从 Stolz 定理到 L'Hospital 法则

刘利刚

（浙江大学数学系，浙江　杭州　310027）

摘要：本文给出了从 Stolz 定理到 L'Hospital 法则的推导过程及它们之间的联系.

关键词: Stolz 定理; L'Hospital 法则; 极限; 差分

Stolz 定理和 L'Hospital 法则都是数学分析中处理 $\frac{\infty}{\infty}$ 型及 $\frac{0}{0}$ 型极限的重要工具. 我们在讲授这两个定理的过程中由浅入深，循序渐进，让学生对这两个定理得到充分的认识与理解：L'Hospital 法则是连续的 Stolze 定理；而 Stolz 定理是离散型的 L'Hosptial 法则. 本文将介绍我们在给学生讲述从 Stolz 定理从离散变量的情形到连续变量的情形，再到 L'Hospital 法则的详细推导过程，并且将它们进行了许多的推广.

本文中只对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的 Stolz 定理和 L'Hospital 法则给出讨论. 对于 $\frac{0}{0}$ 型极限的讨论与研究类似可得到，在文中不详细列出. 限于篇幅，我们对文中给出的定理都不给出证明.

1. 离散型 Stolz 定理

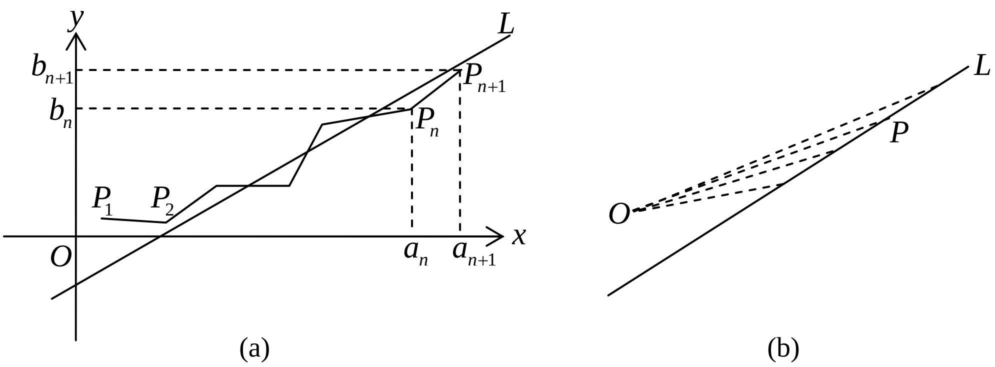
我们首先给出一般教材给出的 Stolz 定理[1,2]，叙述如下:

定理 1 (Stolz 定理) 设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足条件: (i) $\{a_n\}$ 严格单调递增; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; (iii)下列极限存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = l$ (有限或 $\pm\infty$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = l.$$

注意定理 1 中并不要求数列 $\{b_n\}$ 的极限为 ∞，因此定理也称为 $\frac{*}{\infty}$ 型极限的 Stolz 定理.

Stolz 定理的几何解释是：将 (a_n, b_n) 看成平面上的点 P_n，依次连接各点得到无限折线 $\Gamma = P_1P_2\cdots P_n\cdots$，矢径 OP_n 的斜率为 $\frac{b_n}{a_n}$，线段 P_nP_{n+1} 的斜率为 $\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}$. 当定理 1 的条件满足时，说明折线 Γ 往右无限延伸，这时矢径 OP_n 的斜率与线段 P_nP_{n+1} 的斜率当 $n\to+\infty$ 时趋于同一极限. 如图 1(a)所示，若线段 P_nP_{n+1} 的斜率当 $n\to+\infty$ 时极限为 l，表示当 $n\to+\infty$ 时，点 P_n 位于某条直线 L 附近；而当直线 L 上的点 P 沿着 L 移向无穷远时，它与点 O 的连线与直线 L 的夹角将趋向于 0，即直线 OP 将与直线 L "平行"，即它们的斜率将相等，如图 1(b).



(a) (b)

图 1. Stolz 定理的几何解释.

Stolz 定理的几何意义是明显的. 若 $Q(a,b)$ 为平面上的任一点, 当点 P 沿着 L 移向无穷远时, 直线 QP 也将与直线 L "平行", 自然有以下推论:

推论 1. 设条件如定理 1 所列, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b}{a_n-a}=l.$$

其证明非常简单, 只要令 $\tilde{b}_n=b_n-b,\tilde{a}_n=a_n-a$, 再应用定理 1 即可. 进一步, 由上述几何意义启发, 若点 Q 也在变动, 但只是在一个顶点附近变动, 设 $Q_n=(c_n,d_n)$, $\{c_n\},\{d_n\}$ 分别收敛到 c,d, 于是有下列的推论:

推论 2. 设条件如定理 1 所列, 且(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c,\lim\limits_{n\to\infty}d_n=d$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-d_n}{a_n-c_n}=l.$$

证明也是简单的, 只要注意到当 n 充分大时, 点 (c_n,d_n) 将位于以点 (c,d) 为中心的单位方块内, 它与直线 L 上的点 P 的连线夹在方块的四个角点与点 P 的连线之内.

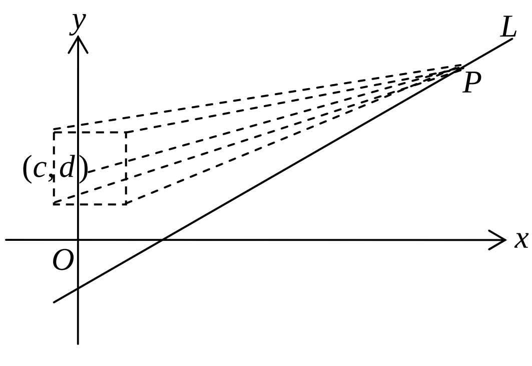


图 2. 推论 2 的证明.

根据上述的证明方法，显然可以将推论 2 中的条件再减弱为:

推论 3. 设条件如定理 1 所列，且(iv)数列$\{c_n\},\{d_n\}$有界，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-d_n}{a_n-c_n}=l.$$

若简单地从上述的图形分析，Stolz 定理的逆命题看起来也是对的，即大家会问：若矢径OP_n的斜率当$n\to+\infty$时极限l存在，是否线段P_nP_{n+1}的斜率也存在极限呢？其实不然．这是因为线段P_nP_{n+1}的斜率可能出现震荡导致极限不存在．如$a_n=n,b_n=(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}$不存在．要求数列$\{b_n\}$也单调的反例如$a_n=n$，$b_n=\begin{cases}n+(-1)^n/3, & n\text{为奇数；}\\ n-(-1)^n/3, & n\text{为偶数，}\end{cases}$则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}$不存在.

注意到定理 1 中条件(i)为$a_{n+1}-a_n>0$，即$\{a_n\}$的一阶向前差分$\Delta a_n=a_{n+1}-a_n>0$，多次应用 Stolz 定理可得多阶差分的 Stolz 定理的描述.

对于数列x_n，定义其 0 阶向前差分为$\Delta_+^0x_n=x_n$，一阶向前差分为

$$\Delta_+x_n=x_{n+1}-x_n,$$

k阶差分为

$$\Delta_+^kx_n=\Delta_+^{k-1}x_{n+1}-\Delta_+^{k-1}x_n=\sum\nolimits_{i=0}^{k}(-1)^kC_k^ix_{n+k-i},\ \ k>1.$$

定理 2 (向前差分 Stolz 定理) 设$k\in N$，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足条件：(i)$\{\Delta_+^{k-1}a_n\}$严格单调递增；(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_+^{k-1}a_n=+\infty$；(iii)下列极限存在$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Delta_+^kb_n}{\Delta_+^ka_n}=l$ (有限或$\pm\infty$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

类似地有关于向后差分的 Stolz 定理．显然，在定理 2 中当$k=1$时即为定理 1.

2. 连续型 Stolz 定理

设数列$\{a_n\},\{b_n\}$分别是两个函数$g(x),f(x)$上的等间隔（间隔为 1）采样点，根据离散型 Stolz 定理的几何解释启发不难得到以下函数型的 Stolz 定理:

定理 3 设(i)函数$f(x)$在区间$(a,+\infty)$内的任何有限区间上有界；(ii)函数$g(x)$在区间$(a,+\infty)$上单调增加；(iii)$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$；(iv)$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l$ (有限或$\pm\infty$)，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

证明可见[2]. 在定理 3 中，令 $f(x)=b_n, x\in[n,n+1)$，$g(x)=a_n$， $x\in[n,n+1)$，即得到离散 Stolz 定理. 若令 $g(x)=x$，可得以下推论[2,3]:

推论 4 设(i)函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内的任何有限区间上有界; (ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x)=l$ (有限或 $\pm\infty$), 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l.$$

这个结果是属于 Cauchy 的, 通常称为 Cauchy 定理. 其几何意义是, 若函数 $f(x)$ 满足推论 4 中的条件, 则 $f(x)$ 具有斜率为 l 的渐进线.

若以间隔为正数 $T>0$ 采样函数 $g(x), f(x)$ 得到数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，则有更一般的连续型 Stolz 定理[2,3]:

定理 4 设 $T>0$，(i)函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内的任何有限区间上有界; (ii)函数 $g(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调增加; (iii) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; (iv) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ (有限或 $\pm\infty$), 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

令 $g(x)=x$，可得以下推论:

推论 5. 设 $T>0$，(i) 函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内的任何有限区间上有界; (ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{T}=l$ (有限或 $\pm\infty$), 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l.$$

下面介绍函数 $f(x)$ 关于正数 $T>0$ 的差分.

函数 $f(x)$ 关于 T 的一阶向前差分定义为

$$\Delta f(x)=f(x+T)-f(x),$$

关于 T 的 k 阶向前差分定义为

$$\Delta_+^k f(x)=\Delta_+^{k-1}f(x+T)-\Delta_+^{k-1}f(x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i f(x+kT-iT),\ \ k>1$$

类似于离散型的向前差分 Stolz 定理，同样有连续型的向前差分 Stolz 定理[4].

定理 5 设 $T>0$，$k\in N$，(i)函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内的任何有限区间上有界；(ii)函数 $\Delta_+^{k-1}g(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调增加; (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Delta_+^{k-1}g(x)=+\infty$; (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\Delta_+^k f(x)}{\Delta_+^k g(x)}=l$ (有限或 $\pm\infty$)，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

3. L'Hospital 法则

在上述推论 5 中，考虑到正数 T 的任意性，当 T 充分小时，条件(ii)是否可近似为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=l$，即是否有以下结论？

定理 6 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=l$ （有限或 $\pm\infty$)，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l.$$

由微分中值定理不难证明，上述结论是正确的[3]. 同样的分析，在定理 4 中让正数 T 趋向于 0，可得:

定理 7 (L'Hospital 法则) 设 (i)函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可微；(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$; (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ (有限或 $\pm\infty$)，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

此即 $\dfrac{*}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则[1,2,3].

L'Hospital 法则的几何解释是：以 $(g(t),f(t))$ 构成的参数曲线 $P(t)$，若切线的斜率 $\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ 当 $t\to+\infty$ 时极限存在 l，则曲线上的点到原点 O 矢径的斜率 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也存在且为 l，如图 3 所示.

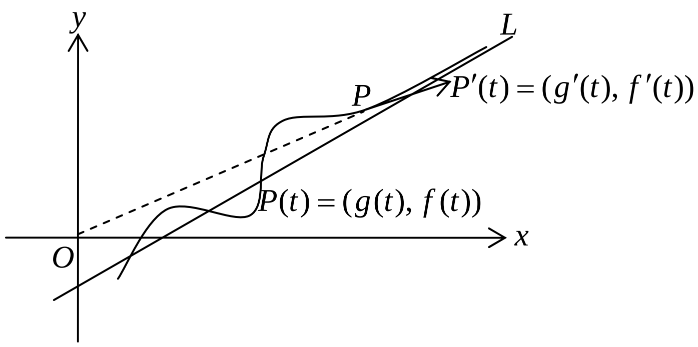


图 3. L'Hospital 法则的几何解释.

定理 7 中令 $g(x)=x$ 可得到定理 6. 定理 7 中将“ $x\to+\infty$ ”换成“ $x\to a, x\to a+, x\to a-, x\to-\infty$ ”后，结论仍然成立，相应的 L'Hospital 法则就不详述.

类似于差分 Stolz 定理，多次应用 L'Hospital 法则，有以下推广的 L'Hospital 法则.

定理 8 设 $k\in N$，(i)函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内 k 阶可微；(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty} g^{(k-1)}(x)=+\infty$；(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=l$ (有限或 $\pm\infty$)，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

至此，我们已完成了从离散型 Stolz 定理到连续型 Stolz 定理，再到 L'Hospital 法则的理解过程. 并且可知 L'Hospital 法则是连续的 Stolz 定理；而 Stolz 定理是离散型的 L'Hosptial 法则.

对于 $\dfrac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理和 L'Hospital 法则也有对应的一系列定理，限于篇幅在此就不叙述.

参考文献

[1] 欧阳光中，姚允龙，周渊. 数学分析（上册）. 上海：复旦大学出版社, 2003.
[2] 王向东，高成修，安枫灵. 数学分析的概念与方法（上册）. 上海：上海科学技术文献出版社, 1988.
[3] 斐礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 北京：高等教育出版社, 1993.
[4] 杨姗姗，刘健，马跃超. Stolz 定理推广定理的推广. 数学的实践与认识, 2003, 33(6): 117—120.

Stolz Theorem to L'Hospital Rule

LIU Li-gang
(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The derivation process from Stolz theorem to L'Hospital rule is presented and their relationships are obtained.

Keywords: Stolz theorem, L'Hospital rule, limit, difference