

## Práctica: Expresiones Booleanas <sup>1</sup>

1. Realizar las siguientes sustituciones textuales. Sea cuidadoso con la parentización. Remueva los paréntesis innecesarios.

- a)  $p[p := p \vee q]$
- b)  $(p \vee q \Rightarrow q \vee p)[q := p \Rightarrow q]$
- c)  $((s \wedge q \equiv \neg r[r := s \vee q]) \Rightarrow p)[q := p \vee s]$
- d)  $(s[s := q \equiv w] \wedge \text{true}[p := w])[s := w \wedge x]$
- e)  $(s \Rightarrow p \wedge q)[s := p \vee r]$

2. Realizar las siguientes sustituciones textuales simultáneas. Sea cuidadoso con la parentización. Remueva los paréntesis innecesarios.

- a)  $p[p, q := p \vee q, q \wedge p]$
- b)  $(p \vee q \Rightarrow q \vee p)[q, r := p \Rightarrow q, (p \wedge q) \vee (p \Rightarrow x \vee s)]$
- c)  $((s \wedge q \equiv \neg r[r := s \vee q]) \Rightarrow p)[q, s := p \vee s, p \wedge q]$
- d)  $(s[s := q \equiv w] \wedge \text{true}[p := w])[s, w := w \wedge x, s]$
- e)  $(s \Rightarrow p \wedge q)[s, r := p \vee r, p \vee s]$

3. Realizar las siguientes sustituciones textuales. Sea cuidadoso con la parentización. Remueva los paréntesis innecesarios.

- a)  $p[p := p \vee q][q := q \wedge p]$
- b)  $(p \vee q \Rightarrow q \vee p)[q := p \Rightarrow q][r := (p \wedge q) \vee (p \Rightarrow x \vee s)]$
- c)  $((s \wedge q \equiv \neg r[r := s \vee q]) \Rightarrow p)[q := p \vee s][s := p \wedge q]$
- d)  $(s[s := q \equiv w] \wedge \text{true}[p := w])[s := w \wedge x][w := s]$
- e)  $(s \Rightarrow p \wedge q)[s := p \vee r][r := p \vee s][s := t][s := p \equiv v]$



4. Para cada una de las expresiones  $E[z:=X]$  y “hints”  $X = Y$ , escriba la expresión resultante  $E[z:=Y]$ . Puede haber varias respuestas, hallarlas todas.

	$E[z:=X]$	$X=Y$	$E[z:=Y]$	$E$
a)	$true$	$true \equiv p \vee \neg p$		
b)	$false \vee p \equiv p$	$false \equiv \neg p \wedge p$		
c)	$p \vee (q \equiv p \vee q)$	$p \vee q \equiv q \vee p$		
d)	$(p \wedge (q \vee r)) \vee ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$		
e)	$p \Rightarrow (p \vee q \equiv p \wedge q)$	$p \equiv q \equiv p \vee q \equiv p \wedge q$		
f)	$p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$q \Rightarrow r \equiv p \vee q$		
g)	$(p \vee q) \wedge r \equiv p \Rightarrow p \vee q$	$q \wedge r \equiv p \vee q$		
h)	$p \vee (q \wedge r) \Rightarrow p \vee q$	$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge q)$		
i)	$(s \wedge \neg t) \vee (p \Rightarrow \neg t) \Rightarrow \neg t \equiv p \Rightarrow \neg t \vee q$	$p \Rightarrow \neg t \equiv true$		

5. Para cada una de las siguiente expresiones  $E[z:=X]$  y  $E[z:=Y]$ , identifique un “hints”  $X = Y$  que muestre que ellas son iguales e indique la  $E$  original

	$E[z:=X]$	$X=Y$	$E[z:=Y]$	$E$
a)	$(p \vee q \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \vee q)$		$(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge p$	
b)	$((\neg p \vee p) \vee (\neg p \vee q)) \Rightarrow (q \vee \neg p)$		$((\neg p \vee p) \vee (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (q \vee \neg p)$	
c)	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (s \wedge t) \vee \neg r$		$(p \Rightarrow q) \Rightarrow false \vee \neg r$	
d)	$r \equiv \neg s \equiv (true \vee p \Rightarrow q) \wedge (r \equiv \neg s)$		$r \equiv r \equiv \neg s \equiv (true \vee p \Rightarrow q) \wedge (r \equiv \neg s)$	

6. Elimine los paréntesis innecesarios de la siguientes expresiones:

- $((p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge (q \vee r)) \Rightarrow (r \vee (s \wedge t))) \vee \neg s \Leftarrow u \equiv t$
- $(r \vee (s \vee (t \vee \neg q) \Rightarrow s) \equiv u) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (t \equiv \neg t)$
- $((true \equiv (\neg false \Rightarrow false) \wedge \neg true) \Leftarrow false) \vee (true \wedge false)$
- $((p \Rightarrow (q \Leftarrow r)) \vee (s \equiv t)) \vee (t \Rightarrow (\neg t \Rightarrow q) \equiv r) \vee (p \wedge p)$
- $p \Rightarrow ((q \wedge ((r \equiv q) \equiv t)) \vee \neg q) \equiv s \equiv p \vee q \Rightarrow t$

7. Indique las todas las subexpresiones de la siguientes expresiones:

- $p \wedge q \vee r \equiv p \Rightarrow r \vee q \wedge \neg(q \Rightarrow r \equiv s) \equiv a \vee b \Leftarrow s \equiv c$
- $\neg a \wedge \neg b \equiv \neg(a \wedge b \equiv a \equiv b) \equiv c \vee d \Rightarrow e \wedge f \Leftarrow a \wedge b$
- $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \vee e \equiv f \wedge g \equiv h \Leftarrow i \vee j \vee k \vee \neg l \equiv m$
- $p \wedge q \vee r \Rightarrow \neg p \wedge q \vee r \vee s \equiv t \vee u \equiv \neg v \vee w \Leftarrow x \wedge y \wedge z \vee \neg(a \equiv b)$
- $\neg(a \vee b \equiv c \wedge d \Rightarrow \neg(e \Leftarrow f \equiv g)) \wedge r \vee s \equiv t \wedge v \vee \neg(a \equiv \neg b \wedge c \Rightarrow a)$

8. Clasifique las siguientes expresiones entre válidas, satisfacibles, contingencias e insatisfacibles. Justifique su respuesta a través de una tabla de verdad.

- $p \vee \neg q \Rightarrow q \wedge p \wedge \neg(q \wedge p)$
- $\neg(\neg(p \Rightarrow q)) \Rightarrow (p \neq q)$
- $p \vee q \Rightarrow p \vee (q \equiv r) \wedge (p \vee r)$

$$d) p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \equiv \text{true}) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee \neg q)$$

$$e) (p \not\equiv q) \wedge \neg r \Leftarrow \neg p \equiv p \vee (q \wedge \neg r)$$

9. Clasifique las siguientes expresiones entre válidas, satisfacibles, contingencias e insatisfacibles. Justifique su respuesta a través de una tabla de verdad:

$$a) p \vee \neg q \equiv p \vee q \equiv p$$

$$b) p \vee q \equiv \neg p \equiv q \equiv p \wedge q$$

$$c) p \wedge (q \vee p) \equiv \neg q$$

$$d) p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv p \Rightarrow q \Rightarrow p$$

10. Clasifique las expresiones duales de las siguientes expresiones Booleanas en válidas, satisfacibles, contingencias e insatisfacibles. Justifique en base a la clasificación dada para cada expresión dual, qué se puede decir de la expresión original.

$$a) q \Rightarrow \neg p \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$$

$$b) q \vee p \equiv p \vee \neg q \equiv \neg p$$

$$c) p \wedge (p \vee q) \equiv \neg p$$

$$d) (p \vee \neg p) \wedge q \equiv \neg q$$

11. Considere las siguiente expresiones Booleanas:

$$\blacksquare (p \bullet q) * (q \oplus p)$$

$$\blacksquare p \bullet q \equiv p \oplus \neg q \equiv \neg p$$

$$\blacksquare (p \bullet (q \otimes r)) \oplus (q \odot p) * r$$

sustituya los símbolos  $\bullet$ ,  $\oplus$ ,  $\otimes$ ,  $\odot$ ,  $*$  por conectores del lenguaje de las expresiones Booleanas de manera que en cada sustitución cada expresión cumpla una de las siguientes condiciones:

a) La expresión es una tautología.

b) La expresión tiene al menos una valuación que la satisface y una que no.

c) La expresión no tiene valuación alguna que la satisfaga.

d) El negado de la expresión dual es una tautología.

Haga la tabla de la verdad para cada expresión obtenida.

12. Sustituya los símbolos  $\bullet$ ,  $\oplus$ ,  $\odot$  y  $\otimes$  por conectores del lenguaje de las expresiones Booleanas de manera que la expresión resultante sea una tautología. ¿Qué puede decir sobre la validez de la expresión dual? Justifique su respuesta.

$$p \bullet q \oplus \neg(q \otimes \neg p) \bullet \neg t \odot t$$

13. ¿Son las siguientes expresiones Booleanas tautologías, contingencias o expresiones no satisfacibles? Justifique su respuesta.

$$a) ((\neg p \wedge q) \wedge (r \vee s)) \vee (\neg t \wedge x) \Rightarrow (q \wedge \neg p \not\equiv \neg k)$$

$$b) (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \Leftarrow p \vee (\neg t \wedge x) \vee (u \not\equiv v)$$