家和哲学家**庄子**在《天下篇》中论

述："至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。"其中大一和小一就是无穷大和无穷小的概念。而"一尺之棰，日取其半，万世不竭。"更是道出了无限分割的极限思想。

公元 3 世纪，中国古代数学家**刘徽**首创的**割圆术**，即用无穷小分割求面积的方法，就是古代极限思想的深刻表现。他用圆内接正多边形的边长来逼近圆周，得到了

$$3.141024 < \pi < 3.142704 \quad ,$$

并深刻地指出："割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"

我国南北朝时期的数学家**祖暅**（中国古代数学家祖冲之之子）发展了刘徽的思想，在求出球的体积的同时，得到了一个重要的结论（后人称之为"**祖暅原理**"）："夫叠基成立积，缘幂势既同，则积不容异。"用现在的话来讲，一个几何体("立积")是由一系列很薄的小片("基")叠成的；若两个几何体相应的小片的截面积("幂势")都相同，那它们的体积("积")必然相等。

2．十七世纪前微分学与积分学的发展历史

公元前 5 世纪，古希腊数学家**安提丰**（Antiphon）在研究化圆为方问题时创立了"**穷竭法**"，认为圆内接正多边形当边数不断增加，最后多边形就与圆相合。

公元前 2 世纪，古希腊数学家**阿基米德**（Archimedes）对"穷竭法"作出了最巧妙的应用，他在《论抛物线求积法》中用"穷竭法"求抛物弓形的面积，他构造一系列三角形使它们的面积和不断接近抛

物弓形的面积，这就是极限理论的最初形式。在《论球和柱体》一书中，阿基米德首先得到了球和球冠的表面积、球和球缺的体积的正确公式。阿基米德的著作代表了古希腊数学的顶峰。

1615 年，德国数学家**开普勒**（J. Kepler, 1571-1630）用无穷小微元来确定曲边形的面积与体积。他把圆看作边数无限多的多边形，圆周上每一点看作是顶点在圆心高等于半径的极小等腰三角形的底，于是圆面积就等于圆周长与半径乘积之半。他把球看作面数无限多的多面体，球面上每一点看作是顶点在球心高等于半径的极小圆锥的底，于是球体积就等于球表面积与半径乘积之三分之一。他还用无穷小方法精确地计算出酒桶的体积，并写了《测量酒桶体积的新科学》，书中包含了 87 种不同的旋转体的体积计算。

开普勒最重要的贡献是提出了行星运行三大定律：⑴行星在椭圆轨道上绕太阳运动，太阳在此椭圆的一个焦点上。⑵从太阳到行星的向径在相等的时间内扫过相等的面积。⑶行星绕太阳公转周期的平方与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比。可以说这是天文学上划时代的贡献，也是数学史上重要的里程碑。牛顿就是应用开普勒的行星运行三大定律，通过严格的数学推导，发现了万有引力定律。为了确定第二定律，Kepler 将椭圆中被扫过的那部分图形分割成许多小的“扇形”，并近似地将它们看成一个个小的三角形，运用了一些出色的技巧对它们的面积之和求极限，成功地计算出了所扫过的面积。在其卓有成效的工作中，已包含了现代定积分思想的雏形。

微分学主要来源于两个问题的研究：曲线的切线问题与函数的极

大、极小问题。法国数学家**费尔马**（P. Fermat, 1744-1825）在这两个问题上作出了主要贡献。费尔马在处理这两个问题时，都是先对自变量取增量，再让增量趋于零，这就是微分学的本质所在。费尔马也在积分学方面做了许多工作，如求面积、体积、重心等问题。但可惜的是他没有发现微分学与积分学这两类问题之间的基本联系。

另一位已经走到了微积分基本定理的门口的是英国数学家**巴罗**（I. Barrow, 1630-1677），他是牛顿的老师，是剑桥大学卢卡斯讲座教授，后来他认为牛顿已经超过了他，就把这一讲座教授的位置让给了牛顿。他在《光学和几何学讲义》一书中，已经把曲线的切线与曲线的求积问题联系了起来，也就是说，他把微分学和积分学的两个基本问题以几何对比的形式联系了起来。

3．牛顿和莱布尼兹对微积分学科的功绩

微积分学科的建立，归功于两位伟大的科学先驱：**牛顿**和**莱布尼兹**。关键在于他们认识到，微分和积分这两个运算，是彼此互逆的两个过程，它们是由牛顿—莱布尼兹公式联系起来的。

1669 年英国大数学家牛顿（I. Newton, 1643-1727）提出微积分学说存在正反两个方面的运算，例如面积计算和切线斜率计算就是互逆的两种运算，即微分和积分互为逆运算，从而完成了微积分运算的决定性步骤。1687 年，牛顿发表了他的著作《自然哲学的数学原理》，在这个划时代的著作中，他陈述了他的伟大创造—微积分，并应用微积分理论，从开普勒关于行星的三大定律导出了万有引力定律。牛顿还将微积分广泛应用于声学、光学、流体运动等学科，充分显示了微

积分理论的巨大威力。

牛顿是人类历史上最伟大的数学家之一。英国著名诗人**波普**（Pope）是这样描述牛顿的：

自然和自然的规律
沉浸在一片混沌之中，
上帝说，生出牛顿，
一切都变得明朗。

牛顿本人却很谦虚："我不知道世间把我看成什么人，但是对我自己来说，就象一个海边玩耍的小孩，有时找到一块比较平滑的卵石或格外漂亮的贝壳，感到高兴，而在我面前是未被发现的真理的大海。"

1673年德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz, 1646-1716) 也致力于研究切线问题和面积问题，并探索两类问题之间的关系。

牛顿和莱布尼兹对微积分的研究都达到了同一目标，但两人的方法不同。牛顿发现最终结果比莱布尼兹早一些，但莱布尼兹发表自己的结论比牛顿早一些。关于谁是微积分的创始者，英国数学家与欧洲大陆的数学家经历了一场旷日持久的论战。

正是由于牛顿和莱布尼兹的功绩，微积分成为了一门独立的学科；也正是由于牛顿和莱布尼兹的功绩，求微分与求积分的问题，不再是孤立地进行处理了，而是有了统一的处理方法。

微积分的产生历史，说明了这样一个真理：人类科技发展史上的任何一个进步，都是站在巨人的肩膀上取得的。牛顿说他就是站在巨

人的肩膀上，在当时这个巨人已经形成，这个巨人包括了一大批微积分的先驱们，如：阿基米德、开普勒、费尔马、巴罗等数学家。

微积分的诞生具有划时代的意义，是数学史上的分水岭与转折点，是人类探索大自然的艰苦努力的一项伟大的成功，是人类思维的最伟大的成就之一。

关于微积分的地位，**恩格斯**这样评论："在一切理论成就中，未必再有什么象 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那正是在这里。"

微积分诞生后，数学引来了一次空前的繁荣时期。18 世纪被称为数学史上的英雄世纪。数学家们把微积分应用于天文学、力学、光学、热学等各个领域，获得了丰硕的成果。在数学本身，他们把微积分作为工具，又发展出微分方程、无穷级数等理论分支，大大扩展了数学研究的范围。

4．微积分严格理论体系的完善

微积分建立之后，出现了两个极不协调的情景；一方面是微积分广泛应用于各个领域，取得了辉煌的成就；另一方面是人们对于微积分的基本概念的合理性提出了强烈的质疑。19 世纪以前，无穷小量概念始终缺少一个严格的数学定义，因此导致了相当严重的混乱。1734 年英国哲学家红衣主教**贝克莱**（G. Berkeley, 1685-1753）对微积分基础的可靠性提出强烈质疑，从而引发了第二次数学危机。

为了克服微积分运算在逻辑上的矛盾，为微积分学科建立严格的

数学基础，数学家们又经历了长期而艰苦的努力：

法国数学家**达朗贝尔**（J. R. d’Alembert, 1717-1783）用极限方法取代无穷小量方法；

法国数学家**柯西**（L. Cauchy, 1780-1857)在达朗贝尔通俗化的极限基础上，从变量和函数角度出发，给出极限的明确定义，从而把微积分的基础严格地奠定在极限概念之上。

德国数学家**魏尔斯特拉斯**(K. Weierstrass, 1815-1897)用静态的$\varepsilon-\delta$语言来刻画动态的极限与连续概念，使极限的定义达到了最清晰最严密的程度，直到如今人们仍然在使用他的定义。

由于严格的极限理论的建立，无穷小量可用极限的语言清楚地加以描述，这才解决了有关的逻辑困难。而且由于$\varepsilon-\delta$语言的建立，又使得微积分的发展如虎添翼。

极限概念严格化以后，余下的事情就是要建立实数理论，因为极限概念需要以实数理论为前提。由于实数具有连续性，所以才能以实数系作为平台，在这个平台上展开微积分的理论。这方面的工作是由德国数学家**康托尔**(G. Cantor, 1845-1918)、**戴特金**(R. Dedekind, 1831-1916)等一批数学家完成的。

三. 谈谈数学分析中的几个问题

1. 有理数系与实数系

（1）学生经常会问，有理数与无理数哪个多？两个无限集，如何比较他们的元素的多少？

当集合元素个数是无穷大时，考虑两集合中元素“多”和“少”

的问题，正确的方法是采用一一对应的概念。

若集合 A 与集合 B 之间的元素能建立一一对应，则称集合 A 与集合 B 是“对等”的，或称它们的势是相等的，记为 $A \sim B$ 。

Bernstein 定理 设 A 与 B 是两个集合，如果 A 对等于 B 的一个子集， B 又对等于 A 的一个子集， 则 A 与 B 对等。

（2）可列集的概念。

一个无限集中的元素可以按某种规律排成一个序列，或者说，这个集合可表示为

$$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\},$$

则称其为**可列集**。即可列集可以与正整数集合建立一一对应。

定理 1 可列个可列集之并也是可列集。

证 对任意 $n \in \mathbf{N}^+$，设 A_n 可表示为

$$A_n = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots, x_{nk}, \cdots\},$$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素全体可排成如下的无穷方块阵：

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} 。$$

把所有这些元素排成一列的规则可以有许多，常用的一种称为对角线法则：从最左面开始，顺着逐条“对角线”（图中箭头所示）将元素按从右上至左下的次序排列，也就是把所有的元素排列成

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{13},\ x_{22},\ x_{31},\ x_{14},\ x_{23},\ x_{32},\ x_{41},\ \cdots$$

这样的规则保证了不会遗漏一个元素。

（3）有理数集合是可列集，有理数集合具有稠密性。

定理 2 有理数集$\mathbf{Q}$是可列集。

证 由于区间（$-\infty,+\infty$）可以表示为可列个区间$(n,n+1]$ $(n\in\mathbf{Z})$的并，我们只须证明区间$(0,1]$中的有理数是可列集即可。

由于区间$(0,1]$中的有理数可唯一地表示为既约分数$\dfrac{q}{p}$，其中$p\in\mathbf{N}^{+}$，$q\in\mathbf{N}^{+}$，$q\le p$，并且p，q互质。我们按下列方式排列这些有理数：

分母p=1 的既约分数只有一个：$x_{11}=1$；

分母p=2 的既约分数也只有一个：$x_{21}=\dfrac{1}{2}$；

分母p=3 的既约分数有两个：$x_{31}=\dfrac{1}{3}$，$x_{32}=\dfrac{2}{3}$；

分母p=4 的既约分数也只有两个：$x_{41}=\dfrac{1}{4}$，$x_{42}=\dfrac{3}{4}$；

…….

一般地，分母 $p=n$ 的既约分数至多不超过 $n-1$ 个，可将它们记为$x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nk(n)}$，其中$k(n)\le n-1$。

于是区间$(0,1]$中的有理数全体可以排成

$$x_{11},x_{21},x_{31},x_{32},x_{41},x_{42},\cdots,\ x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nk(n)}\cdots。$$

这就证明了有理数集$\mathbf{Q}$是可列集。有理数集$\mathbf{Q}$的“测度”为零。

（4）实数集合是不可列集，实数集合具有连续性。

定理 3 实数集$\mathbf{R}$是不可列集。

证 只要证明区间$[0,1)$中的实数是不可列的。先将区间$[0,1)$中的实数表示成无限小数，注意无限小数$0.a_1a_2\cdots a_p000\cdots$（$a_p\neq 0$）与无限小

数$0.a_1a_2\cdots(a_p-1)999\cdots$是相等的，为了保持表示的唯一性，我们约定在无限小数表示中不出现后者。这样，区间$[0,1)$中的任何一个实数就可以由一个确定的无限小数来表示。

我们采用反证法。设区间$[0,1)$中的实数可排列成 $x_1,x_2,\cdots$，$x_n,\cdots$。然后我们设法找出区间$[0,1)$中的一个实数，它不在这个序列中。设

$$x_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots,$$

$$x_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots,$$

$$x_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots,$$

……

$$x_k=0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}a_{k4}\cdots,$$

……

取 $b=0.b_1b_2b_3\cdots b_k\cdots$， $1\le b_i\le 9,\quad i=1,2,3,\cdots$，其中 $b_1\ne a_{11}$，$b_2\ne a_{22}$，$b_3\ne a_{33}$，……，$b_k\ne a_{kk}$，……，且要求在$\{b_n\}$中至少有一项不等于 9，则b必在区间$[0,1)$中，但不在这个序列$x_1,x_2,\cdots$，$x_n,\cdots$中。

注 上述方法称为 Cantor 对角线法（Cantor 是集合论的创始者）。

2、数学分析中两个重要的常数π和e

英国哲学家罗素（Bertrand Russell）曾经说过：数学里不仅有很多真理，而且有着极致的美。这种美冷峻如雕塑，……，它极纯净，能够向我们展示只有最伟大的艺术才具有的完美。

π和e是《数学分析》课程中最重要的两个常数，课程中包含了关于这两个常数丰富的内容，也得到了许多漂亮的结果。学生了解这两个常数在数学中的地位，并从这两个常数体会到数学的“美”，对

于提高学习兴趣，提高学习效果，具有重要的意义。

（1）常数π

例 2 由函数的**幂级数展开**

$$\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots\quad,\quad x\in[-1,1],$$

以$x=1$代入，可得到

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}。\tag{1}$$

例 3 $f(x)=x^2\quad x\in[-\pi,\pi]$ 的 **Fourier 级数展开为**

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$$

令$x=\pi$，可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6};\tag{2}$$

令$x=0$，可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}。\tag{3}$$

由它还可以导出

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}\quad。\tag{4}$$

例4 利用函数的幂级数展开与无穷乘积展开，可以得到

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

由此式出发可以得到

$$\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right)。$$

将上式右边等式相比较，它们的x^2系数，x^4系数都对应相等，于是就得到等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\quad。\tag{5}$$

（2）常数e

定理4 数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增加，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$单调减少，两者收敛

于同一极限。

证 记 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，利用平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad (a_k>0,\quad k=1,2,3,\cdots,n),$$

得到

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=x_{n+1},$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}。$$

这表示$\{x_n\}$单调增加，而$\{y_n\}$单调减少。又由于

$$2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4,$$

可知$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。由$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，它们具有相同的极限。通常用字母$e$来表示这一极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e。$$

例 5 设 $b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则数列$\{b_n\}$收敛。

证 由

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

得到

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}。$$

于是有

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0,$$

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$$

$$=\ln(n+1)-\ln n>0。$$

这说明数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界，从而收敛。

$\{b_n\}$的极限γ=0.57721566490…称为Euler常数。

例6 设 $d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，由于

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma\quad(n\to\infty),$$

和

$$b_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\ln 2n\to\gamma\quad(n\to\infty),$$

考虑$b_{2n}-b_n$，用b_{2n}中的第$2k$项与b_n中的第k项（$k=1,2,\cdots,n$）对应相减，得到

$$b_{2n}-b_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}-\ln 2=d_{2n}-\ln 2\to 0\qquad(n\to\infty)。$$

由于$d_{2n+1}=d_{2n}-\frac{1}{2n+1}$及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$，于是得到

$$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2,$$

也就是

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots=\ln 2。\qquad（6）$$

复旦大学数学分析课程网站地址：

http://math.fudan.edu.cn/math_anal

复旦大学数学分析课程全程录象网址：

http://202.120.227.42:82 — 整学期精品课程— 2006 年国家精品课程