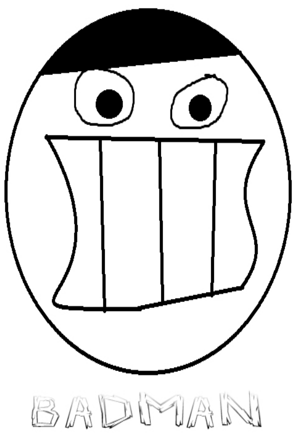
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

- -

LỜI GIẢI BÀI TẬP GIẢI TÍCH I - K58

(TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ)



Hà Nội, 9/2013

LỜI NÓI ĐẦU

Sau hơn hai ngày vất vả làm ngồi làm đống bài tập giải tích I của K58 này thì có một sự buồn nhẹ là người mình đã mệt lử :-(. Trong quá trình đánh máy không tránh khỏi sai sót và có thể lời giải còn chẳng đúng nữa =)) mong được các bạn góp ý để mình sửa cho đúng :D (nói thể thôi chứ sai thì mặc xác chứ lấy đâu time mà sửa với chả sủa nữa :v). Trong này còn một số bài mình chưa làm được :-(vì học lâu rồi nên cũng chẳng nhớ nữa :D. Hy vọng nó sẽ giúp cho các bạn K58 và những ai học cải thiện, học lại môn này có được điểm "F" =))

Chúc các bạn học tốt !

Chương 1
HÀM MỘT BIẾN SỐ

1.1-1.5. Dãy số, hàm số, giới hạn và liên tục

1. Tìm tập xác định của hàm số

a. $y = \sqrt[4]{\log(\tan x)}$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \geq 1 \\ \log(\tan x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

$$\begin{cases} 1 + x \neq 0 \\ -1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ -1 - x \leq 2x \leq 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \begin{cases} 3x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

c. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sin \pi x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \pi x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

c. $y = \arccos(2 \sin x)$

$$-1 \leq 2 \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

2. Tìm miền giá trị của hàm số

a. $y = \log(1 - 2 \cos x)$

ĐK: $\cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

Mặt khác ta có $1 - 2\cos x \in (0, 3] \Rightarrow y \in (-\infty, \log 3]$

b. $y = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$

ĐK

$$\begin{cases} x > 0 \\ \left|\log \frac{x}{10}\right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Tìm $f(x)$ biết

a. $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \quad (|t| \geq 2)$

$$\Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

b. $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

Đặt $t = \frac{x}{1+x} \quad (t \neq 1)$

$$\Rightarrow x = \frac{t}{1-t} \Rightarrow x^2 = \frac{t^2}{(1-t)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

4. Tìm hàm ngược của hàm số

a. $y = 2x + 3$

$D = \mathbb{R}$

$x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow$ hàm ngược của hàm $y = 2x + 3$ là $y = \frac{x-3}{2}$.

b. $\frac{1-x}{1+x}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$y = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow y + \text{yx} = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$$

Suy ra hàm ngược của hàm $\frac{1-x}{1+x}$ là $y = \frac{1-x}{1+x}$

c. $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), (x > 0)$

$D = [0, +\infty)$

Đặt $t = e^x$ $(t > 0)$

$$\begin{aligned}
&y = \tfrac{1}{2}\left(t + \tfrac{1}{t}\right) \Leftrightarrow t^2 - 2yt + 1 = 0\\
&\Delta' = y^2 - 1\\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ t = y - \sqrt{y^2 - 1}, \quad \text{(loại)} \end{array}\right.\\
&\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}
\end{aligned}$$

Suy ra hàm ngược

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a. $f(x) = a^x + a^{-x}, (a > 0)$

$f(x) = a^{-x} + a^x = -f(x)$

Suy ra hàm $f(x)$ là hàm chẵn

b. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

$$\begin{aligned}
&f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \ln \tfrac{-x^2 + 1 + x^2}{x + \sqrt{1 + x^2}} = -\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

Suy ra hàm $f(x)$ là hàm lẻ.

c. $f(x) = \sin x + \cos x$

$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq f(x)$ và $-f(x)$ suy ra $f(x)$ không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ.

6. Chứng minh rằng bất kỳ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a)$, $(a > 0)$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.

Chứng minh. Giả sử

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{1}$$

trong đó $g(x)$ là hàm chẵn và $h(x)$ là hàm lẻ. Khi đó

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \qquad (2)$$

(1) + (2) ta được

$f(x) + f(-x) = 2g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$

(1) − (2) ta được

$f(x) - f(-x) = 2h(x) \Rightarrow h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ $\square$

7. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số sau (nếu có)

a. $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

Gọi T là chu kỳ. Với mọi x ta có

$f(x+T) = f(x)$

$\Leftrightarrow A\cos\lambda(x+T) + B\sin\lambda(x+T) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

$\Leftrightarrow A\cos\lambda x\cos\lambda T - A\sin\lambda x\sin\lambda T + B\sin\lambda x\cos\lambda T + B\sin\lambda T\cos\lambda x$

$= A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

nên $\cos\lambda T = 1 \Rightarrow \lambda T = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{\lambda}$

và $\frac{2\pi}{\lambda}$ là chu kỳ nhỏ nhất.

b. $f(x) = \sin(x^2)$

Ta có $\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}} \to 0$ khi $k \to +\infty$ Suy ra hàm $f(x)$ không tuần hoàn.

c. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

Ta có

$\sin x$ tuần hoàn chu kỳ 2π

$\sin 2x$ tuần hoàn chu kỳ π

$\sin 3x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$

Suy ra $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ là BCNN của $2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}$ là 2π.

d. $f(x) = cos^2x$

Ta có $f(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π

1.6-1.7 Giới hạn hàm số

8. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} \stackrel{L}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{100x^{99}-2}{50x^{49}-2} = \frac{98}{48} = \frac{49}{24}$

b. $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}, n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to a} \frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

$\stackrel{L}{=} \lim\limits_{x\to a} \frac{nx^{n-1}-na^{n-1}}{2(x-a)} \stackrel{L}{=} \lim\limits_{x\to a} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2} = \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$

9. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x\right)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+x^2-1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$= \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}\left[\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right]+\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}\left[\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right]}{x} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$= \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$

10. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x-\sin a}{x-a} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \cos x = \cos a$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right| \\
&= \left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \\
&\le 2\left|\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right| < \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = 0$

c. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

$$\begin{aligned}
&\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \\
&= \lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x} - \lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 x} \\
&= \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)} - \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x-1}{\sin^2 x\left(\sqrt{\cos^2 x}+\sqrt{\cos x}+1\right)} \\
&= \lim\limits_{x\to0} \frac{\left(-x^2/2\right)}{x^2.2} - \lim\limits_{x\to0} \frac{\left(-x^2/2\right)}{x^2.3} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

d. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

$$\begin{aligned}
&\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} \\
&= \lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x+\cos x\cos 2x-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} \\
&= \lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{1-\cos x} + \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x(1-\cos 2x)}{1-\cos x} + \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{1-\cos x} \\
&= 1 - \lim\limits_{x\to0} \frac{\left(4x^2/2\right)}{x^2/2} - \lim\limits_{x\to0} \frac{\left(9x^2/2\right)}{x^2/2} = 14
\end{aligned}$$

11. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1$$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\cos\sqrt{x}}$

$$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\cos\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)}{x}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\cos\sqrt{x}-1\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x/2}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x))$

$$\lim\limits_{x\to\infty} (\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x))$$
$$= 2\lim\limits_{x\to\infty} \cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2} \sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}$$
$$= 2\lim\limits_{x\to\infty} \cos\frac{\ln x(x+1)}{2} \sin\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2}$$

Do $\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}$ bị chặn và $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2} = 0$ nên

$$\lim\limits_{x\to\infty} (\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x)) = 0$$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right), x > 0$

$$\lim\limits_{x\to\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} n^2 x^{1/(n+1)} \left(x^{1/\left(n^2+n\right)} - 1\right)$$
$$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} x^{1/n+1} \frac{\left(x^{1/\left(n^2+n\right)}-1\right)}{1/\left(n^2+n\right)} = \ln x$$

Do

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$
$$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}} = 1$$
$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(x^{1/\left(n^2+n\right)}-1\right)}{1/\left(n^2+n\right)} = \ln x$$

12. Khi $x \to 0^+$ cặp VCB sau có tương đương không?

$$\alpha(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} \quad \text{và} \quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$$

Ta có

$$\alpha(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x} \text{ khi } x \to 0^+$$
$$\begin{cases} e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x \\ 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \end{cases} \qquad \text{khi } x \to 0^+$$
$$\Rightarrow \beta(x) = e^{\sin x} - 1 + 1 - \cos x \sim e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$$

Suy ra $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ không tương đương.

1.8 Hàm số liên tục

13. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ a & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$

Hàm $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$ hay

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} = a$

b. $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{với} \quad x \geq 0 \\ a\cos x + b\sin x & \text{với} \quad x < 0 \end{cases}$

Ta có

$g(0) = a.0^2 + b.0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (a\cos x + b\sin x) = a$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(ax^2 + bx + 1\right) = 1$

Hàm $g(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0) \Rightarrow a = 1$

14. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loain gì của hàm số

a. $y = \frac{8}{1-2^{\cot gx}}$

- $x \to 0^- \Rightarrow \cot x \to -\infty \Rightarrow 2^{\cot x} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8}{1-2^{\cot x}} = 8$
- $x \to 0^+ \Rightarrow \cot x \to +\infty \Rightarrow 2^{\cot x} \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8}{1-2^{\cot x}} = 0$

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại I

b. $y = \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

Chọn $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0^-$

Do đó $\sin x_n = \sin(n\pi) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = 0$

Chọn $x_n = \frac{-1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \to 0^-$

Suy ra $\sin x_n = \sin x_n = \sin\left(-2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = -1$

Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại II

c. $y = \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}, (a \neq b)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{bx}-1}{x} = a - b$

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại I

1.9. Đạo hàm và vi phân

15. Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{khi} \quad x<1 \\ (1-x)(2-x) & \text{khi} \quad x<1 \\ x-2 & \text{khi} \quad x>2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi} \quad x<1 \\ 2x+3 & \text{khi} \quad x<1 \\ 1 & \text{khi} \quad x>2 \end{cases}$$

16. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x \neq 0 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

a. Liên tục tại $x = 0$

Để hàm liên tục tại $x = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = 0$

Vì $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^n = 0 \Rightarrow n > 0$

b. Khả vi tại $x = 0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^{n-1} \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$

$\Rightarrow n-1 > 0 \Rightarrow n > 1$

c. Có đạo hàm liên tục tại $x = 0$

Với mọi $x \neq 0$ ta có

$f'(x) = nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - \frac{x^n}{x^2}\cos\frac{1}{x} = x^{n-2}\left(n\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$

$f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$ khi

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^{n-2}\left(n\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow n > 2$

17. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

Chứng minh. Ta có

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)\,\varphi(x) & x \geq a \\ (a-x)\,\varphi(x) & x < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \varphi(x) + (x-a)\,\varphi'(x) & x \geq a \\ -\varphi(x) + (a-x)\,\varphi'(x) & x < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow {f_+}'(a) = \varphi(a), {f_-}'(a) = -\varphi(a)$$

Do $\varphi(a) \neq 0 \Rightarrow {f_+}'(a) \neq {f_-}'(a)$ Suy ra hàm $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = a$ nên không khả vi tại $x = a$. □

18. Tìm vi phân của hàm số

a. $y = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}, (a \neq 0)$

$dy = \left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)' dx = \frac{dx}{x^2+a^2}$

b. $y = \arcsin\frac{x}{a}, (a \neq 0)$

$dy = \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' dx = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

c. $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, (a \neq 0)$

$dy = \left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' dx = \frac{dx}{x^2-a^2}$

d. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|$

$dy = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)\right)' dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

19. Tìm

a. $\frac{d}{d(x^3)}\left(x^3 - 2x^6 - x^9\right)$

$\frac{d}{d(x^3)}\left(x^3 - 2x^6 - x^9\right) = 1 - 4x^3 - 3x^6$

b. $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}$

c. $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

$\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = -\cot x$

20. Tính gần đúng giá trị của biểu thức

a. $\lg 11$

Đặt $f(x) = \log x \qquad x_0 = 10, \Delta x = 1$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \approx \log 10 + \frac{1}{10 \ln 10}.1 \approx 1,042$$

b. $\sqrt[7]{\frac{2-0,02}{2+0,02}}$

Đặt $f(x) = \sqrt[7]{\frac{2-x}{2+x}} \qquad x_0 = 0, \Delta x = 0,02$

$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{7}\left[\ln(2-x) - \ln(2+x)\right]$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right) = -\frac{4}{7}\frac{1}{4-x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{7}\frac{1}{4-x^2}\sqrt[7]{\frac{2-x}{2+x}}$

Suy ra

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \approx \sqrt[7]{\frac{2-0}{2+0}} - \frac{4}{7}\frac{1}{4-0^2}\sqrt{\frac{2-0}{2+0}} \approx 0,9886$$

21. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a. $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$

Ta có

$$y^{(n)} = \left(x^2\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x^2\right)^{(k)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)}$$

Với $k \geq 3$ thì $\left(x^2\right)^{(k)} = 0$ nên

$y^{(8)} = \sum\limits_{k=0}^{8} C_n^k \left(x^2\right)^{(k)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8-k)}$

$= x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)} + 8.2x\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(7)} + 56.\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(6)}$

$= \frac{x^2.8!}{(1-x)^9} + \frac{2x.7!}{(1-x)^8} + \frac{6!}{(1-x)^7}$

$= \frac{x^2.8!+2x.7!(1-x)+6!(1-x)^2}{(1-x)^9} = \frac{8!}{(1-x)^9}$

b. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

$$y^{(100)} = \left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)} = (1+x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)} + 100\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(99)}$$
$$= \frac{(1+x)199!!}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} + \frac{100.197!!}{2^{99}(1-x)^{99}\sqrt{1-x}}$$
$$= \frac{(199(1+x)+100.2(1-x)).199.197!!}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$$
$$= \frac{(399-x)197!!}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$$

c. $y = x^2e^{2x}$, tính $y^{(10)}$

$$y^{(10)} = \left(x^2e^{2x}\right)^{(10)} = x^2\left(e^{2x}\right)^{(10)} + 20x\left(e^{2x}\right)^{(9)} + 90\left(e^{2x}\right)^{(8)}$$
$$= 2^{10}x^2e^{2x} + 20x.2^9e^{2x} + 90.2^8e^{2x}$$
$$2^9e^{2x}\left(2x^2 + 20x + 45\right)$$

d. $y = x^2\sin x$, tính $y^{(50)}$

$$y^{(50)} = \left(x^2\sin x\right)^{(50)} = x^2(\sin x)^{(50)} + 100x(\sin x)^{(49)} + 2450(\sin x)^{(48)}$$
$$= x^2\sin\left(x + \frac{50\pi}{2}\right) + 100x\sin\left(\frac{49\pi}{2}\right) + 2450\sin\left(\frac{48\pi}{2}\right)$$
$$= -x^2\sin x + 100x\cos x + 2450\sin x$$

22. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

a. $y = \frac{x}{x^2-1}$

Ta có

$$y = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{-x+1}\right)^{(n)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(-1)^{(n)}\frac{n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{n!}{(-x+1)^{n+1}}\right]$$

b. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$

$$y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{-x+1} - \frac{1}{-x+2}$$
$$\Rightarrow y^{(n)} = \left(\frac{1}{-x+1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{-x+2}\right)^{(n)} = n!\left(\frac{1}{(-x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(-x+2)^{n+1}}\right), x \neq 1, 2$$

c. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}}x$$
$$y^{(n)=}\left((1+x)^{-\frac{1}{3}}x\right)^{(n)} = \left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)}x + n\left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n-1)}$$

ta có

$\left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\ldots\left(-\frac{3n-2}{3}\right)\frac{1}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$

$= (-1)^n \frac{1}{3^n}\left(1.4\ldots(3n-2)\right)\frac{1}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$

$\left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n-1)} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\ldots\left(-\frac{3n-2}{3}\right)\frac{1}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$

$= (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}}\left(1.4\ldots(3n-5)\right)\frac{1}{(1+x)^{n-\frac{2}{3}}}$

$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\left(1.4\ldots(3n-5)\right)\frac{3n+2x}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}, n \geq 2, x \neq -1$

d. $y = e^{ax}\sin(bx+c)$

$y' = ae^{ax}\sin(bx+c) + be^{ax}\cos(bx+c)$

Đặt $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow y' = \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left(\sin(bx+c)\cos\varphi + \cos(bx+c)\sin\varphi\right)$

$= \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+\varphi)$

Sử dụng quy nạp chứng minh $y^{(n)} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi)$

Thật vậy với $n=1$,đúng. Giả sử đúng với $n=k$ tức là

$$y^{(k)} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{k}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+k\varphi) \qquad (*)$$

Ta sẽ chứng minh

$$y^{(k+1)} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{k+1}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+(k+1)\varphi)$$

Đạo hàm 2 vế của $(*)$ ta được

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{k}{2}}e^{ax}\left(a\sin X + b\cos X\right)$$

trong đó $X := bx+c+k\varphi$.

Mặt khác

$$a\sin X + b\cos X = \sqrt{a^2+b^2}\sin(X+\varphi) = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin(bx+c+(k+1)\varphi)$$

Suy ra

$$y^{(k+1)} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{k+1}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+(k+1)\varphi)$$

1.10. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

23. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

Chứng minh. Gọi $P_n(x) := x^n + px + q$.

$\Rightarrow P_n'(x) = nx^{n-1} + p$. Đa thức $P_n(x)$ có n nghiệm thực hoặc phức phân biệt hoặc trùng nhau và đa thức $P_n'(x)$ có $n-1$ nghiệm thực hoặc phức phân biệt hoặc trùng nhau.Nghiệm của đa thức đạo hàm là nghiệm của phương trình $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$. Phương trình này chỉ có 1 nghiệm thực khi n chẵn và không có quá 2 nghiệm thực khi n lẻ. Do đó, nếu n chẵn và $P_n(x)$ có 3 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3 thì áp dụng định lý Rolle vào $[x_1, x_2]$ và $[x_2, x_3]$ sẽ suy ra được đa thức $P_n'(x)$ có ít nhất 2 nghiệm thực (vô lý với lập luận trên). Tương tự với trường hợp n lẻ. $\square$

24. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^3, \quad -1 \le x \le 1$

Giả thiết công thức Cauchy cần có $g'(x) \neq 0$. Ở đây $g'(x) = 0$ tại $x = 0$. Vì vậy không thể áp dụng công thức Cauchy với hàm các hàm số này được.

25.Chứng minh bất đẳng thức

a. $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$

Xét hàm số $y = \sin t$ trên $[x, y]$, theo công thức Lagrange ta có

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \quad c \in (x, y)$$

tứ là

$$\sin y - \sin x = (y - x)\cos c \Rightarrow |\sin y - \sin x| = |y - x|\,|\cos c|$$

vì $|\cos c| \leq 1$ nên $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ (đpcm)

b. $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad 0 < b < a$

Xét hàm số $f(x) = \ln x, x \in [b, a], b > 0$. Theo công thức Lagrange ta có

$$f(a) - f(b) = (a-b)f'(c), \quad b < c < a$$

tức là

$$\ln a - \ln b = (a-b)\frac{1}{c} \Rightarrow \ln\frac{a}{b} = (a-b)\frac{1}{c}$$

vì b<c<a nên

$$\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{c} < \frac{a-b}{b}$$

Suy ra

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

26. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}}+1} = \frac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \stackrel{L}{=} \lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \stackrel{L}{=} \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_1\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o_2\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2} + o_3\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o_1\left(\frac{1}{x^2}\right)-1+\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}-o_3\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1-1-\frac{1}{2x^2}+o_2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^2}} = \infty$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

$\overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x - 2x - 1}{3x^2}$

$\overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x - 2}{6x}$

$\overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x \cos x - 2e^x \sin x}{6} = \frac{1}{3}$

e. $\lim\limits_{x\to 1} \tan\frac{\pi x}{2} \ln(2-x)$

$\lim\limits_{x\to 1} \tan\frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{-1}{2-x}}{\frac{\pi}{2}\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi(2-x)} = \frac{2}{\pi}$

h. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - a\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - a\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} \left(1 - a\tan^2 x\right)^{\frac{-a\tan^2 x}{x\sin x}\cdot\frac{-1}{a\tan^2 x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-a\tan^2 x}{x\sin x}} = e^{-a}$

27. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

Ta có

$$f(x) = \frac{x^3 - \sin^3 x\left(1 + ax + bx^2\right)}{x^3 \sin^3 x}$$

Tại lân cận $x = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3\left[x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right]^3 = x^6 + o\left(x^6\right) \\ \sin^3 x\left(1 + ax + bx^2\right) = x^3 + ax^4 + \left(b - \frac{1}{2}\right)x^5 + cx^6 + o\left(x^6\right) \end{cases}$$

trong đó c là hệ số của x^6.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^4 + \left(b - \frac{1}{2}\right)x^5 + cx^6 + o\left(x^6\right)}{x^6 + o\left(x^6\right)}$$

Để tồn tại giới hạn hữu hạn thì $a = 0, b = \frac{1}{2}$.

28. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b). Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$

Chứng minh. Đặt

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}\lambda$$

Suy ra

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \lambda\left(x - \frac{a + b}{2}\right)$$

Lấy $x_0 \in (a, b)$, xác định λ từ điều kiện:

$$\varphi(x_0) := f(x_0) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) - \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}\lambda = 0$$

Khi đó, có $\varphi(x_0) = \varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Theo giả thiết và định nghĩa $\varphi(x)$ thì $\varphi(x)$ liên tục khả vi trên $[a, b]$. Khi đó theo định lý Rolle với $x \in [a, x_0]$ do đó tồn tại $c_1 \in (a, x_0)$ sao cho $\varphi'(x) = 0$. Tương tự tồn tại $c_2 \in (x_0, b)$ sao cho $\varphi'(x) = 0$.

Theo giả thiết $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 nên $\varphi(x)$ cũng có đạo hàm cấp 2 và $\varphi'(x_1)\ \varphi'(c_2) = 0$ nên theo định lý Rolle tồn tại $c \in (c_1, c_2)$ sao cho $\varphi''(x) = 0$, tức là $\varphi''(x) = f''(x) - \lambda = 0$ hay

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2}f''(c)$$

□

29. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a. $y = x^3 + x$

$y' > 0 \forall x$ nên hàm tăng với mọi x.

b. $y = \arctan x - x$

$y' \leq 0 \forall x$ nên hàm giảm với mọi x.

30. Chứng minh bất đẳng thức

a. $2x \arctan x \geq \ln\left(1 + x^2\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

b. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$

31. Tìm cực trị của hàm số

a. $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

$y = 3 + \frac{x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

Dấu của y' là dấu của $-x(x+2)$.

$y' = 0$ khi $x = 0, x = -2$.

$y_{min} = y(-2) = \frac{8}{3} \quad y_{max} = y(0) = 4$.

b. $y = x - \ln(1+x)$

Miền xác định: $x > -1$.

$y' = \frac{x}{1+x}$

$y' = 0$ khi $x = 0$ và $y''(0) > 0$ do đó

$y_{min} = y(0) = 0$.

32. Khảo sát hàm số

a. $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$

b. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c. $y = \frac{x^4+8}{x^3+1}$

d. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

e. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

g. $r = a + b\cos\varphi, (0 < a \leq b)$

h. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, (a > 0)$

Chương 2

TÍCH PHÂN

2.1. Tích phân bất định

1. Tính các tích phân

a. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{-5}{4}}\right)dx = \frac{1}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{\frac{-1}{4}} + C$

b. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}dx$

$\int \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx = \int |\sin x - \cos x|\, dx$

$= \begin{cases} \sin x - \cos x, & \sin x \geq \cos x \\ -\sin x + \cos x, & \sin x < \cos x \end{cases}$

c. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Đặt $\sqrt{x^2+1} = t \Rightarrow x^2 = t^2 - 1 \Rightarrow xdx = tdt$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{tdt}{(t^2-1)t} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| + C$

d. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$

$\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-1\right)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}.\left(x^2-1\right)^{\frac{-1}{2}}.(-2) + C = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} + C$

e. $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+5)}$

$\int \frac{xdx}{(x+2)(x+5)} = \int \left(\frac{5}{3(x+5)} - \frac{2}{3(x+2)}\right) dx = \frac{1}{3}\left(5\ln|x+5| - 2\ln|x+2|\right) + C$

f. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

Nếu $a = b$.

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \int \frac{dx}{(x+a)^4} = \frac{-1}{3(x+a)^3} + C$$

Nếu $a \neq b$.

$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)^2$

$= \frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{(x+a)^2} - 2\frac{1}{x+a}\frac{1}{x+b} + \frac{1}{(x+b)^2}\right)$

$= \frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{2}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right) + \frac{1}{(x+b)^2}\right)$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{-1}{x+a} - \frac{2}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| - \frac{1}{x+b}\right) + C$

g. $\int \sin x \sin(x+y)dx$

$\int \sin x \sin(x+y)dx = \int \left(\cos y - \cos\left(2x+y\right)\right) dx$

$= \frac{1}{2}x\cos y - \frac{1}{4}\sin\left(2x+y\right) + C$

h. $\int \frac{1+\sin x}{\sin^2 x}dx$

$\int \frac{1+\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x}\right) dx = -\cot x - \ln|\sin x| + C$

2. Tính các tích phân

a. $\int \arctan x dx$

Đặt
$$\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$$
$$\Rightarrow \int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln \left|1 + x^2\right| + C$$

b. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx$
$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{9dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$$
$$= \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} + C$$
$$= \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \frac{9}{2} \ln \left|x - \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}\right| + C$$

c. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$$
$$= \sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}} + C$$
$$= \sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{1}{2} \ln \left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 2}\right| + C$$

d. $\int x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}dx$
$$= -\frac{1}{2} \int (-2x + 3)\sqrt{-x^2 + 3x - 2}dx + \frac{3}{2} \int \sqrt{-x^2 + 3x - 2}dx$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \frac{3}{2} \int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} dx$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \frac{3}{2} \left(\frac{x-\frac{3}{2}}{2} \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \frac{1}{8} \arcsin \left(\frac{x-\frac{3}{2}}{2} \right) \right) + C$$

e. $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2}$
$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+4\right)^2}$$
Đặt $t = x + 4$. Tích phân trở thành
$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+4\right)^2}$$
$$\int \frac{dt}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{4} \int \frac{t^2dt}{\left(t^2+4\right)^2}$$
$$= \frac{1}{8} \arctan \frac{t}{2} - \frac{1}{8} \int t \frac{2tdt}{\left(t^2+4\right)^2} + C$$
$$= \frac{1}{8} \arctan \frac{t}{2} + \frac{1}{8} \frac{t}{t^2+4} - \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^2+4} + C$$
$$= \frac{1}{16} \arctan \frac{t}{2} + \frac{1}{8} \frac{t}{t^2+4} + C$$

f. $\int \sin^{n-1}x \sin(n + 1)xdx$

Đặt

$I = \int \sin^{n-1}x \sin(n+1)xdx = \int \sin^{n-1}x\left(\sin nx\cos x + \cos nx\sin x\right)dx$

$= \int \sin^{n-1}x\sin nx\cos xdx + \int \sin^n x\cos nxdx$

Ta có

$\int \sin^{n-1}x\sin nx\cos xdx = \int \sin nxd\left(\frac{1}{n}\sin^n x\right)$

$= \frac{1}{n}\sin^n x\sin nx - \int \cos nx\sin^n xdx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{n}\sin^n x\sin nx - \int \cos nx\sin^n xdx + \int \cos nx\sin^n xdx$

$= \frac{1}{n}\sin^n x\sin nx + C$

g. $\int e^{-2x}\cos 3xdx$

Ta có

$$\int e^{-2x}\cos 3xdx = e^{-2x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + C$$

lấy đạo hàm 2 vế ta được

$\int e^{-2x}\cos 3xdx = e^{-2x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + C$

$e^{-2x}\cos 3x = e^{-2x}\left[(-2A+B)\cos 3x - (2B+3A)\sin 3x\right]$

$\Rightarrow \begin{cases} -2A+B=1 \\ 2B+3A=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{13} \\ B = \frac{3}{13} \end{cases}$

$\Rightarrow \int e^{-2x}\cos 3xdx = e^{-2x}\left(-\frac{1}{13}\cos 3x + \frac{3}{13}\sin 3x\right) + C$

h. $\int x^2\ln xdx$

$\int \arcsin^2 xdx = x\arcsin^2 x - 2\int x\arcsin x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\arcsin^2 x + \int 2\arcsin xd\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int dx$

$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$

3. Lập công thức truy hồi tính I_n

a. $I_n = \int x^n e^x dx$

Đặt

$$\begin{cases} x^n = u \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$\Rightarrow I_n = e^x x^n - n\int x^{n-1}e^x dx = e^x x^n - nI_{n-1}$

b. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

$I_n = \int \frac{1}{\cos^{n-2}x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{\cos^{n-2}x}$

$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x}dx$

$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} - (n-2)\int \left(\frac{1}{\cos^n x} - \frac{1}{\cos^{n-2}x}\right)dx$

$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} - (n-2)\,I_n - (n-2)\,I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

2.2. Tích phân xác định

4. Tính các đạo hàm

a. $\frac{d}{dx}\int\limits_x^y e^{t^2}dt$

$\frac{d}{dx}\int\limits_x^y e^{t^2}dt = e^{y^2}y' - e^{x^2}x' = -e^{x^2}$

b. $\frac{d}{dy}\int\limits_x^y e^{t^2}dt$

$\frac{d}{dy}\int\limits_x^y e^{t^2}dt = e^{y^2}y' - e^{x^2}x' = e^{y^2}$

c. $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

$\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}}$

5. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right], (\alpha,\beta > 0)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+\frac{k\beta}{n}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\alpha+\beta x} = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

6. Tính các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}$

$$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x\sqrt{\tan(\sin x)}}{\frac{\sqrt{\sin(\tan x)}}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}}{\sqrt{\sin(\tan x)}}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{\tan x}}=1$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi^2}{4},\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1\right)$$

7. Tính các tích phân sau

a. $\int\limits_{1/e}^{e}|\ln x|\,(x+1)\,dx$

$$\int\limits_{1/e}^{e}|\ln x|\,(x+1)\,dx=-\int\limits_{1/e}^{1}\ln x\,(x+1)dx+\int\limits_{1}^{e}\ln x\,(x+1)\,dx$$

$$=-\frac{(x+1)^2}{2}\ln x\Big|_{1/e}^{1}+\int\limits_{1/e}^{1}\frac{(x+1)^2dx}{2x}+\frac{(x+1)^2}{2}\ln x\Big|_{1}^{e}-\int\limits_{1}^{e}\frac{(x+1)^2dx}{2x}$$

$$=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4e^2}-\frac{2}{e}+\frac{5}{2}$$

b. $\int\limits_{1}^{e}(x\ln x)^2dx$

$$\int\limits_{1}^{e}(x\ln x)^2dx=\int\limits_{1}^{e}\ln^2 xd\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_{1}^{e}-\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{e}x^2\ln xdx$$

$$=-\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{e}\ln xd\left(\frac{x^3}{3}\right)=-\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_{1}^{e}-\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{3}x^2dx\right)$$

$$=\frac{5e^3}{27}-\frac{2}{27}$$

c. $\int\limits_{0}^{3\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$

d. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\sin^2 x\cos x}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}dx$

$$\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\sin^2 x\cos x}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}dx=\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\sin^2 x\cos x}{\left(1/\cos^2 x\right)^2}dx$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi/6}\sin^2 x\cos^5 xdx=\int\limits_{0}^{\pi/6}\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos xdx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Tích phân trở thành
$\int\limits_0^{1/2} t^2\left(1 - t^2\right)^2 dt = \int\limits_0^{1/2} \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right) dt = \frac{407}{13440}$

e. $\int\limits_0^{\pi/2} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

Đặt

$$t = \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Rightarrow t^2 = \frac{x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{t^2}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}$$

Khi đó
$\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin t\frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}$
$= -\int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin t\frac{d\left(1-t^2\right)}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}$
$= \frac{1}{1-t^2}\arcsin t\Big|_0^{\sqrt{3}/2} - \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1-t^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
$= \frac{4\pi}{3} - J$

Đặt $t = \sin\varphi \Rightarrow dt = \cos\varphi d\varphi, 1 - t^2 = \cos^2\varphi, \sqrt{1-t^2} = |\cos\varphi|$. Khi đó

$$J = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi\,|\cos\varphi|} = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \tan\varphi|_0^{\pi/3} = \sqrt{3}$$

Vậy
$\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

f. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\cos nx dx$

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\cos^n x \sin nx\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \sin nx dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \left[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos(n-1) x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos(n+1) x dx$$
$$= \frac{1}{2} I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos(n+1) x dx$$

Xét tích phân

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos(n+1) x dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \left[\cos nx \cos x - \sin nx \sin x\right] dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \sin nx dx$$
$$= I_n - I_n = 0$$

Vậy ta có $I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$

tương tự

$I_{n-1} = \frac{1}{2} I_{n-2}$

...

$I_1 = \frac{1}{2} I_0$

$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2^{n+1}}\pi$

8. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì

a. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = -\int_{\pi/2}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

b. $\int\limits_0^\pi x f(\sin x)dx = \int\limits_0^\pi \frac{\pi}{2} f(\sin x)dx$

Đặt $x = \pi - t$, ta có

$$\int\limits_0^\pi x f(\sin x)dx = -\int\limits_\pi^0 (\pi - t)\, f\left(\sin(\pi - t)\right)dt$$

$$= \int\limits_0^\pi (\pi - t)\, f\left(\sin(\pi - t)\right)dt$$

$$= \int\limits_0^\pi \pi f\left(\sin t\right)dt - \int\limits_0^\pi t f\left(\sin t\right)dt$$

$$= \int\limits_0^\pi \pi f\left(\sin x\right)dx - \int\limits_0^\pi x f\left(\sin x\right)dt$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^\pi x f\left(\sin x\right)dt = \int\limits_0^\pi \pi f\left(\sin x\right)dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^\pi x f\left(\sin x\right)dt = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f\left(\sin x\right)dx$$

9. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Khi đó $f^2(x), g^2(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh bất đẳng thức (với $a < b$)

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

Chứng minh. Ta có

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)^2 dx \ge 0, (a < b)$$

$$\int\limits_a^b \left(\alpha^2 f^2 + 2\alpha\beta f g + \beta^2 g^2\right)dx \ge 0$$

$$\alpha^2\int\limits_a^b f^2 dx + 2\alpha\beta\int\limits_a^b f g dx + \beta^2\int\limits_a^b g^2 dx \ge 0$$

Vế trái là 1 tam thức bậc 2 đối với α, tam thức này không âm nên ta luôn có

$$\left(\int\limits_a^b f g dx\right)^2 - \left(\int\limits_a^b f^2 dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2 dx\right) \le 0$$

$$\Rightarrow \left(\int\limits_a^b f g dx\right)^2 \le \left(\int\limits_a^b f^2 dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2 dx\right)$$ □

2.3. Tích phân suy rộng

10. Xét dự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

a. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$

Đặt $x = -t$.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = -\int\limits_{+\infty}^{0} (-t)\, e^{-t} dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} te^{-t} dt$$

Suy ra hội tụ và tích phân

$\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = e^t (t-1)|_0^{\infty} = 1$

b. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{0}^{A} \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \sin x|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \sin A$$

Vì không tồn tại $\lim\limits_{A\to+\infty} \sin A$ suy ra phân kỳ.

c. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\left(\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}\right), (a>0)$$

Do $\frac{1}{(x^2+1)^2} < \frac{1}{x^4}, x \in [a, +\infty)$ nên ta có $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^4}$ hội tụ. Suy ra tích phân hội tụ.

Đặt $x = \cot t$.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$

d. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

11. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\tan x - x}$

Ta có $\frac{1}{\tan x - x}$ có bậc 3 so với $\frac{1}{x}$ do đó tích phân $\int\limits_0^1 \frac{1}{\tan x - x}dx$ phân kỳ.

b. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$

Ta có

$$\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, x \to 0$$

suy ra vô cùng lớn $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}$ khi $x \to 0$ cùng bậc với $\frac{1}{\sqrt{x}}$ do đó tích phân $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$ hội tụ

c. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x}$

Vì $\frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{x}, x > e$ và tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ phân kỳ, suy ra tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ phân kỳ.

e. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$

Xét $y = e^{-x^2}$ có $y' = -2xe^{-x^2}$, nên $y' < 0$ khi $x > 0$. Do đó hàm y nghịch biến khi $x > 0$. Suy ra $e^{-x^2} < 1$ khi $x > 0$ hay $\frac{e^{-x^2}}{x^2} < \frac{1}{x^2}$. Mặt khác $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ nên $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$ hội tụ.

f. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$

12. Nếu $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì có suy ra được $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$ không? Xét ví dụ $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx$.

Tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng $f(x)$ không nhất thiết phải dần đến 0 khi $x \to +\infty$. Chẳng hạn: Xét tích phân $\int\limits_a^{+\infty} \sin(x^2)dx$.

Đặt $x^2 = t > 0 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, ta có

$$\int_a^{+\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$$

tích phân này hội tụ, tuy nhiên hàm $f(x) = \sin(x^2)$ không dần về 0 khi $x \to +\infty$, hay $f(x) = \sin(x^2)$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

13. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$. Hỏi $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ có hội tụ không?

2.4. Ứng dụng của tích phân

14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a. Đường parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

$$S = \int_0^1 \left(x + 4 - \left(x^{2+4}\right)\right) dx = \frac{1}{6}$$

b. Parabol bậc ba $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 2x, (x \geq 0)$

$$S = \int_0^1 (2x - x)\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2x - x^3\right) dx = \frac{3}{4}$$

c. Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

$$\begin{aligned} S &= 2\int\limits_0^2 \left(\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}\right)dx \\ &= 2\left(\left[\tfrac{(2-x)}{2}\sqrt{4x - x^2} + \tfrac{4}{2}\arcsin\tfrac{2-x}{2}\right]\right)\Big|_0^2 - \sqrt{2}\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^2 \\ &= 2\pi - \tfrac{16}{3} \end{aligned}$$

d. Đường $y^2 = x^2 - x^4$

15. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 = a^2$ và $y^2 + z^2 = a^2, (a > 0)$.

Đáp số: $V = \frac{16}{3}a^3$.

Chương 3

HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

3.1. Hàm nhiều biến số

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

Hàm z xác định khi $x^2 + y^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 1$

b. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ 4 - x^2 - y^2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

c. $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$

Hàm z xác định khi $-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1$

$$\Rightarrow \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 > 0, 1 - x \leq y \leq 1 + x\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 < 0, 1 - x \geq y \geq 1 + x\right\}$$

d. $z = \sqrt{x \sin y}$

Hàm z xác định khi $x \ln y \geq 0$.

$$\Rightarrow \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \geq 0, y \geq 1\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \leq 0, 0 < y \leq 1\right\}$$

2. Tìm các giới hạn nếu có của các hàm số sau

a. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

Đặt $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Lấy $x_n = y_n = \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$

suy ra $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 0 \to 0$

Lấy $x_n = 0, y_n = \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$

Khi đó $f\left(x_n, y_n\right) = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -1 \to -1$

Vậy không tồn tại giới hạn $f(x, y)$ khi $x \to 0, y \to 0$

b. $f(x, y) = \sin\frac{\pi x}{2x+y}, \quad (x \to \infty, y \to \infty)$

3.2. Đạo hàm và vi phân

3. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$z_x{}' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad z_y{}' = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$$

b. $z = y^2 \sin\frac{x}{y}$

$$z_x{}' = y\cos\frac{x}{y} \quad z_y{}' = 2y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{x}{y}$$

c. $z = \arctan\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

$$z_x{}' = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}} \quad z_y{}' = \frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$$

d. $x^{y^3}, (x > 0)$

$$z_x{}' = y^3 x^{y^3-1} \quad z_y{}' = x^{y^3} 3y^2 \ln x$$

e. $u = x^{y^z}, (x, y, z > 0)$

$$u_x{}' = y^z x^{y^z-1} \quad u_y{}' = x^{y^z} z y^{z-1}\ln x \quad u_z{}' = x^{y^z} y^z \ln y \ln x$$

f. $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

$u_x{}' = -e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$

$u_y{}' = -e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$

$u_z{}' = -e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$

4. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y)$ sau

a. $f(x, y) = \begin{cases} x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$

Hàm $f(x,y) = x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2$ liên tục tại mọi $x \neq 0$. Ta có

$$|f(x,y)| \leq x\frac{\pi}{2}$$

Vì vậy $f(x,y) \to 0$ $f(0,y)$ khi $x \to 0$. Vậy $f(x,y)$ cũng liên tục tại $x = 0$, suy ra $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Với $x \neq 0$ các đạo hàm riêng ${f_x}'(x,y), {f_y}'(x,y)$ đều tồn tại và liên tục.

${f_x}'(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2x^2y^2}{x^4+y^4}$

${f_y}'(x,y) = \frac{2x^3y}{x^4+y^4}$

Xét $x = 0, y \neq 0$

${f_x}'(0,y) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\arctan\left(\frac{y}{h}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$

${f_y}'(0,y) = \lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,y+k)-f(0,y)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0$

Nếu $y = 0$

${f_x}'(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0$

${f_y}'(0,y) = \lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0$

Vậy ${f_y}'(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và ${f_x}'(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

b. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Hàm $f(x,y) = \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$ liên tục tại mọi $(x,y) \neq (0,0)$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x\left(y - \frac{y^3}{3!} + o\left(y^3\right)\right) - y\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{3!(x^2+y^2)} + \frac{xo\left(y^3\right) - yo\left(x^3\right)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Do đó khi $(x,y) \to (0,0)$ thì $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$. Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Với $(x,y) \neq (0,0)$ các đạo hàm riêng ${f_x}'(x,y), {f_y}'(x,y)$ đều tồn tại và liên tục.

$$\begin{aligned} {f_x}'(x,y) &= \frac{\left(y^2-x^2\right)\sin y - y\left(x^2+y^2\right)\cos x + 2xy\sin x}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ {f_x}'(x,y) &= \frac{\left(y^2-x^2\right)\sin x - y\left(x^2+y^2\right)\cos y + 2xy\sin y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

Xét tại $(0,0)$

$$f_x{}'(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$
$$f_y{}'(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Và không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x{}'(x,y), \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_y{}'(x,y)$

Vậy $f_x{}'(x,y), f_y{}'(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

5. Giả sử $z = yf(x^2-y^2)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x}z_x{}' + \frac{1}{y}z_y{}' = \frac{z}{y^2}$$

$$z_x{}' = y.2xf(x^2-y^2)$$
$$z_y{}' = f(x^2-y^2) - 2y^2f_y{}'(x^2-y^2)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x}z_x{}' + \frac{1}{y}z_y{}' = 2yf(x^2-y^2) + \frac{f(x^2-y^2)}{y} - 2yf(x^2-y^2)$$
$$= \frac{yf(x^2-y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2}$$

6. Tìm dạo hàm các hàm số hợp sau đây

a. $z = e^{u^2-2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2+y^2}$

Ta có

$$z_x{}' = z_u{}'u_x{}' + z_v{}'v_x{}'$$
$$= e^{u^2-2v^2}.2u.(-\sin x) + e^{u^2-2v^2}.(-4v).\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= -e^{\cos^2 x-2\left(x^2+y^2\right)}.(2\cos x\sin x + 4x)$$
$$z_y{}' = z_u{}'u_y{}' + z_v{}'v_y{}'$$
$$= e^{u^2-2v^2}.2u.0 + e^{u^2-2v^2}.(-4v).\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= -e^{\cos^2 x-2\left(x^2+y^2\right)}.4y$$

b. $z = \ln\left(u^2+v^2\right), u = xy, v = \frac{x}{y}$

$z_u{}' = \frac{2u}{u^2+v^2}, \quad z_v{}' = \frac{2v}{u^2+v^2}$

$u_x{}' = y, \quad v_x{}' = \frac{1}{y}, \quad u_y{}' = x, \quad v_y{}' = -\frac{x}{y^2}$

$z_x{}' = \frac{2xy}{x^2y^2+\frac{x^2}{y^2}}y + \frac{2\frac{x}{y}}{x^2y^2+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y} = \frac{2}{x}$

$z_x{}' = \frac{2xy}{x^2y^2+\frac{x^2}{y^2}}x + \frac{2\frac{x}{y}}{x^2y^2+\frac{x^2}{y^2}}\left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{2\left(y^4-1\right)}{y(y^4+1)}$

c. $z = \arcsin\left(x-y\right), x = 3t, y = 4t^3$

$z_x{}' = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$

$z_y{}' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$

$x_t{}' = 3, \quad y_t{}' = 12t^2$

$\Rightarrow z_t{}' = \frac{1}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.3 - \frac{1}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.12t^2$

7. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a. $z = \sin(x^2+y^2)$

$$dz = \cos\left(x^2+y^2\right)d\left(x^2+y^2\right) = \cos\left(x^2+y^2\right)(2xdx+2ydy)$$

b. $\ln\tan\frac{y}{x}$

$$dz = \frac{1}{\tan\frac{y}{x}}\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2\left(xdy-ydx\right)}{x^2\sin\frac{2y}{x}}$$

c. $\arctan\frac{x+y}{x-y}$

$$dz = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}d\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$
$$= \frac{(x-y)^2}{2(x^2+y^2)}.\frac{2(xdy-ydx)}{(x-y)^2} = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

d. $u = x^{y^2z}$

$$u_x{}' = y^2zx^{y^2z-1}, \quad u_y{}' = x^{y^2z}\ln x.2yz, \quad u_z{}' = x^{y^2z}.\ln x.y^2$$
$$\Rightarrow dz = x^{y^2z}\left(\frac{y^2z}{x}dx + 2yz\ln xdy + y^2\ln xdz\right)$$

8. Tính gần đúng

a. $A = \sqrt[3]{(1,02)^2+(0,05)^2}$

Xét $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$. Ta có $A = f(1+\Delta x, 0+\Delta y)$

trong đó $\Delta x = 0,02, \Delta y = 0,05.$

$$f_x{}'(x,y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}},\ \ f_y{}'(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$$

Do đó

$$f(1+\Delta x, 0+\Delta y) \approx f(0,1)+f_x{}'(1,0)\Delta x+f_y{}'(1,0)\Delta y = 1+\frac{2}{3}.0,02 = 1,013$$

b. $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$

Xét $f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)$. Ta có

$\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right) = f\left(1+\Delta x, 1+\Delta y\right)$

trong đó $\Delta x = 0,03, \Delta y = 0,02.$

$$f_x{}'(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)}$$
$$f_y{}'(x,y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)}$$

Do đó

$$f(1+\Delta x, 1+\Delta y) \approx f(1,1)+f_x{}'(1,1)\Delta x+f_y{}'(1,1)\Delta y$$
$$= 0+\frac{0,03}{3}-\frac{0,02}{4} = 0,005$$

9. Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a. $x^3y - y^3x = a^4, (a>0)$, tính y'

$$F(x,y) = x^3y - y^3x - a^4 = 0$$
$$F_x{}' = 3x^2y - y^3,\ \ F_y{}' = x^3 - 3xy^2$$
$$\Rightarrow y' = -\frac{F_x{}'}{F_y{}'} = \frac{y\left(3x^2-y^2\right)}{x(3y^2-x^2)}$$

b. $x+y+z = e^2$, tính $z_x{}', z_y{}'$

$$F = e^z - x - y - z = 0$$
$$F_x{}' = -1,\ \ F_y{}' = -1,\ \ F_z{}' = e^z - 1$$
$$\Rightarrow z_x{}' = z_y{}' = \frac{1}{e^z-1}$$

c. $\arctan \frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}, (a > 0)$

$$F = \arctan \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$$
$$F_x{}' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}.\frac{1}{a} = \frac{a}{(x+y)^2+a^2}$$
$$F_y{}' = \frac{a}{(x+y)^2+a^2} - \frac{1}{a} = -\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+a^2}\frac{1}{a}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$$

d. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính $z_x{}', z_y{}'$

$$F = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$
$$F_x{}' = 3x^2 - 3yz, \quad F_y{}' = 3y^2 - 3xz, \quad F_z{}' = 3z^2 - 3xy$$
$$\Rightarrow \quad z_x{}' = \frac{yz-x^2}{z^2-xy}, \quad z_y{}' = \frac{xz-y^2}{z^2-xy}$$

10. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính $u_x{}', u_y{}'$ biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình

$$ze^x = xe^x + ye^y$$

Ta có

$$u_x{}' = \frac{(y+z)(1+z_x{}')-(x+z)z_x{}'}{(y+z)^2} = \frac{y-x}{(y+z)^2}z_x{}' + \frac{1}{y+z}$$
$$u_y{}' = \frac{(y+z)z_y{}'-(x+z)(1+z_y{}')}{(y+z)^2} = \frac{y-x}{(y+z)^2}z_y{}' - \frac{x+z}{(y+z)^2}$$

Mặt khác lấy đạo hàm theo x 2 vế ta được

$$\left(ze^z + e^z\right) z_x{}' = xe^x + e^x \Rightarrow z_x{}' = \frac{e^x\left(x+1\right)}{e^z\left(z+1\right)}$$

tương tự

$$z_y{}' = \frac{e^y\left(x+1\right)}{e^z\left(z+1\right)}$$

Suy ra

$$u_x{}' = \frac{y-x}{(y+z)^2}\frac{e^x(x+1)}{e^z(z+1)} + \frac{1}{y+z}$$
$$u_y{}' = \frac{y-x}{(y+z)^2}\frac{e^y(x+1)}{e^z(z+1)} - \frac{x+z}{(y+z)^2}$$

11. Tìm đạo hàm của hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Lấy đạo hàm theo x 2 vế các phương trình trên ta được

$$\begin{cases} y' + z' = -1 \\ yy' + zz' = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{x-z}{z-y} \\ z' = \frac{y-x}{z-y} \end{cases}$$

12. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 {z_x}' + \frac{1}{y} {z_y}' = \frac{1}{z}$$

Chứng minh. Ta có

$F = z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2} = 0$

${F_x}' = -\frac{2}{x^2}$

${F_y}' = -\frac{y}{\sqrt{y^2-z^2}}$

${F_z}' = 2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}$

$\Rightarrow \quad {z_x}' = \frac{\frac{2}{x^2}}{2z+\frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}, \quad {z_y}' = \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z+\frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}$

$\Rightarrow x^2 {z_x}' + \frac{1}{y} {z_y}' = \frac{1}{z}$ $\square$

13. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

a. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

${z_x}' = \frac{1}{3}\frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.2x = x\sqrt{x^2 + y^2}$

${z_y}' = y\sqrt{x^2 + y^2}$

${z_{x^2}}'' = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

${z_{xy}}'' = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

${z_{y^2}}'' = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b. $z = x^2 \ln(x + y)$

$z_x{}' = 2x\ln(x+y) + \frac{x^2}{x+y}$

$z_y{}' = \frac{x^2}{x+y}$

$z_{x^2}{}'' = 2x\ln(x+y) + \frac{2x}{x+y} + \frac{x^2+2xy}{(x+y)^2}$

$z_{xy}{}'' = \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{(x+y)^2}$

$z_{y^2}{}'' = -\frac{x^2}{(x+y)^2}$

c. $z = \arctan\frac{y}{x}$

$z_x{}' = \frac{-y}{x^2+y^2}$

$z_y{}' = \frac{x}{x^2+y^2}$

$z_{x^2}{}'' = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$z_{xy}{}'' = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$z_{y^2}{}'' = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

14. Lấy vi phân cấp hai của các hàm số sau

a. $z = xy^2 - x^2y$

$z = xy^2 - x^2y$

$z_x{}' = y^2 - 2xy$

$z_y{}' = 2xy - x^2$

$z_{x^2}{}'' = -2y$

$z_{xy}{}'' = 2y - 2x$

$z_{y^2}{}'' = 2x$

$\Rightarrow d^2z = -2yd^2x + (2y-2x)\,dxdy + 2xd^2y$

b. $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$

$z_x{}' = \frac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$z_y{}' = \frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$z_{x^2}{}'' = \frac{\left(x^2+y^2\right)^2 - 2.2x\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4} = \frac{x^2+y^2-4x}{\left(x^2+y^2\right)^3}$

$z_{xy}{}'' = \frac{2xy\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^3}$

$z_{y^2}{}'' = \frac{x^2+y^2-4y}{\left(x^2+y^2\right)^3}$

$\Rightarrow d^2z = \frac{x^2+y^2-4x}{\left(x^2+y^2\right)^3}d^2x + \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^3}dxdy + \frac{x^2+y^2-4y}{\left(x^2+y^2\right)^3}d^2y$

15. Tìm cực trị của các hàm số sau

a. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

Tìm điểm tới hạn

$$\begin{cases} z_x{}' = 2x + y + 1 = 0 \\ z_y{}' = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-1, 1\right)$$

Tính

$$\begin{cases} z_x{}' = 2x + y + 1 = 0 \\ z_y{}' = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-1, 1\right)$$

$A = z_{x^2}{}'' = 2, \;\; B = z_{xy}{}'' = 1, \;\; C = z_{y^2}{}'' = 2$

$\Rightarrow B^2 - AC = -3 < 0$

Suy ra M là điểm cực trị và $A > 0$ vậy nó là điểm cực tiểu. $z_{min} = z(-1, 1) = 0$

b. $z = x + y - xe^y$

$$\begin{cases} z_x{}' = 1 - e^y = 0 \\ z_y{}' = 1 - xe^y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(1, 0\right)$$

$A = z_{x^2}{}'' = 0, \;\; B = z_{xy}{}'' = -e^y, \;\; C = z_{y^2}{}'' = -xe^y$

$\Rightarrow B(M)^2 - A(M)C(M) = 1 > 0$

Suy ra không có cực trị

c. $z = x^2 + y^2 - e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

Điểm tới hạn là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 2xe^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0 \\ 2y + 2ye^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0 \end{cases}$$

Suy ra $M(0,0)$.

$A = 2 + 2e^{-\left(x^2+y^2\right)} - 4x^2e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

$B = -4xye^{-\left(x^2+y^2\right)}$

$C = 2 + 2e^{-\left(x^2+y^2\right)} - 4y^2e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

Tại $M(0,0)$ thì $B^2 - AC = -4 < 0$ vậy $M(0,0)$ là điểm cực trị và $A(M) = 2 > 0$ suy ra $M(0,0)$ là điểm cực tiểu và $z_{min} = -1$.

d. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

$$\begin{cases} {z_x}' = 8x^3 - 2x = 0 \\ {z_y}' = 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_0(0,0), M_1(0,1), M_2(0,-1), M_3(\frac{1}{2},0), M_4(\frac{1}{2},1)$

$M_5(\frac{1}{2},-1), M_6(-\frac{1}{2},0), M_7(-\frac{1}{2},1), M_8(-\frac{1}{2},-1)$

$A = {z_{x^2}}'' = 24x^2,\ \ B = {z_{xy}}'' = 0,\ \ C = {z_{y^2}}'' = 12y^2 - 4$

Tại M_0 có $B^2 - AC = -8 < 0$ và $A(M_0) = -2 < 0$ suy ra M_0 là điểm cực đại $z_{max} = z(M_0) = 0$.

Tại điểm M_1, M_2 ta có $B^2 - AC = 2.8 = 16 > 0$. Vậy không phải là điểm cực trị

Tại M_3, M_6 có $B^2 - AC = 4.4 = 16 > 0$ suy ra không phải là điểm cực trị

Tại M_4, M_5, M_7, M_8 có $B^2 - AC = -4.8 = -32 < 0$, vậy là các điểm cực trị và có $A = 4 > 0$ suy ra là các điểm cực tiểu $z_{min} = z(M_4) = z(M_5) = z_(M_7) = z_(M_8) = -\frac{9}{8}$.

16. Tìm cự trị có điều kiện

a. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Hàm Lagrange

$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}\right), a > 0$

Tìm điểm tới hạn

$$\begin{cases} L'_x = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3} = 0 \\ L'_y = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3} = 0 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -2\lambda \\ \lambda = \pm\frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1\left(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a\right), \lambda = \frac{a}{\sqrt{2}} \\ M_2\left(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a\right), \lambda = -\frac{a}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Xác định điểm cực trị

$$\begin{cases} L''_{xx} = \frac{2}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = \frac{2}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4} \Rightarrow d^2L = 2\left[\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3\lambda}{x^4}\right)dx^2 + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{3\lambda}{y^4}\right)dy^2\right] \\ \varphi'_x = -\frac{2}{x^3}, \varphi'_y = -\frac{2}{y^3} \Rightarrow d\varphi = -2\left(\frac{1}{x^3}dx + \frac{1}{y^3}dy\right) = 0 \Leftrightarrow dy = -\frac{y^3}{x^3}dx \end{cases}$$

$\Rightarrow d^2L = 2\left[\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3\lambda}{x^4}\right) + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{3\lambda}{y^4}\right)\left(\frac{y^6}{x^6}\right)\right]dx^2$

Tại $M_1\left(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a\right), \lambda = \frac{a}{\sqrt{2}}$:

$d^2L = 4\left(-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}} + \frac{3}{4a^3\sqrt{2}}\right)dx^2 = dx^2 = \frac{dx^2}{a^3\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow M_1$ là cực tiểu

Tại $M_2\left(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a\right), \lambda = -\frac{a}{\sqrt{2}}$:

$d^2L = 4\left(\frac{1}{2a^3\sqrt{2}} - \frac{3}{4a^3\sqrt{2}}\right)dx^2 = dx^2 = -\frac{dx^2}{a^3\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow M_2$ là điểm cực đại

b. $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

Do $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Bài toán đưa về tìm cực trị hàm một biến

$z = z(x) = x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$.

Từ đó dễ tính được $z_{max} = \frac{1}{4}$ đạt tại $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

17. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a. $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, y = 6, x + y = 6$

Điểm tới hạn là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (0, y); (0, 4); (2, 1)$. Các điểm $(0, y), (0, 4)$ nằm trên biên và $(2, 1)$ năm trong miền D. Vậy ta so sánh giá trị tại $(2, 1)$ và giá trị của z ở trên biên.

Ta có $z(2, 1) = 4, \; z(0, y) = 0, \; z(x, 0) = 0$

Trên $x+y=6$ có $z=2x^3-12x^2$ khi $x\in[0,6]$ thì z đạt giá trị max bằng 0 tại $x=0, x=6$ và min bằng -64 tại $x=4$. Vậy $z_{max}=4$ tại $x=(2,1)$ và $z_{min}=-64$ tại $x=(4,2)$.

b. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}, y=0, y=\frac{\pi}{2}$

Điểm tới hạn là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\cos x+\cos(x+y)=0\\ \cos y+\cos(x+y)=0\end{cases}\Rightarrow \cos x=\cos y$$

vì $x,y\in[0,\frac{\pi}{2}]$ nên $x=y$ suy ra $x=y=\frac{\pi}{3}$. Ta cần so sánh giá trị của z tại $M(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ nằm trong miền D với các giá trị ở biên.

$$z(M)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Trên $x=0, z=2\sin y, 0\le y\le\frac{\pi}{2}$ đạt min bằng 0 tại $y=0$ và max bằng 2 tại $y=\frac{\pi}{2}$.

Trên $x=\frac{\pi}{2}$ có

$$z=1+\sin y+\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=1+\sqrt{2}\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right), 0\le y\le\frac{\pi}{2}$$

z đạt max bằng $1+\sqrt{2}$ khi $y=\frac{\pi}{4}$ và đạt min bằng $1+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=2$ khi $y=0,\frac{\pi}{2}$.

Vì x,y đối xứng trông công thức z nên trên $y=0$ và $y=\frac{\pi}{2}$ thì z đạt max và min như trên $x=0, x=\frac{\pi}{2}$.

Tóm lại $z_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ và $z_{min}=0$ tại $(0,0)$.