Práctica tipo parcial 2

Ejercicio 1.

[

$const\ N : \mathbb{Z};$

$const\ X : \mathbb{R};$

$var\ \ S : \mathbb{R}$

$\{\ \boldsymbol{N > 0}\ \}$

$\langle\ \boldsymbol{Sumatoria}\ \ \rangle$

$\left\{ S = \left(\sum i \mid 0 \leq i < N : \frac{x^i}{i!} \right) \right\}$

]

RESPUESTA:

Vamos a evaluar qué derivación de invariante podríamos utilizar:

1. **Eliminación de un predicado:**
   No tendría mucho sentido porque no hay dos proposiciones unidas por una conjunción en la postcondición.

2. **Reemplazo de constantes por variables:**
   Tiene bastante sentido porque la respuesta depende de una variable N; entonces, puedo diseñar un algoritmo que resuelva el problema hasta cierto punto k.

3. **Fortalecimiento de invariantes:**
   Como nuestra postcondición **NO** depende de una función, entonces descartamos la idea.

Así, entonces, escogemos la 2^{da} opción:

[

$const\ N : \mathbb{Z};$

$const\ X : \mathbb{R};$

$var\ S : \mathbb{R}$

$\{\ \boldsymbol{N > 0}\ \}$

$\boldsymbol{k, S := 0, 0};$

$\left\{Inv\!: S = \left(\sum i \mid 0 \le i < k : \frac{x^i}{i!}\right)\right\}$

$\boldsymbol{do}\ (\boldsymbol{k < N}) \rightarrow$

$j, factk := k, 1;$

$\{Inv : factk = (j)! \wedge 0 \le j \le k\ \}$

$\boldsymbol{do}\ (\boldsymbol{j\ > 0}) \rightarrow$

$factk\ := factk\ * j;$

$j := j\ - 1;$

$\boldsymbol{od;}$

$\{\ factk = k!\ \}$

$S := S + \frac{x**k}{factk};$

$k := k + 1;$

$\boldsymbol{od};$

$\left\{\ S = \left(\sum i \mid 0 \le i < N : \frac{x^i}{i!}\right)\right\}$

Ejercicio 2.

Demuestre que la tripleta es correcta

$$\left\{0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right\}$$

$s := s + factorial(k);$

$\{s = (\sum i \mid 0 \leq i \leq k : (\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j))\}$

Sabiendo que

$\boldsymbol{func}\ \ factorial(x{:}\,\mathbb{Z}) \rightarrow\ \mathbb{Z}$

$\{Pre{:}\ x \geq 0\}$

$$\left\{Post{:}\ factorial = \left(\left(\prod i \mid 1 \leq i \leq x : i\right)\right)\right\}$$

RESPUESTA:

$$\left\{0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right\}$$

$s := s + factorial(k);$

$\{s = (\sum i \mid 0 \leq i \leq k : (\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j))\}$

Necesitamos conseguir su procedimiento asociado, con lo cual comenzaremos por modificar el llamado del procedimiento.

$$\left\{0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right\}$$

$Pfactorial(k,\oplus);$

$s := s + \oplus;$

$\{s = (\sum i \mid 0 \leq i \leq k : (\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j))\}$

Defino el procedimiento equivalente:

$Pfactorial(k,\oplus)$

$\boldsymbol{proc}\ \ \boldsymbol{P}factorial(\boldsymbol{entrada}\ x{:}\,\mathbb{Z},\qquad \boldsymbol{salida}\ y{:}\,\mathbb{Z})$

$\{Pre{:}\ x \geq 0\}$

$$\left\{Post: y = \left(\left(\prod i \mid 1 \leq i \leq x : i\right)\right)\right\}$$

Ahora,

$$\left\{0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right\}$$

$Pfactorial(k,\oplus);$

$\{A_1\}$

$s := s + \oplus;$

$\{s = (\sum i \mid 0 \leq i \leq k : (\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j))\}$

Necesito A_1; para hallarla, regla de la precondición más débil:

$$A_1 \equiv \left(s = \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right)[s := s + \oplus]$$

$$\boldsymbol{A_1} \equiv \; s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$$

Entonces,

$$\left\{0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right\}$$

$Pfactorial(k,\oplus);$

$$\left\{s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right\}$$

$s := s + \oplus;$

$\{s = (\sum i \mid 0 \leq i \leq k : (\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j))\}$

Simplemente debo demostrar la tripleta superior:

$$\left\{0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right\}$$

$Pfactorial(k,\oplus);$

$$\left\{s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right\}$$

Caso A2:

1. $Pllam \Rightarrow Pdef[x := E]$

   $0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right) \Rightarrow (x \geq 0)[x := k]$

   $0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right) \Rightarrow k \geq 0$

   $k \geq 0 \wedge k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right) \Rightarrow k \geq 0$

   Supongo el antecedente: $\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2}, \boldsymbol{H_3}$

   $k \geq 0$

   $\equiv \quad \langle \boldsymbol{H_1} \rangle$

   $true$

2. $Pllam[y := A] \wedge Qdef[x, y := E[a := A], a] \Rightarrow Qllam$

$\left(0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)\right)[\oplus := \oplus_0] \wedge \left(y = \left(\left(\prod i \mid 1 \leq i \leq x : i\right)\right)\right)[x, y := k[\oplus := \oplus_0], \oplus] \Rightarrow s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$

$\equiv \quad \langle Sustitución\ Textual \rangle$

$0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right) \wedge \left(y = \left(\left(\prod i \mid 1 \leq i \leq x : i\right)\right)\right)[x, y := k, \oplus] \Rightarrow s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$

$\equiv \quad \langle Sustitución\ Textual \rangle$

$0 \leq k \leq N \wedge s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right) \wedge \oplus = \left(\left(\prod i \mid 1 \leq i \leq k : i\right)\right) \Rightarrow s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$

Suponer el antecedente:

$\boldsymbol{H_0}: 0 \leq k \leq N$

$\boldsymbol{H_1}: s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$

$\boldsymbol{H_2}: \oplus = \left(\left(\prod i \mid 1 \leq i \leq k : i\right)\right)$

$//(true \Rightarrow p) \equiv p.$

$//$Para demostrar $\left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$, demuestro $true \Rightarrow \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$

$true$

$\equiv \quad \langle H_1 \equiv true \rangle$

$s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$

$\equiv \quad \langle p \wedge true \equiv p \rangle$

$s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : (\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j)\right) \wedge true$

$\equiv \quad \langle H_2 \equiv true \rangle$

$s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : (\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j)\right) \wedge \oplus = \left((\prod i \mid 1 \leq i \leq k : i)\right)$

$\equiv \quad \left\langle Cambio\ de\ Dummy\ en\ \left(\prod i \mid 1 \leq i \leq k : i\right), \qquad i := j \right\rangle$

$s = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : (\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j)\right) \wedge \oplus = \left((\prod j \mid 1 \leq j \leq k : j)\right)$

$\Rightarrow \quad \langle Aritmética \rangle$

$s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right) + \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq k : j\right)$

$\equiv \quad \langle\ One\ point\ Rule \quad (\star\, x \mid x = R : E) \equiv E[x := R]\ \rangle$

$s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i < k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right) + \left(\sum i \mid i = k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$

$\equiv \quad \langle\ (\star\, x \mid R : P) \star (\star\, x \mid Q : P) \equiv (\star\, x \mid R \vee Q : P)\ \rangle$

$s + \oplus = \left(\sum i \mid 0 \leq i \leq k : \left(\prod j \mid 1 \leq j \leq i : j\right)\right)$

Ejercicio 3.

Dada una matriz de dimensión $N \times M$ produzca un arreglo llenado con los elementos de la matriz, tomados por fila, es decir, primero se toma los M elementos de la fila 0, a continuación, los M elementos de la fila 1 y así hasta la fila $N - 1$

RESPUESTA

Definición de variables y constantes…

$i, k \coloneqq 0,0;$

$do\ \ (i \neq N)$

$\quad j \coloneqq 0;$

$\quad do(j \coloneqq M)$

$\quad\quad arreglo[k] \coloneqq A[i][j];$

$\quad\quad k \coloneqq k + 1;$

$\quad\quad j \coloneqq j + 1;$

$\quad od$

$\quad i \coloneqq i + 1$

od

Ejercicio 4.

Dada una matriz $A\ N \times N$, determinar el máximo entre las dos diagonales adyacentes a la diagonal principal positiva.

RESPUESTA

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{5} & 1 & \mathbf{4} \\ 6 & \mathbf{7} & 1 \end{pmatrix} \qquad 6 \ < \ 12 \qquad resp = 12 \qquad \begin{pmatrix} 0\times 0 & \mathbf{0\times 1} & \\ \mathbf{1\times 0} & 1\times 1 & \mathbf{1\times 2} \\ & \mathbf{2\times 1} & 2\times 2 \end{pmatrix}$$

Primera diagonal $\quad i + 1 = j$

Segunda diagonal $\quad j + 1 = i$

$const\ A : array[0..N] \times [0..N]\ de\ \mathbb{Z};$

$var\ \ i, j : \mathbb{Z};$

$var\ diag1, diag2 : \mathbb{Z};$

$\{\ \boldsymbol{N > 0}\ \}$

$\boldsymbol{i \coloneqq 0};$

$$\left\{ \begin{array}{l} Inv:\ 0 \le i \le N \wedge 0 \le j \le N \wedge\ diag1 = (\sum k \mid 0 \le k < i \wedge 0 \le q < j \wedge\ k+1 = q : A[k][q]) \\ \qquad\qquad\quad diag2 = (\sum k \mid 0 \le k < i \wedge 0 \le q < j \wedge\ q+1 = k : A[k][q]) \end{array} \right\}$$

$\boldsymbol{do}\ (\boldsymbol{i \neq N}) \rightarrow$

$\quad j \coloneqq 0;$

$\quad \boldsymbol{do}(\boldsymbol{j \neq N}) \rightarrow$

$\qquad \boldsymbol{if}(\boldsymbol{i+1 = j}) \rightarrow$

$\qquad\quad diag1 \coloneqq diag1 + A[i][j];$

$\qquad [\,]\ (j+1 = i) \rightarrow$

$\qquad\quad diag2 \coloneqq\ diag2 + A[i][j];$

$\qquad [\,]\ (i+1 \neq j \wedge\ j+1 \neq 1) \rightarrow$

$\qquad\quad skip;$

$\qquad \boldsymbol{fi}$

$\qquad j \coloneqq j + 1;$

$\quad \boldsymbol{od}$

$\quad i \coloneqq i + 1;$

$\boldsymbol{od}$

$\boldsymbol{if}(\boldsymbol{diag1 \ge diag2}) \rightarrow$

$\quad resp \coloneqq diag1;$

$[\,]\ (\boldsymbol{diag2 > diag1}) \rightarrow$

$\quad resp \coloneqq diag2;$

$\boldsymbol{fi}$

$\{\ resp = \max\big((\sum i \mid 0 \le i,j < N \wedge i+1 = j : A[i][j]), (\sum i \mid 0 \le i,j < N \wedge j+1 = i : A[i][j])\big)\ \}$