Mathematical Programing

Additional Homework 1

2014110374 정상만

HW3_22_2)

스크립트	설명
a)	a) $\frac{dy}{dx} = (1+4x)\sqrt{y}$ 를 변수분리법으로 풀면

a)

```
clear all
x=[0 0.25 0.5 0.75 1];
y=@(t) (((2*t.^2)+t+2).^2)/2^2;
y(x);
A=[x ; y(x)];
fprintf('x              y\n')
fprintf('%1.3f            %1.8f\n',A)
```

실행값

```
x             y
0.000         1.00000000
0.250         1.41015625
0.500         2.25000000
0.750         3.75390625
1.000         6.25000000
```

a) $\frac{dy}{dx} = (1+4x)\sqrt{y}$ 를 변수분리법으로 풀면

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int (1+4x)\,dx$$

$$\Rightarrow\ 2\sqrt{y} = x + 2x^2 + C$$

$$\Rightarrow\ y = \left(\frac{2x^2 + x + 2}{2}\right)^2 \quad \because\ y(0) = 1$$

이를 Matlab으로 계산한 결과는 아래와 같다.

x	y
0	1
0.25	1.41015625
0.5	2.25
0.75	3.75390625
1	6.25

b)

```
%Euler's method in HW3, 22.2
clear all
clc
h=0.25;
x=0:h:1;
N=floor(1/h);
y1(1)=1;
for i=1:N;
    y1(i+1)=y1(i)+sqrt(y1(i))*h;
end
y1
```

실행값

```
y1 =
    1.0000   1.2500   1.5295   1.8387   2.1777
```

b) Euler's method 를 이용하여 주어진 미분방정식의 근사해(approximate solution)를 구한다.
우선 Euler's method는 다음과 같음을 상기하자.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \ \text{ if } \ \frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

$$y(0) = y_0 \ : \text{initial value.}$$

이를 이용하여 초기값을 시작으로
$h = 0.25$ 간격으로 각 x마다 근사해를 구한 값을 스크립트에 실행값으로 나타내었다.

c)

```
%Heun's method in HW3, 22.2
clear all
clc
h=0.25;
x=0:h:1;
N=floor(1/h);
y1(1)=1;
for i=1:N;
    y1(i+1)=y1(i)+sqrt(y1(i))*h;
    y2(i+2)=y1(i+1)+sqrt(y1(i+1))*h;

y_n(i+1)=y1(i)+h*(sqrt(y1(i))+sqrt(y2(i+2)))/2;
end

y_n
```

실행값

```
y_n =
     0    1.2796    1.5593    1.8686    2.2077
```

c) Heun's method 를 이용하여 근사해를 구해보자.
우선,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h,$$

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(t_i, y_i)h \text{ if } \frac{dy}{dt} = f(x,y)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + \overline{y'}h \quad \text{if } y_i' = f(x_i, y_i),$$

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0), \ \overline{y'} = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2}$$

임을 상기하자. 그러면 이는 오일러 방법의 미분항 (dy/dx)를 개선하기 위해 i번째의 x와 $i+1$번째의 x_{i+1} 사이의 기울기의 평균을 사용하는 방법임을 알 수 있다.
이 방법으로 구한 근사해는 스크립트에 실행값으로 나타내었다. 이 방법으로 구한 실행값이 Euler's method 보다 exact solution 에 좀 더 근사함을 보여준다.

d)

```
%Ralston's method in HW3, 22.2
clear all
clc
h=0.25;
x=0:h:1;
N=floor(1/h);
y1(1)=1;
for i=1:N;
    y1(i+1)=y1(i)+sqrt(y1(i))*h;
    y2(i+1)=y1(i)+sqrt(y1(i))*(3/4)*h;

y_r(i+1)=y1(i)+h*((1/3)*sqrt(y1(i))+(2/3)*y2(i+1));
end

y_r
```

실행값

y_r =
0 1.2813 1.5864 1.9261 2.3005

d) 교재의 Ralston's method를 이용한다.
이 또한 Euler's method의 개선된 방법이다.
구한 값은 스크립트에 실행값으로 나타내었다.
여기서 실행값을 관찰하면, Ralston's method가 Heun's method 보다 exact solution 과의 오차가 개선됨을 확인할 수 있다.

e)

(i) 미분방정식 설정

```
function dy=dydxsys(x,y)
dy=(1+4*x)*sqrt(y);
end
```

(ii) rk4sys 내장함수를 이용한 근사해

```
[x y]=rk4sys(@dydxsys,[0 1],1,0.25);
disp('      x         y')
disp('   -----------------')
disp([x' y(:,1)])
```

실행값

```
      x         y
   -----------------
        0     1.0000
   0.2500     1.4101
   0.5000     2.2498
   0.7500     3.7534
   1.0000     6.2491
```

e) runge-kutta method (4th) 를 이용하기 위하여 Matlab에 내장된 rk4sys 함수를 이용하였다.
이 때, 근삿값을 구하기 위해서 미분방정식을 설정할 필요가 있다. 이는 스크립트와 같이 하나의 function으로 지정해주면 해결할 수 있다.
그리고 rk4sys 함수에 미분방정식과 구하는 구간, 초기값, 등간격을 차례대로 입력한 후 해를 구하면 실행값과 같은 결과를 얻을 수 있다.
정해와 근사해의 비교는 아래와 같다.

x	y
0	1
0.25	1.41015625
0.5	2.25
0.75	3.75390625
1	6.25

[Exact solution]

x	y
0	1
0.25	1.410089427
0.5	2.249785567
0.75	3.753410761
1	6.249054423

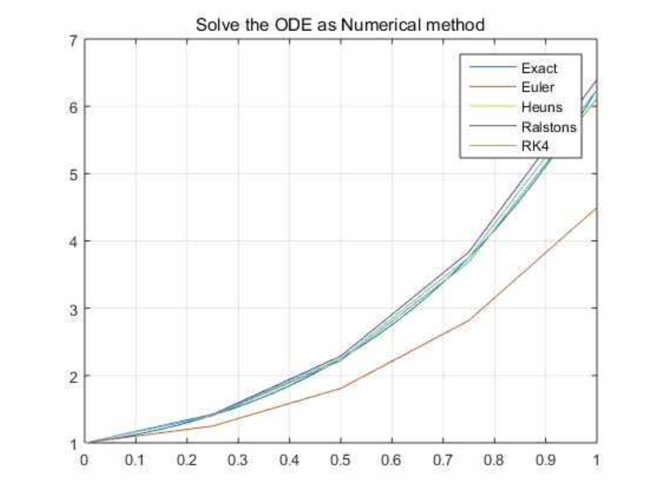
[Approximate solution]

위 결과로써 runge-kutta method (4th) 가 다른 방법들보다 최적근사함을 확인할 수 있다.

*내장함수를 이용)

```
dydx = @(x,y) (1+4*x)*sqrt(y);
h = 0.25;
y = @(x) ((2*(x).^2 + x + 2)/2).^2;

% (a) Exact solution
figure(1)
fplot(y,[0 1])
hold on, grid on
% (b) Euler method
[tp, yp] = eulersys(dydx,[0 1],1, 0.25)
plot(tp,yp)
% (c) Heun's method
[t,y] = Heun(dydx,[0 1],1,h)
plot(t,y)
% (d) Ralston’s method.
[tp,yp] = ralstons(dydx,[0 1],1,h)
plot(tp,yp)
% (e) Runge-Kutta 4th order method
[tp,yp] = rk4sys(dydx,[0 1],1,h)
plot(tp,yp)
title('Solve the ODE as Numerical method')
legend('Exact','Euler',
'Heuns','Ralstons','RK4');
hold off
```



HW3_22_14)

스크립트	설명

a) & b)

(i) 미분방정식 설정

```
function yp = LVE(t,y,a,b,c,d)
yp =
[a*y(1)-b*y(1)*y(2);-c*y(2)+d*y(1)*y(2)];
```

(ii) rk4sys를 이용한 integration

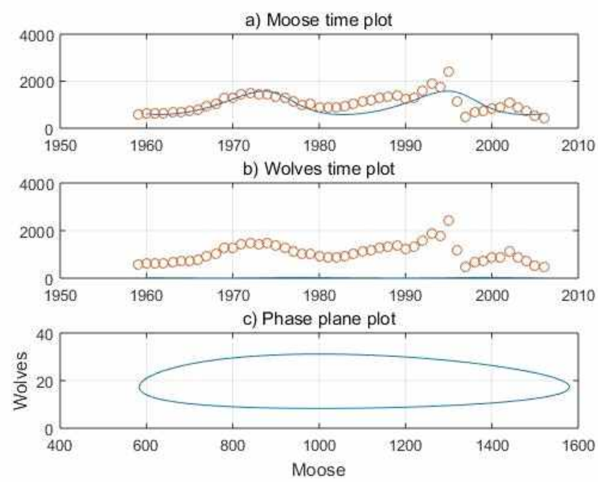
```
t=[1960 2006];
y0=[610 22];
h=0.0625;
a=0.23; b=0.0133; c=0.4; d=0.0004;
[t y]=rk4sys(@LVE,t,y0,h,a,b,c,d);
disp([t' y(:,1) y(:,2)])
td=[1959 1960 1961 1962 1963 1964 1965 1966
1967 1968 1969 1970 1971 1972 1973 1974 1975
1976 1977 1978 1979 1980 1981 1982 1983 1984
1985 1986 1987 1988 1989 1990 1991 1992 1993
1994 1995 1996 1997 1998 1999 2000 2001 2002
2003 2004 2005 2006];
Md=[563 610 628 639 663 707 733 765 912 1042
1268 1295 1439 1493 1435 1467 1355 1282 1143
1001 1028 910 863 872 932 1038 1115 1192
1268 1335 1397 1216 1313 1590 1879 1770 2422
1163 500 699 750 850 900 1100 900 750 540
450];
Wd=[20 22 22 23 20 26 28 26 22 22 17 18 20
23 24 31 41 44 34 40 43 50 30 14 23 24 22 20
16 12 12 15 12 12 13 17 16 22 24 14 25 29 19
17 19 29 30 30];
subplot(3,1,1);plot(t,y(:,1),td,Md,'o')
title('a) Moose time plot'),grid
subplot(3,1,2);plot(t,y(:,2),td,Md,'o')
title('b) Wolves time plot'),grid
subplot(3,1,3);plot(y(:,1),y(:,2))
title('c) Phase plane plot'),grid
xlabel('Moose'),ylabel('Wolves');
```

a) preypredetor 모델을 기반으로 문제에서 주어진 계수들을 입력한 새로운 미분방정식을 설정한다. 그 후에 integration 방법으로 runge-kutta method (4th) 를 선택하여 값을 구한다. 해를 구하는 미분 방정식이 연립미분방정식이므로 Moose 와 Wolves 두 개의 Time Plot Graph로 나뉜다.

b) 마찬가지로 Case study의 preypredetor 모델을 이용한 Phase plane plot을 스크립트와 같이 출력할 수 있다.

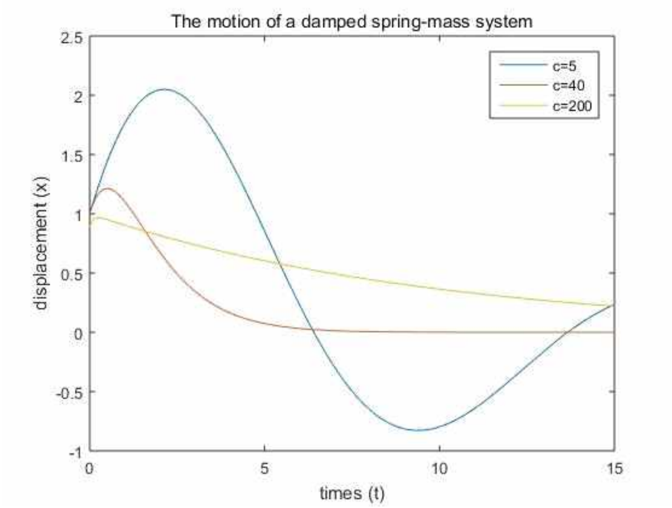
실행값

계산 결과는 생략한다.



HW3_22_15)

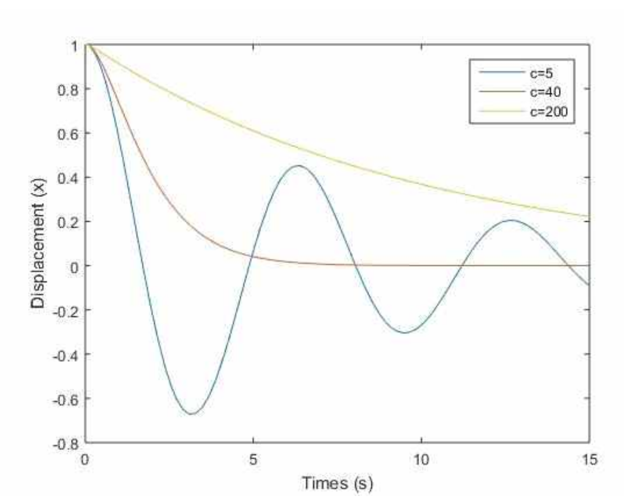
스크립트	설명

`function Y = HW3_22_15(t)`
`Y(:,1) =`
`exp(-0.125*t(:)).*(cos(0.433*t(:))+2.5982*`
`sin(0.433*t(:)));`
`Y(:,2) = exp(-t(:))+2*t(:).*exp(-t(:));`
`Y(:,3)=`
`exp(-0.101*t(:))-0.1112*exp(-9.899*t(:));`
 	
`>>fh=@HW3_22_15;`
`>>fplot(fh,[0 15]);`
`title('The motion of a damped spring-mass system');`
`xlabel('times (t)');`
`ylabel('displacement (x)');`
`legend('c=5','c=40','c=200');`
 	
실행값
계산 결과는 생략한다.

 	
	* 해석적 방법)
	주어진 미분방정식은 다음과 같다.
	$$mx''+cx'+kx=0 \Leftrightarrow x''+\frac{c}{m}x'+\frac{k}{m}x=0$$
	이는 상수계수 이계 동차선형미분방정식이므로,
	다음과 같은 특성방정식의 해를 얻는다.
	$$\lambda_1=\frac{-\frac{c}{m}+\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2-4\frac{k}{m}}}{2}$$
	$$\lambda_2=\frac{-\frac{c}{m}-\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2-4\frac{k}{m}}}{2}$$
	이 때, 각 계수는 문제에서 주어진 상수이므로
	$m=20$, $k=20$ 이고, c 는 다음과 같다.
	$$c=\begin{cases}5 & under\ damped\\ 40 & critically\ damped\\ 200 & over\ damped\end{cases}$$
	판별식 $D=\left(\frac{c}{m}\right)^2-\frac{4k}{m}$ 에 의하면,
	i) $c=5 \Rightarrow D<0$
	ii) $c=40 \Rightarrow D=0$
	iii) $c=200 \Rightarrow D>0$
	이므로, 각 c 에 대하여 일반해 x 는 다음과 같다.
	I) $x=e^{-\frac{c/m}{2}t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$ where
	$\beta=\frac{\sqrt{(k/m)-4(c/m)^2}}{2}$.
	II) $x=C_1e^{-\frac{c/m}{2}t}+C_2te^{-\frac{c/m}{2}t}$
	III) $x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$
	이제 각 상수들을 계산해보면
	I) $x=e^{-0.125t}(C_1\cos(0.433)t+C_2\sin(0.433)t)$
	II) $x=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$
	III) $x=C_1e^{-0.101t}+C_2e^{-9.899t}$
	그리고 주어진 초기값은 $x(0)=1$, $x'(0)=1$ 이므로,
	모두 $C_1=1$이고, C_2를 각각 구하면 최종적으로
	I) $x=e^{-0.125t}(\cos(0.433)t+2.5982\sin(0.433)t)$
	II) $x=e^{-t}+2te^{-t}$
	III) $x=e^{-0.101t}-0.1112e^{-9.899t}$
	을 얻는다. 이제 이를 이용하여 $0\le t\le 15$ 에서의
	미분방정식의 해를 구한 후 그래프로 나타낸다.

```
clear all
clc
%initial conditions
global cm km
k=20; m=20; c(1)=5; c(2)=40; c(3)=200;
km=k/m
tspan=[0 15];
y0=[0 1];
for i=1:3;
    cm=c(i)/m;
dxdtsys=@(t,x)
[-(cm)*x(1)-(km)*x(2);x(1)];
[t x]=ode45(dxdtsys,tspan,y0);
plot(t,x(:,2));
xlabel('Times (s)'); ylabel('Displacement
(x)');
legend('c=5','c=40','c=200');
hold on
end
```

실행값

계산 결과는 생략한다.



*수치적 방법)

$$mx''+cx'+kx=0 \Leftrightarrow x''+\frac{c}{m}x'+\frac{k}{m}x=0$$

이는 이계미분방정식이므로 연립미분방정식으로 변환

$$x_1=x_2,\ x_2=x_1{}' \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx}=x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dx}=-\dfrac{c}{m}x_2-\dfrac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

그러면 각 미분방정식에 Euler‘s method를 적용할 수 있으므로, 두 연립미분방정식에 대한 수치적 방법을 이용하여 해석적 방법보다 손쉽게 해를 구할 수 있다. 여기서 c=5, c=40, c=200으로 각각 구해야 함을 유의.

HW3_23_5)

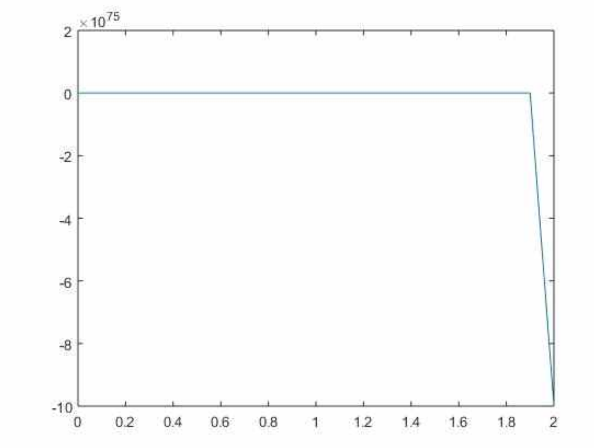
스크립트	설명
(see code below)	(see explanation below)

```
%Euler's method in HW3, 23.5
clear all
clc
h=0.1;
x=0:h:2;
N=floor(1/h);
y(1)=0;
x(1)=0;
for i=1:2*N;

y(i+1)=y(i)+(-100000*y(i)+99999*exp(-x(i)))*h;

y1(i+1)=(y(i+1)+99999*exp(-x(i+1))*h)/(1+100000*h);
end
format long
plot(x,y1)
```

실행값



a) 주어진 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dt} = -100{,}000y + 99{,}999e^{-t}$$

이 때, explicit Euler method (Euler 양해법)을 이용하기 위해 정해와 가장 가깝도록 하는 적절한 step size는 다음과 같이 구한다.

우선, Euler 양해법은

$$y_{i+1} = y_i + (-100{,}000y_i + 99{,}999e^{-t})h$$

y_i 항에 주목하여 보면

$$y_{i+1} = y_i(1-100{,}000h)$$

$|1-100{,}000h| < 1$ 을 만족해야 하므로,

$$\therefore\ h < \frac{2}{100000} = 0.00002$$

b) a)번을 이용하여 implicit Euler method(Euler 음해법)식을 구한다.

우선, Euler 음해법은

$$y_{i+1} = y_i + (-100{,}000y_{i+1} + 99{,}999e^{-t_{i+1}})h$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = \frac{y_i + 99{,}999e^{-t_{i+1}}h}{1+100{,}000h}$$

$t \in [0, 2]$, $h = 0.1$ 일때의 해를 Matlab으로 구한다.
(음해법은 "unconditionally stable" 하다)

HW3_23_8)

스크립트	설명

스크립트

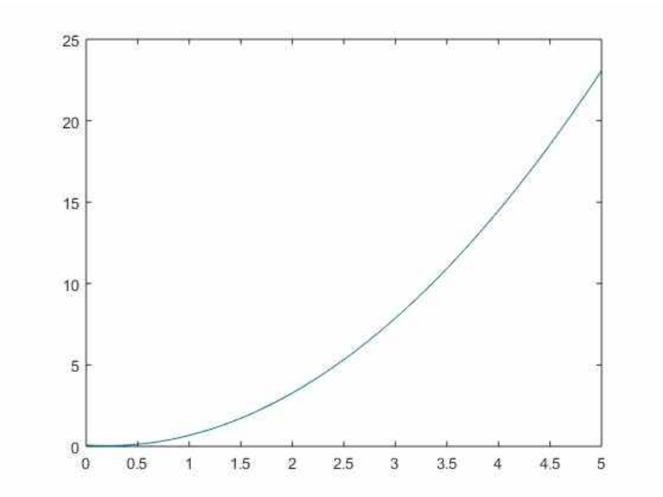
a)

```
t=0:1:5;
y3=@(t) t.^2-(2/5)*t-(2/25)+0.16;
y3(t)
```

실행값

ans =

0.0800 0.6800 3.2800 7.8800 14.4800 23.0800



b) c) d) e)

```
clear all
clc
%ODE
dydt=@(t,y) 5*(y-(t).^2);
%constant
t=0:0.1:5;
t_span=[0 5];
h=0.03125;
y0=0.08;
% a) Exact solution
y1=@(t) t.^2-(2/5)*t-(2/25)+0.16;
figure(5)
plot(t,y1(t))
%Numerical solution
% b) rk4sys
[t y2]=rk4sys(dydt,t_span,y0,h);
```

설명

a) $\dfrac{dy}{dt}=5(y-t^2) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dt}-5y=-5t^2$, 이는

일계선형미분방정식이므로, 일반해는 다음과 같다.

$$y=e^{-5t}\left[\int -5t^2e^{5t}\,dt+C\right],\quad C:\text{ 적분상수}$$

괄호 안의 식을 부분적분하여 우변을 정리하면

$$y=t^2-\frac{2}{5}t-\frac{2}{25}+C$$

초기값이 $y(0)=0.08$로 주어지므로, $C=0.16$.

$$\therefore\ y=t^2-\frac{2}{5}t-\frac{2}{25}+0.16$$

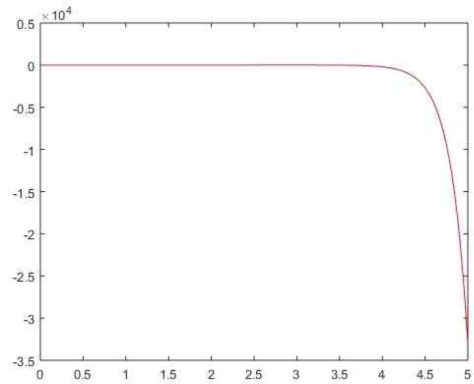
이를 이용하여 $t\in[0,5]$ 에서의 정해를 구한다.

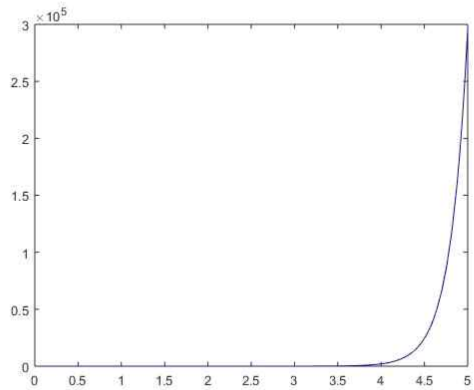
b) ~ e)

문제에서 요구하는 대로 내장함수를 이용하여

주어진 미분방정식의 근사해를 구한다.

그래프는 b)~e) 순으로 아래와 같다.

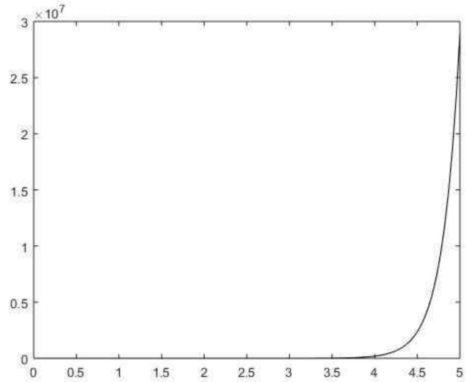


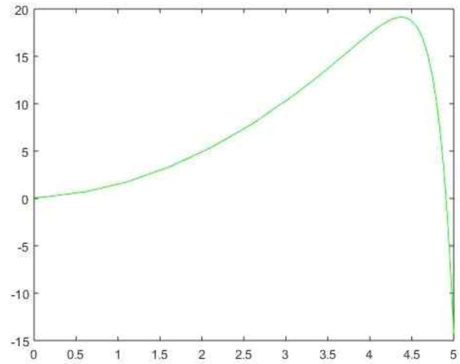


```
figure(1)
plot(t,y2,'r')
% c) ode45
[t,y]=ode45(dydt,t_span,y0);
figure(2)
plot(t,y,'b')
% d) ode23s
[t,y]=ode23s(dydt,t_span,y0);
figure(3)
plot(t,y,'k')
% e) ode23tb
[t,y]=ode23tb(dydt,t_span,y0);
figure(4)
plot(t,y,'g')
```

실행값

계산 결과는 생략한다.





HW3_23_10)

스크립트	설명

```
clear all
clc
%Initial conditions
tspan=[0 20];
theta0_1=[pi/8 0];
theta0_2=[pi/2 0];

%Nonlinear models : theta=pi/8, theta=pi/2
[tn8
thetan8]=ode45(@HW3_23_10_i,tspan,theta0_1);
[tn2
thetan2]=ode45(@HW3_23_10_i,tspan,theta0_2);

%Linear models : theta=pi/8, theta=pi/2
[tl8
thetal8]=ode45(@HW3_23_10_ii,tspan,theta0_1);
[tl2
thetal2]=ode45(@HW3_23_10_ii,tspan,theta0_2);

%Perspective
subplot(2,1,1);plot(tn8,thetan8(:,1),tl8,thetal
8(:,1),'--');
legend('nonlinear','linear');
title('(1) theta=pi/8');
subplot(2,1,2);plot(tn2,thetan2(:,1),tl2,thetal
2(:,1),'--');
legend('nonlinear','linear');
title('(2) theta=pi/2');
```

실행값

계산 결과는 생략한다.

주어진 두 개의 Pendulum equation은 다음과 같다.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0\ ,\ \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

이를 각각 연립미분방정식으로 나타내면

(i)

$$\frac{d\theta_1}{dt}=\theta_2$$

$$\frac{d\theta_2}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\theta_1$$

(ii)

$$\frac{d\theta_1}{dt}=\theta_2$$

$$\frac{d\theta_2}{dt}=-\frac{g}{l}\theta_1$$

이고, 이를 가지고 내장함수 ode45 를 이용하여
미분방정식의 근사해를 구하면 된다.
따라서 문제에서 요구한 그래프는 아래와 같다.