



Bài tập giải tích I

Phạm Thành Nam

Viện Cơ học

Giới thiệu

- Đào tạo

- 1999: CN. Toán – Tin ứng Dụng, ĐH KHTN
- 2007: ThS. Cơ học Chất lỏng, ĐH Công nghệ
- 2011: TS. Kỹ thuật Bờ Biển, ĐH Lund, Thụy Điển
- 2012-2014: Nghiên cứu sau TS tại ĐH Braunschweig, CHLB Đức

- Chuyên ngành

- Sóng, dòng chảy, vận chuyển bùn cát

- Liên hệ

- Phòng Cơ học và Môi trường Biển, Viện Cơ học
- Email: ptnam@imech.vast.vn

Bài tập Giải tích 1

- Giới hạn
- Phép tính vi phân của hàm số một biến
- Phép tính tích phân của hàm số một biến
- Chuỗi số và chuỗi hàm

Bài tập Giải tích 1

- **Giới hạn**

- Tính giới hạn dãy số
- Tính giới hạn hàm số 5 dạng vô định ($0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞)
- Tính giới hạn bằng công thức tiệm cận (sử dụng vô cùng bé)
- Khảo sát sự liên tục của hàm số

Giới hạn dãy số

- Tìm giới hạn của dãy số sau:

1. $x_n = \frac{n+1}{n}$

2. $x_n = \frac{n}{n^3 + 1}$

- Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \frac{n}{2^n}$, $n > 1$ giảm và tìm giới hạn của nó

Giới hạn

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3 + x - 1}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{10 + x\sqrt{x}}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$$

Dạng phân tích đa thức

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

3. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Dạng căn thức

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

Dạng có các hàm số lượng giác

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n}$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

Dạng vô cùng lớn, bé

VCB: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

VCL: $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$

$x \rightarrow 0$ $\sin(x) \sim x; \tan(x) \sim x; \ln(1+x) \sim x$
 $\arcsin(x) \sim x; \arctan(x) \sim x$

Ví dụ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{\ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}$$

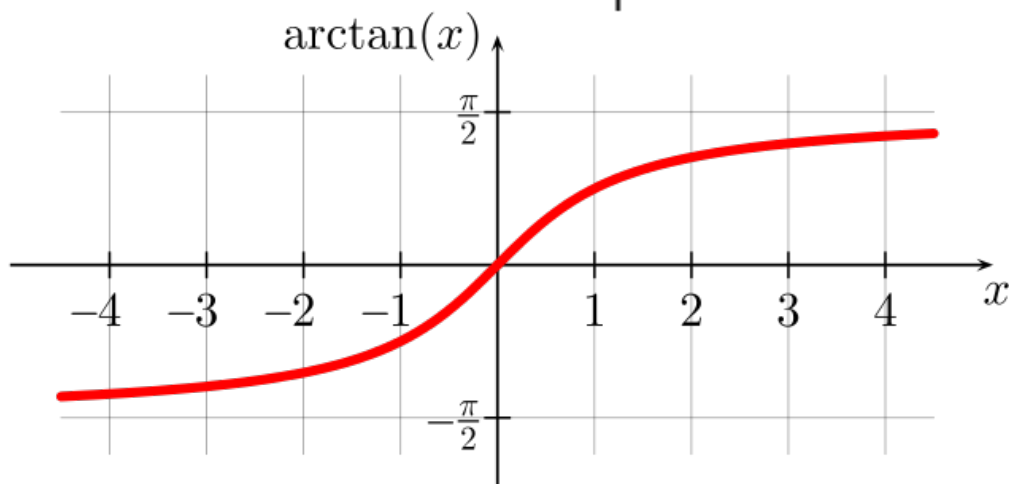
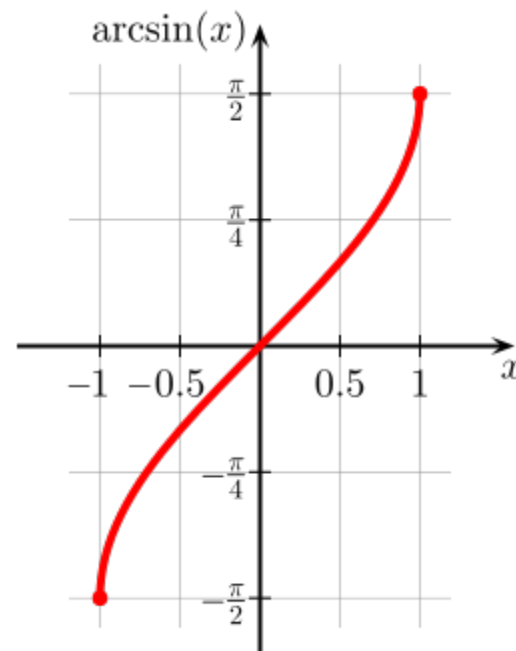
Dạng vô cùng lớn, bé

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \sin 2x}{(x - x^3)^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x^3}}}{\ln(1 - x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$



Dạng vô cùng lớn, bé

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \sin 2x}{(x - x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x 2x}{x^2} = 10$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x^3}}}{\ln(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\ln(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x} = -1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{t} = -1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{-x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{-2 \frac{3}{2} x (\frac{-x}{2})}{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 3$$

Các dạng tính giới hạn khác

Tính giới hạn các hàm số dạng $f(x)^{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = C$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = A^B$$

Trường hợp A khác 1 và $B = \pm\infty$ thì $C = A^B$

Trường hợp $A = 1$ và $B = \infty$ thì ta đặt

$$f(x) = 1 + \alpha(x), \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow a$$

Khi đó

$$C = \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)} \alpha(x) g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 1) g(x)}$$

Các dạng tính giới hạn khác

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right)^{1+x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{x^3-x} \right)^{x+1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 1} \right)^{\frac{\sin(x)}{x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 1}{2x^2 - x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}$

Các dạng tính giới hạn khác

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n+x} \right)^n$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{x}}$

Các dạng tính giới hạn khác

Sử dụng công thức: $\lim_{x \rightarrow a} [\ln(f(x))] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x+3) - \ln(x+2)]$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln(x)]$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Các dạng tính giới hạn khác

Tìm hằng số a sao cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty, +\infty)$

1.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 & x < 4 \\ ax + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a + x & x \geq 0 \end{cases}$$

3.
$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4) / (x - 2) & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$$

4.
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$