MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

HH OXYZ

BÀI 1 CƠ BẢN VỀ OXYZ

Câu 1 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

A. $(2; -3; 4)$. **B.** $(2; 0; 0)$. **C.** $(1; -2; 4)$. **D.** $(3; 2; 4)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (2; -3; 4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{j} + 2\vec{i} - \vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

A. $(3; 2; -1)$. **B.** $(2; 3; 0)$. **C.** $(3; 2; 0)$. **D.** $(2; 3; -1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\vec{u} = 3\vec{j} + 2\vec{i} - \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (2; 3; -1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{i} - 3\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

A. $(2; 3; -3)$. **B.** $(3; 4; -1)$. **C.** $(5; 0; -3)$. **D.** $(2; 3; -1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\vec{u} = 5\vec{i} - 3\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (5; 0; -3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Tọa độ của biểu thức véc-tơ $2\vec{u} + \vec{v}$ tương ứng là

A. $(4; 4; -5)$. **B.** $(1; -3; 2)$. **C.** $(2; 0; 1)$. **D.** $(2; 1; 0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\begin{cases} \vec{u} = (1; 2; -3) \\ \vec{v} = (2; 0; 1) \end{cases} \Rightarrow 2\vec{u} + \vec{v} = (4; 4; -5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = (3; 1; -2)$ và véc-tơ $\vec{v} = (-1; 0; 3)$. Tọa độ của véc tơ $2\vec{u} + 3\vec{v}$ là

A. $(2; 1; 1)$. **B.** $(3; 2; 5)$. **C.** $(3; -2; 2)$. **D.** $(5; 1; 0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $2\vec{u} + 3\vec{v} = (3; 2; 5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 6 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Gọi véc-tơ $\vec{v}$ là hình chiếu vuông góc của véc-tơ $\vec{u} = (1; 2; 3)$ lên mặt phẳng tọa độ (Oxy). Tọa độ của véc-tơ $\vec{v}$ là

A. $(0; 0; 3)$. **B.** $(1; 0; 3)$. **C.** $(0; 2; 0)$. **D.** $(1; 2; 0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $\overrightarrow{OM} = \vec{u} = (1; 2; 3)$ nên $M(1; 2; 3)$.

Gọi M' hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng tọa độ (Oxy) nên $M'(1; 2; 0)$.

Suy ra $\vec{v} = \overrightarrow{OM'} = (1; 2; 0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 7 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;2)$. Hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ tương ứng là

A. $(0;-1;3)$. **B.** $(3;-1;0)$. **C.** $(3;0;2)$. **D.** $(0;0;2)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình chiếu vuông góc của $M(3;-1;2)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ $M(3;0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 8 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy có tọa độ tương ứng là

A. $(1;0;3)$. **B.** $(0;2;0)$. **C.** $(1;2;0)$. **D.** $(0;0;3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình chiếu vuông góc của $M(1;2;3)$ lên trục Oy có tọa độ $(0;2;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 9 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;1)$ và điểm $B(1;0;-1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{5}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10 (2H3Y1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;0)$ và điểm $B(-1;2;5)$. Toạ độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ tương ứng là

A. $(2;-1;0)$. **B.** $(1;3;-2)$. **C.** $(1;-1;5)$. **D.** $(2;-2;3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11 (2H3B1-1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;4;0)$ và điểm $B(3;-4;0)$. Chu vi của tam giác OAB bằng

A. 12. **B.** 20. **C.** $10+4\sqrt{2}$. **D.** 18.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\begin{cases} OA=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5\\ OB=\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}=5\\ AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=8.\end{cases}$

Suy ra chu vi tam giác OAB bằng $OA+OB+AC=18$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;3), B(2;-2;1), C(2;-3;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

A. $(2;-1;0)$. **B.** $(-1;2;-2)$. **C.** $(1;-1;1)$. **D.** $(1;-2;3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G=\dfrac{-1+2+2}{3}=1\\ y_G=\dfrac{2-2-3}{3}=-1\\ z_G=\dfrac{3+1-1}{3}=1.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{u} = (m; -3; 2)$ và $\overrightarrow{v} = (2; n; -4)$ với m, n là hai số thực. Khi hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cùng phương thì giá trị của $3m + n$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** -3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{m}{2} = \dfrac{-3}{n} = \dfrac{2}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 6 \end{cases}$.

Do đó $3m + n = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 0), B(4; 0; -2), C(m; n; 3)$. Khi ba điểm A, B, C thẳng hàng thì giá trị của $7m + 2n$ bằng

A. -1. **B.** 8. **C.** 2. **D.** -3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -2)$ và $\overrightarrow{AC} = (m = 2; n - 3; 3)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{m-2}{2} = \dfrac{n-3}{-3} = \dfrac{3}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = \dfrac{15}{2} \end{cases}$.

Do đó $7m + 2n = 8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 3)$ và $B(1; 3; 4)$. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ có tọa độ là

A. $\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{-2}{3}; \dfrac{-1}{3}\right)$. **B.** $\left(1; \dfrac{3}{2}; \dfrac{-5}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{-7}{3}\right)$. **D.** $\left(0; \dfrac{7}{3}; \dfrac{11}{3}\right)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + x_M + 2 - 2x_M = 0 \\ 1 - y_M + 6 - 2y_M = 0 \\ 3 - z_M + 8 - 2z_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = \dfrac{7}{3} \\ z_M = \dfrac{11}{3} \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{u} = (1; 2; 0)$ và $\overrightarrow{v} = (-1; 3; 4)$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ bằng

A. 5. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -1 + 6 + 0 = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{u} = (3; m; -1)$ và $\overrightarrow{v} = (m - 1; -2; 2)$ vuông góc với nhau. Giá trị của m bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -2. **D.** 3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{u} = (3; m; -1)$ vuông góc $\overrightarrow{v} = (m - 1; -2; 2)$ khi và chỉ khi $3(m - 1) - 2(m) - 2 = 0$ $\Leftrightarrow m = 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{u} = (2; 1; 2)$ và $\overrightarrow{v} = (1; 0; 2)$. Cosin góc tạo bởi hai vectơ đó bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** 0.

LỜI GIẢI.

Ta có $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\dfrac{2+0+4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+0+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1), B(4;0;1), C(3;1;-2)$. Cosin của $\angle ABC$ bằng

A. $\dfrac{-3}{\sqrt{55}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{33}}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{55}}$.

LỜI GIẢI.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-2;1;0)$ và $\overrightarrow{BC}=(-1;1;-3)$. Do đó

$$\cos(\angle ABC)=\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{2+1+0}{\sqrt{4+1+0}\cdot\sqrt{1+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{55}}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;0;1), B(2;3;0), C(1;1;1)$. Sin của $\angle ABC$ bằng

A. $\sqrt{\dfrac{6}{11}}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{5}{11}}$.

LỜI GIẢI.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(1;-3;1)$ và $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;1)$. Do đó

$$\cos(\angle ABC)=\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{-1+6+1}{\sqrt{1+9+1}\cdot\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{\frac{6}{11}}\Rightarrow\sin(\angle ABC)=\sqrt{\frac{5}{11}}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0), B(0;-1;2), C(2;-1;-1), D(3;3;1)$. Cosin của góc tạo bởi của hai đường thẳng AB, CD bằng

A. $\sqrt{\dfrac{1}{7}}$. **B.** $-\sqrt{\dfrac{1}{7}}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{7}{9}}$.

LỜI GIẢI.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)$ và $\overrightarrow{CD}=(1;4;2)$. Do đó

$$\cos(AB,CD)=\left|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\right|=\left|\frac{-2-8+4}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{1+16+4}}\right|=\sqrt{\frac{1}{7}}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecơ $\overrightarrow{u}=(2;-1;3)$ và $\overrightarrow{v}=(2;2;1)$. Tích có hướng của hai vectơ đã cho bằng

A. $(7;-4;-6)$. **B.** $(-7;4;6)$. **C.** $(2;-3;1)$. **D.** $(5;0;0)$.

LỜI GIẢI.

Ta có $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=(-7;4;6)$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$. Gọi $\overrightarrow{a}$ là tích có hướng của hai vectơ đã cho. Khẳng định nào sau đây là sai ?

A. $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{u}$. **B.** $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{v}$. **C.** $\overrightarrow{a}=-[\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}]$. **D.** $\overrightarrow{a}=[\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}]$.

LỜI GIẢI.

Chọn đáp án D □

Câu 24 (2H3B2-1). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ thoả mãn $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{0}$. Nhận xét nào dưới đây chắc chắn **sai**?

A. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. **B.** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

C. $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| < |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$. **D.** $\overrightarrow{u} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{v}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Với $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ hoặc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ hoặc $\overrightarrow{u} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{v}$ thì $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{0}$ nên khẳng định chắc chắn **sai** là $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| < |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$.

Ta có thể chỉ ra ví dụ bằng cách lấy $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = (1; 1; 1)$ thì $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{0}$ nhưng

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = 3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|.$$

Chọn đáp án C □

Câu 25 (2H3B2-2). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 1)$, $B(4; -2; 0)$ và $C(3; -2; -2)$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A. $(2; 3; -1)$. **B.** $(3; 0; 1)$. **C.** $(-1; 2; -3)$. **D.** $(4; 2; -3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; -1; -3)$ nên $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2; 3; -1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Chọn đáp án A □

Câu 26 (2H3B2-1). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; -2)$, $B(0; 1; 2)$ và $C(4; -1; 0)$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $2\sqrt{59}$. **B.** $\sqrt{59}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{59}}{2}$. **D.** $4\sqrt{59}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (3; -1; 2)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (6; 14; -2)$.

Do đó diện tích tam giác ABC bằng $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{6^2 + 14^2 + (-2)^2} = \sqrt{59}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27 (2H3B2-1). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 0; 2)$, $B(0; 3; 2)$ và $C(1; 0; -2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{10 + \sqrt{26}}{5}$. **C.** $\dfrac{12 - \sqrt{26}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{481}}{10 + \sqrt{26}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; 0)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; -4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-12; -16; 9)$.

Do đó diện tích tam giác ABC bằng

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-16)^2 + 9^2} = \frac{\sqrt{481}}{2}.$$

Mặt khác ta có $AB = 5$, $BC = \sqrt{26}$ và $CA = 5$ nên bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

$$r = \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{\sqrt{481}}{10 + \sqrt{26}}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 28 (2H3B2-1). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 1; 2)$ và $C(-1; 3; 1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-2; 1; 1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3; -5; -1)$.

Do đó diện tích tam giác ABC bằng

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Mặt khác ta có $AB = \sqrt{6}$, $BC = \sqrt{14}$ và $CA = \sqrt{6}$ nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S_{ABC}} = \frac{6\sqrt{14}}{2\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 29 (2H3B2-1). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 3)$ và $C(4; -1; 0)$. Tổng hoành độ và tung độ của trực tâm tam giác ABC bằng

A. $-\frac{7}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $-\frac{5}{2}$.

✍ LỜI GIẢI.

Gọi $H(a; b; c)$ là trực tâm của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 3)$; $\overrightarrow{AC} = (2; -1; 0)$, $\overrightarrow{BH} = (a; b-1; c-3)$ và $\overrightarrow{CH} = (a-4; b+1; c)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (3; 6; 0)$.

Do H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(a-4) + b + 1 + 3c = 0 \\ 2a - (b-1) = 0 \\ 3a + 6(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

Vậy tổng hoành độ và tung độ của trực tâm tam giác ABC bằng $0 + 1 = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 30 (2H3B2-1). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(3; 1; -2)$, $B(1; 0; -1)$, C và $D(0; 2; -3)$ tạo thành một hình bình hành. Diện tích hình bình hành này bằng

A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 1)$ và $\overrightarrow{AD} = (-3; 1; -1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (0; -5; -5)$.

Do đó diện tích hình bình hành $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 31 (2H3K2-1). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 1; -1)$, $B(1; 2; -2)$, $C(3; 1; 1)$ và $D(5; 3; 7)$ tạo thành một tứ giác lồi. Diện tích của tứ giác này bằng

A. $3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{7\sqrt{6}}{2}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;0;2)$ và $\overrightarrow{AD}=(3;2;8)$.
Khi đó

$$\begin{cases} \cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\dfrac{-3}{\sqrt{15}}\Rightarrow\widehat{BAC}\approx 140{,}76^\circ \\ \cos\widehat{BAD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{AB\cdot AD}=\dfrac{-9}{\sqrt{231}}\Rightarrow\widehat{BAD}\approx 126{,}3^\circ \\ \cos\widehat{CAD}=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}}{AC\cdot AD}=\dfrac{19}{\sqrt{385}}\Rightarrow\widehat{CAD}\approx 14{,}46^\circ. \end{cases}$$

Do đó $\widehat{BAD}+\widehat{CAD}=\widehat{BAC}$, suy ra tia AD nằm giữa hai tia AB và AC.
Từ đó ta có

$$S_{ABCD}=S_{ACD}+S_{ABD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|+\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

Do $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(10;5;-5)$ và $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=(-4;-2;2)$ nên

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+5^2+(-5)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+2^2}=\frac{7\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 32 (2H3K2-1). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(0;0;4)$, $B(2;1;0)$, $C(4;-1;2)$ và $D(1;-2;7)$ tạo thành một tứ giác lồi. Diện tích của tứ giác này bằng

A. $6\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{13\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{11\sqrt{6}}{2}$. **D.** $9\sqrt{6}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-1;-2)$ và $\overrightarrow{AD}=(1;-2;3)$.
Khi đó

$$\begin{cases} \cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\dfrac{15}{21}\Rightarrow\widehat{BAC}\approx 44{,}4^\circ \\ \cos\widehat{BAD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{AB\cdot AD}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{7}\Rightarrow\widehat{BAD}\approx 134{,}4^\circ \\ \cos\widehat{CAD}=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}}{AC\cdot AD}=0\Rightarrow\widehat{CAD}=90^\circ. \end{cases}$$

Do đó $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}=\widehat{BAD}$, suy ra tia AC nằm giữa hai tia AB và AD.
Từ đó ta có

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|+\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

Do $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-12;-6)$ và $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=(-7;-14;-7)$ nên

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-12)^2+(-6)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2+(-14)^2+(-7)^2}=\frac{13\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 33 (2H3K1-4). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\overrightarrow{u}=(m;n;1)$ và $\overrightarrow{v}=(4-m;3-n;2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$ bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** 5. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{34}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(4;3;3)$ nên

$$T=|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\geq|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=\sqrt{4^2+3^2+3^2}=\sqrt{34}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = \dfrac{4}{3}$ và $n = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34 (2H3K1-4). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\overrightarrow{u} = (m; n; 2)$ và $\overrightarrow{v} = (4-m; n-2; -2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 6. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 8.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét $\overrightarrow{v'} = (4-m; 2-n; 2)$ thì $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{v'}|$ và $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v'} = (4; 2; 4)$ nên

$$T = |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v'}| \geq |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v'}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 2$ và $n = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35 (2H3G1-4). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 2; -1)$, $C(2; 1; 1)$ và $D(-2; -1; -5)$ và điểm M thay đổi trong không gian. Giá trị nhỏ nhất của $T = MA + MB + MC + MD$ là

A. $\sqrt{26} + \sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{6} + 2\sqrt{14}$. **C.** $2\sqrt{14} + \sqrt{62}$. **D.** $4 + 2\sqrt{7}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $T = MA + MB + MC + MD \geq AB + CD = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{14}$.

Dấu bằng xảy ra khi $M\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 1; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(0; 3; 1)$, $D(3; 0; 0)$. Thể tích hình tứ diện $ABCD$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$\vec{AB} = (-4; 1; 0); \vec{AC} = (-2; 2; 0) \Rightarrow [\vec{AB}; \vec{AC}] = (0; 0; -6)$,

$\vec{AD} = (1; -1; -1) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 6$.

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot \left|[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}\right| = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -2; 0)$, $B(3; 0; 2)$, $C(-1; 1; 2)$, $D(-2; 1; 3)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{11}{\sqrt{17}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng AB đi qua $A(2; -2; 0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{AB} = (1; 2; 2)$;

Đường thẳng CD đi qua $C(-1; 1; 2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{CD} = (-1; 0; 1)$;

Ta có $\vec{AC} = (-3; 3; 2)$ và $[\vec{AB}, \vec{CD}] = (2; -3; 2) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{CD}] \cdot \vec{AC} = -11$.

Vậy $\mathrm{d}(AB, CD) = \dfrac{\left|[\vec{AB}, \vec{CD}] \cdot \vec{AC}\right|}{\left|[\vec{AB}, \vec{CD}]\right|} = \dfrac{11}{\sqrt{17}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 2; 0)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 0; 3)$, $D(-1; 2; 1)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\dfrac{13}{\sqrt{83}}$. **B.** $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{19}{\sqrt{89}}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{19}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\vec{BC} = (2; 1; 2); \vec{BD} = (-1; 3; 0) \Rightarrow [\vec{BC}, \vec{BD}] = (-6; -2; 7)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua $B(0; -1; 1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{BC}, \vec{BD}] = (-6; -2; 7)$;

Vậy $(BCD)\colon -6(x-0) - 2(y+1) + 7(z-1) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - 7z + 9 = 0$.

Khi đó $\mathrm{d}(A, (BCD)) = \dfrac{|6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 7 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 7^2}} = \dfrac{19}{\sqrt{89}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -1; 1)$, $B(1; -2; 2)$, $C(1; 2; -3)$, $D(3; 0; 1)$. Hãy xác định cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (BCD) và (ABC)?

A. $\dfrac{4}{\sqrt{21}}$. **B.** $\dfrac{22}{5\sqrt{21}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{26}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$\vec{BC} = (0; 4; -5); \vec{BD} = (2; 2; -1) \Rightarrow [\vec{BC}, \vec{BD}] = (6; -10; -8)$.

$\vec{AB} = (-1; -1; 1); \vec{AC} = (-1; 3; -4) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (1; -5; -4)$.

Mặt phẳng (BCD) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\vec{BC}, \vec{BD}] = (6; -10; -8)$;

Mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (1; -5; -4)$.

Vậy $\cos((BCD); (ABC)) = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{22}{5\sqrt{21}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm có tọa độ là $A(1; -1; 0)$, $B(3; 0; 1)$, $C(4; 1; 1)$, $D(3; -2; -2)$, $E(-1; -2; -1)$. Số mặt phẳng tạo thành từ 5 điểm này tương ứng là

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$\vec{AB} = (2; 1; 1); \vec{AC} = (3; 2; 1) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-1; 1; 1)$.

Mặt phẳng $(ABC)\colon x - y - z - 2 = 0$.

Vậy $D \notin (ABC)$ và $E \in (ABC)$.

Cứ hai điểm thuộc $\{A, B, C, E\}$ và điểm D, ta có một mặt phẳng, vậy có $\mathrm{C}_4^2 + 1 = 7$ mặt phẳng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác $A(0; 0; 3)$, $B(2; -1; 0)$, $C(3; 2; 4)$, $D(1; 3; 5)$, $E(4; 2; 1)$. Đỉnh của hình chóp tương ứng là

A. điểm C. **B.** điểm A. **C.** điểm B. **D.** điểm D.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$\vec{AB} = (2; -1; -3); \vec{AD} = (1; 3; 2) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AD}] = (7; -7; 7)$.

$\vec{AE} = (4; 2; -2) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AE} = 0$, suy ra A, B, C, D đồng phẳng.

Vậy đỉnh của hình chóp tương ứng là điểm C.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm tạo thành một hình chóp tứ giác có tọa độ là $A(3; -1; 1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(1; 2; 2)$, $D(4; -2; 0)$, $E(2; 3; -1)$. Thể tích hình chóp bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$\vec{AC} = (-2; 3; 1); \vec{AD} = (1; -1; -1) \Rightarrow [\vec{AC}, \vec{AD}] = (-2; -1; -1)$.

$\vec{AE} = (-1; 4; -2) \Rightarrow [\vec{AC}, \vec{AD}] \cdot \vec{AE} = 0$, suy ra A, C, D, E đồng phẳng.
Đỉnh của hình chóp là điểm B.

$(ACD)\colon 2x + y + z - 6 = 0 \Rightarrow h = BH = \mathrm{d}(B, (ACD)) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta lại có $[\vec{AC}, \vec{AE}] = (-10; -5; -5)$.

Nên $S_{ACDE} = S_{ACD} + S_{ACE} = \dfrac{1}{2}\left|[\vec{AC}, \vec{AD}]\right| + \dfrac{1}{2}\left|[\vec{AC}, \vec{AE}]\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{5\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$.

Vậy $V_{B.ACDE} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot 3\sqrt{6} = 2$.

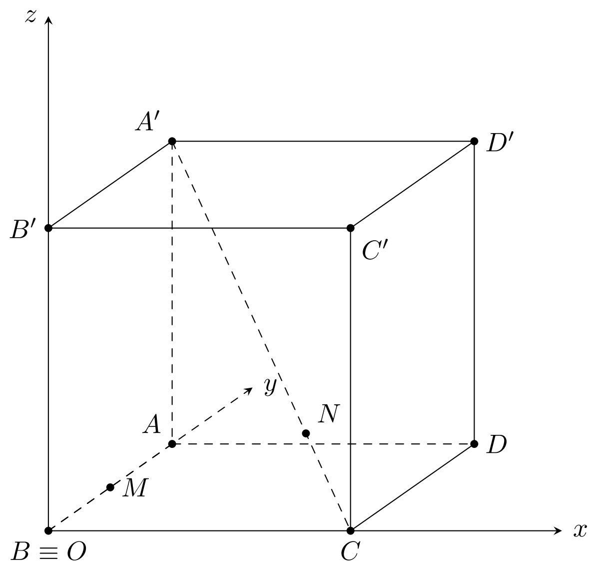
Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm nằm trên cạnh $A'C$ sao cho $NA' = 3NC$. Hãy xác định cosin góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng $(MA'C')$ và $(NC'D)$?

A. $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $B \equiv O$, C thuộc tia Ox, A thuộc tia Oy, B' thuộc tia Oz và chọn $a = 1$, ta có
$B(0;0;0)$; $C(1;0;0)$; $A(0;1;0)$; $B'(0;0;1)$; $D(1;1;0)$; $A'(0;1;1)$; $C'(1;0;1)$; $D'(1;1;1)$; $M\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$.



Vì N là điểm nằm trên cạnh $A'C$ sao cho $NA' = 3NC$ nên $\vec{A'C} = 4\vec{NC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4 - 4x \\ -1 = -4y \\ -1 = -4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \\ z = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow N\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right).$$

Khi đó:

$\vec{MA'} = \left(0; \dfrac{1}{2}; 1\right); \vec{A'C'} = (1; -1; 0) \Rightarrow \vec{n}_1 = [\vec{MA'}, \vec{A'C'}] = \left(1; 1; -\dfrac{1}{2}\right)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(MA'C')$.

$\vec{NC'} = \left(\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}\right); \vec{C'D} = (0; 1; -1) \Rightarrow \vec{n}_2 = [\vec{NC'}, \vec{C'D}] = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(NC'D)$.

Vậy $\cos\left((MA'C'), (NC'D)\right) = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Chọn đáp án B □

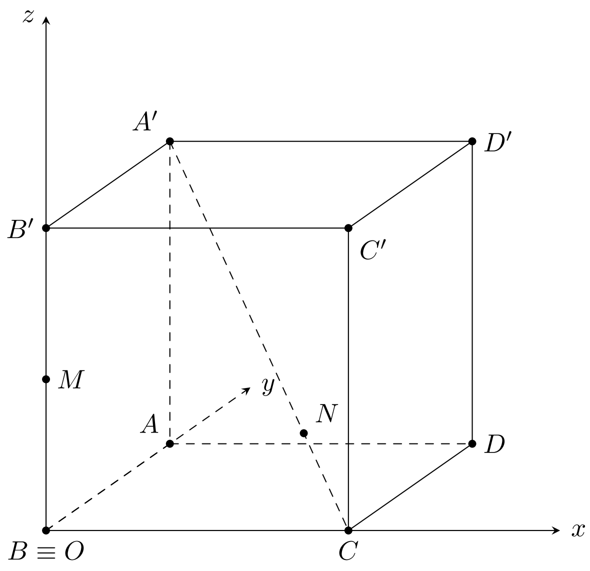
Câu 44. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của BB' và N là điểm nằm trên cạnh $A'C$ sao cho $NA' = 3NC$. Hãy xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AD'?

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{7a\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{8}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì $AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot AA' = 2a \Rightarrow AB = 2a$; $AD = a$; $AA' = a$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $B \equiv O$, C thuộc tia Ox, A thuộc tia Oy, B' thuộc tia Oz và chọn $a = 1$, ta có
$B(0;0;0)$; $C(1;0;0)$; $A(0;2;0)$; $B'(0;0;1)$; $D(1;2;0)$; $A'(0;2;1)$; $C'(1;0;1)$; $D'(1;2;1)$; $M\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$.
Vì N là điểm nằm trên cạnh $A'C$ sao cho $NA' = 3NC$ nên $\vec{A'C} = 4\vec{NC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4 - 4x \\ -2 = -4y \\ -1 = -4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow N\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right).$$



Khi đó:

Đường thẳng MN đi qua $M\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{MN} = \left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$.
Đường thẳng AD' đi qua $A(0;2;0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{AD'} = (1;0;1)$ và $\vec{MA} = \left(0;2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy $\mathrm{d}\left(MN, AD'\right) = \dfrac{\left|[\vec{MN}, \vec{AD'}] \cdot \vec{MA}\right|}{\left|[\vec{MN}, \vec{AD'}]\right|} = \dfrac{7\sqrt{6}}{12}$.

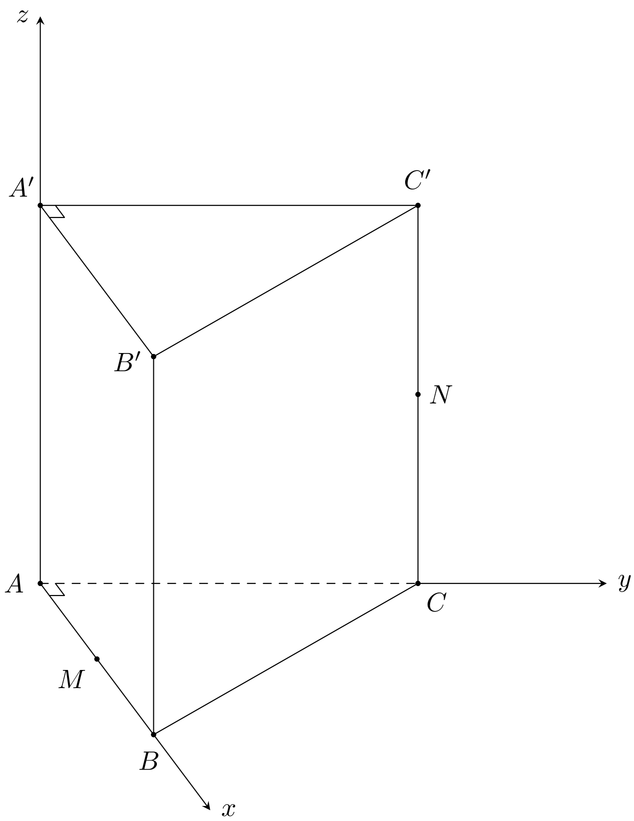
Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A và có $AA' = AB$, $AC = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CC'. Biết giá trị cosin góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(A'MN)$ và (ABC) bằng $\dfrac{2}{5}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a bằng

A. $\dfrac{5a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{5a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

LỜI GIẢI.

Đặt $AB = x$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, A' thuộc tia Oz và chọn $a = 1$, ta có
$A(0;0;0)$; $B(x;0;0)$; $C(0;1;0)$; $A'(0;0;x)$; $B'(x;0;x)$; $C'(0;1;x)$; $M\left(\dfrac{x}{2};0;0\right)$; $N\left(0;1;\dfrac{x}{2}\right)$.
Khi đó:
$\vec{A'M} = \left(\dfrac{x}{2};0;-x\right)$;
$\vec{A'N} = \left(0;1;-\dfrac{x}{2}\right)$.
Mặt phẳng $(A'MN)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\vec{A'M}, \vec{A'N}] = \left(x;\dfrac{x^2}{4};-\dfrac{x}{2}\right)$.
$\vec{AB} = (x;0;0)$;
$\vec{AC} = (0;1;0)$.
Mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (0;0;x)$.
Theo giả thuyết, ta có
$\cos((A'MN),(ABC)) = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{2}{5}$



$$\Leftrightarrow \dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}x^2\right|}{\sqrt{\dfrac{5}{4}x^2 + \dfrac{x^4}{16}} \cdot \sqrt{x^2}} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{25}{4}x^4 = 4x^2\left(\dfrac{5}{4}x^2 + \dfrac{1}{16}x^4\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{5}.$$

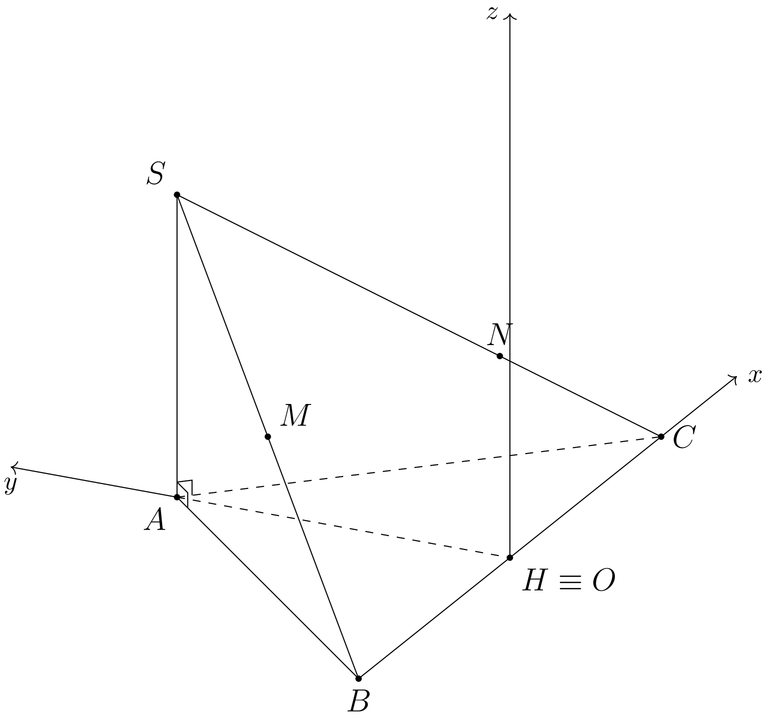
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 1 \cdot \sqrt{5} = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB và điểm N nằm trên cạnh SC sao cho $\vec{NS} + 2\vec{NC} = \vec{0}$. Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là φ và có $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

✍ LỜI GIẢI.



Gọi H là trung điểm BC, $AS = 2x$, cho $a = 2$ và chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $H \equiv O$, A thuộc tia Oy, C thuộc tia Ox, $Oz \parallel AS$, ta có

$A\left(0;\sqrt{3};0\right)$; $B(-1;0;0)$; $C(1;0;0)$; $S\left(0;\sqrt{3};2x\right)$; $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};x\right)$; và

$$\vec{NS}+2\vec{NC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_N+2-2x_N=0\\ \sqrt{3}-y_N-2y_N=0\\ 2x-z_N-2z_N=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\dfrac{2}{3}\\ y_N=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ z_N=\dfrac{2x}{3}\end{cases}\Leftrightarrow N\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{2x}{3}\right).$$

$\vec{AB}=\left(-1;-\sqrt{3};0\right)$;

$\vec{AC}=\left(1;-\sqrt{3};0\right)$.

Mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=[\vec{AB},\vec{AC}]=\left(0;0;2\sqrt{3}\right)$.

$\vec{AM}=\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2};x\right)$;

$\vec{AN}=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{2x}{3}\right)$.

Mặt phẳng (AMN) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=[\vec{AM},\vec{AN}]=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x;x;\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Theo giả thuyết, ta có

$$\cos((ABC),(AMN))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{|4|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{4}{3}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}.$$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}$.

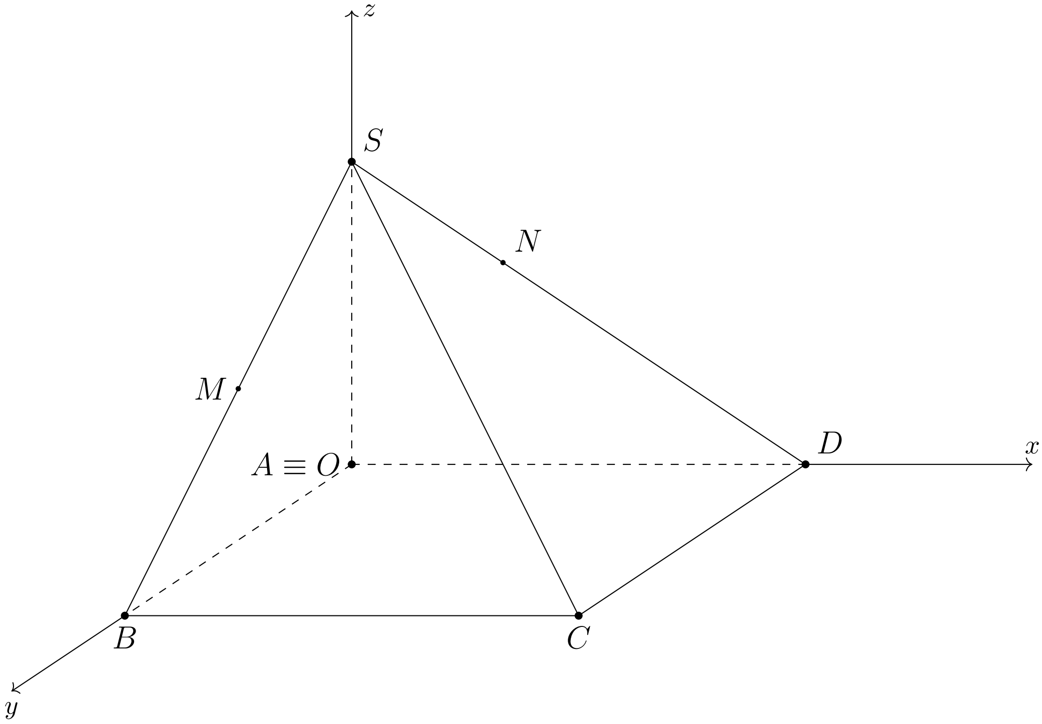
Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = AB = 2AD$. Gọi M là trung điểm của SB và N nằm trên cạnh SD

sao cho $2NS = ND$. Hãy xác định cosin của góc tạo bởi SC và mặt phẳng (CMN)?

A. $\dfrac{\sqrt{318}}{18}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{18}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{6}}{18}$.

LỜI GIẢI.



Gọi $AD = x \Rightarrow SA = AB = 2x$ và chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, D thuộc tia Ox, B thuộc tia Oy, S thuộc tia Oz, ta có

$A(0;0;0)$; $B(0;2x;0)$; $C(x;2x;0)$; $D(x;0;0)$; $S(0;0;2x)$; $M(0;x;x)$; và

$$\vec{SD} = 3\vec{SN} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x_N \\ 0 = 3y_N \\ -2x = 3z_N - 6x \end{cases} \Leftrightarrow N\left(\frac{x}{3}; 0; \frac{4x}{3}\right).$$

$\vec{CM} = (-x; -x; x)$ cùng phương với $\vec{a} = (1; 1; -1)$;

$\vec{MN} = \left(\dfrac{x}{3}; -x; \dfrac{x}{3}\right)$ cùng phương với $\vec{b} = (1; -3; 1)$.

Mặt phẳng (CMN) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (-2; -2; -4)$.

Đường thẳng SC có véc-tơ chỉ phương $\vec{SC} = (x; 2x; -2x)$ cùng phương với $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Ta có $\sin\left(\widehat{SC, (CMN)}\right) = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \dfrac{2}{6\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{18}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{SC, (CMN)}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\widehat{SC, (CMN)}\right)} = \dfrac{\sqrt{318}}{18}$.

Chọn đáp án A □

BÀI 2 MẶT PHẲNG CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO - P1

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oyz) là

A. $y + z = 0$. **B.** $x - 1 = 0$. **C.** $y = 0$. **D.** $x = 0$.

LỜI GIẢI.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oyz) là $x = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là $(P)\colon x + 3y - 2z - 2022 = 0$. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) tương ứng là

A. $\vec{n} = (2; 1; 3)$. **B.** $\vec{n} = (1; 3; -2)$. **C.** $\vec{n} = (-2; 0; 2022)$. **D.** $\vec{n} = (4; 1; 1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon x + 3y - 2z - 2022 = 0$ là $\vec{n} = (1; 3; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2; 2)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 4)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) tương ứng là

A. $(P)\colon 3x + 2y + 2z - 7 = 0$. **B.** $(P)\colon 3x + 2y + 2z - 10 = 0$.

C. $(P)\colon 3x - 2y + 2z - 18 = 0$. **D.** $(P)\colon 3x + 2y + 2z - 16 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2; 1; 4)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2; 2)$ là

$$3(x - 2) + 2(y - 1) + 2(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 2z - 16 = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 3; 6)$ và đi qua điểm $A(1; -2; 0)$. Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (P) tương ứng là

A. $(P)\colon 2x + 3y + 6z + 4 = 0$. **B.** $(P)\colon \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = 1$.

C. $(P)\colon \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{-4/3} + \dfrac{z}{-2/3} = 1$. **D.** $(P)\colon \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = -4$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 2; 0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 3; 6)$ là

$$2(x - 1) + 3(y + 2) + 6(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z + 4 = 0.$$

Chia hai vế cho -4 ta được phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (P) tương ứng là

$$(P)\colon \frac{x}{-2} + \frac{y}{-4/3} + \frac{z}{-2/3} = 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - 2z - 7 = 0$ và điểm $A(1; 0; 2)$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) tương ứng là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Khoảng cách từ $A(1; 0; 2)$ đến mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - 2z - 7 = 0$ là

$$\mathrm{d}(A, (P)) = \frac{]2 - 0 - 4 - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - y - z + 1 = 0$. Cặp véc-tơ nào dưới đây là cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (P) ?

A. $(1; 2; -1), (1; 0; 1)$. **B.** $(1; 2; -1), (-2; -4; 2)$.

C. $(1;2;-1),(2;-1;2)$. **D.** $(0;0;0),(1;0;1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng $(P)\colon x-y-z+1=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;-1)$.
Tích có hướng của hai vec-tơ $\vec{a}=(1;2;-1)$, $\vec{b}=(1;0;1)$ là $[\vec{a},\vec{b}]=(2;-2;-2)=2\vec{n}$.
Suy ra $(1;2;-1),(1;0;1)$ là cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (P). □

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+1=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua gốc O và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $2x-y-z=0$. **B.** $x-2y-z=0$.
C. $x-2y-2z=0$. **D.** $2x-y-z+3=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+1=0$.
Suy ra $(Q)\colon 2x-y-z+d=0$ với $d\neq 1$.
Ta có $O(0;0;0)\in(Q)\Rightarrow d=0$.
Vậy $(Q)\colon 2x-y-z=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-3z+6=0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (α)?

A. $(0;0;1)$. **B.** $(1;1;3)$. **C.** $(2;3;1)$. **D.** $(-1;2;-1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-3z+6=0$, ta có $1+2\cdot 1-3\cdot 3+6=0$.
Suy ra $(1;1;3)\in(\alpha)$.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;0)$, $B(-1;2;1)$, $C(2;0;-1)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC) tương ứng là

A. $x-y+1=0$. **B.** $x+y-1=0$. **C.** $y-z-1=0$. **D.** $2x-1=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-1;-1)$.
Mặt phẳng (ABC) có mợt véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(0;-3;3)=-3(0;1;-1)$.
Phương trình mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ và qua $A(2;1;0)$ là

$$0(x-2)+1(y-1)-1(z-0)=0\Leftrightarrow y-z-1=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+z-6=0$. Phát biểu đúng là

A. Mặt phẳng (P) song song với trục Oy.
B. Mặt phẳng (P) đi qua trục Oy.
C. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Oxz).
D. Mặt phẳng (P) vuông góc với trục Oy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trục Oy có véc-tơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$.
Mặt phẳng $(P)\colon 3x+z-6=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;0;1)$.
Ta có $\vec{j}\cdot\vec{n}=0$ và điểm $O(0;0;0)\notin(P)$.
Suy ra mặt phẳng (P) song song với trục Oy.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;-2)$ và đi qua điểm $A(0;-1;3)$. Biết rằng (P) cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P. Thể tích của tứ diện $OMNP$ tương ứng bằng:

A. 128. **B.** $\dfrac{64}{3}$. **C.** 32. **D.** $12\sqrt{3}$.

✍ LỜI GIẢI.

Từ giả thiết suy ra phương trình mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z = -8 \Leftrightarrow \dfrac{x}{-8} + \dfrac{y}{-4} + \dfrac{z}{4} = 1$.

Suy ra mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại $M = (-8; 0; 0)$; $N(0; -4; 0)$, $P(0; 0; 4)$.

Vì tứ diện $OMNP$ là tứ diện vuông tại O nên

$$V_{O.MNP} = \frac{1}{6}OM \cdot ON \cdot OP = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{64}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 2z - 1 = 0$ và điểm $A(1; 0; -1)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và đi qua A, mặt phẳng (Q) cắt ba trục tọa độ lần lượt tại M, N, P. Thể tích tứ diện $OMNP$ bằng:

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

✍ LỜI GIẢI.

Từ giả thiết mặt phẳng (Q) song song với (P) và đi qua A ta có

$$(Q)\colon x - 2y + 2z = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{-\frac{1}{2}} = 1.$$

Mặt khác mặt phẳng (Q) cắt ba trục tọa độ lần lượt tại $M(-1; 0; 0)$, $N(0; \dfrac{1}{2}; 0)$, $P(0; 0; -\dfrac{1}{2})$.

Vì tứ diện $OMNP$ là tứ diện vuông tại O nên

$$V_{O.MNP} = \frac{1}{6}OM \cdot ON \cdot OP = \frac{1}{24}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x - z - 1 = 0$ và $(Q)\colon y + 2z - 2 = 0$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng này nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(64^\circ; 68^\circ)$. **B.** $(22^\circ; 27^\circ)$. **C.** $(50^\circ; 62^\circ)$. **D.** $(20^\circ; 40^\circ)$.

✍ LỜI GIẢI.

Từ giả thiết suy ra véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (2; 0; -1)$; véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = (0; 1; 2)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là ϕ thì $\cos\phi = \dfrac{|2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{2}{5}$.

Vậy $\phi \approx 66^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(Q)\colon mx + 3y - nz - 2019 = 0$. Để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì

A. $m - n = 3$. **B.** $m + n = 3$. **C.** $m + n = 0$. **D.** $m - 2n = 1$.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau khi $\dfrac{m}{1} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{-n}{-1} \neq \dfrac{2019}{2}$. Suy ra $m = \dfrac{3}{2}$ và $n = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $m + n = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z-2019=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon 3mx-2y+2z+2020=0$. Để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì:

A. $m=\dfrac{2}{3}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=-1$.

LỜI GIẢI.

Để hai mặt phẳng vuông góc nhau khi và chỉ khi hai véc-tơ pháp tuyến có tích vô hướng bằng 0. Suy ra $6m-2-6=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$ và điểm $A(1;0;-1)$. Có hai mặt phẳng phân biệt (Q_1), (Q_2) song song với (P) và cách A một khoảng bằng 3. Hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) cách nhau một khoảng là

A. 6. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

LỜI GIẢI.

Vì (Q_1), (Q_2) phân biệt và cùng song song với (P) nên (Q_1) song song với (Q_2).
Do vậy từ giả thiết $\mathrm{d}\left(A;(Q_1)\right)=\mathrm{d}\left(A;(Q_2)\right)=3$ suy ra $\mathrm{d}\left((Q_1);(Q_2)\right)=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon mx+y-2z-1=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon 2x-my+z+3=0$. Để hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc 60° thì số giá trị thực của m thỏa mãn bài toán là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

LỜI GIẢI.

Mặt phẳng $(P)\colon mx+y-2z-1=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon 2x-my+z+3=0$ lần lượt có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}(m;1;-2)$ và $\overrightarrow{n_2}(2;-m;1)$.
Hai mặt phẳng tạo với nhau một góc 60° khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&\frac{|2m-m-2|}{\sqrt{m^2+1+4}\cdot\sqrt{4+m^2+1}}=\cos 60^\circ\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|m-2|}{m^2+5}=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &2\,|m-2|=m^2+5\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} m^2-2m+9=0\\ m^2+2m+1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &m=-1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(-2;0;1)$ và bốn mặt phẳng lần lượt có phương trình là $(P)\colon x+2y-5=0$, $(Q)\colon 2x-z-1=0$, $(R)\colon x+y-2z-4=0$ và $(T)\colon y+3z-1=0$. Trong bốn mặt phẳng trên, số mặt phẳng thỏa mãn điều kiện nằm giữa hai điểm A và B là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

LỜI GIẢI.

- Với mặt phẳng $(P)\colon x+2y-5=0$ ta có $(2+2\cdot 1-5)(-2+2\cdot 0-5)>0$ nên A và B nằm cùng phía với mặt phẳng (P).
- Với mặt phẳng $(Q)\colon 2x-z-1=0$ ta có $(4-1-1)(-4-1-1)<0$ nên A và B nằm khác phía với mặt phẳng (Q).

- Với mặt phẳng $(R)\colon x+y-2z-4=0$ ta có $(2+1-2-4)(-2+0-2-4)>0$ nên A và B nằm cùng phía với mặt phẳng (R).
- Với mặt phẳng $(T)\colon y+3z-1=0$ ta có $(1+3-1)(0+3-1)>0$ nên A và B nằm cùng phía với mặt phẳng (T).

Trong bốn mặt phẳng trên, có 1 mặt phẳng (Q) thỏa mãn điều kiện nằm giữa 2 điểm A và B.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(-4;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là

A. $3x+z+1=0$. **B.** $-x+y+2z-2=0$.
C. $3x+z-4=0$. **D.** $-x+y+2z+1=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;0;-2)=-2(3;0;1)$ và trung điểm của đoạn AB là $I(-1;1;2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

$$\begin{aligned}&3(x+1)+0(y-1)+1(z-2)=0\\ \Leftrightarrow\ &3x+z+1=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(-1;2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) là

A. $2x+y-3z+12=0$. **B.** $2x+y-3z=0$.
C. $2x-y+z-2=0$. **D.** $3x+y+z-1=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;-2)=-2(2;-1;1)=-2\overrightarrow{n_1}$ và véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_2}=(1;-2;0)$.
Vì (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) nên (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]=(2;1;-3).$$

Vậy mặt phẳng (Q) có phương trình là

$$\begin{aligned}&2(x+1)+1(y-2)-3(z-0)=0\\ \Leftrightarrow\ &2x+y-3z=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần là $(P)\colon x+y+2z+1=0$ và $(Q)\colon m^2x+(1-n)y+(2m-3)z+2020=0$. Biết rằng (P) và (Q) lần lượt vuông góc với nhau. Giá trị nhỏ nhất của tham số thực n là

A. 1. **B.** 2. **C.** -5. **D.** -9.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì tích vô hướng của hai véc-tơ pháp tuyến phải bằng 0. Tức là

$$\begin{aligned}&(1;1;2)\cdot\left(m^2;1-n;2m-3\right)=m^2+1-n+4m-6=0\\ \Leftrightarrow\ &n=m^2+4m-5=(m+2)^2-9\ge -9.\end{aligned}$$

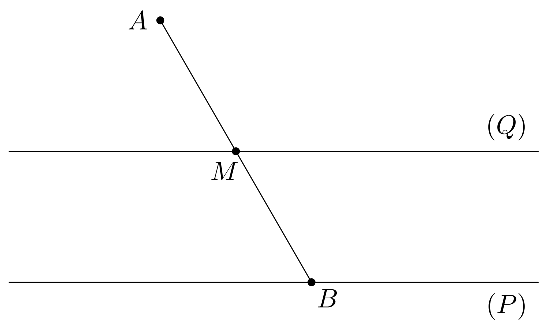
Dấu "=" xảy ra khi $m=-2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của n bằng -9.
Chọn đáp án D □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-11=0$ và điểm $A(1;0;-1)$. Mặt phẳng (Q) cách đều A và (P), đồng thời (Q) cắt trục Oz tại điểm có cao độ z_C bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** -2.

✍ **LỜI GIẢI.**

Lấy điểm bất kì thuộc mặt phẳng (P) là $B(1;0;5)$. Suy ra trung điểm của AB là $M(1;0;2)$.



Để mặt phẳng (Q) cách đều A và mặt phẳng (P) thì véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;2)$ và (Q) đi qua trung điểm M của đoạn thẳng AB.
Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là

$$(Q)\colon 1(x-1)-2(y-0)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow (Q)\colon x-2y+2z-5=0.$$

Giao của (Q) với trục Oz là $x=y=0 \Rightarrow 2z-5=0 \Rightarrow z=z_C=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$ và điểm $A(1;0;3)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách điểm A một khoảng bằng 2. Mặt phẳng (Q) cắt trục Ox tại điểm cách gốc O một đoạn nhỏ hơn 5 và bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng (Q) có dạng $x-2y+2z+m=0$. Khoảng cách từ A tới (Q) là

$$\mathrm{d}(A;(Q))=\dfrac{|1+0+6+m|}{\sqrt{1+4+4}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \Rightarrow (Q_1): x-2y+2z-1=0 \\ m=-13 \Rightarrow (Q_2): x-2y+2z-1=0. \end{array}\right.$$

Khi cho giao với Ox ta được $\left[\begin{array}{l} (Q_1)\cap Ox=M(1;0;0) \text{ (thỏa mãn)} \\ (Q_2)\cap Ox=M(13;0;0) \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon x+3y+z-3=0$ và $(Q)\colon -x-3y-z-11=0$. Quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng là mặt phẳng có phương trình

A. $x+3y+z-7=0$. **B.** $x+3y+z-8=0$.
C. $x+3y+z-4=0$. **D.** $x+3y+z+4=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đưa mặt phẳng (Q) về dạng $(Q)\colon x+3y+z+11=0$.
Nhận thấy đây là hai mặt phẳng song song với nhau. Nên quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng là một mặt phẳng (R) song song nằm chính giữa hai mặt phẳng.
Ta có thể sử dụng kỹ năng

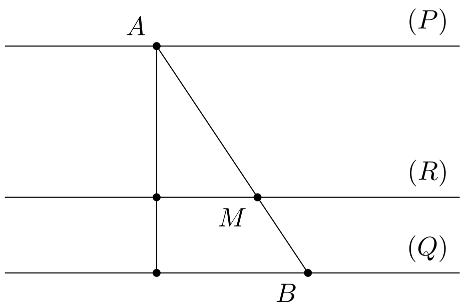
$$(R)=\dfrac{(P)+(Q)}{2}=\dfrac{(x+3y+z-3)+(x+3y+z+11)}{2}=x+3y+z+4=0.$$

□

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon x+2y+2z+1=0$ và $(Q)\colon x+2y+2z-8=0$. Gọi (R) là mặt phẳng song song và nằm giữa hai mặt phẳng (P), (Q); sao cho khoảng cách giữa (P) và (R) gấp đôi khoảng cách giữa (Q) và (R). Phương trình mặt phẳng (R) là:

A. $x+2y+2z-4=0$. **B.** $x+2y+2z-1=0$.
C. $x+2y+2z-5=0$. **D.** $x+2y+2z-7=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Mặt phẳng (R) có dạng $(R)\colon x+2y+2z+m=0$.
Lấy điểm $A\in(P)$ và có tọa độ $A=(-1;0;0)$ và $B\in(Q)$ và có tọa độ $B=(8;0;0)$.
Suy ra mặt phẳng (R) đi qua điềm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+2\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\Rightarrow M=(5;0;0)$.
Thay điểm M vào phương trình (R), ta được

$$5+m=0\Leftrightarrow m=-5\Rightarrow(R)\colon x+2y+2z-5=0.$$

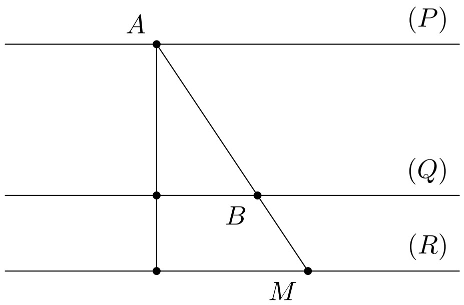
Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon x+y-3z+2=0$ và $(Q)\colon x+y-3z-4=0$. Gọi (R) là mặt phẳng song song và mặt phẳng (P) nằm giữa hai mặt phẳng (R), (Q); sao cho khoảng cách giữa (P) và (R) gấp ba khoảng cách giữa (Q) và (R). Mặt phẳng (R) là

A. $x+y-3z-7=0$. **B.** $x+y-2z-7=0$.
C. $x+y-3z-1=0$. **D.** $x+y-3z+3=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng (R) có dạng $(R)\colon x+y-3z+m=0$.



Lấy điểm $A\in(P)$ và có tọa độ $A=(-2;0;0)$ và $B\in(Q)$ và có tọa độ $B=(4;0;0)$.
Suy ra mặt phẳng (R) đi qua điềm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}-3\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\Rightarrow M=(7;0;0)$.
Thay điểm M vào phương trình (R), ta được

$$7+m=0\Leftrightarrow m=-7\Rightarrow(R)\colon x+y-3z-7=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(P)\colon x+y+3z-1=0$ và $(Q)\colon 3x-y+z-2=0$. Biết mặt phẳng (R) cắt cả ba trục tọa độ. Mặt phẳng (R) chứa tất cả các điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình tổng quát là

A. $4x+4y-3=0$. **B.** $x-2y-2z=0$.
C. $3x+y-z-1=0$. **D.** $2x-2y-2z-1=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi tọa độ điểm M nằm trên (R) là $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$. Khi đó ta có $\mathrm{d}(M;(P))=\mathrm{d}(M;(Q))$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_0+y_0+3z_0-1|}{\sqrt{1+1+9}}=\frac{|3x_0-y_0+z_0-2|}{\sqrt{9+1+1}}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0+y_0+3z_0-1=3x_0-y_0+z_0-2\\ x_0+y_0+3z_0-1=-3x_0+y_0-z_0+2\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x_0-2y_0-2z_0-1=0\\ 4x_0+4y_0-3=0.\end{array}\right.$$

Vì loại một mặt phẳng song song với trục Oz, nên ta suy ra mặt phẳng (R) là $2x-2y-2z-1=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-4=0$ và $(Q)\colon x+y-2z-3=0$. Quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng là hai mặt phẳng nào dưới đây ?

A. $2x-y-z-7=0$ hoặc $3y-z+-1=0$.
B. $x-2y-z-4=0$ hoặc $3y-3z+1=0$.
C. $x-y-2z-7=0$ hoặc $y-3z+2=0$.
D. $2x-y-z-7=0$ hoặc $3y-3z+1=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra

$$\mathrm{d}(M;(P))=\mathrm{d}(M;(Q))\Leftrightarrow \frac{|x-2y+z-4|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|x+y-2z-3|}{\sqrt{1+1+4}}$$
$$\Leftrightarrow |x-2y+z-4|=|x+y-2z-3|$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2y+z-4=x+y-2z-3\\ x-2y+z-4=-x-y+2z+3\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3y-3z+1=0\\ 2x-y-z-7=0.\end{array}\right.$$

Suy ra quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q), có phương trình là $3y-3z+1=0$ hoặc $2x-y-z-7=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-10=0$ và hai điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;3;1)$. Gọi (Q) là một mặt phẳng đi qua A, B đồng thời tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Biết rằng phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là: $2x+by+cz+d=0$, với a, b, c, d là những số thực. Khi đó giá trị của tổng $b+c+d$ bằng

A. 10. **B.** 12. **C.** 18. **D.** -18.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-2)$ và $\vec{n}_{(Q)}=(2;b;c)$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q).
Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là $2(x-1)+b(y-2)+c(z-0)=0$ (*)

Thay điểm B vào (Q), ta được: $2(-1-1)+b(3-2)+c(1-0)=0 \Leftrightarrow c=4-b$ (1)
Góc tạo bởi hai mặt phẳng cũng chính là góc không tù tạo bởi hai véc tơ pháp tuyến tương ứng.
Nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là α, thì ta có

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right)\right| = \left|\frac{1.2+2b-2c}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+b^2+c^2}}\right| = \frac{|2b-2c+2|}{3\sqrt{b^2+c^2+4}} \quad (2)$$

Thay c từ (1) vào (2) ta được $\cos\alpha = \dfrac{|2b-2c+2|}{3\sqrt{b^2+c^2+4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{(b-3)^2}{b^2-4b+10}}$.
Khảo sát hàm số trong căn, cho ta GTLN của $\cos\alpha$ là $(\cos\alpha)_{\max} = \dfrac{\sqrt{21}}{9} \Leftrightarrow b=-4; c=8$.
(Lưu ý rằng khi $\cos\alpha$ đạt giá trị lớn nhất thì góc α tương ứng sẽ nhỏ nhất).
Thay b và c vào phương trình tổng quát của (Q) ở (*), ta được

$$(Q)\colon 2(x-1)-4(y-2)+8(z-0)=2x-4y+8z+6=0 \Rightarrow (b+c+d)=10.$$

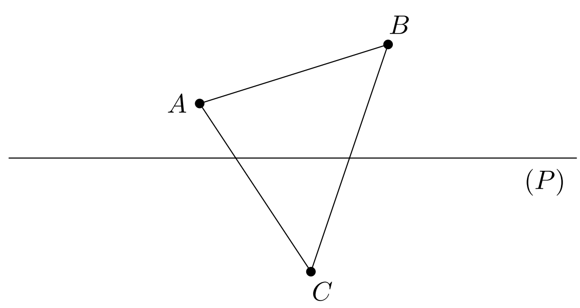
Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z-7=0$ và các điểm $A(3;1;-3)$, $B(2;3;-1)$, $C\left(4;m;2-m^2\right)$. Số giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt đúng hai cạnh của $\triangle ABC$ là

A. 4. **B.** -2. **C.** 5. **D.** 0.

✍ **LỜI GIẢI.**

Thay tọa độ hai điểm A và B vào mặt phẳng (P) ta được: $P_A = 1\cdot3+2\cdot1+3-7=1>0$; $P_B = 1\cdot2+2\cdot3-(-1)-7=2>0$. Suy ra hai điểm A và B cùng phía nhau so với mặt phẳng (P) vì $P_A>0, P_B>0$.
Suy ra, khi ta thay tọa độ điểm C vào mặt phẳng (P) sẽ cho kết quả $P_C = 1\cdot4+2\cdot m-\left(2-m^2\right)-7 \le 0$ (Điểm C nằm trên mặt phẳng (P) vẫn thỏa mãn).



$\Leftrightarrow m^2+2m-5\le0 \Leftrightarrow -3{,}45 \approx -1-\sqrt{6} \le m \le -1+\sqrt{6} \approx 1{,}45$.
Suy ra có tất cả 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+5z-7=0$, $(\beta)\colon x+y-z-1=0$, $(\lambda)\colon x-y-z-1=0$, $(\delta)\colon x-y-3z-1=0$. Thể tích của khối tứ diện được giới hạn bởi bốn mặt phẳng đó bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử bốn mặt phẳng đã cho tạo thành tứ diện $ABCD$.
Gọi A là điểm chung của (α), (β), (λ) ta xét hệ

$$\begin{cases} x+y+5z-7=0 \\ x+y-z-1=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(2;0;1).$$

Gọi B là điểm chung của (α), (β), (δ) ta xét hệ

$$\begin{cases} x+y+5z-7=0 \\ x+y-z-1=0 \\ x-y-3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow B(3;-1;1).$$

Gọi C là điểm chung của (α), (λ), (δ) ta xét hệ

$$\begin{cases} x+y+5z-7=0 \\ x-y-z-1=0 \\ x-y-3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow C(4;3;0).$$

Gọi D là điểm chung của (β), (λ), (δ) ta xét hệ

$$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y-z-1=0 \\ x-y-3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow D(1;0;0).$$

Do đó $\overrightarrow{BC}=(1;4;-1); \overrightarrow{BD}=(-2;1;-1)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(-3;3;9) \Rightarrow S_{BCD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\frac{3\sqrt{11}}{2}.$$

Lại có $\mathrm{d}\left(A;(\delta)\right)=\dfrac{|2-0-3-1|}{\sqrt{1+1+9}}=\dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

Vậy $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\mathrm{d}\left(A;(\delta)\right)\cdot S_{BCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{11}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{11}}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho hai điểm $A(3;1;0)$, $B(-2;0;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất có phương trình tổng quát là $(P)\colon ax+2y+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ bằng

A. 20. **B.** -12. **C.** -28. **D.** 15.

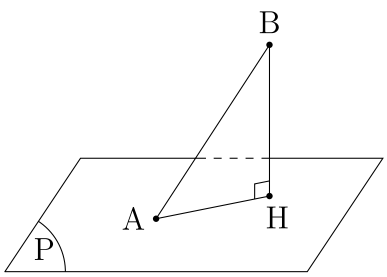
✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P).

Suy ra $BH=\mathrm{d}\left(B,(P)\right)\le AB \Rightarrow \mathrm{d}\left(B,(P)\right)_{max}=AB$.

Khi đó $\overrightarrow{BA}\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{BA}=(5;1;-3)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Phương trình tổng quát của (P) là



$$5(x-3)+1(y-1)-3(z-0)=0 \Leftrightarrow 5x+y-3z-16=0$$

Hay $(P)\colon 10x+2y-6z-32=0 \Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ c=-6 \\ d=-32. \end{cases}$

Vậy $a+c+d=-28$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+y+(m-1)z+1=0$ và điểm $A(2;1;0)$. Khoảng cách lớn nhất tính từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\mathrm{d}\left(A;(P)\right)=\dfrac{|2m+2|}{\sqrt{m^2+1+(m-1)^2}}=\sqrt{\dfrac{2(m+1)^2}{m^2-m+1}}$.

Xét hàm số $f(m)=\dfrac{(m+1)^2}{m^2-m+1}\Rightarrow f'(m)=\dfrac{(m+1)(3-3m)}{(m^2-m+1)^2}\Rightarrow f'(m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max f(m)=4$ đạt khi $m=1$.
Do đó $\mathrm{d}\left(A;(P)\right)=\sqrt{2f(m)}\le\sqrt{2\cdot 4}=2\sqrt{2}\Rightarrow \max \mathrm{d}\left(A;(P)\right)=2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án D □

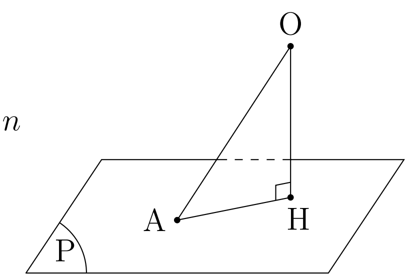
Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+(n+1)y+(m-2n)z+6=0$ với m, n là các tham số thực. Khoảng cách từ gốc O đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{2}$. **B.** 6. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta tìm điểm cố định mà mặt phẳng (P) luôn đi qua với mọi m, n như sau

$$(P)\colon m(x+z)+n(y-2z)+(6-y)=0 \text{ luôn đúng } \forall m,n$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0\\ y-2z=0\\ 6-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-3\\ y=6\\ z=3\end{cases}\Rightarrow A(-3;6;3).$$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (P), ta có

$$\mathrm{d}(O;(P))=OH\le OA=3\sqrt{6}.\text{ Dấu “=” xảy ra khi } OA\perp(P).$$

Vậy $\max \mathrm{d}(O;(P))=3\sqrt{6}$.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;1)$, $B(2;0;3)$, $C(0;1;3)$, $D(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon ax+by+2z+d=0$. Biết rằng (P) đi qua A và ba điểm B, C, D nằm cùng phía với (P). Khi tổng khoảng cách từ các điểm B,C,D đến (P) lớn nhất thì giá trị của biểu thức $S=a+b+2d$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

✍ **LỜI GIẢI.**

Điểm $A\in(P)\Rightarrow 2a+b+2+d=0\Leftrightarrow 2a+b+d=-2\quad(1)$.
Ba điểm B, C, D nằm cùng phía với (P) nên $2a+6+d$; $b+6+d$; $2b+d$ cùng dấu.
Khi đó $|2a+6+d|+|b+6+d|+|2b+d|=|2a+3b+3d+12|$.

Tổng khoảng cách từ ba điểm B, C, D đến mặt phẳng (P) là

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{d}(B;(P))+\mathrm{d}(C;(P))+\mathrm{d}(D;(P)) \\ &= \frac{|2a+6+d|}{\sqrt{a^2+b^2+4}}+\frac{|b+6+d|}{\sqrt{a^2+b^2+4}}+\frac{|2b+d|}{\sqrt{a^2+b^2+4}} \\ &= \frac{|2a+3b+3d+12|}{\sqrt{a^2+b^2+4}}. \end{aligned}$$

Từ (1) $\Rightarrow d=-2-2a-b$, thay vào T ta có

$$T=\frac{|4a-6|}{\sqrt{a^2+b^2+4}} \le \frac{|4a-6|}{\sqrt{a^2+4}} = 2\sqrt{\frac{(2a-3)^2}{a^2+4}}.$$ Dấu "=" xảy ra khi $b=0$.

Xét hàm số $f(a)=\dfrac{(2a-3)^2}{a^2+4} \Rightarrow f'(a)=\dfrac{2(2a-3)(3a+8)}{(a^2+4)^2} \Rightarrow f'(a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} a&=\frac{3}{2}\\ a&=-\frac{8}{3}.\end{aligned}\right.$

Bảng biến thiên

a	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	4	$\nearrow$	$\frac{25}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max f(a)=\dfrac{25}{4}$ khi $a=-\dfrac{8}{3}$.

Do đó $T \le 2\sqrt{f(a)} \le 2\sqrt{\dfrac{25}{4}}=5 \Rightarrow \max T=5$ khi $\begin{cases} a=-\dfrac{8}{3} \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow d=\dfrac{10}{3}$.

Vậy $S=a+b+2d=-\dfrac{8}{3}+0+\dfrac{20}{3}=4$.

Chọn đáp án (A) □

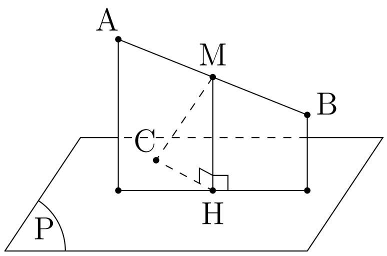
Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(0;2;3)$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+2y+cz+d=0$ đi qua C, sao cho A, B nằm cùng phía với (P) đồng thời tổng khoảng cách từ A và B đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của $T=a+c+d$ bằng

A. 0. **B.** -8. **C.** 12. **D.** -10.

LỜI GIẢI.

Gọi M là trung điểm của AB, H là hình chiếu của M trên (P). Do đó $M(2;0;2) \Rightarrow MC=3$. Suy ra

$$\mathrm{d}(A;(P))+\mathrm{d}(B;(P))=2\mathrm{d}(M;(P))=2MH \le 2MC=6.$$



$\Rightarrow$ Tổng khoảng cách từ A, B đến (P) lớn nhất khi $MC \perp (P)$. Suy ra (P) đi qua C và nhận $\overrightarrow{MC}=(-2;2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do đó $(P)\colon -2x+2y+z-7=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ c=1 \\ d=-7. \end{cases}$

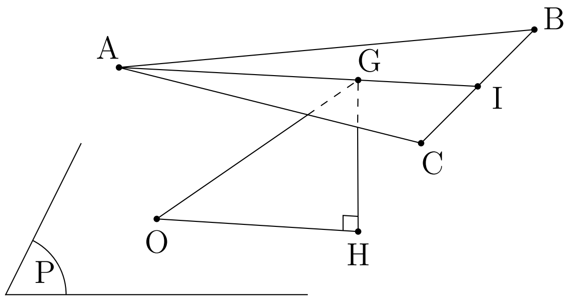
Vậy $T=a+c+d=-8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho ba điểm $A(1;2;-3)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;2;-2)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc O sao cho A, B, C nằm cùng phía với (P). Tổng khoảng cách từ A, B, C đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

✍ LỜI GIẢI.

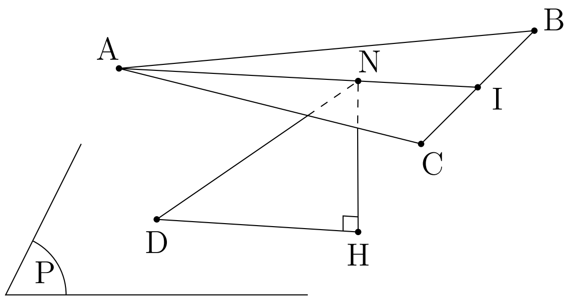


Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, H là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P).
Suy ra $G(1;1;-1) \Rightarrow OG = \sqrt{3}$.
Ta có $T = \mathrm{d}(A;(P)) + \mathrm{d}(B;(P)) + \mathrm{d}(C;(P)) = 3\mathrm{d}(G;(P)) = 3GH \leq 3OG = 3\sqrt{3}$.
Suy ra $T_{\max} = 3\sqrt{3}$ khi H và O trùng nhau.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;-2;0)$, $C(0;0;-5)$, $D(-3;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua D sao cho A, B, C cùng phía với (P). Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \mathrm{d}(A;(P)) + 2\mathrm{d}(B;(P)) + \mathrm{d}(C;(P))$ bằng

A. $12\sqrt{5}$. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{6}$. **D.** $8\sqrt{5}$.

✍ LỜI GIẢI.



Ghi nhớ: Nếu điểm N thỏa mãn hệ thức véc-tơ $x\overrightarrow{NA} + y\overrightarrow{NB} + z\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$ và ba điểm A, B, C nằm cùng phía với mặt phẳng (P) thì

$$x \cdot \mathrm{d}(A;(P)) + y \cdot \mathrm{d}(B;(P)) + z \cdot \mathrm{d}(C;(P)) = (x+y+z) \cdot \mathrm{d}(N;(P)).$$

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow N(2;-1;-1) \Rightarrow ND = 3\sqrt{5}$.
Áp dụng kết quả trên vào bài toán, ta có

$$T = \mathrm{d}(A;(P)) + 2\mathrm{d}(B;(P)) + \mathrm{d}(C;(P)) = 4\mathrm{d}(N;(P)) = 4NH \leq 4ND = 12\sqrt{5}.$$

Vậy $T_{\max} = 12\sqrt{5}$ đạt khi H trùng với D tức là $ND \perp (P)$.
Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;1)$, $B(1;-3;0)$, $C(-2;2;4)$, $D(-3;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc O sao cho bốn điểm A, B, C, D nằm cùng phía với (P). Khi biểu thức $T = \mathrm{d}(A;(P)) + 2\mathrm{d}(B;(P)) + \mathrm{d}(C;(P)) + 3\mathrm{d}(D;(P))$ đạt giá trị lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x + by + cz + d = 0$. Giá trị biểu thức $S = b + c + d$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 2. **D.** -2.

LỜI GIẢI.

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+3\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{0}\Rightarrow N(-1;0;2)\Rightarrow ON=\sqrt{5}$.
Ta có $T=\mathrm{d}(A;(P))+2\mathrm{d}(B;(P))+\mathrm{d}(C;(P))+3\mathrm{d}(D;(P))=7\mathrm{d}(N;(P))\le 7ON=7\sqrt{5}$.
Do đó $T_{\max}=7\sqrt{5}$ đạt khi $ON\perp(P)\Rightarrow(P)$ đi qua O và nhận $\overrightarrow{ON}=(-1;0;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-x+2z=0\Leftrightarrow x-2z=0\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=-2\\d=0.\end{cases}$

Vậy $S=b+c+d=-2$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $2a+2b-c=3$ thì G luôn nằm trên mặt phẳng (P). Khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(2;1;2)$. **B.** $(2;2;-1)$. **C.** $(3;0;1)$. **D.** $(4;-1;5)$.

LỜI GIẢI.

Tọa độ trọng tâm G là $G\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)=(x;y;z)\Rightarrow\begin{cases}a=3x\\b=3y\\c=3z.\end{cases}$

Từ giả thiết $2a+2b-c=3\Rightarrow 2x+2y-z-1=0$.
Vậy phương trình mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-1=0$.
Chọn đáp án D □

BÀI 3 MẶT PHẲNG CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO - P2

Câu 1 (2H3Y2-3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oxz) là

A. $y+z=0$. **B.** $x-1=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x=0$.

LỜI GIẢI.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oxz) là $y=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 2 (2H3Y2-6). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Khoảng cách từ A đến (P) bằng

A. $\frac{10}{3}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{3}$.

LỜI GIẢI.

Khoảng cách từ A đến (P) là $\mathrm{d}=\dfrac{|2-2\cdot(-1)+2\cdot 3-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 3 (2H3Y2-6). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-4)$. Khoảng cách từ A đến (Oxy) bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

LỜI GIẢI.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là $z=0$.

Khoảng cách từ A đến (Oxy) là $\mathrm{d}=\dfrac{|-4|}{1}=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 4 (2H3B2-3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng song song và cách (Oyz) một đoạn bằng 2 là

A. $z \pm 2 = 0$. **B.** $y \pm 2 = 0$. **C.** $y + z \pm 2 = 0$. **D.** $x \pm 2 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình là $x = 0$.
Phương trình mặt phẳng song song (Oyz) nên có dạng $x + D = 0$.
Mặt phẳng cách (Oyz) một đoạn bằng 2 nên $|D| = 2 \Leftrightarrow D = \pm 2$.
Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $x \pm 2 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 5 (2H3B2-4). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) song song với trục Oz và đi qua hai điểm $A = (2; 0; 1)$, $B = (-1; 1; 4)$. Mặt phẳng (P) cắt trục hoành Ox tại điểm có hoành độ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -2.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; 3)$.
Mặt phẳng (P) song song với trục Oz và đi qua hai điểm A, B nên có VTPT là $\vec{n}_{(P)} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_{Oz}\right] = (1; 3; 0)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là $x + 3y - 2 = 0$.
Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (P) với trục Ox, suy ra $M(a; 0; 0)$.
Do $M \in (P)$ nên $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow M(2; 0; 0)$.
Vậy mặt phẳng (P) cắt trục hoành Ox tại điểm có hoành độ $x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 6 (2H3Y2-3). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm có tọa độ là $A(3; 0; 0), B(0; -4; 0), C(0; 0; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $4x - 3y + 12z + 12 = 0$. **B.** $4x + 3y + 12z - 12 = 0$.
C. $4x - 3y + 12z - 12 = 0$. **D.** $3x - 4y + z - 1 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; -4; 0)$, $C(0; 0; 1)$ là

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow 4x - 3y + 12z - 12 = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 7 (2H3K2-4). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với trục Ox và có phương trình tổng quát là $(\alpha)\colon (a-1)x + 2y + z + a + 3 = 0$. Mặt phẳng (α) cắt trục Oy tại điểm cách gốc tọa độ O một đoạn bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n} = (a - 1; 2; 1)$.
Mặt phẳng (α) song song với trục Ox nên $\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{u}_{Ox} = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.
Suy ra (α) có phương trình là $2y + z + 4 = 0$.
Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (α) với trục Oy, suy ra $M(0; y; 0)$.
Do $M \in (\alpha)$ nên $2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2$, suy ra $M(0; -2; 0)$.
Vậy mặt phẳng (α) cắt trục Oy tại điểm cách gốc tọa độ O một đoạn bằng 2.
Chọn đáp án A □

Câu 8 (2H3B2-6). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + 2z - 6 = 0$ và $(\beta)\colon 2x - 4y + 4z + 6 = 0$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có (α) có VTPT là $\vec{n}_{(\alpha)} = (1;-2;2)$; (β) có VTPT là $\vec{n}_{(\beta)} = (2;-4;4)$, suy ra $\vec{n}_{(\beta)} = 2\vec{n}_{(\alpha)}$ nên $(\alpha) \mathbin{/\!/} (\beta)$.

Lại có $M(1;1;-1) \in (\beta)$.

Khi đó $\mathrm{d}((\alpha),(\beta)) = \mathrm{d}(M,(\alpha)) = \dfrac{|1\cdot 1 - 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) - 6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 9 (2H3B2-5). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y+z-1=0$ và $(\beta)\colon 3x+y+2z-2=0$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) nằm trong khoảng nào dưới đây ?

A. $(30^\circ;45^\circ)$. **B.** $(45^\circ;60^\circ)$. **C.** $(60;80^\circ)$. **D.** $(27^\circ;30^\circ)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n}_{(\alpha)} = (2;2;1)$; mặt phẳng (β) có VTPT là $\vec{n}_{(\beta)} = (3;1;2)$.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β).

Khi đó $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\cdot\vec{n}_{(\beta)}\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(\beta)}\right|} = \dfrac{|2\cdot 3+2\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \dfrac{10}{3\sqrt{14}} \Rightarrow \varphi = 27^\circ 1'$.

Vậy $\varphi \in (60;80^\circ)$.

Chọn đáp án C □

Câu 10 (2H3B2-6). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon ax+by+cz+a-3=0$. Biết rằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng bằng 2. Hãy tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 9. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau $\Leftrightarrow \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{-2} \neq \dfrac{a-3}{1}$.

Ta có $A(-1;0;0) \in (P)$.

Suy ra $\mathrm{d}\left((P);(Q)\right) = \mathrm{d}\left(A,(Q)\right) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|-a+a-3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra $T = a^2+b^2+c^2 = \dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 11 (2H3K2-3). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+28=0$ là mặt phẳng cắt 3 trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C sao cho $M(2;3;-1)$ là trực tâm tam giác ABC. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

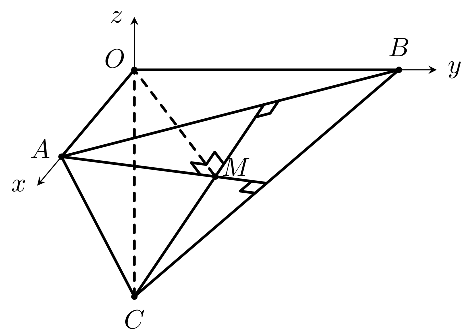
A. -8. **B.** 13. **C.** -1. **D.** 4.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp MC \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp OM \qquad (1)$

và tương tự $\begin{cases} BC \perp OA \\ BC \perp MA \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp OM \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta được $OM \perp (P)$ nên $\overrightarrow{OM} = (2;3;-1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do đó mặt phẳng (P) có phương trình:



$$2(x-2)+3(y-3)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-z-14=0 \Leftrightarrow -4x-6y+2z+28=0$$

Vậy $T=-4-6+2=-8$.

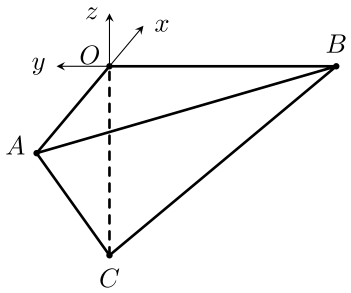
Chọn đáp án (A) □

Câu 12 (2H3K2-8). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+3=0$ là mặt phẳng cắt 3 trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C. Trong đó a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn hệ thức $a+2b+3c=3$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 27.

✍ LỜI GIẢI.

(P) có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là



$$\frac{x}{-\frac{3}{a}}+\frac{y}{-\frac{3}{b}}+\frac{z}{-\frac{3}{c}}=1$$

Suy ra $A\left(-\frac{3}{a};0;0\right), B\left(0;-\frac{3}{b};0\right), C\left(0;0;-\frac{3}{c}\right)$.

Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là $V=\frac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\frac{9}{2abc}$.

Theo đề bài $3=a+2b+3c\geq 3\sqrt[3]{6abc}=3\sqrt[3]{6\cdot\frac{9}{2V}}=\frac{9}{\sqrt[3]{V}}\Leftrightarrow V\geq 27$.

Vậy $V_{\min}=27\Leftrightarrow a=2b=3c=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{2}\\ c=\frac{1}{3}.\end{cases}$

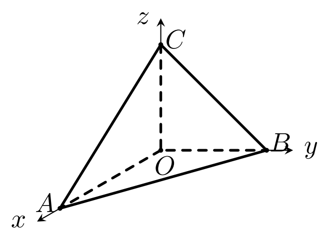
Chọn đáp án (D) □

Câu 13 (2H3K2-8). Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3;2;2)$ và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C khác O. Khi thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 12. **B.** 15. **C.** 21. **D.** 16.

✍ LỜI GIẢI.

(P) có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Khi đó $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, với a, b, c là các số thực dương.

Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là $V=\frac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\frac{abc}{6}$.

Theo đề bài $M\in(P)\Leftrightarrow 1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{12}{abc}}=3\sqrt[3]{\frac{2}{V}}\Leftrightarrow V\geq 54$.

Vậy $V_{min}=54\Leftrightarrow\frac{3}{a}=\frac{2}{b}=\frac{2}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\ b=c=6.\end{cases}$. Khi đó $T=a+b+c=9+6+6=21$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14 (2H3K2-4). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2020=0$. Số điểm nằm trên mặt phẳng (P) có tọa độ nguyên dương là

A. 2037171. **B.** C_{2021}^{4}. **C.** C_{2020}^{3}. **D.** C_{2019}^{3}.

✍ LỜI GIẢI.

Áp dụng công thức của bài toán chia kẹo Euler thì số các điểm có tọa độ $(x_0;y_0;z_0)$ nguyên dương thỏa mãn $x_0+y_0+z_0=2020$ là $C_{2020-1}^{3-1}=2037171$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15 (2H3K2-4). Trong không gian $Oxyz$, gọi A, B, C lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2020=0$ với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Số điểm có tọa độ nguyên thuộc khối tứ diện $OABC$ là

A. C^2_{2019}. **B.** C^2_{2022}. **C.** C^3_{2021}. **D.** C^3_{2023}.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm có tọa độ nguyên và thuộc khối tứ diện $OABC$. Khi đó tọa độ $(x;y;z)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x+y+z\le 2020 \\ x,y,z\in\mathbb{Z}, x,y,z\ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)+(y+1)+(z+1)\le 2023 \\ x,y,z\in\mathbb{Z}, x,y,z\ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c\le 2023, \text{với } \ a=x+1, b=y+1, c=z+1 \\ a,b,c\in\mathbb{Z}, a,b,c\ge 1. \end{cases}$$

Áp dụng công thức nghiệm của bất phương trình Euler thì có C^3_{2023} điểm có tọa độ nguyên thuộc khối tứ diện $OABC$.

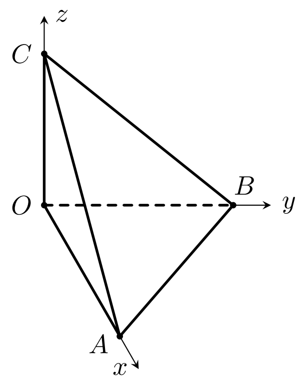
Chọn đáp án D □

Câu 16 (2H3K2-4). Trong không gian $Oxyz$, gọi A, B, C lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2020=0$ với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Số điểm có tọa độ nguyên nằm trên hình tứ diện $OABC$ là

A. C^3_{2023}. **B.** $\mathrm{C}^3_{2023}-\mathrm{C}^3_{2029}$. **C.** $\mathrm{C}^2_{2022}-\mathrm{C}^2_{2029}$. **D.** C^3_{2021}.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm có tọa độ nguyên và thuộc khối tứ diện $OABC$. Khi đó tọa độ $(x;y;z)$ thỏa mãn



$$\begin{cases} x+y+z\le 2020 \\ x,y,z\in\mathbb{Z}, x,y,z\ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)+(y+1)+(z+1)\le 2023 \\ x,y,z\in\mathbb{Z}, x,y,z\ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c\le 2023, \text{với } \ a=x+1, b=y+1, c=z+1 \\ a,b,c\in\mathbb{Z}, a,b,c\ge 1. \end{cases}$$

Áp dụng công thức nghiệm của bất phương trình Euler thì có C^3_{2023} điểm có tọa độ nguyên thuộc khối tứ diện $OABC$.

Gọi $N(x';'y;z')$ là điểm có tọa độ nguyên và nằm bên trong khối tứ diện $OABC$. Khi đó tọa độ $(x';y';z')$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x'+y'+z'<2020 \\ x',y',z'\in\mathbb{Z}, x',y',z'\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'+z'<2019 \\ x',y',z'\in\mathbb{Z}, x',y',z'\ge 1 \end{cases}$$

Áp dụng công thức nghiệm của bất phương trình Euler thì có C^3_{2019} điểm có tọa độ nguyên nằm bên trong khối tứ diện $OABC$.

Vậy có $\mathrm{C}^3_{2023}-\mathrm{C}^3_{2019}$ điểm nằm trên hình tứ diện $OABC$.

Chọn đáp án B □

Câu 17 (2H3B2-3). Trong không gian $Oxyz$, cho khối hộp chữ nhật (H) được giới hạn bởi các mặt phẳng có phương trình $x=1, x=3, y=-1, y=2, z=0, z=4$. Thể tích của khối hộp chữ nhật (H) bằng

A. 12. **B**. 36. **C**. 24. **D**. 6.

✍ **LỜI GIẢI.**

Các cạnh của khối hộp chữ nhật (H) là $3-1=2, 2-(-1)=3, 4-0=4$ nên hình thể tích của (H) là $V=2\cdot 3\cdot 4=24$.

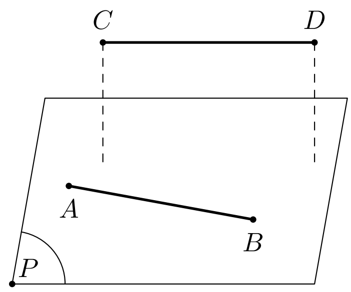
Chọn đáp án (C) □

Câu 18 (2H3B2-3). Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;0), B(1;0;0), C(0;0;2), D(2;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D sao cho C, D cùng phía với (P). Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là

A. $2x+2y+z-2=0$. **B**. $x+y-1=0$.
C. $x+y+z-1=0$. **D**. $3x+3y-2z-3=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tham khảo hình vẽ minh họa:



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$ và $\overrightarrow{CD}=(2;2;-4)$. Vì (P) chứa đường thẳng AB và song song với đường thẳng CD nên mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}]=(4;4;4)=4(1;1;1)$.

Vậy phương trình của (P) là: $x+y+z-1=0$.

Chọn đáp án (C) □

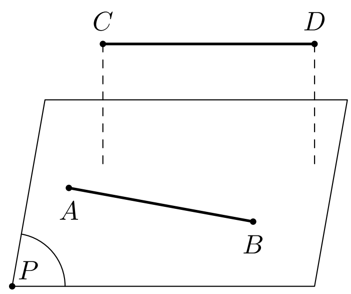
Câu 19 (2H3K2-4). Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;1), B(0;-3;2), C(0;0;1), D(-3;0;($
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D. Biết rằng (P) cắt trục Ox tại điểm M có hoành độ lớn hơn -3. Hoành độ điểm M thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-\frac{5}{2})$. **B**. $(1;2)$. **C**. $(-1;1)$. **D**. $(-\frac{5}{2};-1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

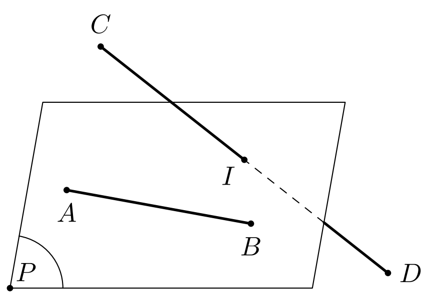
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$ và $\overrightarrow{CD}=(-3;0;-1)$. Do hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng phương nên tồn tại hai mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D.

Trường hợp 1. $(P) \parallel CD$ như hình vẽ minh họa:



Vì (P) chứa đường thẳng AB và song song với đường thẳng CD nên mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}]=(6;-5;-18)$. Vậy phương trình của (P) trong trường hợp này là: $6x-5y-18z+21=0$. Mặt phẳng (P) cắt trục hoành tại $M(-\frac{7}{2};0;0)$. Điểm M tìm được này không phù hợp với điều kiện bài toán.

Trường hợp 2. (P) đi qua trung điểm $I(-\frac{3}{2};0;\frac{1}{2})$ của CD như hình vẽ minh họa:



Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$ và $\overrightarrow{AI}=(-\frac{7}{2};-3;-\frac{1}{2})$. Vì (P) đi qua ba điểm A, B, I nên mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}]=\frac{3}{2}(4;-3;-10)$.

Vậy phương trình của (P) trong trường hợp này là: $4x-3y-10z+11=0$. Mặt phẳng (P) cắt trục hoành tại $M(-\frac{11}{4};0;0)$. Điểm M tìm được này phù hợp với điều kiện bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20 (2H3B2-3). Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;2;0)$, $B(1;1;-1)$, $C(1;-1;1)$, $D(3;0;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-1;-1) = -\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = (0;-2;2) \neq k\overrightarrow{AB}, \forall k \in \mathbb{R}$ nên $AB \parallel CD$. Do đó có vô số mặt phẳng chứa AB và cách đều hai điểm C, D.

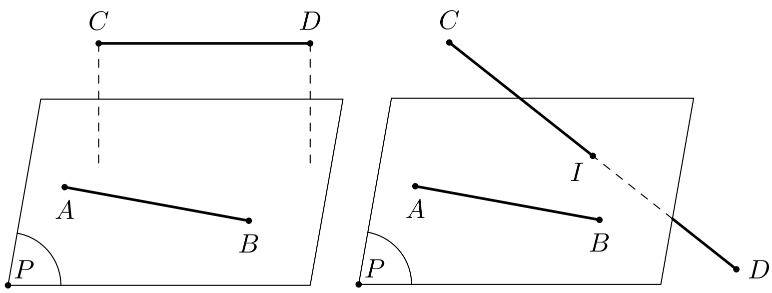
Chọn đáp án D □

Câu 21 (2H3B2-3). Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(1;1;0)$, $C(3;1;-2)$, $D(3;-3;6)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do hai véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (-1;1;-1)$ và $\overrightarrow{CD} = (0;-4;8)$ không cùng phương nên tồn tại hai mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D. Trường hợp 1 là mặt phẳng đó chứa AB và song song CD. Trường hợp 2 là mặt phẳng đó chứa AB và đi qua trung điểm I của CD. Tham khảo hình vẽ minh họa:



Chọn đáp án B □

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;0;2)$, $D(m;n;0)$. Biết rằng có duy nhất một mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D. Hỏi có tất cả bao nhiêu cặp $(m;n)$ thuộc số tự nhiên thỏa mãn bài toán?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D thì bắt buộc AB cắt CD tại một điểm N khác với trung điểm của CD.

Tọa độ trung điểm M của đoạn CD là $M = \left(\dfrac{m}{2};\dfrac{n}{2};1\right)$.

Véc tơ $\overrightarrow{AB} = (1;-1;0)$; $\overrightarrow{AC} = (0;-1;2)$; $\overrightarrow{AD} = (m;n-1;0)$; $\overrightarrow{CD} = (m;n;-2)$; $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{m}{2};\dfrac{n-2}{2};1\right)$.

Suy ra $\begin{cases} A, B, C, D \text{ đồng phẳng} \\ \overrightarrow{AB} \text{ không song song với } \overrightarrow{CD} \\ M \notin AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{CD} \neq k \cdot \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AM} \neq t \cdot \overrightarrow{AB}. \end{cases}$

Dễ dàng thấy được $\overrightarrow{CD} \neq k \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM} \neq t \cdot \overrightarrow{AB}$ vì để ý vào thành phần cao độ của $\overrightarrow{AB}$ bằng 0.

Điều kiện: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m + n = 1 \xrightarrow{m,n\in\mathbb{N}} (m;n) = \{(1;0),(0;1)\}$ có 2 cặp thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(0;2;0)$, $D(m;n;2n \pm 3)$. Biết rằng tồn tại vô số mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D. Giá trị của biểu thức $T = m + 4n$ bằng

A. -6 hoặc -3. **B.** -6 hoặc -2. **C.** 1 hoặc -2. **D.** 0 hoặc -3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để tồn tại vô số mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D xảy ra hai trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** AB song song với CD, khi đó mọi mặt phẳng (P) đi qua AB đều song song với CD, tức là khoảng cách từ C và D đến mặt phẳng (P) là bằng nhau.

- **Trường hợp 2:** AB đi qua trung điểm M của CD. Khi đó mọi mặt phẳng (P) đi qua AB cũng đi qua trung điểm M của CD. Tức là khi đó khoảng cách từ C và D đến mặt phẳng (P) bằng nhau.
  Tọa độ trung điểm M của CD là $M = \left(\frac{m}{2}; \frac{n+2}{2}; \frac{2n+3}{2}\right)$.
  Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1); \overrightarrow{CD} = (m; n-2; 2n+3); \overrightarrow{AM} = \left(\frac{m-4}{2}; \frac{n+2}{2}; \frac{2n+3}{2}\right)$.
  Cả hai trường hợp cho ta điều kiện

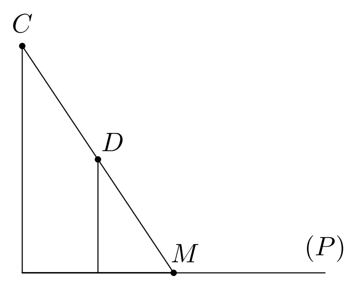
$$\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{m}{-2} = \frac{n-2}{3} = \frac{2n+3}{1} \\ \frac{m-4}{-4} = \frac{n+2}{6} = \frac{2n+3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m = \frac{14}{5} \\ n = \frac{-11}{5}\end{cases} \\ \begin{cases} m = \frac{18}{5} \\ n = -\frac{7}{5}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + 4n = -6 \\ m + 4n = -2.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; 0), B(0; -1; 2), C(0; 1; 0), D(2; -1; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) gấp 2 lần khoảng cách từ D đến (P) và C, D cùng phía so với (P). Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $-2x + 4y + z + 2 = 0$. **B.** $2y + z = 0$.
C. $x + y - z + 2 = 0$. **D.** $x + y + z - 1 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

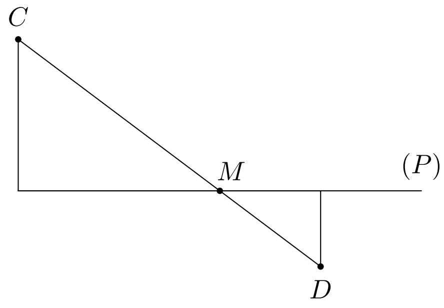


Dễ dàng suy ra được $\overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MD} \Rightarrow M = (4; -3; 6)$.
Mặt phẳng (P) đi qua A, B và M. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $(P)\colon 2y + z = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 3; 1), B(-1; 0; 2), C(1; -1; 0), D(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) gấp 2 lần khoảng cách từ D đến (P) và C, D khác phía so với (P). Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $-x + 2y + 3z - 7 = 0$. **B.** $x + y + z - 6 = 0$.
C. $x + y - z + 2 = 0$. **D.** $x - y - z + 2 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

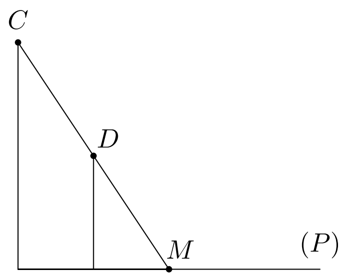


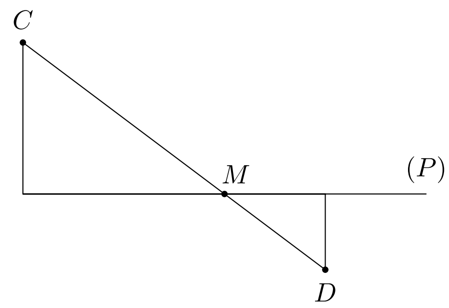
Dễ dàng suy ra được $\overrightarrow{MC} = -2 \cdot \overrightarrow{MD} \Rightarrow M = (1; 1; 2)$.
Mặt phẳng (P) đi qua A, B và M. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $-x + 2y + 3z - 7 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 1; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; -1; 0)$, $D(1; 2; 3)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua A, B và khoảng cách từ C đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ D đến (P)?

A. 2. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 1.

LỜI GIẢI.





Xảy ra hai trường hợp

- **Trường hợp 1:** Mặt phẳng (P_1) đi qua A, B và điểm M_1 thỏa mãn $\overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{M_1D}$.
  Suy ra$M_1 = (1; 5; 6)$.
  Suy ra phương trình mặt phẳng (P_1) là $2x - y + z - 3 = 0$.
- **Trường hợp 2:** Mặt phẳng (P_2) đi qua A, B và điểm M_2 thỏa mãn $\overrightarrow{MC} = -2 \cdot \overrightarrow{M_2D}$
  Suy ra $M_2 = (1; 1; 2)$.
  Suy ra phương trình mặt phẳng (P_2) là $2x - y + z - 3 = 0$.

Hai mặt phẳng tìm được trùng nhau. Tức là có duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 1; 0), B(0; -1; 2)$, $C(2; 1; 4), D(4; 3; -2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A và cách đều ba điểm B, C, D?

A. 4. **B.** 1. **C.** vô số. **D.** 3.

LỜI GIẢI.
Dễ dàng kiểm tra 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng, suy ra tồn tại 4 mặt phẳng như sau.
Một mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (BCD).
Ba mặt phẳng đi qua A và một trong ba đi qua đường trung bình của tam giác (BCD).
Suy ra có 4 mặt phẳng thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 2; 0), B(-2; 1; 1), C(0; 1; 0)$, $D(3; 0; -1)$. Tồn tại tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) cách đều cả 4 điểm A, B, C, D?

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** vô số.

✍ **LỜI GIẢI.**

Dễ dàng kiểm tra được $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 0)$, $\overrightarrow{AD} = (2; -2; -1)$.
Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$. Suy ra 4 điểm A, B, C, D lập thành một tứ diện.
Các mặt phẳng cách đều 4 điểm là
4 mặt phẳng đi qua ba trung điểm của ba cạnh và song song với đáy tương ứng.
3 mặt phẳng trong đó mỗi mặt phẳng chứa 2 đường trung bình của tứ diện $ABCD$.
Suy ra có 7 mặt phẳng thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$, $B(a; b; 2a+2b-6)$. Khoảng cách AB nhỏ nhất bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** $2\sqrt{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Quỹ tích điểm B là một mặt phẳng được xác định như sau.

Ta có $B(a; b; 2b + 2b - 6) = (x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ 2a + 2b - 6 = z \end{cases}$ suy ra $2x + 2y - z - 6 = 0$.

Do đó điểm B chạy trên mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - z - 6 = 0$.
Khoảng cách từ điểm A đến (P) chính ra giá trị nhỏ nhất của AB khi a, b thay đổi.

Suy ra $AB_{\min} = \mathrm{d}(A; (P)) = \dfrac{|2.1 + 2.1 - 2 - 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \dfrac{4}{3}$.

Dấu "="xảy ra khi $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{n}_P = t.(2; 2; -1)$.
Suy ra

$$\overrightarrow{AB} = (a-1; b-1; 2a+2b-8) = t \cdot \overrightarrow{n}_P = t.(2; 2; -1) \Leftrightarrow \frac{a-1}{2} = \frac{b-1}{2} = \frac{2a+2b-8}{-1} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{17}{9} \\ b = \dfrac{17}{9} \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB là $AB_{\min} = \mathrm{d}(A; (P)) = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hai số thực a, b. Giá trị nhỏ nhất của $T = 10a^2 + 2b^2 - 2a + 4b + 6ab + 2021$ bằng

A. 2018. **B.** $\frac{24229}{12}$. **C.** $\frac{22177}{11}$. **D.** 2019.

✍ **LỜI GIẢI.**

$T = 10a^2 + 2b^2 - 2a + 4b + 6ab + 2021 = (a-1)^2 + (b+2)^2 + (3a+b)^2 + 2016 = AB^2 + 2016$

Trong đó $A = (1; -2; 0), B = (a; b; 3a + b)$.

Xét điểm $B = (a; b; 3a + b) = (x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ z = 3a + b \end{cases} \Rightarrow z = 3x + y \Leftrightarrow 3x + y - z = 0.$

Suy ra quỹ tích điểm B là mặt phẳng (P) có phương trình: $3x + y - z = 0$.
Giá trị của biểu thức T nhỏ nhất khi và chỉ khi AB nhỏ nhất và bằng khoảng cách từ A đến (P).

Có $AB_{\min} = \mathrm{d}(A; (P)) = \dfrac{|3.1 - 2 - 0|}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$.

Suy ra $T_{\min} = AB^2_{\min} + 2016 = \dfrac{1}{11} + 2016 = \dfrac{22177}{11}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ $A(2;1;-3)$, $B(a;b+1;a+2b)$, $C(1;2b+1;2a-2)$. Gọi M là trung điểm của BC, khoảng cách nhỏ nhất từ A đến M tương ứng bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{39}{2\sqrt{94}}$. **C.** $\dfrac{41}{\sqrt{94}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

LỜI GIẢI.

Tọa độ trung điểm M là $M=\left(\dfrac{a+1}{2};\dfrac{3b+2}{2};\dfrac{3a+2b-2}{2}\right)=(x;y;z)$.

Suy ra

$$\begin{cases}\dfrac{a+1}{2}=x\\ \dfrac{3b+2}{2}=y\\ \dfrac{3a+2b-2}{2}=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2x-1\\ b=\dfrac{2y-2}{3}\\ \dfrac{3(2x-1)+2\cdot\dfrac{2y-2}{3}-2}{2}=z\end{cases}\Rightarrow\dfrac{3(2x-1)+2\cdot\dfrac{2y-2}{3}-2}{2}=z.$$

Suy ra $18x+4y-6z-19=0$, vậy quỹ tích trung điểm M là mặt phẳng $(P)\colon 18x+4y-6z-19=0$.
Suy ra khoảng cách nhỏ nhất từ A đến M cũng chính là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P)

$$\mathrm{d}(A;(P))=\dfrac{|18\cdot 2+4\cdot 1-6\cdot(-3)-19|}{\sqrt{18^2+4^2+6^2}}=\dfrac{39}{2\sqrt{94}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ $A(a;0;c+2)$, $B(2;b;a-c)$, $C(0;b-1;c)$; trong đó a,b,c là ba số thực theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khoảng cách nhỏ nhất từ gốc tọa độ O đến G bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

LỜI GIẢI.

Tọa độ trọng tâm G là $G=\left(\dfrac{a+2}{3};\dfrac{2b-1}{3};\dfrac{a+c+2}{3}\right)=(x;y;z)$.

Suy ra $\begin{cases}a+2=3x\\ 2b-1=3y\\ a+c+2=3z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3x-2\\ b=\dfrac{3y+1}{2}\\ c=-3x+3z.\end{cases}$

Ta lại có $a+c=2b\Leftrightarrow a-2b+c=0$.

Suy ra $3x-2-2\cdot\left(\dfrac{3y+1}{2}\right)+(-3x+3z)=0\Leftrightarrow -3y+3z-3=0\Leftrightarrow y-z+1=0$.

Điểm G nằm trên mặt phẳng (P) có phương trình $(P)\colon y-z+1=0$.

Khoảng cách nhỏ nhất từ O đến G cũng chính là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là $\mathrm{d}(O;(P))=\dfrac{|1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

BÀI 4 CƠ BẢN VỀ ĐƯỜNG THẲNG - P1

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Ox là

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng Ox đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Ox là $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0.\end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Oy là

A. $\begin{cases}x=0\\y=3+t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=0\end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng Oy đi qua điểm $(0;3;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Oy là $\begin{cases}x=0\\y=3+t\\z=0.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3-3t\end{cases}$.

Véc-tơ nào dưới đây không phải là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}=(1;-2;3)$. **B.** $\vec{u}=(2;-4;6)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;3)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;-3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do $\vec{u}=(-1;2;-3)=-(1;-2;3)=-\dfrac{1}{2}(2;-4;6)$ nên $\vec{u}=(-1;2;3)$ không phải là véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-1;2)$ và đi qua điểm $A(2;3;4)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ tương ứng là

A. $\Delta\colon 3x-y+2z-11=0$. **B.** $\Delta\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$. **D.** $\Delta\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-1;2)$ và đi qua điểm $A(2;3;4)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc đường thẳng d?

A. $(3;1;-2)$. **B.** $(1;2;0)$. **C.** $(-1;3;-2)$. **D.** $(3;1;2)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do $\dfrac{3-1}{2} = \dfrac{1-2}{-1} \neq \dfrac{-2}{2}$ nên điểm $(3;1;-2)$ không thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$. Điểm có hoành độ bằng 2 nằm trên đường thẳng d là

A. $(2;1;1)$. **B.** $(2;-1;-2)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $(2;-3;-2)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do $\dfrac{2-3}{-1} = \dfrac{1+1}{2} = \dfrac{1+2}{3}$ nên điểm có hoành độ bằng 2 nằm trên đường thẳng d là $(2;1;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-4}{-2}$. Giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng tọa độ (Oxy) có tọa độ là

A. $(4;1;4)$. **B.** $(6;7;0)$. **C.** $(4;1;0)$. **D.** $(3;2;0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $M = d \cap (Oxy)$. Khi đó $M = (x;y;0)$.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{0-4}{-2} \\ \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{0-4}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 7. \end{cases}$

Vậy $M = (6;7;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$. Giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng tọa độ (Oyz) có tọa độ là

A. $(-7;-5;0)$. **B.** $(2;1;-3)$. **C.** $(0;-1;-2)$. **D.** $(0;-5;1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $M = d \cap (Oyz)$. Khi đó $M = (0;y;z)$.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{0-3}{3} = \dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{0-3}{3} = \dfrac{z+3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = -2. \end{cases}$

Vậy $M = (0;-1;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$. Giao của mặt phẳng (P) với đường thẳng d là điểm $A\,(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $(a+b+c)$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $A\,(a;b;c) = d \cap (P)$ nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2a - b + c - 4 = 0 \\ \dfrac{a-2}{1} = \dfrac{b-1}{2} = \dfrac{c+2}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c - 4 = 0 \\ 2a - b - 3 = 0 \\ 2a + c - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(-1;4;5)$ tương ứng là

A. $\Delta\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{5}$.
B. $\Delta\colon \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+2}{5}$.
C. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+5}{2}$.
D. $\Delta\colon \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3;1;2)$, VTCP $\vec{u}=(-1;4;5)$ là

$$\Delta\colon \frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm O và A tương ứng là

A. $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$.
B. $\Delta\colon \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-6}{3}$.
C. $\Delta\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{-3}$.
D. $\Delta\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi B là điểm đối xứng của O qua A suy ra $B(-2;4;6)$.
Đường thẳng Δ đi qua B, VTCP $\overrightarrow{OA}=(-1;2;3)$ có phương trình là

$$\Delta\colon \frac{x+2}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(-1;1;3)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B tương ứng là

A. $\Delta\colon \dfrac{x+3}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.
B. $\Delta\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$.
C. $\Delta\colon \dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.
D. $\Delta\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-4;1;1)$.
Suy ra loại hai phương án "$\Delta\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$" và "$\Delta\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$".
Ta có $A\in\Delta\colon \dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $A\notin\Delta\colon \dfrac{x+3}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.
Suy ra $\Delta\colon \dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;3;-2)$ đồng thời vuông góc với hai véc tơ $\vec{n_1}=(1;1;3)$, $\vec{n_2}=(-2;4;0)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$.
B. $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.
C. $d\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.
D. $d\colon \dfrac{x+1}{-12}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z+2}{6}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\vec{u}=[\vec{n_1},\vec{n_2}]=(-12;-6;6)$. Nên đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-12;-6;6)$ nên loại phương án "$d\colon \dfrac{x+1}{-12}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z+2}{6}$".
Ta có

- $A \in d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$.
- $A \notin d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$.
- $A \notin d\colon \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

Vậy $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(4;0;1)$ đồng thời vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z - 6 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $d\colon \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$.
B. $d\colon \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.
C. $d\colon \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.
D. $d\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$.

LỜI GIẢI.

Ta có đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z - 6 = 0$ nên d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-1;2)$.

Suy ra loại các phương án

- $d\colon \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$.
- $d\colon \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.
- $d\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$.

Vậy $d\colon \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian giải tích $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;3;4)$ đồng thời song song với hai mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 1 = 0$ và $(Q)\colon 3x + 2y - z - 1 = 0$. Phương trình tham số của d là

A. $d\colon \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 4t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$.
B. $d\colon \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$.
C. $d\colon \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + t \end{cases}$.
D. $d\colon \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -4 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$.

LỜI GIẢI.

Hai mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 1 = 0$ và $(Q)\colon 3x + 2y - z - 1 = 0$ lần lượt có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (1;1;1)$, $\vec{n_2} = (3;2;-1)$.

Ta có $[\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (-3;4;-1)$.

Suy ra đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;-4;1)$.

Do đó loại các phương án

+ $d\colon \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 4t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$.
+ $d\colon \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$.
+ $d\colon \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -4 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$.

Vậy $d\colon \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + t \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - y + z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q)\colon 2x - 2y - z = 0$. Đường thẳng Δ là giao điểm của hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình tham số là

A. $\Delta\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$.

B. $\Delta\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

C. $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{1}{3} + t \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

D. $\Delta\colon \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hai mặt phẳng $x - y + z - 1 = 0$ và $2x - 2y - z = 0$ lần lượt có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (1; -1; 1)$, $\vec{n_2} = (2; -2; -1)$.

Ta có $[\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (3; 3; 0)$.

Suy ra đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 0)$.

Do đó loại các phương án

+) $\Delta\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$. +) $\Delta\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. +) $\Delta\colon \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases}$.

Vậy $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{1}{3} + t \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình $x - 2y + 3z - 6 = 0$ và $2x + y - 2z - 4 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y + 24}{8} = \dfrac{z + 14}{5}$.

B. $d\colon \dfrac{x - 4}{1} = \dfrac{y - 2}{2} = \dfrac{z}{-3}$.

C. $d\colon \dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y + 1}{-8} = \dfrac{z - 2}{1}$.

D. $d\colon \dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 7}{7} = \dfrac{z + 1}{-1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có hai mặt phẳng $x - 2y + 3z - 6 = 0$ và $2x + y - 2z - 4 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1} = (1; -2; 3)$ và $\vec{n_2} = (2; 1; -2)$.

Ta có $[\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (1; 8; 5)$.

Suy ra đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 8; 5)$.

Do đó loại các phương án

+) $d\colon \dfrac{x - 4}{1} = \dfrac{y - 2}{2} = \dfrac{z}{-3}$.

+) $d\colon \dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y + 1}{-8} = \dfrac{z - 2}{1}$.

+) $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-7}{7}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Vậy $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+24}{8}=\dfrac{z+14}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d qua điểm $A(3;1;-2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+4z-5=0$ có phương trình chính tắc là

A. $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-4}{2}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

C. $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **D.** $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+6}{4}$.

LỜI GIẢI.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+4z-5=0$ nên d có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;4)$ nên chọn phương án $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+6}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+y-3z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$. Để đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m=5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

LỜI GIẢI.

Ta có mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(m;1;-3)$ và đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;3)$.

Ta có $(P)\perp d \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow m\cdot 2+1\cdot(-1)-3\cdot 3=0 \Leftrightarrow m=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta)\colon \begin{cases} x=t\\ y=2-3t\\ z=1+2t\end{cases}$ và $(d)\colon \dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$. Góc tạo bởi hai đường thẳng Δ và d nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(25^\circ;31^\circ)$. **B.** $(10^\circ;24^\circ)$. **C.** $(70^\circ;75^\circ)$. **D.** $(32^\circ;68^\circ)$.

LỜI GIẢI.

Đường thẳng (Δ) có VTCP là $\vec{u}_1=(1;-3;2)$.

Đường thẳng (d) có VTCP là $\vec{u}_2=(-3;2;2)$.

Góc giữa hai đường thẳng là $\cos(\Delta;d)=\dfrac{|-3-6+4|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}}$.

Suy ra góc giữa hai đường thẳng là $(\Delta;d)\approx 71^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z=0$ và $(d)\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$. Góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(60^\circ;70^\circ)$. **B.** $(30^\circ;36^\circ)$. **C.** $(45^\circ;60^\circ)$. **D.** $(24^\circ;30^\circ)$.

LỜI GIẢI.

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{u}_1=(1;2;2)$.

Đường thẳng (d) có VTCP là $\vec{u}_2=(2;-1;3)$.

Góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) là $\sin\left((P);(d)\right) = \dfrac{|2-2+6|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{14}}$.
Suy ra góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là $((P);(d)) \approx 32^\circ$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{m}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-3}{1}$. Để hai đường thẳng này vuông góc với nhau thì

A. $m \in \{9\}$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -6$. **D.** $m = -1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u}_1 = (-2;1;m)$.
Đường thẳng d_2 có VTCP là $\vec{u}_2 = (3;-3;1)$.
Để hai đường thẳng này vuông góc với nhau thì $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow -6-3+m = 0 \Rightarrow m = 9$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ và điểm $A(0;3;3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ là $H(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $(a+b+c)$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng Δ có điểm $M(1;2;-1)$ và VTCP là $\vec{u} = (2;1;-2)$.
Hình chiếu vuông góc của $A(0;3;3)$ lên đường thẳng Δ là $H(a;b;c)$ nên $\overrightarrow{AH} = (a;b-3;c-3)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0\\ \overrightarrow{MH} = k\vec{u}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b-3-2c+6=0\\ a-1=2k\\ b-2=k\\ c+1=-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-1\\ a=-1\\ b=1\\ c=1.\end{cases}$$

Vậy $a+b+c = 1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ và điểm $A(3;3;5)$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ tương ứng là

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng Δ có điểm $M(3;0;2)$ và VTCP là $\vec{u} = (2;2;1)$.
$\overrightarrow{MA} = (0;3;3)$, $\left|[\overrightarrow{MA};\vec{u}]\right| = (3;-6;6)$.
Khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ tương ứng là

$$\mathrm{d}(A;\Delta) = \frac{\left|[\overrightarrow{MA};\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{9+36+36}}{\sqrt{9}} = 3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ và điểm $A(0;3;3)$. Gọi điểm đối xứng với A qua đường thẳng Δ là $A'(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** -4. **C.** $\dfrac{11}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

LỜI GIẢI.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và có VTCP là $\vec{u}=(2;1;-2)$.
Hình chiếu vuông góc của $A(0;3;3)$ lên đường thẳng Δ là $H(a_1;b_1;c_1)$
nên $\overrightarrow{AH}=(a_1;b_1-3;c_1-3)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0\\ \overrightarrow{MH}=k\vec{u}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a_1+b_1-3-2c_1+6=0\\ a_1-1=2k\\ b_1-2=k\\ c_1+1=-2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\ a_1=-1\\ b_1=1\\ c_1=1\end{cases}\Rightarrow H(-1;1;1).$$

$A'(a;b;c)$ đối xứng với A qua đường thẳng Δ nên H là trung điểm của AA' suy ra $A'(-2;-1;-1)$
Vậy $a+b+c=-4$.
Chọn đáp án B □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z-6=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Gọi điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (P) là $A'(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** -2. **C.** -1. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

LỜI GIẢI.

Đường thẳng Δ qua $A(1;1;-2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z-6=0$ có phương trình là $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t\\ z=-2-2t.\end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của Δ và (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x-2y-2z-6=0\\ x=1+t\\ y=1-2t\\ z=-2-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{-8}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{-8}{3}\right).$$

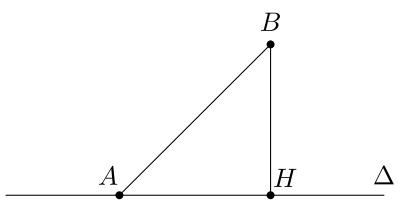
A' là điểm đối xứng qua (P) nên H là trung điểm của AA' suy ra $A'\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{-1}{3};\dfrac{-10}{3}\right)$.

Vậy $a+b+c=-2$.
Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B(1;3;-1)$. Đường thẳng d đi qua A, đường thẳng vuông góc với trục Oz và đồng thời khoảng cách từ B đến đường thẳng d lớn nhất. Phương trình tham số của đường thẳng d tương ứng là

A. $d\colon\begin{cases}x=2+t\\ y=2-t\\ z=1\end{cases}$. **B.** $d\colon\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+2t\\ z=0\end{cases}$. **C.** $d\colon\begin{cases}x=2\\ y=2\\ z=1+t\end{cases}$. **D.** $d\colon\begin{cases}x=2-3t\\ y=2-3t\\ z=1\end{cases}$.

LỜI GIẢI.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng d. Khi đó:
$BH = \mathrm{d}(B; d) \leq BA \Rightarrow \mathrm{d}(B; d)_{\max} = BA$, khi đó $BA \perp d$.
Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1; -1; 2)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\vec{u}_d = \left[\overrightarrow{BA}; \vec{k}\right] = (-1; -1; 0)$.

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 2 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{m} = \dfrac{y-3}{n} = \dfrac{z+1}{n-3}$. Để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì tích $(m \cdot n)$ bằng

A. 18. **B.** -8. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** 12.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì VTCP của đường thẳng d phải song song với VTPT của mặt phẳng (P), tức là:

$(m; n; n-3) = k \cdot (1; 2; 3) \Leftrightarrow \dfrac{m}{1} = \dfrac{n}{2} = \dfrac{n-3}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -6 \end{cases} \Rightarrow m \cdot n = 18.$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $\Delta_1\colon \dfrac{x+2}{m} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-3}{m} = \dfrac{z-2}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của sin góc φ tạo bởi hai đường thẳng tương ứng là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{10}$. **D.** 0.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để sin nhỏ nhất thì cô-sin lớn nhất. Ta đi tính cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng (cũng chính là góc tạo bởi hai VTCP $\vec{u}_1 = (m; -2; 1)$; $\vec{u}_2 = (1; m; 2)$.

Ta có $\cos\varphi = \cos(\Delta_1; \Delta_2) = \dfrac{|m-2|}{m^2+5} = f(m)$.

Khảo sát hàm này, ta có bảng biến thiên

m	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f'(m)$			0		$\Vert$		0		
$f(m)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{10}$	$\searrow$	0

Suy ra giá trị lớn nhất là $(\cos\varphi)_{\max} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (\sin\varphi)_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y - z - 6 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đường thẳng d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Khi đó dạng phương trình tổng quát của (α) có dạng $ax + by + z + d = 0$. Khi đó giá trị của $a + b + d$ bằng

A. 6. **B.** −7. **C.** 5. **D.** −3.

✍ **LỜI GIẢI.**

- VTPT của mặt phẳng (α) là $n_{(\alpha)}^{\rightarrow} = (a;b;1)$. Từ giả thiết đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) suy ra $\vec{u}_{(\Delta)} \cdot \vec{n}_{(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow (1;2;-2)\cdot(a;b;1) = a + 2b - 2 = 0(1)$
- Góc tạo bởi mặt phẳng (α) và mặt phẳng (P) nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ cos của góc đó lớn nhất $\Leftrightarrow$
- $|\cos(\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_\alpha})| = \left|\dfrac{\overrightarrow{n_p}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{n_p}|\cdot|\overrightarrow{n_\alpha}|}\right| = \left|\dfrac{1.a + 1.b - 1.1}{\sqrt{a^2+b^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\right| = \dfrac{|a+b-1|}{\sqrt{3(a^2+b^2+1)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất
- Từ (1) suy ra $a = 2 - 2b$ thế vào biểu thức COS, ta được
$|\cos(\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_\alpha})| = \dfrac{|2-2b+b-1|}{\sqrt{3((2-2b)^2+b^2+1)}} = \dfrac{|1-b|}{\sqrt{3(5b^2-8b+5)}} = \sqrt{\dfrac{b^2-2b+1}{3(5b^2-8b+5)}}$
- Khảo sát hàm số trên ta nhận được giá trị lớn nhất của nó là $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ khi $b = -1 \rightarrow a = 2 - 2b = 4$.
- Suy ra mặt phẳng $(\alpha): 4x = y + z + d = 0$.
- Lấy $M(2;1;-1)$ thuộc d, suy ra M cũng nằm trên (α), ta có $4.2 - 1 + (-1) + d = 0 \longrightarrow d = -6$.
- Suy ra phương trình mặt phẳng (α): $4x - y + z - 6 = 0 \longrightarrow (a+b+d) = (4-1-6) = -3$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy) là đường thẳng có phương trình tham số tương ứng là

A. $d'\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$. **B.** $d'\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 0 \end{cases}$. **C.** $d'\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3-2t \end{cases}$. **D.** $d'\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z0t \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Với những bài toán hình chiếu vuông góc của một đường thẳng lên một mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ thì ta có thể làm nhanh như sau
- Ta đi tìm hình chiếu vuông góc của VTCP của đường thẳng d lên mặt phẳng (Oxy) như sau
- VTCP của đường thẳng d là: $\overrightarrow{u_{(d)}} = (2;1;-2) \Rightarrow$ hình chiếu của nó lên mặt phẳng (Oxy) là:
- $\overrightarrow{u_{(d')}} = (2;1;0)$
- Lấy một điểm nằm trên đường thẳng d là: $M(1;2;3) \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) tương ứng là $M'(1;2;0)$

- Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (Oxy) tương ứng là $d'\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - z - 4 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) có phương trình chính tắc tương ứng là

A. $d'\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{5}$.

B. $d'\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-4}$.

C. $d'\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-1}$.

D. $d'\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{5}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) là $d' = (P) \cap (Q)$.
- Lập phương trình mặt phẳng (Q) như sau
  - Cặp VTCP của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{u_d} = (2;-1;-2)$ và $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;-1;-1) \Rightarrow$ VTPT của (Q) là
  - $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (-1;-2;0)$. Chọn mặt phẳng (Q) đi qua $A(0;1;-1) \in d$.
  - Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là $-1(x-0) - 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow (Q)\colon x + 2y - 2 = 0$
- Chọn điểm thuộc (P) , (Q) sao cho $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y - z - 4 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;1;-5)$.
- Cặp VTPT của d' là $\vec{n_{(P)}} = (2;-1;-1); \vec{n_{(Q)}} = (1;2;0) \Rightarrow$ VTCP là: $\vec{u_{(d)}} = \left[\vec{n_{(P)}}; \vec{n_{(Q)}}\right] = (2;-1;5)$
- Suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng d' là $d'\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x - y + 2z - 6 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) có phương trình chính tắc tương ứng là

A. $d'\colon \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

B. $d'\colon \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$.

C. $d'\colon \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

D. $d'\colon \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Ta có vecto chỉ phương của đường thẳng $d\colon \vec{u}_d = (4;2;-1)$, vecto pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon \vec{n}(_P) = (1;-1;2)$. Suy ra $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{u}_d = 0$ do đó $d \parallel (P)$, nên $d \parallel d'$ (P) hay $\vec{u}_{d'} = \vec{u}_d = (4;2;-1)$.
- Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng P

- Véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d\right] = (-3; 9; 6)$
- $A(-3; -1; 2) \in d \Rightarrow A \in (Q)$
- Phương trình của (Q) là $x - 3y - 2z + 4 = 0$

- Ta có $d' = (P) \cup (Q)$, xét hệ phương trình $\begin{cases} x - y + 2z - 6 = 0 & (P) \\ x - 3y - 2z + 4 = 0 & (Q) \end{cases}$
  - Thay $x = -1$ vào hệ phương trình suy ra $y = -1$, $z = 3$.
  - Suy ra điểm $B(-1; -1; 3) \in (P) \cup (Q) \Rightarrow B \in d'$.
- Phương trình đường thẳng $d'\colon \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon mx + y + (m-1)z + 1 = 0$ và điểm $A(2; 1; 0)$. Khoảng cách lớn nhất tính từ A đến mặt phẳng (P) bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

LỜI GIẢI.

- Mặt phẳng (P) luôn qua 2 điểm $M(0; -1; 0)$ và $N(1; -2; -1)$ cố định.
- Suy ra $d\left(A, (P)\right) \leq d\left(A, MN\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MN}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = 2\sqrt{2}$.
- Dấu bằng xảy ra khi $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MN}\right] \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow m = 1$.
- Vậy $d\left(A, (P)\right)_{min} = 2\sqrt{2}$ khi $m = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon ax + by + cz + 1 = 0$ và điểm $A(4; 1; 2)$, biết mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$. Khoảng cách lớn nhất tính từ A đến mặt phẳng (P) bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

LỜI GIẢI.

- Đường thẳng d qua $M(3; 0; 3)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}_d = (3; -1; 2)$.
- Ta có $\overrightarrow{AM} = (-1; -1; 1)$, $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}_d\right] = (-1; 5; 4)$
- Ta có $d\left(A, (P)\right) \leq d\left(A, d\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}_d\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u}_d\right|} = \sqrt{3}$.
- Dấu bằng xảy ra khi $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}_d\right] \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow -a + 5b + 4c = 0$.
- Vậy $d\left(A, (P)\right)_{min} = \sqrt{3}$ khi $-a + 5b + 4c = 0$

Chọn đáp án C □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+(2m-1)y+mz-2=0$ đi qua một đường thẳng d cố định. Biết rằng VTCP của đường thẳng d có dạng $\overrightarrow{u_d}=(a;2;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 0. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 6.

✍ LỜI GIẢI.

- Ta biến đổi phương trình mặt phẳng (P) về dạng: $(x-2y+z)m-(x+y+2)=0 \qquad (1)$
- Gọi $M(x;y;z)$ thuộc đường thẳng d, suy ra toạ độ M thoả mãn phương trình (1), $\forall \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 & (Q) \\ x+y+2=0 & (R) \end{cases}$
- Suy ra đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(Q): x-2y+z=0$ và $(R): x+y+2=0$.
  - Ta có $\vec{n}_Q=(1;-2;1)$ và $\vec{n}_R=(1;1;0)$, suy ra $[\vec{n}_Q,\vec{n}_R]=(-1;-1;3)$.
  - Suy ra $\vec{u}_d=(2;2;-6)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng d.
- Vậy $a+b=-4$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(2;0;-2)$ và nằm trong mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z-6=0$. Gọi M và m lần lượt là khoảng cách lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tính từ $B(2;1;0)$ đến đường thẳng d. Khi đó giá trị của biểu thức $(2M-3m)$ bằng

A. $2+\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** 2.

✍ LỜI GIẢI.

- Ta có $d(B,(P)) \le d(B;d) \le AB \Leftrightarrow 2 \le d(B;d) \le \sqrt{5}$.
- Suy ra $M=\sqrt{5}$ và $m=2$.
- Vậy $M+m=2+\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+mt \\ y=2+nt \\ z=-2+(m - \end{cases}$
Gọi M và m lần lượt là khoảng cách lớn nhất và khoảng cách nhỏ nhất tính từ A đến đường thẳng d. Khi đó giá trị của biểu thức $(M+m\sqrt{6})$ bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

✍ LỜI GIẢI.

- Ta có $B(1;2;-2) \in d$.
- Từ phương trình đường thẳng d suy ra: $x-2y-z+1=0$, do đó d nằm trong mặt phẳng $(P): x-2y-z+1=0$.
- Suy ra $d(B,(P)) \le d(A;d) \le AB \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{6}} \le d(B;d) \le 5$. Suy ra $M=5$, $m=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.
- Vậy $M+2m=7$

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;-1)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = a - at + 1 \\ y = 2 - t \\ z = -b + bt \end{cases}$, với a và b là những tham số thực. Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ đạt giá trị lớn nhất thì biểu thức $T = a^2 + b^2 + 4b - 2a + 2019$ đạt giá trị nhỏ nhất tương ứng bằng

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2016. **D.** 2020.

LỜI GIẢI.

- Đường thẳng Δ luôn qua $B(1;1;0)$ cố định và có vecto chỉ phương $\vec{u}_d = (-a;-1;b)$.
- Suy ra $d(A;\Delta) \le AB = \sqrt{5}$.
- Dấu " $=$ " xảy ra khi $AB \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$.
- Thay $b = -2a$ vào T, ta có: $T = 5a^2 - 10a + 2019 = 5(t-1)^2 + 2014 \ge 2014$.
- Vậy $T_{min} = 2014$ khi $a = 1$

Chọn đáp án (A) □

BÀI 5 CƠ BẢN VỀ ĐƯỜNG THẲNG - P2

Câu 1. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 5y - 3z - 4 = 0$. Hoành độ giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng

A. 7. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

LỜI GIẢI.

Tọa độ giao điểm của Δ và (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{2} \\ 3x - 5y - 3z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - 3z = 2 \\ 3x - 5y - 3z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \\ z = 4. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon ax + by + z - 12 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-3}{-1}$. Biết $d \subset (\alpha)$, giá trị của biểu thức $T = 2a - 3b$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

LỜI GIẢI.

Mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}(a;b;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Đường thẳng d nhận $\vec{u}(2;-3;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vì d nằm trong (α) nên

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2a - 3b - 1 = 0 \Leftrightarrow 2a - 3b = 1 \Rightarrow T = 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d_1 và d_2 song song. **B.** d_1 và d_2 chéo nhau.
C. d_1 và d_2 cắt nhau. **D.** d_1 và d_2 trùng nhau.

✍ LỜI GIẢI.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;2)$ và nhận $\overrightarrow{u}_1(2;-1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(-1;2;1)$ và nhận $\overrightarrow{u}_2(-4;2;-2)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vì $\begin{cases}\overrightarrow{u}_2=-2\overrightarrow{u}_1\\ M_1\in d_2\end{cases}$ nên $d_1\equiv d_2$.
Chọn đáp án D □

Câu 4. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-2t\\ y=3t\\ z=0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d \parallel (Oyz)$. **B.** $d \parallel (Oxy)$. **C.** $d \parallel (Oxz)$. **D.** $d\subset (Oxy)$.

✍ LỜI GIẢI.

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm tùy ý thuộc đường thẳng d, khi đó $z_0=0$ nên $M\in (Oxy)$.
Suy ra $d\subset (Oxy)$.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-3t\\ y=3-t\\ z=2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Đường thẳng d song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x-y+z+1=0$. **B.** $x-2y-z+2=0$.
C. $x+y+z+1=0$. **D.** $2x-y+z+3=0$.

✍ LỜI GIẢI.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;3;0)$ và nhận $\overrightarrow{u}(-3;-1;2)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+1=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}(1;-1;1)$.
Vì $\begin{cases}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=0\\ M\notin (P)\end{cases}$ nên $d \parallel (P)$.
Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Vị trí tương đối của d_1 và d_2 là

A. trùng nhau. **B.** song song. **C.** cắt nhau. **D.** chéo nhau.

✍ LỜI GIẢI.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;2;2)$ nhận véc-tơ $\overrightarrow{u}_1(2;-1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(3;1;0)$ nhận véc-tơ $\overrightarrow{u}_2(-2;1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vì $\begin{cases}\overrightarrow{u}_2=-\overrightarrow{u_1}\\ M_1\notin d_2\end{cases}$ nên $d_1 \parallel d_2$.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-a}{4}=\dfrac{y-b}{a}=\dfrac{z-1}{b}$. Biết d_1 và d_2 song song với nhau. Giá trị của biểu thức

$T = a + b$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;2;2)$ nhận véc-tơ $\overrightarrow{u}_1(2;-1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(a;b;1)$ nhận véc-tơ $\overrightarrow{u}_2(4;a;b)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vì $d_1 \parallel d_2$ nên

$$\frac{4}{2} = \frac{a}{-1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + z - 1 = 0$ và $(\beta)\colon x + 3y - 6 = 0$. Giao điểm của d và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - z - 2 = 0$ có tung độ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** -3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tọa độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{4} \\ y = \dfrac{5}{4} \\ z = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm B và song song với hai mặt mặt phẳng (Oxy) và $(\alpha)\colon 2x - y - 6z - 5 = 0$. Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oyz). Phương trình của đường thẳng d' là

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = -1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng (Oxy) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_1(0;0;1)$.
Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_2(2;-1;-6)$.
Đường thẳng d song song với hai mặt phẳng (Oxy) và (α) nên d nhận $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{n}_1;\overrightarrow{n}_2] = (1;2;0)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Suy ra phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -1. \end{cases}$

Gọi M là giao điểm của d và mặt phẳng (Oyz), suy ra $M(0;-4;-1)$.
Gọi N là hình chiếu vuông góc của $B(2;0;-1)$ trên (Oyz), suy ra $N(0;0;-1)$.
Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oyz) nên d' đi qua M, N.
Ta có $\overrightarrow{MN}(0;4;0)$, suy ra $\overrightarrow{u}(0;2;0)$ là véc-tơ chỉ phương của d'.

Vậy phương trình tham số của d': $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = -1. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Nhận xét đúng về vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

A. $\Delta_1 \parallel \Delta_2$. **B.** Δ_1 cắt Δ_2. **C.** $\Delta_1 \equiv \Delta_2$. **D.** Δ_1 chéo Δ_2.

LỜI GIẢI.

Đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_1=(5;-2;1)$ và $\overrightarrow{u}_2=(-5;2;-1)$.
Vì $\overrightarrow{u}_1=-\overrightarrow{u}_2$ nên $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ hoặc $\Delta_1\equiv\Delta_2$.
Ta có $M(1;3;-3)\in\Delta_1$ nhưng $M\notin\Delta_2$ nên $\Delta_1\parallel\Delta_2$.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-a}{m}=\dfrac{z-b}{n}$. Nếu hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trùng nhau thì ta có $(a+b+m+n)$ tương ứng bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** -12. **D.** -9.

LỜI GIẢI.

Để $\Delta_1\equiv\Delta_2$ thì trước hết phải có $\dfrac{1}{2}=\dfrac{m}{3}=\dfrac{n}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{3}{2}\\ n=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Tiếp đến, điểm $M(3;-2;1)\in\Delta_1$ thì $M\in\Delta_2\Rightarrow\dfrac{3+2}{1}=\dfrac{-2-a}{\frac{3}{2}}=\dfrac{1-b}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{19}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

Vậy $a+b+m+n=-9$.
Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z-2}{n}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+m-1}{m}=\dfrac{y+8}{8}=\dfrac{z-4}{n-1}$. Để hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 song song (không tính trường hợp trùng nhau) thì số giá trị thực của tham số m thỏa mãn là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

LỜI GIẢI.

Vì $\Delta_1\parallel\Delta_2$ nên $\dfrac{m}{2}=\dfrac{8}{m}=\dfrac{n-1}{n}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\pm4\\ \dfrac{n-1}{n}=\dfrac{m}{2}.\end{cases}$
Với $m=4$ thì $n=-1$ và ta có $\Delta_1\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$, $\Delta_2\colon\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+8}{8}=\dfrac{z-4}{-2}$.
Dễ thấy $M(1;0;2)\in\Delta_1$ và $M(1;0;2)\in\Delta_2$. Như thế $\Delta_1\equiv\Delta_2$.
Với $m=-4$ thì $n=\dfrac{1}{3}$ và ta có $\Delta_1\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-2}{\frac{1}{3}}$, $\Delta_2\colon\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y+8}{8}=\dfrac{z-4}{-\frac{2}{3}}$.
Dễ thấy $M(1;0;2)\in\Delta_1$ và $M(1;0;2)\notin\Delta_2$. Như thế $\Delta_1\parallel\Delta_2$.
Vậy có một giá trị thực của tham số m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $d_1\colon\dfrac{x-2}{a}=\dfrac{y+1}{b}=\dfrac{z-a}{2}$ và $d_2\colon\dfrac{x-b+2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. Biết rằng hai đường thẳng này song song với nhau. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng tương ứng bằng

A. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì $d_1 \mathbin{/\!/} d_2$ nên $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{2}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-2. \end{cases}$

Khi đó $d_1\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Đường thẳng d_2 đi qua $N(-4;0;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;-1;1)$.

Ta có $M(2;-1;4)\in d_1$ và $\overrightarrow{MN}=(-6;1;-1)$.

Vì $d_1 \mathbin{/\!/} d_2$ nên $\mathrm{d}\left(d_1,d_2\right)=\mathrm{d}\left(M,d_2\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{MN}\right]\right|}{|\overrightarrow{u}|}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{2}$. Nhận xét đúng về vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

A. Hai đường thẳng cắt nhau tại $A(4;-1;-1)$.

B. Hai đường thẳng cắt nhau tại $A(1;0;-3)$.

C. Hai đường thẳng chéo nhau.

D. Hai đường thẳng song song với nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_1=(3;1;-2)$ và $\overrightarrow{u}_2=(4;-1;2)$.

Dễ thấy $\dfrac{3}{4}\neq\dfrac{1}{-1}$ nên Δ_1 và Δ_2 cắt nhau hoặc chéo nhau.

Phương trình tham số của Δ_1 là $\Delta_1\colon \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=1-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Phương trình tham số của Δ_2 là $\Delta_2\colon \begin{cases} x=-4+4t' \\ y=1-t' \\ z=-5+2t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}.$

Hệ phương trình $\begin{cases} 1+3t=-4+4t' \\ -2+t=1-t' \\ 1-2t=-5+2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=2. \end{cases}$

Do đó Δ_1 cắt Δ_2 tại $A(4;-1;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{26}}$. **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(2;-1;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_1=(2;-1;2)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua $M_2(-2;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_2=(3;-2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}=(-4;2;-3)$.

Vậy $\mathrm{d}\left(\Delta_1, \Delta_2\right) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|[\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2]\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 \colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 \\ z = -2 - t \end{cases}$ và đường thẳng $\Delta_2 \colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{2}$. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng trên cắt mặt phẳng $(\alpha) \colon 3x - 2y - 23 = 0$ tại điểm $A(a; b; c)$. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 2b - c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 8.

✍ LỜI GIẢI.

Đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_1 = (1; 0; -1)$ và $\overrightarrow{u}_2 = (1; 2; 2)$.
Gọi Δ là đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2.
Giả sử $M_1 = \Delta \cap \Delta_1$ và $M_2 = \Delta \cap \Delta_2$.
Khi đó $M_1(2+t; 2; -2-t)$, $M_2(4+t'; 1+2t'; 3+2t')$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = (t' - t + 2; 2t' - 1; 2t' + t + 5)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1(t' - t + 2) - 1(2t' + t + 5) = 0 \\ 1\left(t' - t + 2\right) + 2\left(2t' - 1\right) + 2\left(2t' + t + 5\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ t = -1. \end{cases}$

Suy ra $M_1(1; 2; -1)$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; -3; 2)$.

Do đó phương trình đường vuông góc chung là $\Delta \colon \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - 3s \\ z = -1 + 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

Theo đề bài thì $A = \Delta \cap (\alpha)$ nên

$$\begin{cases} a = 1 + 2s \\ b = 2 - 3s \\ c = -1 + 2s \\ 3(1 + 2s) - 2(2 - 3s) - 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \\ c = 3 \\ s = 2. \end{cases}$$

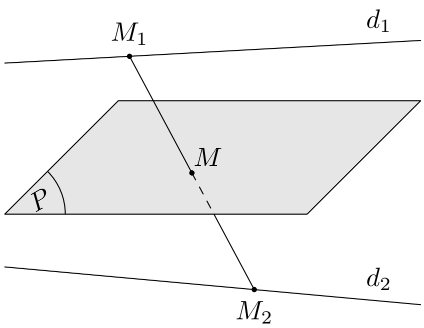
Vậy $T = 3a + 2b - c = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $d_1 \colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+3}{3}$ và đường thẳng $d_2 \colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-2}$. Mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là $ax + by + cz - 18 = 0$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng

A. 35. **B.** -36. **C.** -16. **D.** 27.

✍ LỜI GIẢI.



Vì (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 nên hai đường thẳng này nằm về hai phía của (P) và song song với (P).
Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(2; 1; -3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_1 = (2; -1; 3)$.
Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(3; 0; 2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_2 = (1; 2; -2)$.
Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] = (-4; 7; 5)$.
Trung điểm của M_1M_2 là $M = \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ thuộc (P)

Do đó phương trình mặt phẳng (P) là

$$-4\left(x-\frac{5}{2}\right)+7\left(y-\frac{1}{2}\right)+5\left(z+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -4x+7y+5z+9=0.$$

Theo đề bài $(P)\colon ax+by+cz-18=0$.

Suy ra $\dfrac{a}{-4}=\dfrac{b}{7}=\dfrac{c}{5}=\dfrac{-18}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-14 \\ c=-10. \end{cases}$

Vậy $T=a+b+c=-16$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $d_1\colon \dfrac{x-2}{a}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Với a là tham số thực để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $I=(m;n;p)$. Giá trị của biểu thức $T=a+m+n+p$ bằng

A. 10. **B.** 11. **C.** 19. **D.** 8.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tham số của $d_1\colon \begin{cases} x=2+at \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Phương trình tham số của $d_2\colon \begin{cases} x=2+2s \\ y=-1+2s \\ z=-s \end{cases}, s\in\mathbb{R}$.

Hệ phương trình $\begin{cases} 2+at=2+2s \\ 2-t=-1+2s \\ t=-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ t=-3 \\ s=3. \end{cases}$

Giao điểm của d_1 và d_2 là $I(8;5;-3)$.

Suy ra $m=8$, $m=5$, $p=-3$.

Vậy $T=a+m+n+p=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $d_1\colon \dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Với a là tham số thực. Biết rằng tồn tại mặt phẳng (P) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Giá trị của $T=a+b+c+d$ bằng

A. 12. **B.** -7. **C.** -8. **D.** -10.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đưa hai đường thẳng về dạng tham số là $d_1\colon \begin{cases} x=1+at_1 \\ y=2t_1 \\ z=2-2t_1 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=3+t_2 \\ y=2t_2 \\ z=t_2. \end{cases}$

Vì d_1 và d_2 không song song và không trùng nhau nên tồn tại mặt phẳng chứa cả hai đường thẳng thì hai đường thẳng này phải cắt nhau tại một điểm.

Hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình giao điểm phải có nghiệm duy nhất.

Khi đó
$$\begin{cases}1+at_1=3+t_2\\ 2t_1=2t_2\\ 2-2t_1=t_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}at_1=2+t_2\\ t_1=t_2\\ 2t_1+t_2=2.\end{cases}$$
Từ hai phương trình cuối suy ra được $t_1=t_2=\dfrac{3}{2}$, thay vào phương trình đầu ta được
$$at_1=2+t_2\Leftrightarrow a\cdot\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}\Leftrightarrow a=4.$$
Khi đó hai đường thẳng là có VTCP lần lượt là $\overrightarrow{u}_1=(4;2;-2)$ và $\overrightarrow{u}_2=(1;2;1)$.
Suy ra VTPT của mặt phẳng (P) là
$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2]=(6;-6;6)=6(1;-1;1).$$
Chọn (P) đi qua điểm $A=(1;0;2)\in d_1$, suy ra phương trình mặt phẳng (P) là
$$1(x-1)-1(y-0)+1(z-2)=0\Leftrightarrow x-y+z-3=0.$$
So sánh với giải thiết
$$\begin{aligned}(P)\colon x-y+z-3=ax+by+cz+d=0 &\Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{1}=\frac{d}{-3}=\frac{4}{1}\\ &\Leftrightarrow a=4;b=-4;c=4;d=-12.\end{aligned}$$
Suy ra $T=a+b+c+d=-8$.
Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và điểm $A(3;1;0)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và điểm A có véc-tơ pháp tuyến là

A. $(0;2;1)$. **B.** $(0;2;0)$. **C.** $(1;0;3)$. **D.** $(-1;3;0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Chọn điểm thuộc đường thẳng d là $M(2;1;0)$. Suy ra VTCP của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{u}_d=(2;1;-2)$ và $\overrightarrow{AM}=(-1;0;0)$.
Suy ra VTPT của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{u}_d,\overrightarrow{AM}\right]=(0;2;1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình tổng quát là $(P)\colon 2x+by+cz+d=0$. Giá trị biểu thức $(b+c+d)$ tương ứng bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Chọn điểm $A\in d_1$ có tọa độ $A(1;2;1)$ và $B\in d_2$ có tọa độ $B(3;-1;2)$.
Cặp VTCP của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{u}_{d_1}=(2;1;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(2;-3;1)$.
Suy ra VTPT của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{u}_{d_1},\overrightarrow{AB}\right]=(4;0;8)=4(1;0;2)$.
Suy ra phương trình tổng quát mặt phẳng (P) là
$$1(x-1)+0(y-2)+2(z-1)=0\Leftrightarrow x+2z-3=0\Leftrightarrow 2x+4z-6=0.$$
Do đó $b=0$, $c=4$, $d=-6$.
Vậy $(b+c+d)=-2$.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;2;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$. Biết rằng đường thẳng d đi qua A, d cắt Δ và d vuông góc với Δ. Phương trình chính tắc của d tương ứng là

A. $d\colon \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+4}{2}$.

B. $d\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-1}$.

C. $d\colon \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{2}$.

D. $d\colon \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $B = d \cap \Delta \Rightarrow B \in \Delta \Rightarrow B = (2t; 1+2t; -2+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2t+2; 2t-1; t-2)$.

Theo giả thiết ta có $d \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}_{\Delta} = 0 \Rightarrow 2(2t+2) + 2(2t-1) + 1(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2t+2; 2t-1; t-2) = (2;-1;-2)$.

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{AB} = (2;-1;-2)$ và đi qua điểm $A(-2;2;0)$ nên có phương trình chính tắc là

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$, $B(1;1;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-4}{2}$. Biết rằng đường thẳng d đi qua A, d cắt Δ và d vuông góc với $\overrightarrow{OB}$. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 4.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $C = d \cap \Delta \Rightarrow C \in \Delta \Rightarrow C = (4+t; -4-3t; 4+2t)$.

Suy ra $\overrightarrow{AC} = (t+2; -3t-4; 2t+3)$.

Ta có $d \perp OB \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 1(t+2) + 1(-3t-4) + 0(2t+4) = 0 \Rightarrow t = -1$.

Suy ra $\overrightarrow{AC} = (1;-1;1)$ là VTCP của đường thẳng d.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -t \\ z = 1+t. \end{cases}$

Có $d \cap (Oyz) \Rightarrow x = 0 = 2+t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow y = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;-2;1)$ và hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{3}$. Biết rằng đường thẳng d đi qua A và cắt cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2. Phương trình chính tắc của đường thẳng d tương ứng là

A. $d\colon \dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$.

B. $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$.

C. $d\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$.

D. $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$ với (α) đi qua A và Δ_1, (β) đi qua A và Δ_2.

Chọn điểm $M_1 \in \Delta_1 \Rightarrow M_1 = (1;0;-1)$; $M_2 \in \Delta_2 \Rightarrow M_2 = (5;-3;2)$.

VTPT của (α) được xác định bằng cặp VTCP của nó: $\overrightarrow{u}_{\Delta_1} = (2;-1;1)$ và $\overrightarrow{AM_1} = (-3;2;-2)$.

Suy ra $\overrightarrow{n}_{(\alpha)} = \left[\overrightarrow{u}_{\Delta_1}, \overrightarrow{AM_1}\right] = (0;1;1)$.

VTPT của (β) được xác định bằng cặp VTCP của nó là $\overrightarrow{u}_{\Delta_2} = (2;1;3)$ và $\overrightarrow{AM_2} = (1;-1;1)$.

Suy ra $\overrightarrow{n}_{(\beta)} = \left[\overrightarrow{u}_{\Delta_2}, \overrightarrow{AM_2}\right] = (4;1;-3)$.
Nhận thấy rằng $d \subset (\alpha) \Rightarrow d \perp \overrightarrow{n}_{(\alpha)}$; $d \subset (\beta) \Rightarrow d \perp \overrightarrow{n}_{(\beta)}$. Suy ra cặp VTPT của d là $\overrightarrow{n}_{(\alpha)}$ và $\overrightarrow{n}_{(\beta)}$.
Suy ra VTCPT của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d = \left[\overrightarrow{n}_{(\alpha)}, \overrightarrow{n}_{(\beta)}\right] = (-4;4;-4) = -4(1;-1;1)$.
Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{u} = (1;3;2)$ và hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$. Biết rằng đường thẳng d song song với $\overrightarrow{u} = (1;3;2)$ và cắt cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2. Phương trình chính tắc của d tương ứng là

A. $d\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{2}$.
B. $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+3}{-3}$.
C. $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-2}{2}$.
D. $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{6} = \dfrac{z-1}{4}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng Δ_1 có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4 + 2t_1 \\ y = -1 - t_1 \\ z = 1 + t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$.

Đường thẳng Δ_2 có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 - 4t_2 \\ y = 3 + 2t_2 \\ z = 2 + t_2 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}$.

Gọi điểm $M_1 = \Delta_1 \cap d \Rightarrow M_1 = (4 + 2t_1; -1 - t_1; 1 + t_1)$; $M_2 = (3 - 4t_2; 3 + 2t_2; 2 + t_2)$.
Suy ra $\overrightarrow{M_1M_2} = (-4t_2 - 2t_1 - 1; 2t_2 + t_1 + 4; t_2 - t_1 + 1)$.
Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} = k\overrightarrow{u} \quad &\Rightarrow \quad \frac{-4t_2 - 2t_1 - 1}{1} = \frac{2t_2 + t_1 + 4}{3} = \frac{t_2 - t_1 + 1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} M_1 = (2;0;0) \\ M_2 = (3;3;2). \end{cases} \end{aligned}$$

Đường thẳng d đi qua điểm $M_2(3;3;2)$ và nhận $\overrightarrow{u} = (1;3;2)$ làm VTCP có phương trình chính tắc là

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + z + 11 = 0$. Biết rằng đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), d cắt và vuông góc với Δ. Điểm A nằm trên d và có hoành độ $x_A = -4$, tung độ của điểm A tương ứng là

A. 3.
B. -3.
C. 5.
D. -4.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì $\Delta \not\subset (P)$ nên đường thẳng d chỉ có thể cắt Δ tại giao điểm B của Δ với mặt phẳng (P).
Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(0;1;1)$, nhận $\vec{u}_\Delta = (1;2;-2)$ làm VTCP có phương trình tham số là $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$
Thay x, y, z vào phương trình của (P) ta được

$$t - 2(1+2t) + 1 - 2t + 11 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Suy ra Δ cắt (P) tại điểm $B = (2;5;-3)$.
Đường thẳng Δ có cặp VTPT là $\vec{n}_\Delta$ và $\vec{n}_{(P)} = (1;-2;1)$ nên VTCP là

$$\vec{u}_d = \left[\vec{n}_\Delta, \vec{n}_{(P)}\right] = (-2;-3;-4) = -(2;3;4).$$

Suy ra phương trình tham số d: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -3 + 4t. \end{cases}$
Điểm $A \in d$ có $x_A = 2 + 2t = -4 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow y_A = 5 + 3t = -4$.
Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$, $d_2\colon \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, $d_3\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 - t \end{cases}$, $d_4\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt cả bốn đường thẳng trên và có véc-tơ chỉ phương tương ứng là

A. $(2;-12;-11)$. **B.** $(4;-26;23)$. **C.** $(12;-21;11)$. **D.** $(-2;1;3)$.

LỜI GIẢI.

Ta có d_1 có VTCP là $\vec{u}_1 = (-1;2;1)$ và đi qua điểm $M_1(2;1;-2)$, d_3 có VTCP là $\vec{u}_3 = (1;-2;-1)$ và đi qua điểm $M_3(1;0;3)$.
Ta có $\vec{u}_1 = -\vec{u}_3$ và $M_1 \notin d_3$ nên $d_1 \mathbin{/\!/} d_3$.
Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và d_3, (α) có cặp VTCP là $\vec{u}_1$ và $\overrightarrow{M_1M_3} = (-1;-1;5)$.
Suy ra VTPT của (α) là $\vec{n}_{(\alpha)} = \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = (11;4;3)$.
Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là

$$11(x-2) + 4(y-1) + 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow 11x + 4y + 3z - 20 = 0.$$

Tìm được giao điểm của đường thẳng d_2 với mặt phẳng (α) là $A = d_2 \cap (\alpha) = \left(\dfrac{1}{3}; 4; \dfrac{1}{9}\right)$, giao điểm của đường thẳng d_4 với mặt phẳng (α) là $B = d_4 \cap (\alpha) = \left(\dfrac{7}{9}; \dfrac{10}{9}; \dfrac{24}{9}\right)$.
Đường thẳng Δ cắt 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 thì bắt buộc phải cắt đường thẳng d_2 tại điểm A và cắt d_4 tại điểm B. Suy ra Δ phải đi qua hai điểm A và B. Suy ra VTCP của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{4}{9}; \dfrac{-26}{9}; \dfrac{23}{9}\right) = \dfrac{1}{9}(4;-26;23) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (4;-26;23)$.
Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt $d_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $d_3 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $d_4 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng trên có phương trình chính tắc tương ứng là

A. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-4}{13}=\dfrac{z-3}{18}$.

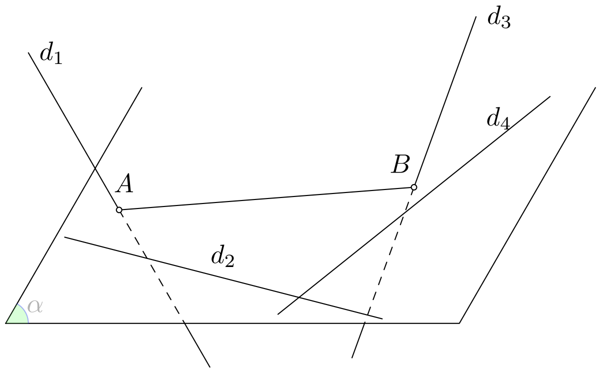
B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{5}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$.

D. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{12}=\dfrac{z}{-1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Trong 4 đường thẳng đã cho sẽ có 2 đường thẳng đồng phẳng. Nhận thấy không có hai đường thăng nào song song với nhau (từ 4 VTCP tương ứng), nên ta phải tìm cặp đường thẳng cắt nhau tạo lên một mặt phẳng chứa chúng.
- Về lí thuyết sẽ phải thử tối đa 6 phép thử để tìm ra hai đường thẳng cắt nhau.
- Ta tìm được hai đường thẳng cắt nhau là $d_2 \cap d_4 = (4;2;-1)$. Ta sẽ lập phương trình mặt phẳng (α) chưa hai đường thẳng này.
- Cặp VTCP của mặt phẳng (α) là: $\vec{u}_2 = (-1;1;2)$, $\vec{u}_4 = (3;0;-2)$.
- Suy ra VTPT $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_2, \vec{u}_4] = (-2;4;-3)$.
- Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là $(\alpha)\colon -2x+4y-3z-3=0$.



- Gọi A là giao điểm của đường thẳng d_1 với mặt phẳng (α), ta có $A = d_1 \cap (\alpha) = \left(\dfrac{11}{5};\dfrac{7}{5};\dfrac{-3}{5}\right)$.
- Gọi B là giao điểm của đường thẳng d_3 với mặt phẳng (α), ta có $B = d_3 \cap (\alpha) = (2;4;3)$.
- Vì đường thẳng Δ cắt cả bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 nên nó phải cắt d_1 tại A và cắt d_3 tại B. Do đó $A, B \in \Delta$, suy ra VTCP của Δ là $\vec{AB} = \left(\dfrac{-1}{5};\dfrac{13}{5};\dfrac{18}{5}\right) = \dfrac{1}{5}(-1;13;18)$.
- Ta chọn VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta = (-1;13;18)$ và $B \in \Delta$. Khi đó

$$(\Delta)\colon \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{13} = \frac{z-3}{18}.$$

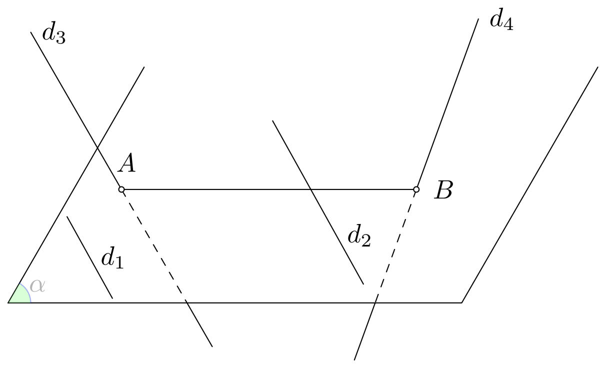
- Ta nhận thấy đường thẳng Δ có VTCP không song song với hai đường thẳng d_2, d_4 nên đường thẳng Δ vừa tìm sẽ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=2t \end{cases}$, $d_2\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=-2+2t \end{cases}$, $d_3\colon \begin{cases} x=4+2t \\ y=7+4t \\ z=-3-t \end{cases}$, $d_4\colon \begin{cases} x=4+3t \\ y=4+t \\ z=1+t \end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng trên và cắt mặt phẳng tọa độ (Oyz) tại điểm có cao độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 2.

✍ **LỜI GIẢI.**



- Nhận thấy hai đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Suy ra tồn tại một mặt phẳng (α) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Ta lập mặt phẳng (α).
- Chọn một điểm $M_1(1;2;0) \in d_1$ và một điểm $M_2(2;0;-2) \in d_2$. Cặp VTCP của mặt phẳng (α) là $\vec{u}_1=(-1;1;2)$ và $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;-2;-2)$.
  Suy ra VTPT của (α) là $\vec{u}_{(\alpha)}=[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}]=(2;0;1)$.
- Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+z-2=0$.
- Tìm được giao điểm của đường thẳng d_3 với mặt phẳng (α) là: $A=d_3\cap(\alpha)=(2;3;-2)$.
- Giao điểm của đường thẳng d_4 với mặt phẳng (α) là: $B=d_4\cap(\alpha)=(1;3;0)$.
- Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 thì bắt buộc phải cắt đường thẳng d_3 tại điểm A và cắt d_4 tại điểm B. Suy ra đường thẳng Δ phải đi qua hai điểm A và B.
- VTCP của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{AB}=(-1;0;2)$. Suy ra phương trình tham số $(\Delta)\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=3 \\ z=2t. \end{cases}$
- Suy ra $\Delta\cap(Oyz)=(0;3;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-1=0$ và điểm $A(-4;1;2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A cắt mặt phẳng (P) tại B, cắt trục Oy tại C sao cho B là trung điểm của AC. Phương trình tham số của đường thẳng d tương ứng là:

A. $\begin{cases} x=-4+4t \\ y=1+8t \\ z=2-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} xx=-2+2t \\ y=2-4t \\ z=-1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=13+4t \\ z=-1-t \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Tọa độ điểm $C(0;t;0)$. Suy ra tọa độ trung điểm B của AC là $B\left(-2;\dfrac{t+1}{2};1\right)$.

- Từ giả thiết điểm $B \in (P) \Rightarrow -2 + \dfrac{t+1}{2} - 2 \cdot 1 - 1 = 0 \Rightarrow t = 9 \Rightarrow C(0;9;0)$.
- VTCP của đường thẳng d là $\vec{AC} = (4;8;-2)$ và đi qua $A(-4;1;2)$.

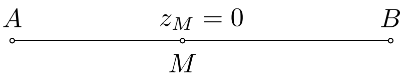
Chọn đáp án D □

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxz cho các điểm $A(4;1;3)$, $B(a;b;c)$ gọi M là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oxy) sao cho $AM = MB$. Giá trị của c bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -4.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Hình vẽ minh họa



- Nhận thấy $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0} \Rightarrow z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 0 = \dfrac{3+c}{2} \Rightarrow c = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;-3)$, $B(a;-1;2)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AB Với mặt phẳng $(P)\colon x + 3y - z - 8 = 0$ sao cho $AB = 3AM$. Tổng tất cả các giá trị thực của a thỏa mãn bài toán là:

A. -13. **B.** 24. **C.** 6. **D.** -29.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Trường hợp 1.

$$\vec{AB} = 3\vec{AM} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{2x_A + x_B}{3} = \dfrac{2+a}{3} \\ y_M = \dfrac{2y_A + y_B}{3} = \dfrac{1}{3} \\ z_M = \dfrac{2z_A + z_B}{3} = \dfrac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{2+a}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{-4}{3}\right) \in (P).$$

Suy ra $1 \cdot \dfrac{2+a}{3} + 3 \cdot \dfrac{1}{3} - (-\dfrac{4}{3}) - 8 = 0 \Rightarrow a = 15$.

- Trường hợp 2.

$$\vec{AB} = -3\vec{AM} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{4x_A - x_B}{3} = \dfrac{4-a}{3} \\ y_M = \dfrac{4y_A - y_B}{3} = \dfrac{5}{3} \\ z_M = \dfrac{4z_A - z_B}{3} = \dfrac{-14}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{4-a}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{-14}{3}\right) \in (P).$$

Suy ra $1 \cdot \dfrac{4-a}{3} + 3 \cdot \dfrac{5}{3} - (-\dfrac{14}{3}) - 8 = 0 \Rightarrow a = 9$.

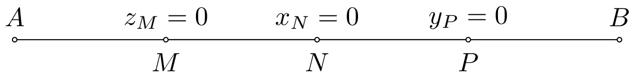
Suy ra có hai giá trị thực $a = \{9; 15\}$ thỏa mãn. Suy ra tổng của chúng là 24.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-3;-1)$, $B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt à giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng.

A. -2. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 3.

LỜI GIẢI.



Nhận thấy $\vec{NA} + \vec{NB} = \vec{0} \Rightarrow x_n = \dfrac{x_a + x_b}{2} = 0 = \dfrac{1+a}{2} \Rightarrow a = -1$.

Ta có

$$\begin{aligned} 3\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0} &\Rightarrow 3(z_A - z_M) + (z_B - z_M) = 0 \\ &\Rightarrow z_B = -3z_A + 4z_M = -3z_A + 0 = -3z_A = 3 = c. \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0} &\Rightarrow \frac{1}{3}(y_A - y_P) + (y_B - y_P) = 0 \\ &\Rightarrow y_B = -\frac{1}{3}y_A + \frac{4}{3}z_M = -\frac{1}{3}y_A + 0 = -\frac{1}{3}y_A = 1 = b. \end{aligned}$$

Suy ra $T = a + b + c = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2,0,3)$, $B(a,b,c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oyz), (Ozx), (Oxy) sao cho $AM = 2MN = 3NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 8b - 11c$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** -21. **C.** 7. **D.** 12.

LỜI GIẢI.

Ta có thể đặt $AM = 2MN = 3NP = PB = 6d \Rightarrow AM = PB = 6d$, $MN = 3d$, $NP = 2d$.

Ta có $\begin{cases} MA = 6d \\ MB = MN + NP + PB = 11d \end{cases} \Rightarrow 11\vec{MA} + 6\vec{MB} = \vec{0} \Rightarrow 11(x_A - x_M) + 6(x_B - x_M) = 0$.

Lại có $x_M = 0 \Rightarrow 11(x_A - 0) + 6(x_B - 0) = 0 \Leftrightarrow 11 \cdot 2 + 6 \cdot a = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{11}{3}$.

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{cases} NA = NM + MA = 9d \\ NB = NP + PB = 8d \end{cases} \Rightarrow 8\vec{NA} + 9\vec{PB} = \vec{0} \Rightarrow 8(y_A - y_N) + 9(y_B - y_N) = 0.$$

Lại có $y_N = 0 \Rightarrow 8(y_A - 0) + 9(y_B - 0) = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot 0 + 9 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$.

Ta có $\begin{cases} PA = 11d \\ PB = 6d \end{cases} \Rightarrow 6\vec{PA} + 11\vec{PB} = \vec{0} \Rightarrow 6(z_A - z_P) + 11(z_B - z_P) = 0$.

Lại có $z_P = 0 \Rightarrow 6(z_A - 0) + 11(z_B - 0) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 3 + 11 \cdot c = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{18}{11}$.

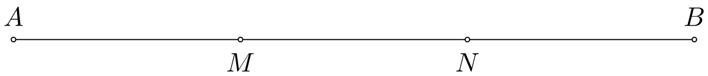
Suy ra $T = 3a + 8b - 11c = 3 \cdot \left(-\dfrac{11}{3}\right) + 8 \cdot 0 - 11 \cdot \left(-\dfrac{18}{11}\right) = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1,0)$, $B(a;b;c)$. Biết AB lần lượt cắt các mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2 = 0$, $(Q)\colon y + z + 2 = 0$, $(R)\colon x + y - 2z - 1 = 0$ tại M, N, P sao cho $AM = 2MN = NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** $-\dfrac{28}{5}$. **C.** $\dfrac{17}{5}$. **D.** $-\dfrac{31}{5}$.

LỜI GIẢI.



- Ta có thể đặt $AM = 2MN = NP = PB = 2d \Rightarrow AM = NP = PB = 2d$, $MN = d$.
- Nhận thấy $\begin{cases} MA = 2d \\ MB = 5d \end{cases} \Rightarrow 5\vec{MA} + 2\vec{MB} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{5x_A + 2x_B}{5+2} = \dfrac{2a+5}{7} \\ y_M = \dfrac{5y_A + 2y_B}{5+2} = \dfrac{2b-5}{7} \\ z_M = \dfrac{5z_A + 2z_B}{5+2} = \dfrac{2c}{7}. \end{cases}$
- Lại có $M \in (P) \Rightarrow x_M - 2y_M = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2a+5}{7} - 2 \cdot \dfrac{2b-5}{7} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4b + 1 = 0.$ (1)
- Tương tự $\begin{cases} NA = 3d \\ NB = 4d \end{cases} \Rightarrow 4\vec{NA} + 3\vec{NB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{4x_A + 3x_B}{4+3} = \dfrac{3a+4}{7} \\ y_N = \dfrac{4y_A + 3y_B}{4+3} = \dfrac{3b-4}{7} \\ z_N = \dfrac{4z_A + 3z_B}{4+3} = \dfrac{3c}{7} \end{cases}.$
- Lại có $N \in (Q) \Rightarrow y_N + z_N + 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3b-4}{7} + \dfrac{3c+4}{7} + 2 = 0 \Leftrightarrow 3b + 3c + 10 = 0.$ (2)
- Có $\begin{cases} PA = 4d \\ PB = 3d \end{cases} \Rightarrow 3\vec{PA} + 4\vec{PB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_P = \dfrac{3x_A + 4x_B}{4+3} = \dfrac{4a+3}{7} \\ y_P = \dfrac{3y_A + 4y_B}{4+3} = \dfrac{4b-3}{7} \\ z_P = \dfrac{3z_A + 4z_B}{4+3} = \dfrac{4c}{7}. \end{cases}$
- Lại có

$$\begin{aligned} P \in (R) \Rightarrow x_P + +y_P - 2z_P - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4a+3}{7} + \frac{4b-3}{7} - 2 \cdot \frac{4c}{7} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4a + 4b - 8c - 7 = 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

- Giải hệ (1), (2), (3), suy ra $a = -\dfrac{34}{15}$, $b = -\dfrac{53}{60}$, $c = -\dfrac{49}{20}$.
- Suy ra $T = a + b + c = -\dfrac{28}{5}$.

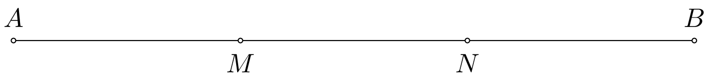
Chọn đáp án B □

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;a)$, $B(m;n;p)$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các trục tọa độ Ox, Oy sao cho $AM = MN = NB$. Giá trị của biểu thức $T = m + n + p$ tương ứng bằng.

A. $-\dfrac{11}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $-\dfrac{9}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình vẽ minh họa.



Ta có

- $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\Rightarrow 2(y_A-y_M)+(y_B-y_M)=0\Leftrightarrow 2(2-0)+(n-0)=0\Rightarrow n=-4$.
- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{0}\Rightarrow (z_A-z_M)+(z_M-z_B)=0\Leftrightarrow (a-0)+(0-0)=0\Rightarrow a=0$.
- $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{0}\Rightarrow (z_M-z_N)+(z_B-z_N)=0\Leftrightarrow (0-0)+(p-0)=0\Rightarrow p=0$.
- $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{0}\Rightarrow (z_A-z_N)+2(z_B-z_N)=0\Leftrightarrow (1-0)+2(m-0)=0\Rightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $T=m+n+p=-\dfrac{1}{2}-4+0=-\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án D □

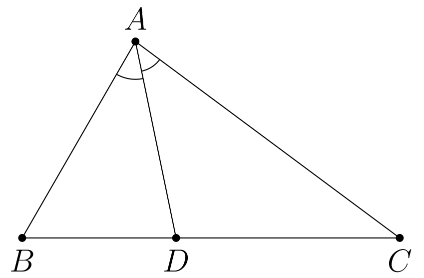
BÀI 6 KĨ NĂNG PHÂN GIÁC TOÀN DIỆN

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có tọa độ các điểm $A(-2;2;0)$, $B(1;-2;0), C(2;0;4)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng:

A. $\dfrac{24}{11}$. **B.** $\dfrac{36}{11}$. **C.** $\dfrac{12}{11}$. **D.** $\dfrac{48}{11}$.

LỜI GIẢI.

Nhận thấy:



$$\begin{aligned}
&\frac{\overrightarrow{DB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{DC}}{AC}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\overrightarrow{DB}}{5}+\frac{\overrightarrow{DC}}{6}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow\ &6\overrightarrow{DB}+5\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}\\
\Rightarrow\ &D=\frac{6B+5C}{6+5}=\left(\frac{16}{11};-\frac{12}{11};\frac{20}{11}\right)=(a;b;c)
\end{aligned}$$

Suy ra $T=a+b+c=\dfrac{24}{11}$.

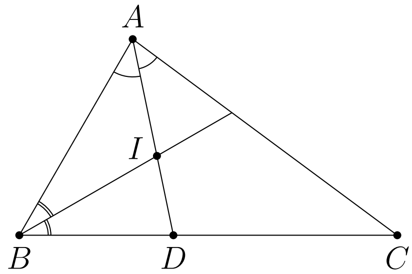
Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;0), B(0;-3;0), C(-1;1;3)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$. Giá trị của $T=a+b+c$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;4)$.

LỜI GIẢI.

Cách 1: Kĩ năng phân giác cho ta cách xác định tọa độ điểm D là chân đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Được xác định là:



- $\overrightarrow{AB} = (-3; -4; 0), \overrightarrow{AC} = (-4; 0; 3)$
$\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{DB}}{AB} + \dfrac{\overrightarrow{DC}}{AC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{DB}}{5} + \dfrac{\overrightarrow{DC}}{5} = \overrightarrow{0}$
$\Rightarrow D = \left(-\dfrac{1}{2}; -1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Tương tự, tâm đường tròn nội tiếp I lại là chân đường phân giác của góc $\widehat{ABD}$.

- Ta có: $BA = 5$; $BD = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.
- Suy ra:

$$\begin{aligned}
& \frac{\overrightarrow{IA}}{BA} + \frac{\overrightarrow{ID}}{BD} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\overrightarrow{IA}}{5} + \frac{\overrightarrow{ID}}{\sqrt{26}/2} = \overrightarrow{0} \\
\Rightarrow\ & I = \left(\frac{-5+3\sqrt{26}}{10+\sqrt{26}}; \frac{-10+\sqrt{26}}{10+\sqrt{26}}; \frac{15}{10+\sqrt{26}}\right) = (a; b; c).
\end{aligned}$$

- Suy ra $T = a + b + c = \dfrac{4\sqrt{26}}{10+\sqrt{26}} \approx 1{,}35$.

Cách 2: Áp dụng luôn công thức xác định tâm đường tròn nội tiếp như sau:

- $I = \dfrac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a+b+c}$; Với $a = BC = \sqrt{26}$; $b = AC = 5$; $c = AB = 5$.
- Suy ra

$$\begin{aligned}
I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a+b+c} &= \frac{\sqrt{26} \cdot (3; 1; 0) + 5 \cdot (0; -3; 0) + 5 \cdot (-1; 1; 3)}{\sqrt{26} + 5 + 5} \\
&= \left(\frac{-5+3\sqrt{26}}{10+\sqrt{26}}; \frac{-10+\sqrt{26}}{10+\sqrt{26}}; \frac{15}{10+\sqrt{26}}\right)
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; -2)$, $C(0; 0; -2)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC. Giá trị của $T = a + b + c$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

✍ LỜI GIẢI.

Áp dụng luôn công thức xác định tâm đường tròn nội tiếp như sau:

- $I = \dfrac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a+b+c}$; Với $a = BC = 2$; $b = AC = 3$; $c = AB = 3$.

Suy ra

$$I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a+b+c}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\cdot(1;2;0)+3\cdot(2;0;-2)+3\cdot(0;0;-2)}{2+3+3} \\ &= \left(1;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right) \\ &= (a;b;c)\,. \end{aligned}$$

Suy ra $T=a+b+c=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;1)$, $B(3;-1;3)$, $C(1;-1;3)$. Bán kính đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $AB=AC=3$; $BC=2$

$\Rightarrow \cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\dfrac{3^2+3^2-2^2}{2\cdot 3\cdot 3}=\dfrac{7}{9}\Rightarrow \sin A=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

Suy ra diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=2\sqrt{2}$.

Ta có:

$S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}\Rightarrow r_{\Delta ABC}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{(AB+BC+CA)/2}=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB+BC+CA}=\dfrac{2\cdot 2\sqrt{2}}{3+2+3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

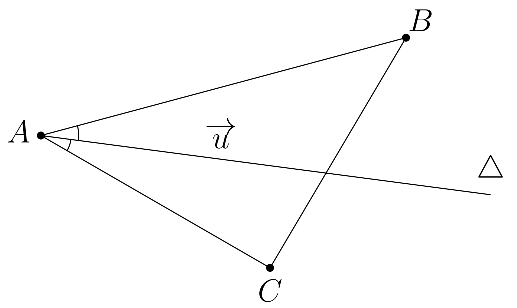
Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;-2;2)$, $C(1;0;4)$. Phương trình chính tắc của đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ tương ứng bằng:

A. $\triangle\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{5}$. **B.** $\triangle\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-5}{-5}$.

C. $\triangle\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-5}$. **D.** $\triangle\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{4}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ là đường thẳng $\triangle$ có VTCP được tính theo công thức:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_\Delta} &= \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \\ &= \frac{(1;-2;2)}{3}+\frac{(0;0;4)}{4} \\ &= \left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}(1;-2;5)\,. \end{aligned}$$

Chọn VTCP là $(1;-2;5)$.

Đi qua điểm A, nên ta suy ra phương trình chính tắc của đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ là

$$\triangle\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{5}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $\triangle_1\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ và đường thẳng $\triangle_2\colon \dfrac{x-2}{-22}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Phương trình tham số của đường phân giác góc nhọn tạo bởi $\triangle_1$, $\triangle_2$ là

A. $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ 2 + t \\ 1 + 2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Dễ dàng tìm được giao điểm của hai đường thẳng $\triangle_1$ và $\triangle_2$ là điểm $A(2;1;-1)$.
- Chọn hai VTCP của hai đường thẳng là $\overrightarrow{u_1} = (2;-1;2)$; $\overrightarrow{u_2} = (-2;1;2)$.
- Tích vô hướng của hai VTCP này: $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = (2;-1;2) \cdot (-2;1;2) = -1 < 0$.
- Suy ra VTCP của đường phân giác góc nhọn là

$$\overrightarrow{u_\triangle} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} - \frac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \frac{(2;-1;2)}{3} - \frac{(-2;1;2)}{3} = \left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right) = \frac{2}{3}(2;-1;0).$$

Chọn VTCP là $(2;-1;0)$.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình chính tắc lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 tương ứng là

A. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm $I(3;1;0)$.
- Chọn hai VTCP bất kì của hai đường thẳng d_1 và d_2 là $\overrightarrow{u_1} = (2;1;2)$ và $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;-2)$.
- Xét $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -4 < 0$ nên hai véc-tơ này tạo với nhau góc tù.
- Suy ra VTCP của đường phân giác góc nhọn sẽ là

$$\overrightarrow{u_d} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} - \frac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \frac{(2;1;2)}{3} - \frac{(1;-2;-2)}{3} = \left(\frac{1}{3}; 1; \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}(1;3;4).$$

- Đường thẳng d đi qua điểm $I(3;1;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u} = (1;3;4)$ có phương trình là $(d)\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình chính tắc lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+2}{-4}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$. Phương trình đường phân giác của góc tù tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 tương ứng là

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 - 3t \\ z = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 0 + t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = -2 \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm $I(-1;0;2)$.
- Chọn hai VTCP bất kì của hai đường thẳng d_1 và d_2 là $\overrightarrow{u_1}=(4;-2;-4)$ và $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-2)$.
- Xét $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=4\cdot 1-2\cdot 2-4\cdot(-2)=8>0$ nên hai véc-tơ này tạo với nhau góc nhọn.
- Suy ra VTCP của đường phân giác góc tù sẽ là

$$\overrightarrow{u_d}=\frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}-\frac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}=\frac{(4;-2;-4)}{6}-\frac{(1;2;-2)}{3}=\left(\frac{1}{3};-1;0\right)=\frac{1}{3}(1;-3;0).$$

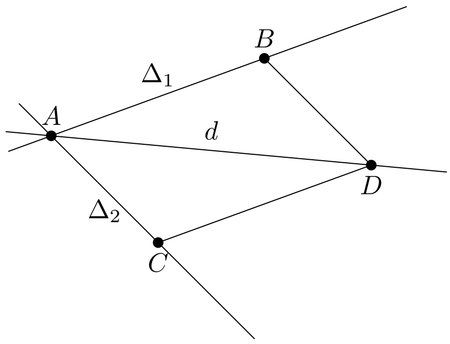
- Đường thẳng d đi qua điểm $I(-1;0;2)$ và có VTCP $\overrightarrow{u}=(1;-3;0)$ có phương trình là $(d)\colon\begin{cases}x=-1+t\\y=0-3t\\z=2\end{cases}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2, điểm $B\in\Delta_1$ và $C\in\Delta_2$, điểm $D\in(Oxy)$ có tọa độ nguyên, sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Khoảng cách từ D đến gốc tọa độ O bằng?

A. 20. **B.** $9\sqrt{2}$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

LỜI GIẢI.



- Dễ dàng tìm được giao điểm $A=\Delta_1\cap\Delta_2=(1;0;1)$.
- Tứ giác $ABCD$ là hình thoi, nên suy ra D nằm trên đường phân giác d của góc $\widehat{BAC}$.
- Các VTCP của hai đường thẳng là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(2;-1;2)$ và $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=(-2;2;1)$.
- Sẽ có hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.
- TH1: Ứng với đường phân giác có VTCP là

  + $\overrightarrow{u_d}=\dfrac{\overrightarrow{u_{\Delta_1}}}{|\overrightarrow{u_{\Delta_1}}|}+\dfrac{\overrightarrow{u_{\Delta_2}}}{|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}|}=\dfrac{(2;-1;2)}{3}+\dfrac{(-2;2;1)}{3}=(0;\dfrac{1}{3};1)=\dfrac{1}{3}(0;1;3).$

  + Suy ra phương trình tham số của đường phân giác $d\colon\begin{cases}x=1\\y=0+t\\z=1+3t.\end{cases}$

  + Suy ra $D=d\cap(Oxy)=(1;-\dfrac{1}{3};0)$, không thỏa mãn vì tọa độ của D không nguyên.

- TH2: Ứng với đường phân giác có VTCP là

  $+\ \overrightarrow{u_{d'}} = \dfrac{\overrightarrow{u_{\Delta_1}}}{|\overrightarrow{u_{\Delta_1}}|} - \dfrac{\overrightarrow{u_{\Delta_2}}}{|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}|} = \dfrac{(2;-1;2)}{3} - \dfrac{(-2;2;1)}{3} = (\dfrac{4}{3};-1;\dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{3}(4;-3;1).$

  $+$ Suy ra phương trình tham số của đường phân giác d': $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 0-3t \\ z = 1+t. \end{cases}$

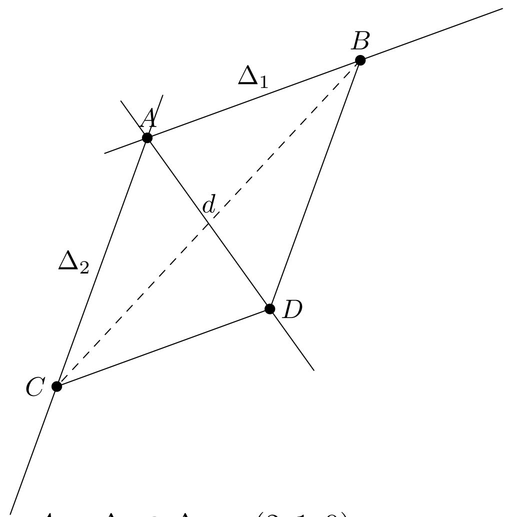
  $+$ Suy ra $D' = d' \cap (Oxy) = (-3;3;0) \Rightarrow OD' = 9\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{2}$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2, $B \in \Delta_1$ và $C \in \Delta_2$, điểm $D \in (\alpha)\colon 2x - y + 4 = 0$, sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi với $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Đường thẳng BC cắt mặt phẳng $(\beta)\colon x + y - 8 = 0$ tại điểm E cách gốc O một đoạn OE bằng?

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{10}$. **C.** $3\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{19}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



- Dễ dàng tìm được giao điểm $A = \Delta_1 \cap \Delta_2 = (2;1;0)$.
- Tứ giác $ABCD$ là hình thoi với $\widehat{BAC} > 90^\circ$, nên suy ra D nằm trên phân giác d của góc tù $\widehat{BAC}$.
- Các VTCP của hai đường thẳng là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (2;1;-2)$ và $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1;-2;2)$.
- Ta kiểm tra góc tạo bởi hai VTCP: $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\Delta_2}} = -4 < 0$, suy ra góc tạo bởi hai véc-tơ này là góc tù.
- Đường phân giác góc tù $\widehat{BAC}$ có VTCP

$$\overrightarrow{u_d} = \dfrac{\overrightarrow{u_{\Delta_1}}}{|\overrightarrow{u_{\Delta_1}}|} + \dfrac{\overrightarrow{u_{\Delta_2}}}{|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}|} = \dfrac{(2;1;-2)}{3} + \dfrac{(1;-2;2)}{3} = (1;-\dfrac{1}{3};0) = \dfrac{1}{3}(3;-1;0).$$

- Suy ra phương trình tham số của đường phân giác d: $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \\ z = 0. \end{cases}$

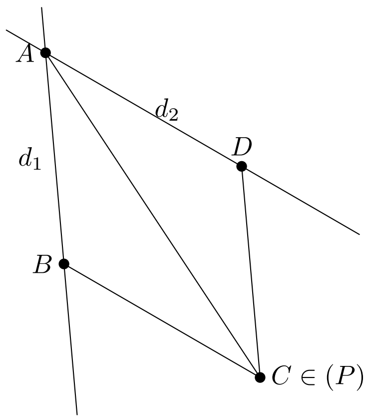
- Suy ra $D = d \cap (\alpha) = (-1; 2; 0)$
- Ta có 4 điểm:
$A(2; 1; 0)$, $D(-1; 2; 0)$, $B \in \Delta_1 \Rightarrow B(2t_1; t_1; 2-2t_1)$, $C \in \Delta_2 \Rightarrow C(1+t_2; 3-2t_2; -2+2t_2)$.
- Tứ giác $ABCD$ là hình thoi, suy ra
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (2t_1 - 2; t_1 - 1; 2 - 2t_1) = (-t_2 - 2; 2t_2 - 1; 2 - 2t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0. \end{cases}$
- Suy ra $B(0; 0; 2)$, $C(1; 3; -2)$. Suy ra đường thẳng $BC\colon \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 2 - 4t. \end{cases}$
- Suy ra $E = (BC) \cap (\beta) = (2; 6; -6)$.
- Suy ra $OE = 2\sqrt{19}$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình chính tắc lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-6}{2}$. Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2; hai điểm B và D lần lượt nằm trên đường thẳng d_1 và d_2; điểm $C(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + z - 4 = 0$, sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi thỏa mãn $AC > BD$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng?

A. 16. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 17.

✍ **LỜI GIẢI.**



- Ta tìm được giao điểm $A = d_1 \cap d_2 = (2; 3; 4)$.
- Góc $\widehat{BAD}$ nhọn, AC là đường phân giác của góc nhọn $\widehat{BAD}$ tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.
- Các VTCP của hai đường thẳng d_1 và d_2 là $\overrightarrow{u_1} = (1; 2; 2)$ và $\overrightarrow{u_2} = (1; -2; 2)$.
- Ta kiểm tra góc tạo bởi hai VTCP: $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 1 > 0$, suy ra góc tạo bởi hai véc-tơ này là góc nhọn.
- Đường phân giác góc nhọn $\widehat{BAD}$ có VTCP

$$\overrightarrow{u_d} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} + \frac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \frac{(1; 2; 2)}{3} + \frac{(1; -2; 2)}{3} = (\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}) = \frac{2}{3}(1; 0; 2).$$

- Đường thẳng AD có VTCP $\overrightarrow{u} = (1;0;2)$ và đi qua điểm $A(2;3;4)$ có phương trình tham số AD: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = 4+2t. \end{cases}$

- Điểm $C = AD \cap (P)$. Dễ dàng suy ra được $C\left(\dfrac{10}{3};3;\dfrac{20}{3}\right) = (a;b;c) \Rightarrow T = a+b+c = 13$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-4=0$ và $(Q)\colon x+y-2z-3=0$. Quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng là hai mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-7=0$ hoặc $3y-z-1=0$. **B.** $x-2y-z-4=0$ hoặc $3y-3z-1=0$.
C. $x-y-2z-7=0$ hoặc $y-3z+2=0$. **D.** $2x-y-z-7=0$ hoặc $3y-3z+1=0$.

✍ LỜI GIẢI.

- **Cách 1**. Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn điều kiện bài toán.

- Ta có

$$\begin{aligned} d\left(M,(P)\right) = d\left(M,(Q)\right) &\Leftrightarrow \frac{|x-2y+z-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|x+y-2z-3|}{\sqrt{1+4+1}} \\ &\Leftrightarrow |x-2y+z-4| = |x+y-2z-3| \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x-2y+z-4 = x+y-2z-3 \\ &x-2y+z-4 = -x-y+2z+3 \end{aligned}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &3y-3z+1=0 \\ &2x-y-z-7=0. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

- Suy ra quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q). Có phương trình tương ứng là $3y-3z+1=0$ hoặc $2x-y-z-7=0$.

- **Cách 2**. Chọn một điểm là giao điểm của hai mặt phẳng

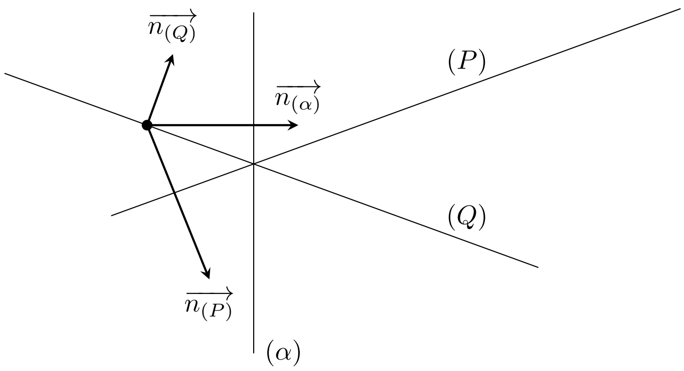
$$A(0;y;z) = (P)\cap(Q) = \left(0;-\frac{11}{3};-\frac{10}{3}\right).$$

- Rõ ràng hai mặt phẳng phân giác đều phải đi qua điểm $A(0;y;z) = \left(0;-\dfrac{11}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$.

- Hai VTPT của hai mặt phẳng là: $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;-2;1)$; $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (1;1;-2)$.

- Xét tích vô hướng: $\overrightarrow{n_{(P)}}\cdot\overrightarrow{n_{(Q)}} = 1-2-2 = -3 < 0 \Rightarrow$ hai véc-tơ $\overrightarrow{n_{(P)}}$; $\overrightarrow{n_{(Q)}}$ tạo với nhau một góc tù.

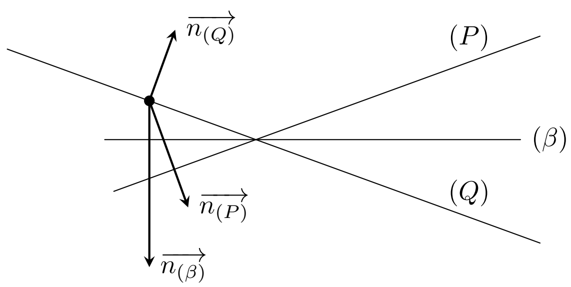
- **Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện tù có VTPT tương ứng:**



- $\overrightarrow{n_{\text{tù}}} = \dfrac{\overrightarrow{n_{(P)}}}{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|} + \dfrac{\overrightarrow{n_{(Q)}}}{\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|} = \dfrac{(1;-2;1)}{\sqrt{6}} + \dfrac{(1;1;-2)}{\sqrt{6}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}; \dfrac{-1}{\sqrt{6}}; \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2;-1;-1)$.
- Chọn VTPT của mặt phẳng phân giác góc tù tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) là: $\overrightarrow{n_{\text{tù}}} = (2;-1;-1)$.
- Suy ra phương trình mặt phẳng phân giác góc tù:

$$(\alpha)\colon 2(x-0) - 1\left(y + \frac{11}{3}\right) - 1\left(z + \frac{10}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow (\alpha)\colon 2x - y - z - 7 = 0.$$

- **Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện nhọn có VTPT tương ứng**:



- $\overrightarrow{n_{\text{nhọn}}} = \dfrac{\overrightarrow{n_{(P)}}}{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|} - \dfrac{\overrightarrow{n_{(Q)}}}{\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|} = \dfrac{(1;-2;1)}{\sqrt{6}} - \dfrac{(1;1;-2)}{\sqrt{6}} = \left(0; \dfrac{-3}{\sqrt{6}}; \dfrac{3}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{6}}(0;1;-1)$.
- Chọn VTPT của mặt phẳng phân giác góc tù tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) là: $\overrightarrow{n_{\text{nhọn}}} = (0;1;-1)$.
- Suy ra phương trình mặt phẳng phân giác góc nhọn:

$$(\beta)\colon 0(x-0) - 1\left(y + \frac{11}{3}\right) - 1\left(z + \frac{10}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow (\beta)\colon 3x - 3z + 1 = 0.$$

Chọn đáp án D □

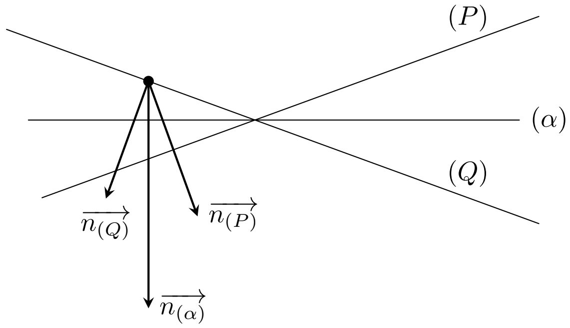
Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x - y + z - 1 = 0$ và $(Q)\colon x + y + z - 2 = 0$. Mặt phân giác của góc nhị diện nhọn tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A. $2y + 3 = 0$. **B.** $x + y + 2z + 1 = 0$.
C. $2x + 2z + 1 = 0$. **D.** $3x - y - 1 = 0$.

✍ LỜI GIẢI.

- Chọn một điểm là giao điểm của hai mặt phẳng $A(0;y;z)=(P)\cap(Q)$ có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(P)\colon x-y+z-1=0\\(Q)\colon x+y+z-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0-y+z-1=0\\0+y+z-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{3}{2}\\z=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow A(0;-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}).$$



- Chọn hai VTPT của hai mặt phẳng là: $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-1;1)$; $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;1;1)$.
- Xét tích vô hướng: $\overrightarrow{n_{(P)}}\cdot\overrightarrow{n_{(Q)}}=1-1+1=1>0\Rightarrow$ hai véc-tơ $\overrightarrow{n_{(P)}}$; $\overrightarrow{n_{(Q)}}$ tạo với nhau một góc nhọn.
- Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện nhọn có VTPT tương ứng:

$$\overrightarrow{n_\alpha}=\frac{\overrightarrow{n_{(P)}}}{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}+\frac{\overrightarrow{n_{(Q)}}}{\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}=\frac{(1;-1;1)}{\sqrt{3}}+\frac{(1;1;1)}{\sqrt{3}}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}};0;\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}(1;0;1).$$

- Chọn VTPT của mặt phẳng phân giác góc nhọn tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) là: $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;0;1)$.
- Suy ra phương trình mặt phẳng phân giác góc nhọn nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$(\alpha)\colon 1(x-0)+0\left(y+\frac{3}{2}\right)+1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow(\alpha)\colon 2x+2z+1=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-2=0$ và $(Q)\colon 2x+y+2z-1=0$. Gọi (R) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện tù tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q); nếu M là giao điểm của (R) với trục Ox thì hoành độ của điểm M tương ứng là

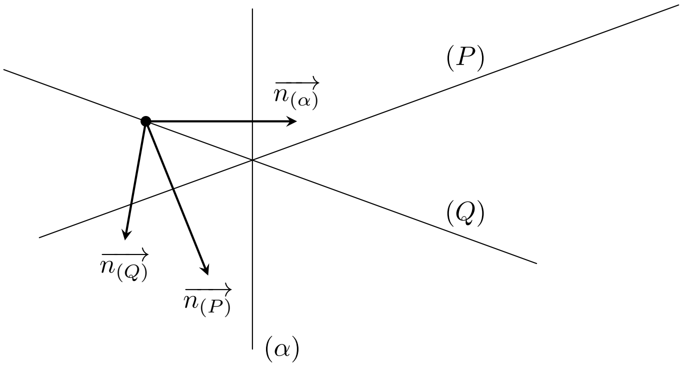
A. 2. **B.** -1. **C.** -3. **D.** -2.

✍ LỜI GIẢI.

- Chọn một điểm là giao điểm của hai mặt phẳng $A(0;y;z)=(P)\cap(Q)$ có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(P)\colon x-2y+2z-2=0\\(Q)\colon 2x+y+2z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0-2y+2z-2=0\\0+y+2z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}\\z=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow A(0;-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}).$$

- Chọn hai VTPT của hai mặt phẳng là: $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;-2;2)$; $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (2;1;2)$.
- Xét tích vô hướng: $\overrightarrow{n_{(P)}} \cdot \overrightarrow{n_{(Q)}} = 2 - 2 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow$ hai véc-tơ $\overrightarrow{n_{(P)}}$; $\overrightarrow{n_{(Q)}}$ tạo với nhau một góc nhọn.
- Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện tù có VTPT tương ứng:
$$\overrightarrow{n_\alpha} = \frac{\overrightarrow{n_{(P)}}}{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|} - \frac{\overrightarrow{n_{(Q)}}}{\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|} = \frac{(1;-2;2)}{3} - \frac{(2;1;2)}{3} = \left(-\frac{1}{3};-1;0\right) = -\frac{1}{3}(1;3;0).$$
- Chọn VTPT của mặt phẳng phân giác góc nhọn tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = (1;3;0)$.



- Suy ra phương trình mặt phẳng phân giác góc nhị diện tù tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) là:
$$(\alpha)\colon 1(x-0) + 3\left(y + \frac{1}{3}\right) + 0\left(z - \frac{2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow (\alpha)\colon x + 3y + 1 = 0.$$
- Dễ dàng tìm được giao điểm $M = (\alpha) \cap Ox = (-1;0;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 15 (TDM31). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$. Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng là hai mặt phẳng:

A. $(\alpha) : x + y - z = 0$; $(\beta) : 3x - 3y - 2z - 6 = 0$.
B. $(\alpha) : x + y - 2 = 0$; $(\beta) : 3x - 3y - 2z - 6 = 0$.
C. $(\alpha) : 3x + y - 1 = 0$; $(\beta) : 3x + 3y - z - 2 = 0$.
D. $(\alpha) : x + y - 2 = 0$; $(\beta) : 2x - 3y - 2z - 7 = 0$.

LỜI GIẢI.

- Giao điểm của hai đường thẳng $d_1 \cap d_2 = A(2;0;0)$. Suy ra tồn tại hai mặt phẳng chứa tất cả các điểm cách đều hai đường thẳng này. Các mặt phẳng đều vuông góc với mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1, d_2 và chứa một trong hai đường phân giác của góc tạo hai đường thẳng d_1, d_2.
- Chọn hai VTCP của hai đường thẳng d_1, d_2 là $\overrightarrow{u_1} = (2;-1;-1), \overrightarrow{u_2} = (-1;2;1)$.

- Có hai VTCP của hai đường phân giác là: $\left[\begin{array}{l}\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}+\dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};0\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1;1;0)\\ \vec{v}=\dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}-\dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}};\dfrac{-3}{\sqrt{6}};\dfrac{-2}{\sqrt{6}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(3;-3;-2).\end{array}\right.$

- Hai mặt phẳng chứa các điểm cách đều hai đường thẳng là hai mặt phẳng nhận hai VTCP của hai đường phân giác làm các VTPT.

- Trường hợp 1: Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng là mặt phẳng (α) có VTPT là $(1;1;0)$ và đi qua điểm $A(2;0;0)$. Phương trình tổng quát của $(\alpha): x+y-2=0$.

- Trường hợp 2: Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng là mặt phẳng (β) có VTPT là $(3;-3;-2)$ và đi qua $A(2;0;0)$. Phương trình tổng quát của $(\beta): 3x-3y-2z-6=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 16 (TDM41). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{3}$, điểm $A(2;3;-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 những góc bằng nhau, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng d lớn nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm có tọa độ nguyên $(m;n;p)$, khi đó giá trị của biểu thức $T=m+n+p$ bằng:

A. 1. **B.** 7. **C.** -3. **D.** 6.

✍ LỜI GIẢI.

- Gọi VTCP của đường thẳng d là: $\vec{u}=(a;b;c)\neq\overrightarrow{0}$.

- Để khoảng cách từ O đến d lớn nhất thì OA phải vuông góc với d tại A.

- Suy ra: $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}=0=2a+3b-2c, (1)$.

- Các VTCP của hai đường thẳng là: $\overrightarrow{u_1}=(2;3;-1)$ và $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;3)$.

- Đường thẳng d tạo với hai đường thẳng các góc bằng nhau, suy ra:
$\dfrac{|\vec{u}\cdot\overrightarrow{u_1}|}{|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{u_1}|}=\dfrac{|\vec{u}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{u_2}|}\Leftrightarrow|2a+3b-c|=|-2a+b+3c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4a+2b-4c=0\\4b+2c=0.\end{array}\right.$

- Kết hợp với (1), ta được hai trường hợp:
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+3b-2c=0\\4a+2b-4c=0\end{cases}\\ \begin{cases}2a+3b-2c=0\\4b+2c=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=c\\b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=-\dfrac{7}{2}b\\ \bar{c}=-2b\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\vec{u}=(c;0;c)=c.(1;0;1)\\ \vec{u}=\left(-\dfrac{7}{2}b;b;-2b\right)=\dfrac{b}{2}\cdot(7;-2;4)\end{array}\right.$$

- TH1: $\vec{u}=(c;0;c)=c.(1;0;1)\longrightarrow$ ta chọn VTCP là $(1;0;1)$.

- Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là: $d:\begin{cases}x=2+t\\y=3\\z=-2+t.\end{cases}$

- Thỏa mãn giao điểm tọa độ nguyên $(4;3;0)=(m;n;p)\Rightarrow T=m+n+p=7$.

- Ta không cần phải xét thêm trường hợp nữa (vì chắc chắn rằng trường hợp này sẽ cho giao điểm giữa đường thẳng d với mặt phẳng (Oxy) có tọa độ không nguyên).

Chọn đáp án (B) □

Câu 17 (2H3G3-2). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 : $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và d_2 : $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, điểm $A(1;1;0)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 những góc là α và β sao cho $\cos\alpha = 2\cos\beta$; khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng d lớn nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm có tọa độ nguyên $(m;n;p)$, khi đó giá trị của biểu thức $T=m+n+p$ bằng:

A. 8. **B.** -3. **C.** 5. **D.** 0.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Gọi VTCP của đường thẳng d là: $\vec{u}=(a;b;c)\neq\vec{0}$.
- Để khoảng cách từ O đến d lớn nhất thì OA phải vuông góc với d tại A.
- Suy ra: $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}=a+b=0$.
- Các VTCP của hai đường thẳng là: $\overrightarrow{u_1}=(2;1;3)$ và $\overrightarrow{u_2}=(3;2;-1)$.
- Từ giả thiết $\cos\alpha=2\cos\beta$, suy ra:
$\dfrac{|\vec{u}\cdot\overrightarrow{u_1}|}{|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{u_1}|}=2\dfrac{|\vec{u}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{u_2}|}\Leftrightarrow|2a+b+3c|=2|3a+2b-c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4a+3b-5c=0\\8a+5b+c=0.\end{array}\right.$
- Kết hợp với (1), ta được hai trường hợp:
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4a+3b-5c=0\\a+b=0\end{cases}\\\begin{cases}8a+5b+c=0\\a+b=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-b\\c=-\dfrac{1}{5}b\end{cases}\\\begin{cases}a=-b\\c=3b\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\vec{u}=\left(-b;b;-\dfrac{1}{5}b\right)=-\dfrac{b}{5}\cdot(5;-5;1)\\\vec{u}=(-b;b;3b)=b\cdot(-1;1;3)\end{array}\right.$$
- TH1: $\vec{u}=\left(-b;b;-\dfrac{1}{5}b\right)=-\dfrac{b}{5}\cdot(5;-5;1)\longrightarrow$ ta chọn VTCP là $(5;-5;1)$.
- Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là: $d:\begin{cases}x=1+5t\\y=1-5t\end{cases}$
- Giao với (Oyz) tại: $x=0=1+5t\Rightarrow t=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow\begin{cases}y=1-5t=2\\z=t=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$
$\Rightarrow d\cap(Oyz)=\left(0;2;-\dfrac{1}{5}\right)$ (Loại).
- TH2: $\vec{u}=(-b;b;3b)=b\cdot(-1;1;3)\longrightarrow$ ta chọn VTCP là $(-1;1;3)$
- Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là: $d:\begin{cases}x=1-t\\y=1+t.\end{cases}$
- Giao với (Oyz) tại điểm: $x=0=1-t\Rightarrow t=1\Rightarrow\begin{cases}y=1+t=2\\z=3t=3.\end{cases}$
$\Rightarrow d\cap(Oyz)=(0;2;3)$ (TM)
- Thỏa mãn giao điểm tọa độ nguyên $(0;2;3)=(m;n;p)\Rightarrow T=m+n+p=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18 (2H3G3-2). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(0;3;3)$; $C(-2;1;-3)$. Quỹ tích những điểm cách đều ba điểm A, B, C là đường thẳng $d : \dfrac{x-m}{1} = \dfrac{y+n}{a} = \dfrac{z-2}{b}$. Giá trị của biểu thức $T = a+b+m+n$ tương ứng bằng:

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

✍ LỜI GIẢI.

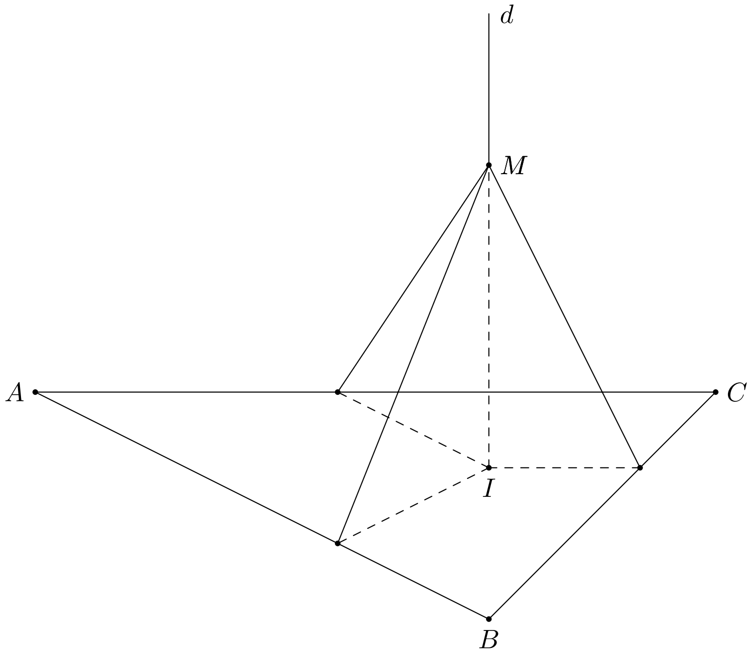
- Quỹ tích những điểm cách đều ba điểm A, B, C là đường thẳng trung trực d của tam giác ABC, d vuông góc với (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.
- Hoặc đường trung trực d là giao điểm của hai mặt phẳng trung trực của đoạn AB và AC.
- Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;2;4)$ và trung điểm của AB là $M = (1;2;1)$.
- Suy ra phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:
$(\alpha) : -2(x-1)+2(y-2)+4(z-1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha) : -x+y+2z-3 = 0$.
- Ta có: $\overrightarrow{AC} = (-4;0;-2)$ và trung điểm của AC là $N = (0;1;-2)$.
- Suy ra phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AC là:
$(\beta) : -4(x-0)+0(y-1)-2(z+2) = 0 \Leftrightarrow (\beta) : 2x+z+2 = 0$.
- Đường thẳng trung trực của tam giác ABC là:
$$d = (\alpha)\cap(\beta) : \begin{cases} -x+y+2z-3 = 0 \\ 2x+z+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 7+5t \\ z = -2-2t. \end{cases}$$
- Suy ra phương trình chính tắc: $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-7}{5} = \dfrac{z+2}{-2}$.
- Bài toán cho: $d : \dfrac{x-m}{1} = \dfrac{y+n}{a} = \dfrac{z-2}{b}$. Suy ra hai VTCP tỉ lệ và điểm $(0;7;-2) \in d$.
- $\begin{cases} \dfrac{1}{1} = \dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{-2} \\ \dfrac{0-m}{1} = \dfrac{7+n}{\frac{1}{a}} = \dfrac{-2-2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \\ \dfrac{-m}{1} = \dfrac{7+n}{5} = \dfrac{-4}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a+b+m+n = 4$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19 (2H3G3-2). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;3;2)$, $B(1;2;-4)$; $C(2;1;3)$. Gọi d là đường thẳng chứa tất cả các điểm cách đều ba cạnh AB, BC, CA. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng d?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 4.

✍ LỜI GIẢI.



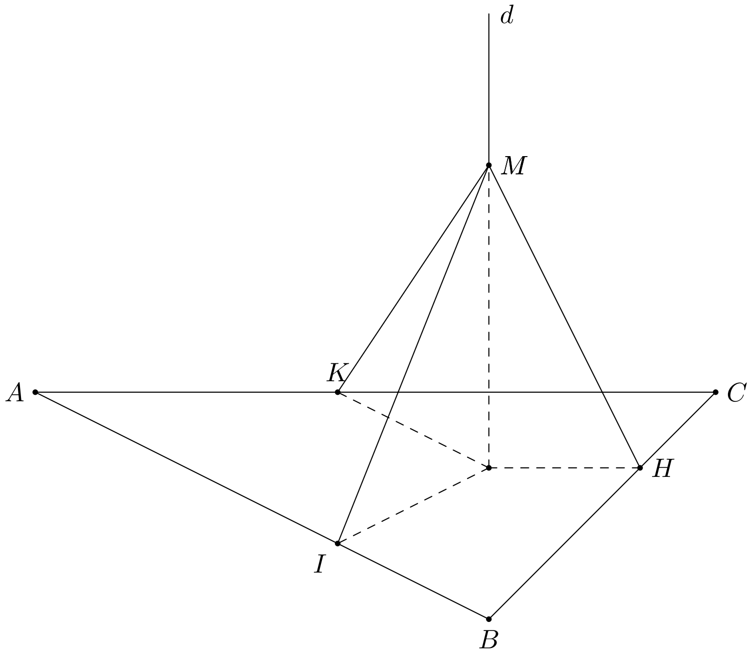
- Dễ dàng kiểm tra được ba điểm A, B, C lập thành tam giác. Suy ra quỹ tích những điểm cách đều ba cạnh là những đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn nội tiếp và các tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC.
- Suy ra có tất cả 4 đường thẳng ứng với 1 tâm nội tiếp và 3 tâm bàng tiếp.

Chọn đáp án D □

Câu 20 (2H3G3-2). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;2)$, $B(0;1;3)$; $C(4;1;3)$. Gọi $M = (a;b;c)$ và H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên ba cạnh AB, BC, CA. Biết rằng H, I, K nằm trong đoạn AB, BC, CA và $MH = MI = MK$. Quỹ tích điểm M là đường thẳng $d: \begin{cases} x = m - at \\ y = n + 2t \\ z = 1 + bt. \end{cases}$ Khi đó giá trị của biểu thức $T = m + n + a + b$ bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** -1. **D.** -4.

✍ **LỜI GIẢI.**



- Dễ dàng kiểm tra được ba điểm A, B, C lập thành tam giác. Suy ra quỹ tích những điểm cách đều ba cạnh là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn nội tiếp J của tam giác ABC. Ta đi xác định: $AB = c = 3; BC = a = 4; CA = b = 3$.

- Suy ra tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$ là:
$J = \dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} = \dfrac{4A + 3B + 3C}{4 + 3 + 3} = \dfrac{4(2; -1; 2) + 3(0; 1; 3) + 3(4; 1; 3)}{10} = \left(2; \dfrac{1}{5}; \dfrac{13}{5}\right)$

- Có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 1), \overrightarrow{AC} = (2; 2; 1) \Rightarrow \vec{u_d} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; 4; -8) = 4(0; 1; -2)$.

- Suy ra phương trình tham số của d là: $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} + t \\ z = \dfrac{13}{5} - 2t \end{cases}$; so sánh với: $d : \begin{cases} x = m - at \\ y = n + 2t \\ z = 1 + bt. \end{cases}$

- Suy ra: $\begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow d : \begin{cases} x = m \\ y = n + 2t \\ z = 1 - 4. \end{cases}$

- Có điểm $\left(2; \dfrac{1}{5}; \dfrac{13}{5}\right) \in d \Rightarrow d : \begin{cases} x = m = 2 \\ y = n + 2t = \dfrac{1}{5} \\ z = 1 - 4t = \dfrac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1. \end{cases}$

- Suy ra: $T = m + n + a + b = 2 + 1 + 0 - 4 = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 21 (2H3G3-2). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng là $(P) : x + 2y - 2z - 8 = 0, (Q) : 3x + y + z - 1 = 0, (R) : mx + ny + pz - 1 = 0$. Biết rằng tồn tại đúng hai đường thẳng cách đều ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = m^2 + 2n^2 + 6p + 20$ bằng:

A. $\dfrac{211}{11}$. **B.** 16. **C.** 15. **D.** $\dfrac{201}{11}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Phải tồn tại đúng hai đường thẳng song song.

- Trường hợp 1: (R) song song với (P). Suy ra: $\dfrac{m}{1} = \dfrac{n}{2} = \dfrac{p}{-2} = t \Rightarrow m = t; n = 2t; p = -2t$

- Suy ra: $T = m^2 + 2n^2 + 6p + 20 = t^2 + 8t^2 - 12t + 20 = 9t^2 - 12t + 20 = (3t - 2)^2 + 16 \geq 16$.

- Suy ra trường hợp này $T_{\min} = 16$.

- Trường hợp 2: (R) song song với (Q). Suy ra: $\dfrac{m}{3} = \dfrac{n}{1} = \dfrac{p}{1} = t \Rightarrow m = 3t; n = t; p = t$.

- Suy ra: $T = m^2 + 2n^2 + 6p + 20 = 9t^2 + 2t^2 + 6t + 20 = 11t^2 + 6t + 20 = 11\left(t + \dfrac{3}{11}\right)^2 + \dfrac{211}{11} \geq \dfrac{211}{11}$.

- Suy ra trường hợp này $T_{\min} = \dfrac{211}{11}$.

- So sánh hai trường hợp, suy ra giá trị nhỏ nhất của T là 16.

Chọn đáp án B □

BÀI 7 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$ có phương trình tương ứng là

A. $(S): x^2 + y^2 + (z - 2\sqrt{2})^2 = 6$.

B. $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2\sqrt{2}$.

C. $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$.

D. $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$ nên phương trình mặt cầu (S) là $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(1;3;0)$, $B(5;-1;2)$ có phương trình tương ứng là

A. $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

B. $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 36$.

C. $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

D. $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

LỜI GIẢI.

Gọi I là trung điểm của AB ta được $I(3;1;1)$.

$\overrightarrow{AB} = (4;-4;2)$, $AB = 6$, $R = \dfrac{AB}{2} = 3$.

Phương trình mặt cầu (S) là $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$. Phát biểu đúng về mặt cầu (S) là

A. có tâm $I(-2;1;3)$ và bán kính $R = 10$.

B. có tâm $I(2;-1;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

C. có tâm $I(-2;1;3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

D. có tâm $I(2;1;3)$ và bán kính $R = 10$.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$ có tâm $I(-2;1;3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z = 16$. Phát biểu đúng về mặt cầu (S) là

A. có tâm $I(1;-2;-4)$ và bán kính $R = 4$.

B. có tâm $I(1;-2;-4)$ và bán kính $R = 16$.

C. có tâm $I(1;-2;-4)$ và bán kính $R = \sqrt{37}$.

D. có tâm $I(-2;4;8)$ và bán kính $R = 5$.

LỜI GIẢI.

Từ phương trình mặt cầu (S) suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-4)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 16} = \sqrt{37}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): 2x^2+2y^2+2z^2-4x-4y+12z-10=0$. Phát biểu đúng về mặt cầu (S) là

A. có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R=4$.
B. có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R=5$.
C. có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$.
D. có tâm $I(-1;-1;3)$ và bán kính $R=8$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Biến đổi phương trình mặt cầu (S) ta được $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+6z-5=0$.
Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R=4$.
Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$ và điểm $M(2;-3;1)$. Phát biểu đúng là

A. Điểm M nằm trên mặt cầu (S).
B. Điểm M nằm trong hình cầu giới hạn bởi (S).
C. Điểm M nằm ngoài hình cầu (S).
D. Không xác định được vị trí tương đối của điểm M đối với (S).

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$ và bán kính $R=6$.
Ta lại có $MI=\sqrt{8}<R$ suy ra điểm M nằm trong hình cầu giới hạn bởi (S).
Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$ và $M(m;m-1;2)$. Để M thuộc mặt cầu (S) thì giá trị thực lớn hơn 1 của m nằm trong khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.
B. $(1;2)$.
C. $\left(3;\dfrac{7}{2}\right)$.
D. $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;2;-1)$ và bán kính $R=4$.
$\overrightarrow{MI}=(-m;-m+3;-3)$, $MI=\sqrt{2m^2-6m+18}$.
M thuộc mặt cầu $(S) \Leftrightarrow MI^2=R^2$

$$\Leftrightarrow 2m^2-6m+18=16 \Leftrightarrow 2m^2-6m+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $m>1$ nên nhận $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$. Điểm $A(3;1;m)$ và $B(n;p;-1)$ là một đường kính của mặt cầu (S). Tính $T=m+n+p$.

A. 0.
B. -1.
C. 1.
D. 3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;2)$ và bán kính $R=4$.

AB là đường kính mặt cầu (S) suy ra I là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3+n}{2}=-1 \\ \dfrac{1+p}{2}=1 \\ \dfrac{m-1}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-5 \\ p=1 \\ m=5. \end{cases}$

Thử lại : với $n=-5$, $p=1$, $m=5$ thì $A(3;1;5)$, $B(-5;1;-1)$.
Khi đó $\dfrac{AB}{2}=5=R$ (nhận). Vậy $m+n+p=1$.
Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên trục Ox và đi qua hai điểm $A(3;1;3)$, $B(-2;3;4)$ có bán kính R tương ứng bằng

A. $\sqrt{29}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 4.

LỜI GIẢI.

Gọi tâm mặt cầu (S) là I, $I \in Ox \Rightarrow I(x;0;0)$.
Ycbt $\Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (3-x)^2 + 1^2 + 3^2 = (-2-x)^2 + 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow I(-1;0;0)$.
$R = IA = \sqrt{26}$.
Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-2}$ và đi qua hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(4;1;1)$ có phương trình tương ứng là

A. $(S) : (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$. **B.** $(S) : (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$.
C. $(S) : (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. **D.** $(S) : x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25$.

LỜI GIẢI.

Gọi mặt cầu (S) có tâm $I \in d \Rightarrow I\left(2t; 1-t; 1-2t\right), t \in \mathbb{R}$.
A, B thuộc mặt cầu (S) suy ra $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (-2t)^2 + (1+t)^2 + (-3+2t)^2 = (4-2t)^2 + t^2 + (2t)^2$
$\Leftrightarrow 6t = 6 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2;0;-1)$.
Bán kính $R = IA = 3$.
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(S) : (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên $(P) : x - 2y - z - 6 = 0$ và đi qua ba điểm $A(1;2;1)$, $B(-1;-2;1)$, $C(3;2;1)$ có phương trình tương ứng

A. $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 19$. **B.** $(S) : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 19$.
C. $(S) : x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$. **D.** $(S) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16$.

LỜI GIẢI.

Gọi mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.
$A \in (S) : -2a - 4b - 2c + d = -6.$ (1)
$B \in (S) : 2a + 4b - 2c + d = -6.$ (2)
$A \in (S) : -6a - 4b - 2c + d = -14.$ (3)
$I \in (P) : a - 2b - c - 6 = 0.$ (4)
Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$, $d = -10$.
Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{19}$.
Phương trình mặt cầu $(S) : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 19$.
Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm có tọa độ $A(3;0;0)$, $B(0;1;2)$, $C(2;0;-1)$, $D(-2;1;3)$ có phương trình là

A. (S): $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x + 6y - 16 = 0$.
B. (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z - 16 = 0$.
C. (S): $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 5x + 61y - 17z - 42 = 0$.
D. (S): $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$.

LỜI GIẢI.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.
(S) đi qua $A(3;0;0)$, suy ra $3^2 - 6a + d = 0 \Leftrightarrow 6a - d = 9$. (1)
(S) đi qua $B(0;1;2)$, suy ra $5 - 2b - 4c + d = 0 \Leftrightarrow 2b + 4c - d = 5$. (2)
(S) đi qua $C(2;0;-1)$, suy ra $5 - 4a + 2c + d = 0 \Leftrightarrow 4a - 2c - d = 5$. (3)
(S) đi qua $D(-2;1;3)$, suy ra $14 + 4a - 2b - 6c + d = 0 \Leftrightarrow 4a - 2b - 6c + d = -14$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}6a-d=9\\2b+4c-d=5\\4a-2c-d=5\\4a-2b-6c+d=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=6a-9\\-6a+2b+4c=-4\\-2a-2c=-4\\10a-2b-6c=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{6}\\b=-\dfrac{61}{6}\\c=\dfrac{17}{6}\\d=-14.\end{cases}$$

Phương trình mặt cầu là

$$x^2+y^2+z^2+\frac{5}{3}x+\frac{61}{3}y-\frac{17}{3}z-14=0\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2+5x+61y-17z-42=0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;1;0)$. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=4$. **B.** $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+z^2=1$.
C. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **D.** $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $R=\mathrm{d}(I,(Oxz))=1$, phương trình mặt cầu (S), có dạng

$$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-3;1;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $(S)\colon (x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$. **B.** $(S)\colon (x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.
C. $(S)\colon (x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$. **D.** $(S)\colon (x+3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $R=\mathrm{d}(I,(Oxy))=2$, phương trình mặt cầu (S), có dạng

$$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y-2z+m=0$. Để mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (α) thì giá trị dương của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(10;12)$. **B.** $(7;10)$. **C.** $(12;15)$. **D.** $(15;18)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tâm của mặt cầu là $I(2;1;1)$ và bán kính mặt cầu là $R=5$. Khi đó mặt cầu (S) tiếp xúc mặt phẳng (α) khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}(I,(\alpha))=R\Leftrightarrow\frac{|4-1-2+m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=5\Leftrightarrow\frac{|m+1|}{3}=5\Leftrightarrow|m+1|=15\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=14\\&m=-16.\end{aligned}\right.$$

Vậy giá trị dương của tham số m nằm trong khoảng $(12;15)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y-z+6=0$ có phương trình là

A. $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+1=0$. **B.** $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$.

C. $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-2z+1=0$. **D.** $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x-4z-9=0$.

LỜI GIẢI.

Bán kính mặt cầu là $R=\mathrm{d}(I,(\alpha))=\dfrac{|2-2+6|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y-2z-18=0$. Phát biểu đúng về vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) là

A. Mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn.

D. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường thẳng.

LỜI GIẢI.

Tâm mặt cầu là $I(2;1;1)$ và bán kính là $R=5$.

Ta có $\mathrm{d}(I,(\alpha))=\dfrac{|4-1-2-18|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{17}{3}>5=R$.

Suy ra mặt cầu (S) không cắt mặt phẳng (α).

Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+z^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+m=0$. Để (S) giao với (P) tại đúng một điểm thì giá trị thực dương của m bằng

A. $m=13$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=5$.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu có tâm $I(2;0;0)$ và bán kính $R=3$.

Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S), khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}(I,(\alpha))=R \Leftrightarrow \frac{|4+m|}{3}=3 \Leftrightarrow |m+4|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m=5\\ &m=-13.\end{aligned}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z+22=0$. Phát biểu đúng về vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) là

A. Mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 1.

D. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 4.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\mathrm{d}(I,(\alpha))=\dfrac{|1+2+22|}{\sqrt{3}}=\dfrac{25\sqrt{3}}{3}>3=R$.

Suy ra mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu (S).

Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hệ thức $x^2+y^2+z^2-2x+2my-6m+2m^2+1=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ thức trên là một phương trình mặt cầu?

A. 4. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 5.

LỜI GIẢI.

Hệ thức đã cho là phương trình mặt cầu khi

$$1^2+(-m)^2-(2m^2-6m+1)>0 \Leftrightarrow -m^2+6m>0 \Leftrightarrow 0<m<6.$$

Số giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 5.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$ và điểm $A(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách AM lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T=2a+b+c$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 19. **D.** 17.

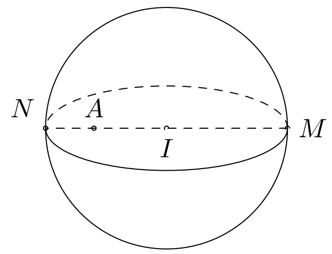
LỜI GIẢI.

Mặt cầu có tâm $I(3;1;2)$ và bán kính $R=5$ và $AI=3$.

Điểm M nằm trên mặt cầu (S) và xa A nhất một khoảng $AM=AI+IM=AI+R=3+5=8$.

Suy ra $5\overrightarrow{MA}=8\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\dfrac{8\overrightarrow{OI}-5\overrightarrow{OA}}{3}$.

Suy ra $M\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3};\dfrac{16}{3}\right)$. Do đó $T=2a+b+c=19$.



Chọn đáp án C □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(1;-2;1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách AM nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 13.

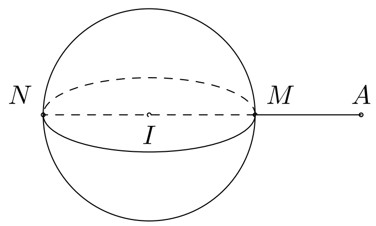
LỜI GIẢI.

Ta có, mặt cầu có tâm $I(-3;2;-1)$ và bán kính $R=3$ và $AI=6$.

Điểm M nằm trên mặt cầu (S) và gần A nhất một khoảng $AM=AI-IM=AI-R=6-3=3$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OA}}{2}$.

Suy ra $M(-1;0;0)$. Do đó $T=a^2+b^2+c^2=1$.



Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=25$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y-z-6=0$. Phát biểu đúng về vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) là

A. mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).

B. mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu (S).

C. chúng cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 4 và tâm $H(2;2;2)$.

D. chúng cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 và tâm $H(1;1;-2)$.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $R=5$.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (α) là $d(I,(\alpha))=\dfrac{|-3-6|}{\sqrt{4+4+1}}=3<5$.

Suy ra mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính $r=\sqrt{R^2-(d(I,(\alpha)))^2}=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z-10=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I=(2;1;3)$ cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 2. Phương trình mặt cầu (S) tương ứng là

A. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=20$. **B.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=12$.

C. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=12$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$.

LỜI GIẢI.

Khoảng cách từ I đến (α) là $d(I,(\alpha))=\dfrac{|2+2-6-10|}{\sqrt{1+4+4}}=4$.

Bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{r^2+d(I,(\alpha)^2)}=2\sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=20$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=16$. Phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại điểm $A(4;1;-2)$ có dạng $ax+by+cz+2=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 6. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính $R=4$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại A nên có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA}=(4;0;0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $4(x-4)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x+2=0$.

Suy ra $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$. Vậy $a+b+c=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-z-6=0$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với (P) tại điểm $A(2;2;0)$ và đi qua điểm $B(1;3;-2)$. Bán kính của (S) bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{3}$.

LỜI GIẢI.

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Suy ra $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=2+2t \\ z=-t \end{cases}$.

Mặt cầu có tâm I thuộc d nên $I(t+2;2t+2;-t)$.

Hai điểm A và B thuộc mặt cầu nên

$$IA=IB \Leftrightarrow t^2+(2t)^2+t^2=(t+1)^2+(2t-1)^2+(t-2)^2 \Leftrightarrow t=1.$$

Vậy $R=IA=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+z^2=25$. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y-z+2019=0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Biết rằng mặt phẳng (β) cắt đường thẳng

$d : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ tại điểm $A(a;b;c)$ có các tọa độ nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu có tâm $I(0;1;0)$ và bán kính $R=5$.
Mặt phẳng (β) song song với (α) có phương trình $2x-2y-z+d=0$.
Đường tròn giao tuyến có chu vi bằng 6π nên bán kính $r=3$.

Suy ra khoảng cách từ I đến (α) là $d(I,(\alpha)) = \sqrt{R^2-r^2} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{|-2+d|}{\sqrt{4+4+1}} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=-10 \\ d=14. \end{array}\right.$

Với $d=14$, $(\beta): 2x-2y-z+14=0$ giao với $d: \begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-t \\ z=-2+t \end{cases}$ tại điểm $A\left(-\dfrac{33}{5}; \dfrac{19}{5}; -\dfrac{34}{5}\right)$ loại.

Với $d=-10$, $(\beta): 2x-2y-z-10=0$ giao với $d: \begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-t \\ z=-2+t \end{cases}$ tại điểm $A(3;-1;-2)$ nhận.

Vậy $a+b+c=0$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. Gọi $(\alpha): ax+by+cz+6=0$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{-1}$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T = 2a+b+c$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** -13.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu có tâm $I(0;2;-1)$ và bán kính $R=3$.
Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi lớn nhất nên (α) đi qua tâm I của mặt cầu.
Lại có mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d nên ta có

$$\begin{cases} 2b-c=-6 \\ -a+b=-6 \\ 2a+3b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \\ c=2. \end{cases}$$

Vậy $2a+b+c=8$.

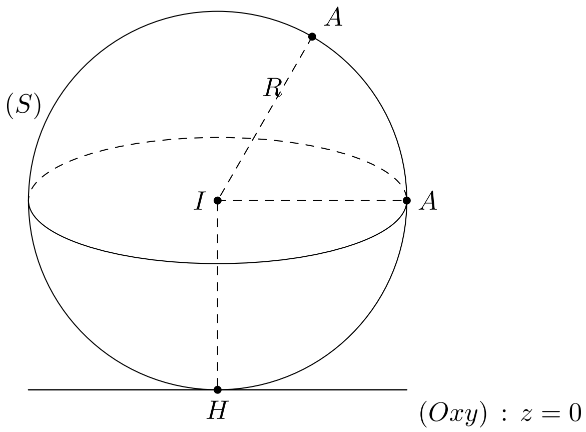
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi (S) là mặt cầu có bán kính lớn hơn 3 và tiếp xúc với (Oxy) đồng thời đi qua ba điểm $A(2;1;2), B(0;3;2), C(0;1;4)$. Bán kính của (S) bằng

A. $\sqrt{14}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** 6.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình vẽ minh họa



Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là: $z=0$.
Mặt cầu (S) lại đi qua ba điểm đều có cao độ $z>0$.
Suy ra cao độ của tâm I cũng dương. Suy ra tọa độ tâm $I=(a\,;b\,;c)$ với $c>0$
Ta cũng có: $d(I\,;(Oxy))=|c|=c=R$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \\ IA=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=(a)^2+(b-3)^2+(c-2)^2 \\ (a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=(a)^2+(b-1)^2+(c-4)^2 \\ (a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=c^2. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ a-c=-2 \\ (a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c-2 \\ b=c-1 \\ (a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=c^2. \end{cases}$

Thay vào phương trình cuối, suy ra: $(c-4)^2+(c-2)^2+(c-2)^2=c^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2=R\,(\text{Loại}) \\ c=6=R\,(TM). \end{array}\right.$

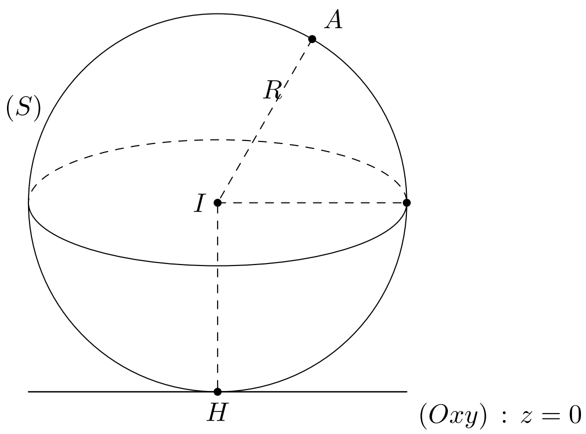
Suy ra bán kính mặt cầu (S) bằng 6 .
Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi (S) là mặt cầu có bán kính lớn hơn 3 và tiếp xúc với hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) đồng thời đi qua hai điểm $A(-1\,;1\,;3)$, $B(-4\,;0\,;1)$. Bán kính R của (S) có giá trị R bằng

A. $4+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{7}$. **C.** $3+\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

LỜI GIẢI.

Hình vẽ minh họa



Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là: $z=0$ và mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x=0$.
Mặt cầu (S) lại đi qua hai điểm đều có hoành độ âm và cao độ dương. Suy ra hoành độ của tâm I cũng âm và cao độ của tâm I cũng dương.

Ta luôn có I, A, B cùng phía so với các mặt phẳng tọa độ mà (S) tiếp xúc với. Gọi tọa độ tâm $I = (a\,;\,b\,;\,c)$ với $a < 0$ và $c > 0$.
Ta cũng có: $d(I\,;\,(Oxy)) = d(I\,;\,(Oyz)) = |a| = -a = |c| = c = R \Rightarrow a = -R; \, c = R \Rightarrow I = (-R\,;\,b\,;\,R)$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-R+1)^2 + (b-1)^2 + (R-3)^2 = (-R+4)^2 + (b)^2 + (R-1)^2 \\ (-R+1)^2 + (b-1)^2 + (R-3)^2 = R^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = R - 3 \\ (-R+1)^2 + (R-3-1)^2 + (R-3)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 4 - \sqrt{3}\,(\text{Loại}) \\ R = 4 + \sqrt{3}\,(TM). \end{array}\right.$

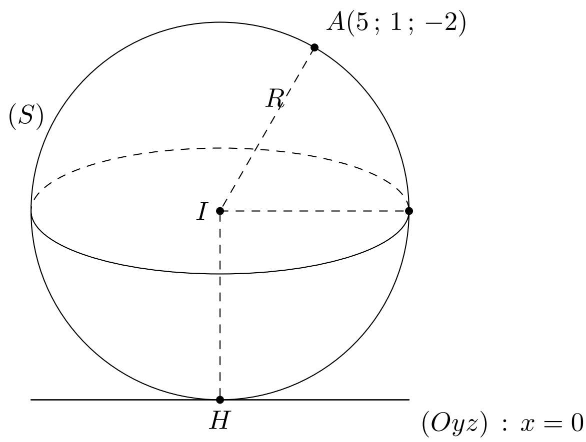
Chọn đáp án A □

Câu 31. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi (S) là mặt cầu có bán kính lớn hơn 4 và tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ đồng thời đi qua điểm $A(5\,;\,1\,;\,-2)$. Biết bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $4\sqrt{3}$.

✍ LỜI GIẢI.

Hình vẽ minh họa



Mặt cầu (S) tiếp xúc các mặt phẳng tọa độ và đi qua một điểm $A(5\,;\,1\,;\,-2)$ thì tâm của mặt cầu có các thành phần tọa độ luôn cùng dấu với điểm A.
Tức là ở bài toán này, hoành độ và tung độ của tâm I dương còn cao độ của tâm I là âm.
Gọi tọa độ tâm $I = (a\,;\,b\,;\,c)$ với $a > 0, b > 0, c < 0$ và $c > 0$.
Có: $d(I\,;\,(Oxy)) = d(I\,;\,(Oyz)) = d(I\,;\,(Ozx)) = |a| = |b| = |c| = R \Leftrightarrow a = b = -c = R$
$\Rightarrow I = (R\,;\,R\,;\,-R)$.

Từ đó suy ra: $IA = R \Leftrightarrow IA^2 = R^2 \Leftrightarrow (R-5)^2 + (R-1)^2 + (-R+2)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 3\,(\text{ Loại }) \\ R = 5(TM). \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua $A(2\,;\,1\,;\,0)$ có bán kính $R > 3$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $x = 3\,;\,y = -1\,;\,z = 4$. Bán kính của mặt cầu (S) tương ứng là

A. $\dfrac{7+\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{6+\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$.

✍ LỜI GIẢI.

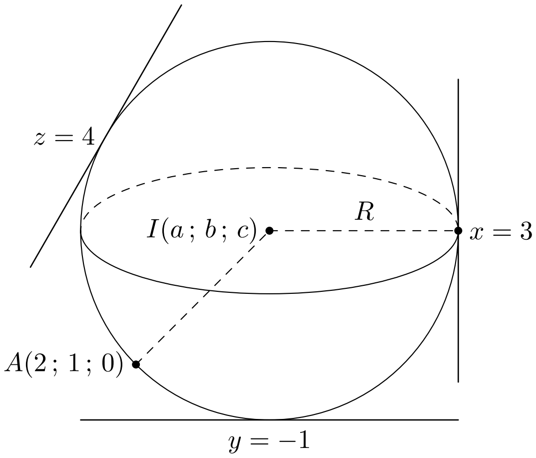
Gọi tâm mặt cầu là: $I(a\,;\,b\,;\,c)$ và bán kính $R > 0$.
Điều kiện tiếp xúc của mặt cầu (S) với các mặt phẳng đã cho là khoảng cách từ tâm I đến các mặt phẳng đều bằng đúng bán kính R, tức là: $\begin{cases} |a-3| = R \\ |b+1| = R \\ |c-4| = R. \end{cases}$

Điểm $A(2\,;\,1\,;\,0)$ mà tâm I của mặt cầu (S) luôn cùng phía nhau so với các mặt phẳng tiếp xúc.

Điểm A và điểm I nằm cùng phía so với mặt phẳng $x = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 < 3 \\ x_I = a < 3 \end{cases}$.

Điểm A và điểm I nằm cùng phía so với mặt phẳng $y = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_A = 1 > -1 \\ y_I = b > -1 \end{cases}$.

Điểm A và điềm I nằm cùng phía so với mặt phẳng $z = 4 \Rightarrow \begin{cases} z_A = 0 < 4 \\ z_I = c < 4 \end{cases}$.



Suy ra: $\begin{cases} a < 3 \\ b > -1 \\ c < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - a = R \\ b + 1 = R \\ 4 - c = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - R \\ b = R - 1 \\ c = 4 - R. \end{cases}$

Thay vào khoảng cách: $R^2 = IA^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-0)^2$, ta được

$$R^2 = (3 - R - 2)^2 + (R - 1 - 1)^2 + (4 - R)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = \dfrac{7 - \sqrt{7}}{2}\ \text{(Loại)} \\ R = \dfrac{7 + \sqrt{7}}{2}\ (TM). \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, , cho mặt cầu (S) đi qua $A(5\,;\,-2\,;\,3)$ có bán kính $R < 3$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $x = 2\,;\, y = -3\,;\, z = 1$. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. 1. **B.** $1 + \sqrt{2}$. **C.** $3 - \sqrt{2}$. **D.** $2 - \sqrt{2}$.

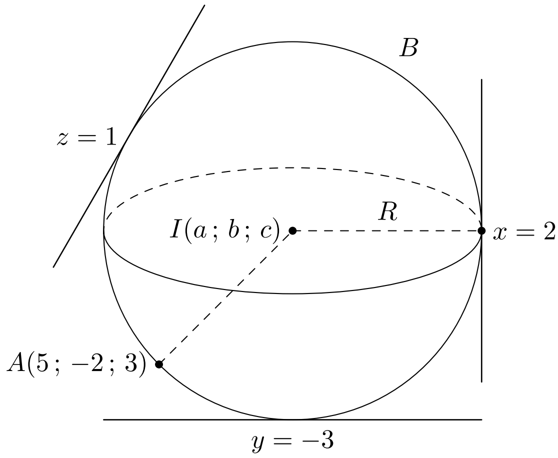
✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi tâm mặt cầu là: $I(a\,;\,b\,;\,c)$ và bán kính $R > 0$.

Điều kiện tiếp xúc của mặt cầu (S) với các mặt phẳng đã cho:

$$\begin{cases} |a - 2| = R \\ |b + 3| = R \\ |c - 1| = R. \end{cases}$$

Điểm $A(5\,;\,-2\,;\,3)$ và tâm I của mặt cầu (S) luôn cùng phía nhau so với các mặt phẳng tiếp xúc.



Suy ra: $\begin{cases} a > 2 \\ b > -3 \\ c > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = R \\ b + 3 = R \\ c - 1 = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = R + 2 \\ b = R - 3 \\ c = R + 1. \end{cases}$

Thay vào khoảng cách: $R^2 = IA^2 = (a-5)^2 + (b+2)^2 + (c-3)^2$, ta được:

$$R^2 = (R+2-5)^2 + (R-3+2)^2 + (R+1-3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 3 + \sqrt{2}\,(\text{Loại}) \\ R = 3 - \sqrt{2}\,(TM). \end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon ax - 4y + cz + d = 0$ với d là số nguyên. Biết mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(7; -1; 1), B(11; 2; 0)$ và đồng thời (α) tiếp xúc với mặt cầu (S). Giá trị của biểu thức $T = (a + c + d)$ tương ứng bằng

A. 12. **B.** −15. **C.** −18. **D.** −22.

✍ LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$ và bán kính $R = 5$.

Vì mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$\mathrm{d}(I; (\alpha)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3c + d|}{\sqrt{a^2 + 16 + c^2}} = 5 \Leftrightarrow (3c + d)^2 = 25\left(a^2 + c^2 + 16\right).$ (1)

Ta có $A, B \in (\alpha)$ nên $\begin{cases} 7a + 4 + c + d = 0 \\ 11a - 8 + d = 0 \end{cases} \begin{cases} c = -7a - d - 4 = -\dfrac{100 + 4d}{11} \\ a = \dfrac{8 - d}{11}. \end{cases}$

Thay vào (1), ta được

$$\left(-3 \cdot \frac{100 + 4d}{11} + d\right)^2 = 25\left(\left(\frac{8 - d}{11}\right)^2 + \left(\frac{100 + 4d}{11}\right)^2 + 16\right) \Leftrightarrow \begin{cases} d = -25 \\ d = -\dfrac{1050}{53}\ (\text{Loại}). \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} c = 0 \\ a = \dfrac{8 - d}{11} = 3. \end{cases}$ Suy ra $(\alpha)\colon ax - 4y + cz + d = 3x - 4y - 25 = 0.$

Vậy $T = a + c + d = 3 + 0 - 25 = -22$.

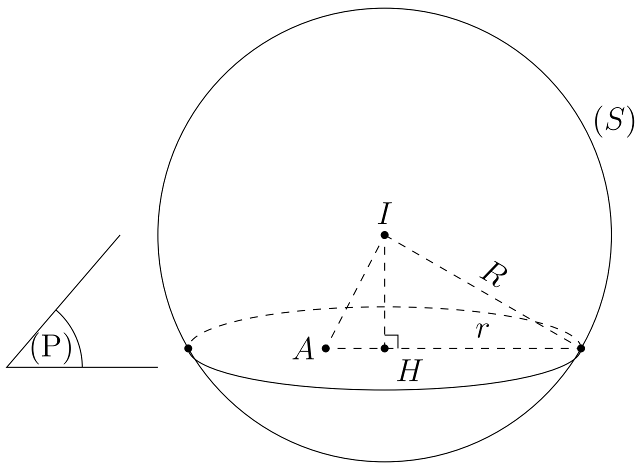
Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) cắt trục Oz tại điểm cách gốc O một đoàn bằng

A. 2. **B.** −2. **C.** 3. **D.** 1.

✍ LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;0)$ và bán kính $R=4$.



Giả sử mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C).

Khi đó bán kính đường tròn (C) là $\begin{cases} r=\sqrt{R^2-IH^2}\geq\sqrt{R^2-IA^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{13} \\ IH\leq IA. \end{cases}$

Dấu "$=$ "xảy ra khi $IH=IA\Leftrightarrow IA\perp(P)$ tại điểm A.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;1)$ là VTPT, phương trình mặt phẳng (P) là $(P)\colon -1(x-1)-1(y-2)+1(z-1)=0\Leftrightarrow(P)\colon x+y-z-2=0$.

Suy ra mặt phẳng (P) cắt trục Oz tại điểm $M(0;0;2)$.

Vậy mặt phẳng (P) cắt trục Oz tại điểm cách gốc O một đoàn bằng $OM=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$ và hai điểm $A(1;1;-2), B(2;-1;1)$. Gọi $(P)\colon ax+by+cz+2=0$ là mặt phẳng đi qua mặt phẳng đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T=a+b+2c$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -3.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=4$.

Để mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất thì (P) phải đi qua tâm I của (S). Khi đó (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=R=4$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, I nên ta có

$$\begin{cases} a+b-2c=-2 \\ 2a-b+c=-2 \\ a+2b-c=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{-5}{4} \\ b=\dfrac{-1}{4} \\ c=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Vậy $T=a+b+2c=-1$.

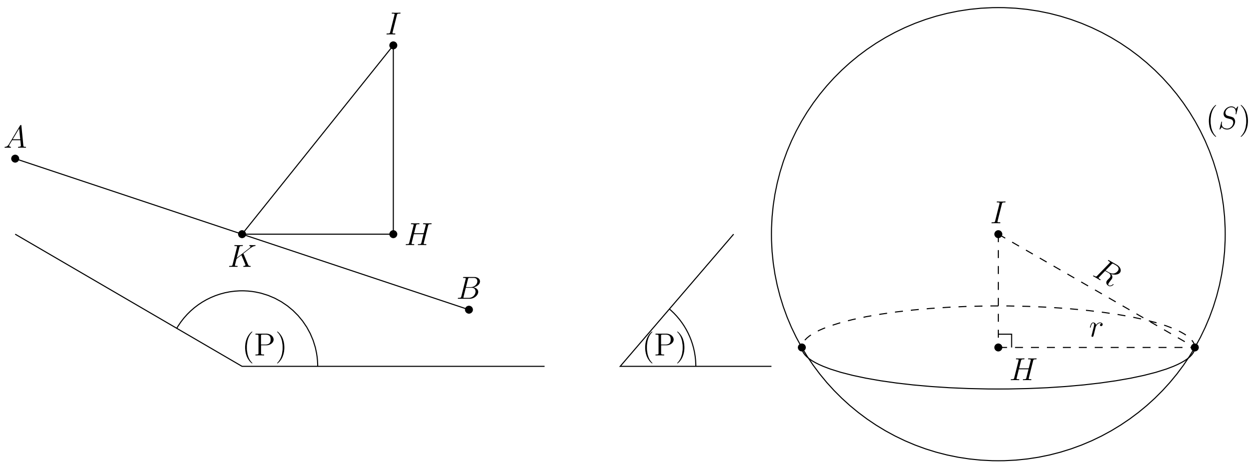
Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=36$ và hai điểm $A(3;2;2), B(4;4;3)$. Gọi $(P)\colon 2x+by+cz+d=0$ là mặt phẳng đi qua mặt phẳng đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $T=b+c+d$ bằng

A. -9. **B.** 11. **C.** -12. **D.** -6.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R=6$.
Dễ thấy hai điểm A và B nằm trong mặt cầu (S). Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB và H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P). Khi đó $IK \geq IH$.



Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x=3+t \\ y=2+2t \\ z=2+t \end{cases}$ và hình chiếu vuông góc của I lên AB là $K=(2;0;1)$. Suy ra $IK=\sqrt{3}$.
Mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H và bán kính tính được

$$r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{36-IH^2}\geq\sqrt{36-IK^2}=\sqrt{36-3}=\sqrt{33}.$$

Dấu "$=$" xảy ra khi $IH\equiv IK \Rightarrow \overrightarrow{IK}=(1;-1;1)$ là VTPT của (P) và để ý rằng (P) đi qua K.
Suy ra mặt phẳng (P): $1(x-2)-1(y-0)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y+z-3=0$.
mà từ giải thiết (P): $2x+by+cz+d \Leftrightarrow \dfrac{2}{1}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{c}{1}=\dfrac{d}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \\ d=-6. \end{cases}$
Vậy $T=b+c+d=-6$.

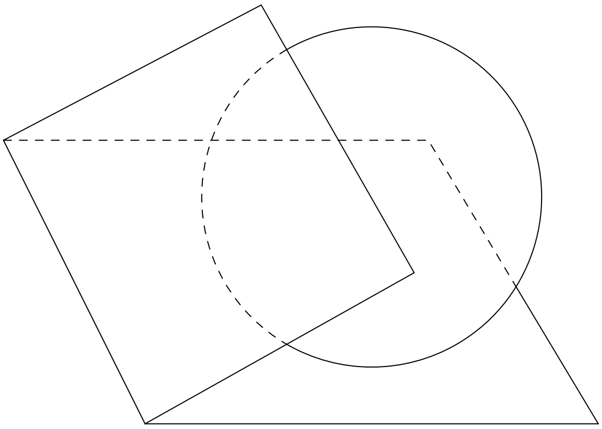
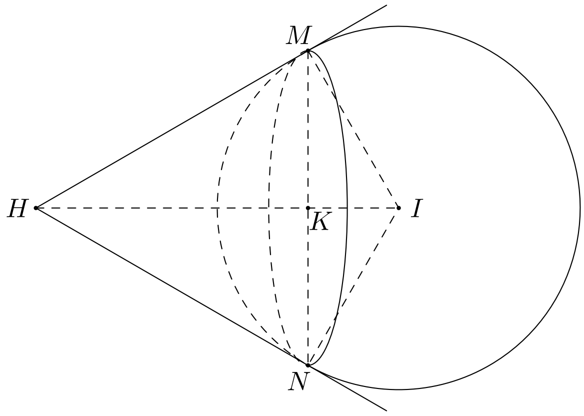
Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ và mặt cầu (S): $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại hai điểm M và N. Độ dài dây cung MN có giá trị bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

LỜI GIẢI.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(2;0;1)$ lên đường thẳng d, ta có hình vẽ minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua d, tiếp xúc với mặt cầu (S) như hình vẽ bên dưới:

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$; VTPT của d: $\overrightarrow{u_{(d)}} = (2; -1; 2)$.

Gọi $H(1 + 2t; -t; 2 + 2t) \in (d)$. Suy ra $\overrightarrow{IH} = (2t - 1; -t; 2t + 1)$.

Ta có $\overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{u_{(d)}} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_{(d)}} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) - 1(-t) + 2(2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow H = (1; 0; 2)$.

Độ dài đoạn $IH = \sqrt{(2-1)^2 + 0^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$.

Áp dụng định lý Pitago suy ra $HM = HN = \sqrt{IH^2 - IM^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = 1$.

Vậy $MN = 2MK = 2 \cdot \dfrac{HM \cdot IM}{IH} = 2 \cdot \dfrac{1 \cdot 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(7; 0; 1), B(-1; -6; 2)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm có hoành độ dương tương ứng là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 0)$ và bán kính $R = 5$.

Gọi VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (a; b; c)$ với $\{a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\}$.

Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\alpha)\colon a(x - 7) + b(y - 0) + c(z - 1) = 0$. (*)

Ta có $B \in (\alpha) \Rightarrow a(-1 - 7) + b(-6 - 0) + c(2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 8a + 6b - c = 0 \Rightarrow c = 8a + 6b$.

Do mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có

$\mathrm{d}(I; (\alpha)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|a(0-7) + b(1-0) + c(0-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 5 \Leftrightarrow \dfrac{|7a - b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 5$ mà $c = 8a + 6b$ nên

$$\frac{|7a - b + 8a + 6b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (8a + 6b)^2}} = 5 \Leftrightarrow 56a^2 + 90ab + 36b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -\dfrac{4}{3}a \\ b = -\dfrac{7}{6}a. \end{array}\right.$$

- **Trường hợp 1:** Với $b = -\dfrac{7}{6}a \Rightarrow c = 8a + 6b = a$ thay vào (*) ta được

$$(\alpha)\colon a(x - 7) - \frac{7}{6}a(y - 0) + a(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x - 7y + 6z - 48 = 0.$$

  Tọa độ tiếp điểm chính là hình chiếu vuông góc của tâm $I(0; 1; 0)$ lên mặt phẳng (α).
  Từ đó tìm được tọa độ tiếp điểm $H\left(\dfrac{42}{121}; \dfrac{72}{121}; \dfrac{42}{121}\right)$ (Loại vì tọa độ không nguyên).

- **Trường hợp 2:** Với $b = -\dfrac{4}{3}a \Rightarrow c = 0$. Thay vào (∗) ta được

$$(\alpha)\colon a(x - 7) - \frac{4}{3}a(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 21 = 0.$$

Khi đó tọa tiếp điểm là $H(3;-3;0)$. (thỏa mãn)

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=4\\ y=2t\\ z=t\end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+y^2+z^2=10$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại hai điểm M và N. Phương trình đường thẳng MN đi qua điểm nào dưới đây?

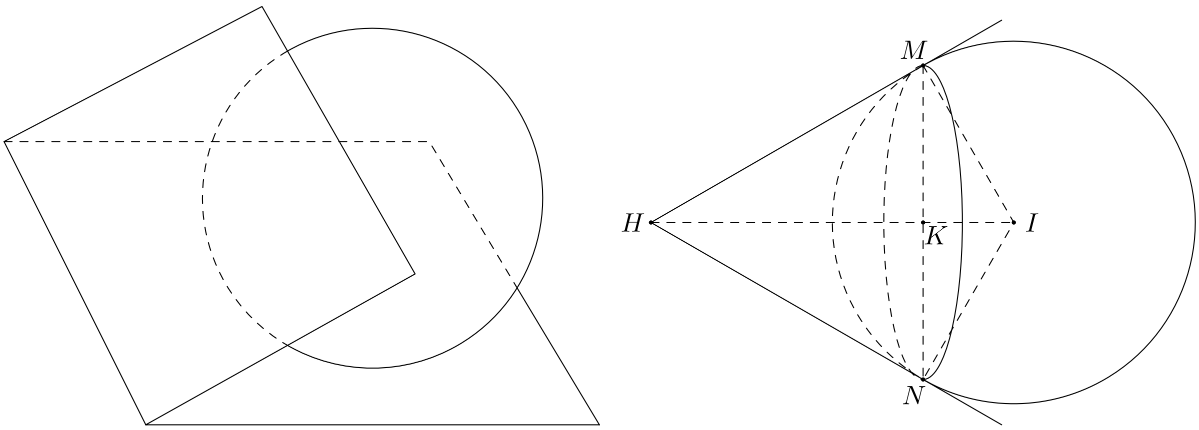
A. $(1;-2;4)$. **B.** $(1;1;2)$. **C.** $(3;-1;2)$. **D.** $(0;0;4)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(-1;0;0)$ lên đường thẳng d, ta có hình vẽ minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua d, tiếp xúc với mặt cầu (S) như hình vẽ bên dưới:

Tìm được tọa độ điểm $H=(4;0;0)\Rightarrow IH=5$.

Suy ra $IK\cdot IH=IM^2=R^2=10\Leftrightarrow IK\cdot 5=10\Rightarrow IK=2\Rightarrow HK=3$.



Tọa độ K tìm được theo hệ thức $2\cdot\overrightarrow{KH}+3\cdot\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{0}\Rightarrow \begin{cases} x_K=\dfrac{2x_H+3x_I}{2+3}=1\\ y_K=\dfrac{2y_H+3y_I}{2+3}=0\\ z_K=\dfrac{2z_H+3z_Y}{2+3}=0.\end{cases}$

Đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng chứa d và tâm I. Suy ra VTCP của đường thẳng MN là

$\overrightarrow{u_{(MN)}}=\left[\overrightarrow{IH},\overrightarrow{u_d}\right]=[(5;0;0),(0;2;1)]=(0;-5;10)=-5\cdot(0;1;-2)$.

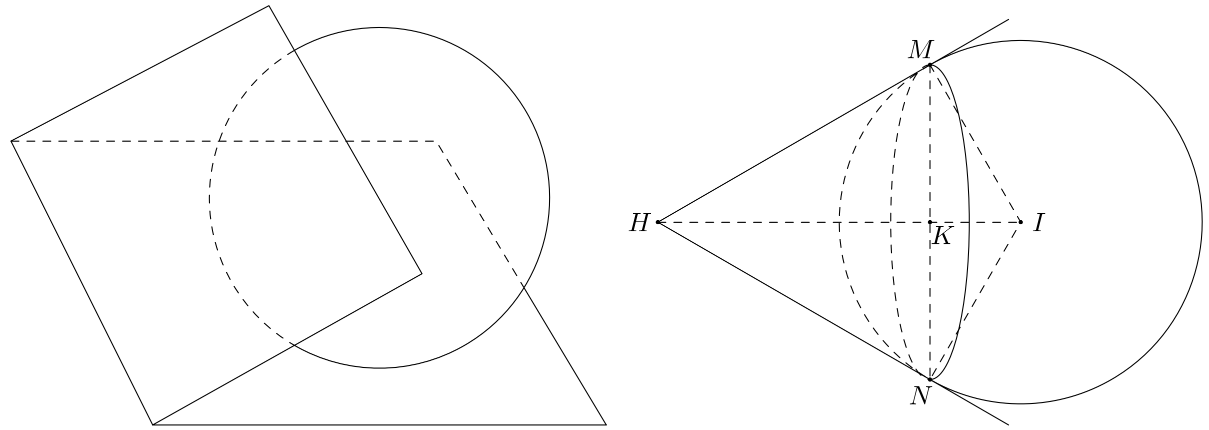
Suy ra phương trình tham số của đường thẳng MN là $(MN)\colon \begin{cases} x=1\\ y=-t\\ z=2t.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\begin{cases} x=1+2t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$ mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z-2)^2=1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S). Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q). Giá trị $\cos\varphi$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

LỜI GIẢI.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(2;0;2)$ lên đường thẳng d, ta có hình vẽ minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua d, tiếp xúc với mặt cầu (S) như hình vẽ bên dưới:



Tìm được tọa độ điểm $H=(3;1;1) \Rightarrow IH=\sqrt{3}$.

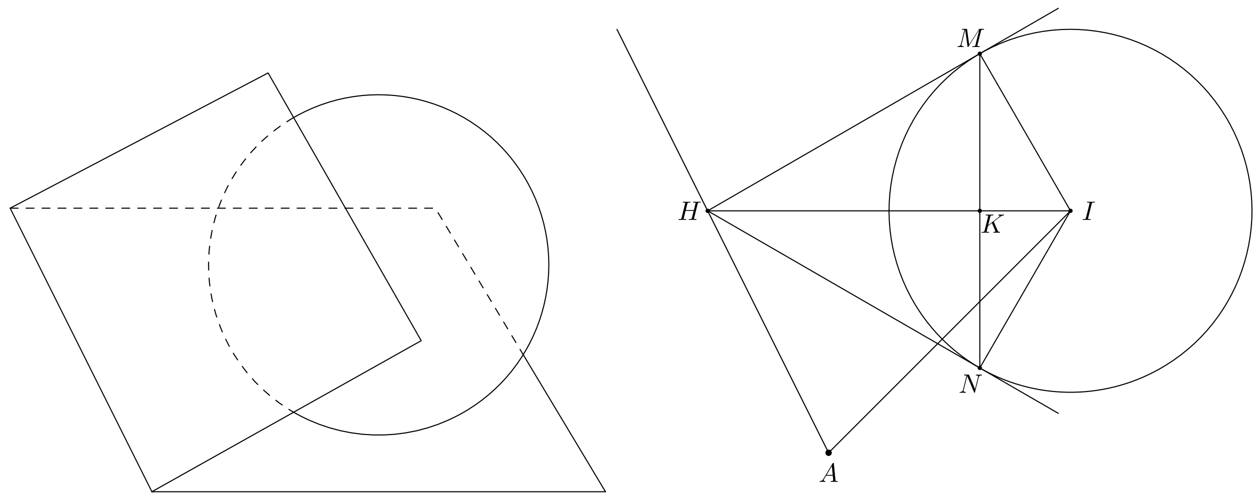
Suy ra $\sin\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{IM}{IH}=\dfrac{R}{IH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\varphi = 1-2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42 (2H3K3-8). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ và điểm $A(-3;1;0)$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt đi qua A, tiếp xúc với mặt cầu (S) tại hai điểm M và N. Hãy tìm giá trị lớn nhất của MN

A. 3. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{24}{5}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

LỜI GIẢI.
Hai mặt phẳng (P) và (Q) có giao tuyến là đường thẳng d, tiếp xúc với mặt cầu (S) như hình vẽ



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d, K là giao của MN và IH.

Ta có $IK\cdot IH = IM^2=R^2=9 \Rightarrow IK=\dfrac{9}{IH}$

$\Rightarrow MN = 2MK = 2\cdot\sqrt{MI^2-IK^2}=2\cdot\sqrt{R^2-\left(\dfrac{9}{IH}\right)^2}=2\cdot\sqrt{9-\dfrac{81}{IH^2}}=6\cdot\sqrt{1-\dfrac{9}{IH^2}}$.

Dễ thấy $IH=\mathrm{d}(I;d)\le IA=5$.

Suy ra $MN=6\cdot\sqrt{1-\dfrac{9}{IH^2}}\le 6\cdot\sqrt{1-\dfrac{9}{IA^2}}=6\cdot\sqrt{1-\dfrac{9}{5^2}}=\dfrac{24}{5}$.

Khi đó giá trị lớn nhất của MN là $\dfrac{24}{5}$ xảy ra khi $IA\perp d$.

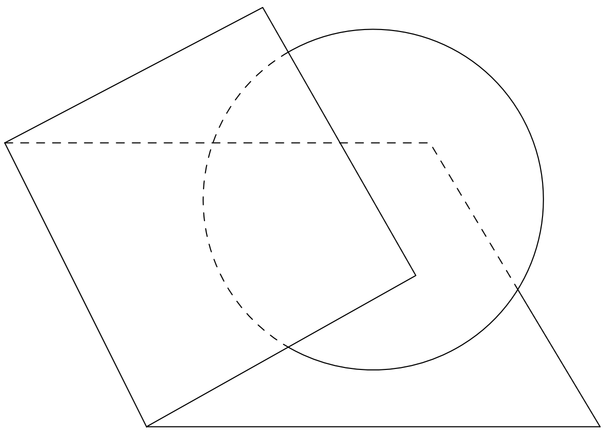
Chọn đáp án C □

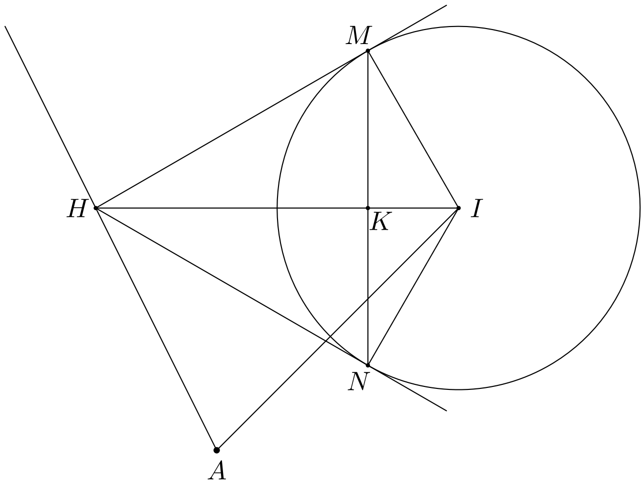
Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y-z+6=0$, mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+z^2=4$ và điểm $A(1;-1;3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với (α). Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại hai điểm M và N. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của MN

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{5}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(3;-2;0)$ lên đường thẳng d, ta có hình vẽ minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua d, tiếp xúc với mặt cầu (S) như hình vẽ bên dưới



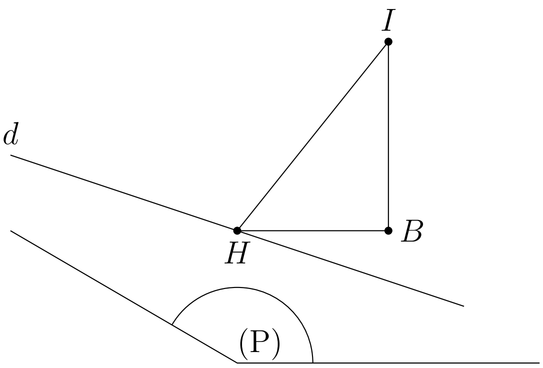


Ta có $IK\cdot IH=IM^2=R^2=4\Rightarrow IK=\dfrac{4}{IH}$

$\Rightarrow MN=2MK=2\cdot\sqrt{MI^2-IK^2}=2\cdot\sqrt{R^2-\left(\dfrac{4}{IH}\right)^2}$.

Suy ra $MN=2\cdot\sqrt{4-\dfrac{16}{IH^2}}=4\sqrt{1-\dfrac{4}{IH^2}}$.

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), mặt phẳng (P) đi qua A và song song với (α).
Suy ra mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z-1=0$.



Gọi B là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).
Khi đó $IB=d(I;(P))=3\le IH=d(I;d)\Rightarrow IH\ge 3$.

Suy ra $MN=4\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{IH^2}}\ge 4\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{IB^2}}=4\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{3^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của MN là $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ xảy ra khi d đi qua M và N (với B là hình chiếu vuông góc của I lên (P)).

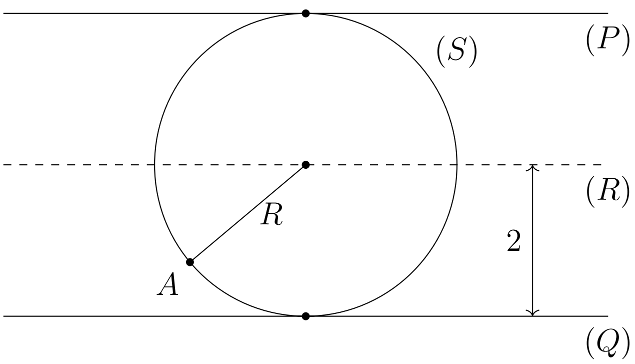
Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon 2x+y-2z-3=0$ và $(Q)\colon 2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q), đồng thời đi qua hai điểm $A(1;1;2)$, $B(3;-1;2)$. Biết tâm mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$ có các thành phần a,b,c là những số nguyên. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -4.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình minh họa



Dễ dàng tính được khoảng cách giữa hai mặt phẳng là $d((P);(Q))=4 \Rightarrow$ bán kính mặt cầu (S) tiếp xúc với cả hai mặt phẳng là: $R=2$.

Tâm $I(a;b;c)$ của mặt cầu (S) nằm trên mặt phẳng (R) (nằm chính giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)).

Ta có $(R)=\dfrac{(P)+(Q)}{2}=2x+y-2z+3=0 \Rightarrow 2a+b-2c+3=0 \quad (1)$

Suy ra $\begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=R^2=2^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=(a-3)^2+(b+1)^2+(c-2)^2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \quad (2) \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=4 \quad (3). \end{cases}$

Từ (1) và (2), suy ra $\begin{cases} b=a-2 \\ c=\dfrac{3a+1}{2} \end{cases}$ thế vào (3) ta được

$(a-1)^2+(a-2-1)^2+\left(\dfrac{3a+1}{2}-2\right)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\dfrac{33}{17} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow b=-1; c=2.$

Vậy $T=a+b+c=2$.

Chọn đáp án A □

BÀI 8 MẶT CẦU 2

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2my+2m^2-8m+8=0$. Số giá trị nguyên m để tồn tại mặt cầu (S) là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 11.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $x^2+y^2+z^2-2x-2my+2m^2-8m+8=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-m)^2+z^2=-m^2+8m-7$.

Mặt cầu (S) tồn tại khi và chỉ khi

$$-m^2+8m-7>0 \Leftrightarrow 1<m<7.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; \ldots; 6\}$.
Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để tồn tại mặt cầu (S).

Chọn đáp án B □

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 0)$ và cắt mặt phẳng (Ozx) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. 2. **B.** 3. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{13}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi r, R lần lượt là bán kính đường tròn và mặt cầu (S).
Đường tròn có chu vi 6π suy ra $6\pi = 2\pi r \Leftrightarrow r = 3$.
Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (Ozx) là $\mathrm{d}(I, (Ozx)) = 2$.
Ta có $R^2 = r^2 + \mathrm{d}^2(I, (Ozx)) = 13 \Rightarrow R = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tiếp xúc với $(P)\colon x - y + z - 6 = 0$ tại điểm $A(3; -2; 1)$ và có bán kính bằng $3\sqrt{3}$. Hỏi (S) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1; 2; 3)$. **B.** $N(3; -1; -1)$. **C.** $E(-2; 0; 4)$. **D.** $F(1; 2; 1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi I là tâm mặt cầu (S).
Đường thẳng IA vuông góc với (P) tại A nhận $\overrightarrow{n}_{(P)} = (1; -1; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Suy ra $I(3 + t; -2 - t; 1 + t)$.
Mặt cầu (S) có bán kính $R = 3\sqrt{3}$ nên $IA^2 = 27 \Leftrightarrow 3t^2 = 27 \Leftrightarrow t = \pm 3$.

- Với $t = 3 \Rightarrow I(6; -5; 4)$ và $(S)\colon (x - 6)^2 + (y + 5)^2 + (z - 4)^2 = 27$.

- Với $t = -3 \Rightarrow I(0; 1; -2)$ và $(S)\colon x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 27$.

Thay tọa độ các điểm M, N, E, F vào phương trình mặt cầu (S). Ta thấy $M(-1; 2; 3)$ thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 27$.

Chọn đáp án A □

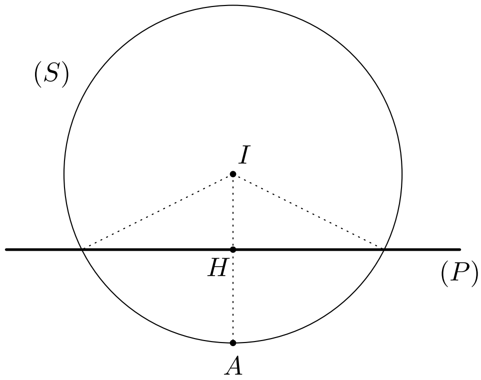
Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và mặt $(P)\colon x - 2y + 2z - 7 = 0$. Mặt phẳng (P) chia khối cầu (S) thành hai phần có thể tích V_1, V_2 $(V_1 < V_2)$. Tỉ lệ $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{7}{236}$. **B.** $\dfrac{11}{360}$. **C.** $\dfrac{7}{243}$. **D.** $\dfrac{29}{3209}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;0)$ và bán kính $R=5$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P); A là giao điểm của tia IH bằng mặt cầu (S). Khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng (P) là

$$IH = \mathrm{d}(I;(P)) = 4 < R.$$



Suy ra (S) cắt (P) theo đường tròn (C).
Ta có $HA = IA - IH = 5-4=1$.
Thể tích chỏm cầu nhỏ giới hạn bởi (S) và (P) là

$$\begin{aligned}V_1 &= \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right) = \pi HA^2\left(R-\frac{HA}{3}\right)\\ &= \pi\cdot 1^2\cdot\left(5-\frac{1}{3}\right) = \frac{14\pi}{3}.\end{aligned}$$

Do đó thể tích phần còn lại của khối cầu là

$$V_2 = V - V_1 = \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{14\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\cdot 5^3 - \frac{14\pi}{3} = 162\pi.$$

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{14\pi}{3}}{162\pi} = \dfrac{7}{243}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian hệ với trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-2z-11=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+m}{1} = \dfrac{z-2}{n}$. Biết rằng mọi mặt phẳng (P) đi qua d luôn cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính không đổi. Giá trị của biểu thức $T=2m+3n$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** -1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;1)$ và bán kính $R=4$.
Để (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính không đổi thì bắt buộc đường thẳng d phải đi qua tâm I của mặt cầu (S). Khi đó (P) và (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính bằng bán kính mặt cầu.

Ta có $I\in d \Leftrightarrow \dfrac{-2-1}{2} = \dfrac{0+m}{1} = \dfrac{1-2}{n} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{3}{2}\\ n = \dfrac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow T = 2m+3n = -1.$

Chọn đáp án D □

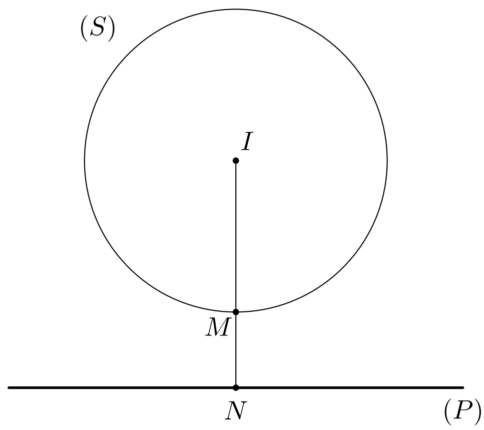
Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=25$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-20=0$. Gọi điểm M nằm trên mặt cầu (S) và điểm N nằm trên mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách MN nhỏ nhất. Giá trị MN nhỏ nhất bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu (S) có tâm $I=(0;1;0)$ và bán kính $R=5$.
Ta có $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|2-20|}{3}=6$.
Do đó khoảng cách MN nhỏ nhất là

$$MN_{\min}=\mathrm{d}(I;(P))-R=6-5=1.$$



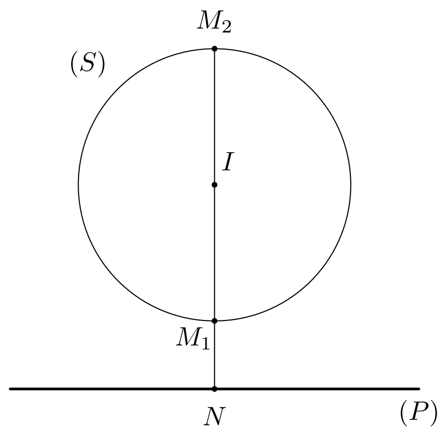
Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-18=0$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt cầu (S) và điểm N nằm trên mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách MN nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 7.

✍ LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I=(0;1;2)$ và bán kính $R=4$.
Ta có $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|2-2-18|}{3}=6$.
Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P).
d đi qua I và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}_{(P)}=(2;2;-1)$ nên có phương trình $d\colon \begin{cases}x=2t\\ y=1+2t\\ z=2-t\end{cases}$.
Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm được xác định bằng cách thay phương trình tham số của đường thẳng d vào phương trình mặt cầu (S). Ta nhận được



$$(2t)^2+(1+2t-1)^2+(2-t-2)^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{4}{3}\Rightarrow M_1\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{2}{3}\right)\\ t=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow M_2\left(-\dfrac{8}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)\end{array}\right..$$

Điểm M gần mặt phẳng (P) nhất khi $\mathrm{d}(M;(P))=\mathrm{d}(I;(P))-R=6-4=2$.
Ta thử $\mathrm{d}(M_2;(P))=10\Rightarrow M\equiv M_1=\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{2}{3}\right)\Rightarrow T=a+b+c=7$.

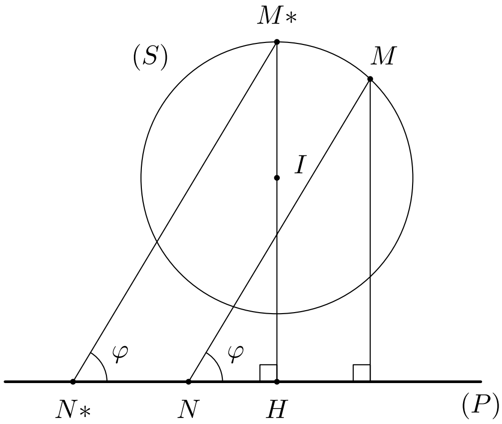
Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-20=0$ và mặt cầu $(S):x^2+(y-2)^2+z^2=16$. Gọi d là đường thẳng có véc-tơ chỉ phương cùng phương với $\overrightarrow{u}=(2;1;1)$ cắt (S) và (P) lần lượt tại M và N. Khoảng cách MN lớn nhất bằng

A. $12\sqrt{7}$. **B.** 12. **C.** $18\sqrt{6}$. **D.** $15\sqrt{3}$.

✍ LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I = (0; 2; 0)$ và bán kính $R = 4$.
Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $\mathrm{d}(I, (P)) = 8 > R$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P); M^* là giao điểm của đường thẳng IH và (S) sao cho I nằm giữa M và H; N^* là giao điểm của đường thẳng qua M^* và có véc-tơ chỉ phương cùng phương với $\overrightarrow{u} = (2; 1; 1)$.
Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (P) và đường thẳng d



$\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u}_d \cdot \overrightarrow{n}_{(P)}\right|}{\left|\overrightarrow{u}_d\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_{(P)}\right|} = \dfrac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2|}{\sqrt{6} \cdot 3} = \dfrac{2}{3\sqrt{6}}$.

Ta có

$$MN = \frac{\mathrm{d}(M, (P))}{\sin\varphi} \leq \frac{M^*H}{\sin\varphi} = \frac{12}{\frac{2}{3\sqrt{6}}} = 18\sqrt{6}.$$

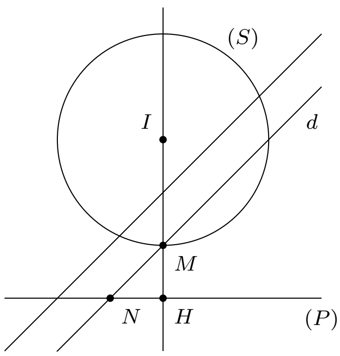
Vậy giá trị lớn nhất của MN là $18\sqrt{6}$ khi $MN \equiv M^*N^*$.
Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x + y + z - 10 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 9$. Gọi d là đường thẳng song song với $\overrightarrow{u} = (1; 2; -1)$ đồng thời cắt (S) và (P) lần lượt tại M và N. Khoảng cách MN nhỏ nhất bằng

A. $4\sqrt{6} - 6$. **B.** $2\sqrt{6} + 1$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{3} - 2$.

LỜI GIẢI.

- Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 0)$ và bán kính $R = 3$.
- Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $\mathrm{d}\left(I, (P)\right) = 2\sqrt{6} > R$.
- Điểm M, N ở vị trí như hình vẽ minh họa thì MN nhỏ nhất.



- Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (P) và đường thẳng d.
- Ta có $\sin\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u}_d \cdot \overrightarrow{n}_{(P)}\right|}{\left|\overrightarrow{u}_d\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_{(P)}\right|} = \dfrac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$.
- Độ dài $IH = \mathrm{d}\left(I, (P)\right) - R = 2\sqrt{6} - 3$ suy ra $\min MN = \dfrac{IH}{\sin\varphi} = \dfrac{2\sqrt{6} - 3}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{6} - 6$.

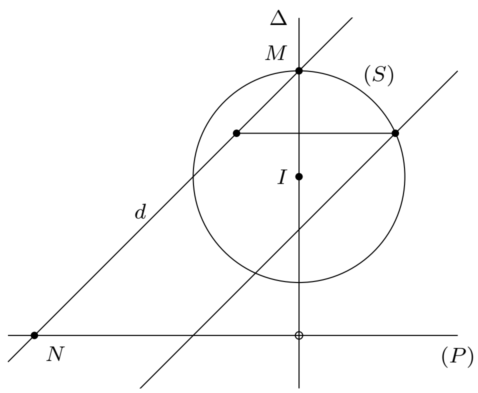
Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-6=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=24$. Gọi d là đường thẳng song song với $\overrightarrow{u}=(1;2;1)$ đồng thời cắt (S) và (P) lần lượt tại M và N sao cho MN lớn nhất. Nếu tọa độ điểm $N(a;b;c)$ thì giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. 15. **B.** 21. **C.** -25. **D.** -39.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Gọi đường thẳng Δ đi qua tâm $I(0;1;0)$ của mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P). Điểm M chính là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt cầu (S). Qua M lập đường thẳng d song song với véc-tơ $\overrightarrow{u}=(1;2;1)$. Khi đó đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm N. Ở vị trí này thì MN lớn nhất.
- Đường thẳng Δ có vec-tơ chỉ phương là vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), $\overrightarrow{u}_\Delta=\overrightarrow{n}_{(P)}=(1;-2;1)$.
- Suy ra phương trình tham số của Δ: $\begin{cases}x=t\\ y=1-2t\\ z=t.\end{cases}$



- Thay đường thẳng Δ vào mặt cầu (S), ta được $t^2+4t^2+t^2=24 \Rightarrow t=\pm 2$.
- Suy ra tọa độ hai giao điểm $M_1=(2;-3;2)$ và $M_2=(-2;5;-2)$.
- Để xác định xem điểm nào xa (P) hơn ta đi tính khoảng cách của chúng tới (P) $\mathrm{d}\left(M_1,(P)\right)=\dfrac{|2-2\cdot(-3)+2-6|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}$, $\mathrm{d}\left(M_2,(P)\right)=\dfrac{|-2-2\cdot(5)-2-6|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{20}{\sqrt{6}}$.
- Vậy điểm xa (P) hơn là $M_2=(-2;5;-2)$.
- Để tìm điểm N ta lập phương trình đường thẳng d di qua M nhận $vec-tchphng$ là $\overrightarrow{u}=(1;2;1)$.
- Phương trình tham số của d: $\begin{cases}x=-2+t\\ y=5+2t\\ z=-2+t.\end{cases}$
- $N=d\cap(P)$. Thay d vào (P) ta được $(-2+t)-2(5+2t)+(-2+t)-6=0 \Rightarrow t=-10$.
- Thay vào đường thẳng d suy ra $N=(-12;-15;-12)=(a;b;c) \Rightarrow T=a+b+c=-39$.

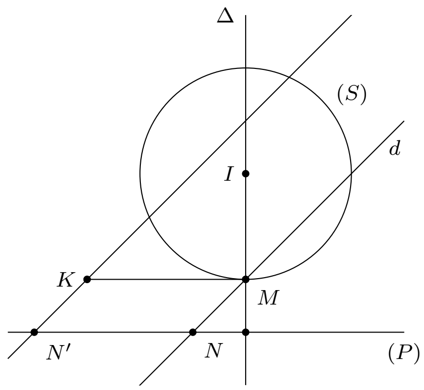
Chọn đáp án D □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-16=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=24$. Gọi d là đường thẳng song song với véc-tơ $\overrightarrow{u}=(1;2;1)$ đồng thời cắt mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) lần lượt tại M và N sao cho MN đạt giá trị nhỏ nhất. Nếu tọa độ điểm $N(a;b;c)$ thì giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng

A. -11. **B.** -9. **C.** -7. **D.** 0.

✍ **LỜI GIẢI.**

- Mặt cầu (S) có tâm $I=(0;1;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{6}$.
- Dễ dàng nhận thấy $\mathrm{d}\left(I;(P)\right)=3\sqrt{6}>R$ suy ra mặt cầu (S) không cắt mặt phẳng (P).
- Lập đường thẳng Δ đi qua I vuông góc với (P) cắt mặt cầu (S) ở điểm M gần (P) nhất. Đường thẳng d đi qua M và song song với $\overrightarrow{u}=(1;2;1)$ sẽ cắt (P) tại N. Khi đó MN đạt giá trị nhỏ nhất.
- Đường thẳng Δ có vec-tơ chỉ phương là vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), vec-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u}_{\Delta}=\overrightarrow{n}_{(P)}=(1;-2;1)$.



- Suy ra phương trình tham số của đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=t\\ y=1-2t\\ z=t.\end{cases}$
- Thay đường thẳng Δ vào mặt cầu (S), ta được $t^2+4t^2+t^2=24\Rightarrow t=\pm 2$.
- Suy ra tọa độ hai giao điểm $M_1(2;-3;2)$, $M_2(-2;5;-2)$.
- Để xác định xem điểm nào xa mặt phẳng (P) hơn ta đi tính khoảng cách của chúng tới (P) $\mathrm{d}\left(M_1,(P)\right)=\dfrac{|2-2\cdot(-3)+2-6|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}$; $\mathrm{d}\left(M_2,(P)\right)=\dfrac{|-2-2\cdot(5)-2-6|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{20}{\sqrt{6}}$.
- Vậy điểm $M\equiv M_1(2;-3;2)$.
- Để tìm điểm N ta lập phương trình đường thẳng d đi qua M nhận vec-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;2;1)$.
- Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=2+t\\ y=-3+2t\\ z=2+t.\end{cases}$
- $N=d\cap(P)$. Thay đường thẳng d vào mặt phẳng (P) ta được $(2+t)-2(-3+2t)+(2+t)-16=0\Leftrightarrow t=-3\Rightarrow N(-1;-9;-1)=(a;b;c)$.

- Vậy $a+b-c=-9$.

Chọn đáp án (B) □

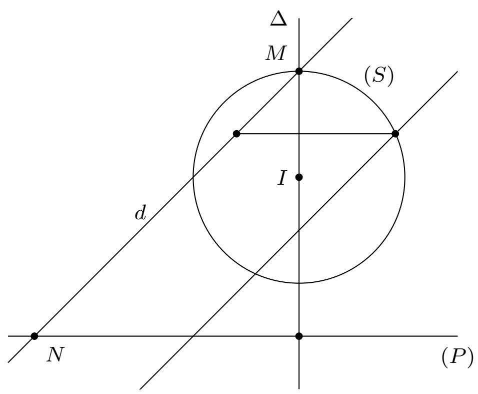
Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm M và N có tọa độ thỏa mãn hệ thức $x^3+x^2-4x+xy^2+xz^2+y^2+z^2-4=0$ và MN song song với đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$. Khoảng cách MN lớn nhất bằng

A. 4. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

✍ LỜI GIẢI.

- Ta phân tích $x^3+x^2-4x+xy^2+xz^2+y^2+z^2-4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+y^2+z^2-4)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2+y^2+z^2-4=0. \end{array}\right.$

- Để MN lớn nhất thì M nằm trên mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$ và N nằm trên mặt phẳng $(P)\colon x+1=0$ sao cho MN song song với đường thẳng d.



- Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P).
Suy ra $\sin\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{u}_d\cdot\overrightarrow{n}_{(P)}\right|}{\left|\overrightarrow{u}_d\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}_{(P)}\right|}=\dfrac{2}{3}$

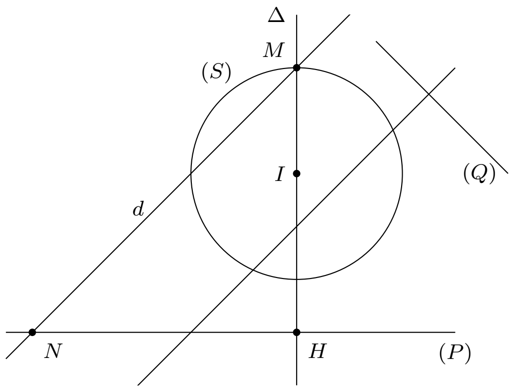
- Có $MH=\mathrm{d}\left(I,(P)\right)+R=1+2=3 \Rightarrow MN=\dfrac{MH}{\sin\varphi}=\dfrac{3}{\frac{2}{3}}=\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-18=0$, $(Q)\colon 3x+y+z-2=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. Gọi M là một điểm thuộc mặt cầu (S) và N là một điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho MN vuông góc với mặt phẳng (Q). Lần lượt gọi α và β là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN. Hỏi giá trị của $T=\alpha+2\beta$ bằng bao nhiêu?

A. $12\sqrt{10}$. **B.** $10\sqrt{10}$. **C.** $6\sqrt{10}$. **D.** $16\sqrt{5}$.

✍ LỜI GIẢI.



- Bài toán này tương tự như những bài toán trên, phương của MN cũng là phương của vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q). Gọi φ là góc tạo bởi MN và mặt phẳng (P).
  Suy ra $\sin\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{n}_{(P)} \cdot \overrightarrow{n}_{(Q)}\right|}{\left|\overrightarrow{n}_{(P)}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_{(Q)}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
- Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=3$. Có $\mathrm{d}\left(I,(P)\right) = 5$ suy ra (S) không cắt (P). Suy ra

$$\begin{cases} MN_{\max} = \alpha = \dfrac{\mathrm{d}\left(I,(P)\right)+R}{\sin\varphi} = \dfrac{5+3}{\dfrac{1}{\sqrt{10}}} = 8\sqrt{10} \\ MN_{\min} = \beta = \dfrac{\mathrm{d}\left(I,(P)\right)-R}{\sin\varphi} = \dfrac{5-3}{\dfrac{1}{\sqrt{10}}} = 2\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow T = \alpha + 2\beta = 12\sqrt{10}$$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-16=0$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và véc-tơ $\overrightarrow{u}=(2;1;-1)$. Gọi d là đường thẳng thay đổi cắt (S) tại hai điểm A và B sao cho $AB=6$, gọi A' và B' nằm trên mặt phẳng (P) sao cho AA' song song với BB'. Giá trị nhỏ nhất của tổng $AA'+BB'$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

LỜI GIẢI.

- Gọi M là trung điểm của AB và M' là trung điểm của $A'B'$. Khi đó MM' là đường trung bình của hình thang $ABB'A'$. Suy ra $T = AA'+BB' = 2MM'$.
- Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là $\mathrm{d}\left(I,(P)\right) = 6 > R$ nên (P) không cắt mặt cầu (S).
- Khoảng cách từ I đến M là $IM = \sqrt{R^2 - \dfrac{AB^2}{2}} = 4$.
- Góc tạo bởi véc-tơ $\overrightarrow{u}$ và mặt phẳng (P) là φ thì ta có $\sin\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}_{(P)}\right)\right| = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.
  Suy ra $AA'+BB' = 2MM' = 2\cdot\dfrac{\mathrm{d}\left(I,(P)\right)}{\sin\varphi} = \sqrt{6}\cdot\mathrm{d}\left(I,(P)\right)$.
  Do đó $T = AA'+BB'$ nhỏ nhất khi $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)$ nhỏ nhất và dây cung AB có vị trí như hình vẽ.
  Khi đó $\left(AA'+BB'\right)_{\min} = \sqrt{6}\cdot\mathrm{d}\left(I,(P)\right)_{\min} = \sqrt{6}(6-4) = 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

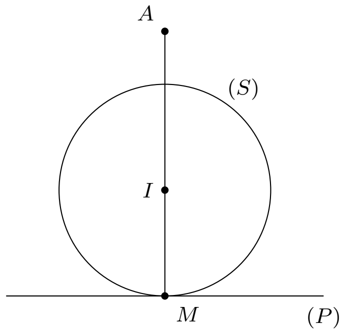
Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $A(1;3;-1)$. Gọi $(P)\colon ax+by+cz-5=0$ là mặt phẳng tiếp xúc với (S) và cách A một khoảng lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 0. **C.** $\dfrac{17}{5}$. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

✍ LỜI GIẢI.

- Trên mặt cầu (S), ta tìm nhanh được điểm M xa A nhất là

$$AM=AI+IM=AI+R=5+3=8.$$



- Có $8\cdot\overrightarrow{MI}-3\cdot\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow M\left(1;-\dfrac{17}{5};\dfrac{19}{5}\right)$.
- Khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất là $\mathrm{d}\left(A,(P)\right)_{\max}=AM=8$ khi (P) tiếp xúc với (S) tại M.
- Suy ra vec-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{AM}=\left(0;-\dfrac{32}{5};\dfrac{24}{5}\right)=-\dfrac{8}{5}(0;4;-3)$. Ta chọn véc-tơ $(0;4;-3)$.
- Phương trình tổng quát của (P) là

$$0\cdot(x-1)+4\cdot\left(y+\dfrac{17}{5}\right)-3\cdot\left(z-\dfrac{19}{5}\right)=0\Leftrightarrow 4y-3z+25=0.$$

- Có $ax+by+cz-5\equiv 4y-3z+25=0\Leftrightarrow \dfrac{a}{0}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{-3}=\dfrac{-5}{25}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-\dfrac{4}{5}\\ c=\dfrac{3}{5}\end{cases}$
- Vậy $T=a+b+c=-\dfrac{1}{5}$.

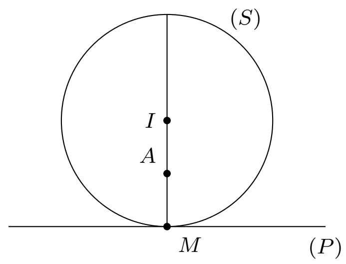
Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$ và điểm $A(1;1;2)$. Gọi $(P)\colon ax+by+cz+4=0$ là mặt phẳng tiếp xúc với (S) và cách A một khoảng ngắn nhất. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. 1. **B.** -5. **C.** -2. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

✍ LỜI GIẢI.

- Tâm mặt cầu $I(1;0;2)$ và bán kính $R=2$.
- Trên mặt cầu (S), ta tìm nhanh được điểm M gần A nhất là
$$AM = IM - AI = R - AI = 2 - 1 = 1.$$



- Có $M=(1;2;2)$.
- Khoảng cách từ A đến (P) nhỏ nhất là $\mathrm{d}\left(A,(P)\right)_{\min} = AM = 1$ khi (P) tiếp xúc với (S) tại M.
- Suy ra vec-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{AM}=(0;1;0)$.
- Suy ra phương trình tông quát của (P) là $0\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+0\cdot(z-2)=0 \Leftrightarrow y-2=0$.
- So sánh với giả thiết $ax+by+cz+4=0 \equiv y-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{0}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{0}=\dfrac{4}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0. \end{cases}$
- Vậy $T=a+b+c=-2$.

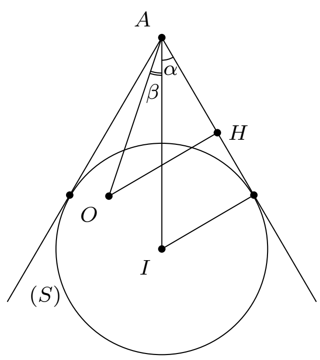
Chọn đáp án C □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A tiếp xúc với (S). Khoảng cách lớn nhất từ gốc O đến mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1+\sqrt{3}$. **D.** $3-\sqrt{2}$.

LỜI GIẢI.

- Cách 1
  - Tâm mặt cầu $I(0;0;1)$ và bán kính mặt cầu $R=2$.
  - Có thể coi như tập hợp tất cả các đường thẳng AM (với M - là tiếp điểm của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S)) là một mặt nón tròn xoay (N) có đỉnh nón là điểm A và trục nón là đường thẳng AI. Góc ở đỉnh nón là 2α, có $\sin\alpha = \dfrac{R}{AI} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.



- Để tìm khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) cũng chính là khoảng cách lớn nhất từ O đến các đường sinh của mặt nón (N).
- Ta đi tính góc $\cos\widehat{OAI} = \dfrac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AI}}{AO\cdot AI} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \cos\beta \Rightarrow \widehat{OAI} = \beta \approx 19,5^\circ < \alpha$
- Suy ra khoảng cách lớn nhất cần tìm là

$$OH = OA\cdot\sin(\alpha+\beta) = 3\cdot\sin\left(45^\circ + 19,5^\circ\right) \approx 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Hoặc ta có thể tính chính xác
$OH = OA\cdot\sin(\alpha+\beta) = 3\cdot\sin\left(45^\circ+\beta\right) = 2\cdot\left(\sin 45^\circ\cdot\cos\beta + \cos 45^\circ\cdot\sin\beta\right)$
$= 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- Cách 2. Đại số
  - Gọi vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n} = (a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$.
  - Phương trình mặt phẳng (P) là $a(x-2)+b(y-2)+c(z-1)=0$.
  - Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=2$.
  - Để mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) thì
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(I,(P)\right) = R &\Leftrightarrow \frac{|a(0-2)+b(0-2)+c(1-1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2\\ &\Leftrightarrow \frac{|2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+2ab\\ &\Rightarrow |c| = \sqrt{2ab}.\end{aligned}$$
  - Khoảng cách từ O đến (P) là
$$\mathrm{d}\left(O,(P)\right) = \frac{|a(0-2)+b(0-2)+c(0-1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$= \frac{|2a+2b+\sqrt{2ab}|}{\sqrt{a^2+b^2+2ab}} = \frac{|2a+2b+\sqrt{2ab}|}{|a+b|} = \left|2+\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}\right|$$
  - Theo BĐT Cauchy $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}} \geq 2$
  - Suy ra $\mathrm{d}\left(O,(P)\right) = \left|2+\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}\right| \leq 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
  - Vậy $\max\mathrm{d}\left(O,(P)\right) = 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ khi $\begin{cases}a=b\\ c=a\sqrt{2}.\end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-3)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(4;3;3)$, $B(2;1;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A tiếp xúc với (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ B đến (P) lần lượt là m và n. Khi đó $T=m+n$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

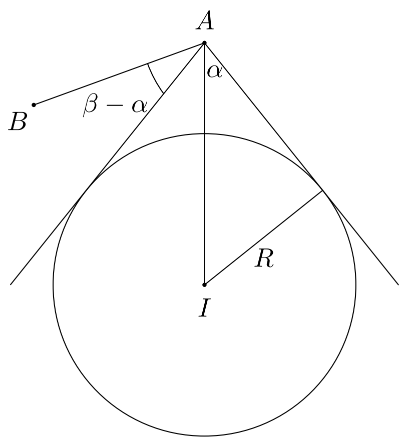
A. $(3;4)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(2;\dfrac{7}{2}\right)$.

LỜI GIẢI.

Tâm mặt cầu $I=(0;3;0)$ và bán kính mặt cầu $R=2$. Ta có $AI=5$.
Có thể coi như tập hợp tất cả các đường thẳng AM với M là tiếp điểm của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) là một mặt nón tròn xoay (N) có đỉnh nón là điểm A và trục nón là đường thẳng AI. Góc ở đỉnh nón là 2α, có

$$\sin\alpha=\frac{R}{AI}=\frac{2}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) cũng chính là khoảng cách từ B đến các đường sinh của nón (N).



Ta đi tính góc $\cos\widehat{BAI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}}{AB\cdot AI}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}\Rightarrow\widehat{BAI}>\alpha$; với $AB=\sqrt{17}$. Suy ra khoảng cách nhỏ nhất từ B đến (P) là $\mathrm{d}(B;(P))_{\min}=n=0$. Khi đó B thuộc (P).
Gọi β là góc tạo bởi AB và AI. Khoảng cách lớn nhất từ B đến (P) là

$$\begin{aligned}m&=AB\cdot\sin(\beta+\alpha)=\sqrt{17}\left[\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha\right]\\&=\sqrt{17}\cdot\left[\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}+\frac{\sqrt{17}}{5}\cdot\frac{2}{5}\right]\\&=\frac{2\sqrt{714}+34}{25}.\end{aligned}$$

Suy ra $\mathrm{d}(B,(P))_{\max}=m\approx 3{,}5\Rightarrow T=m+n=3{,}5$.

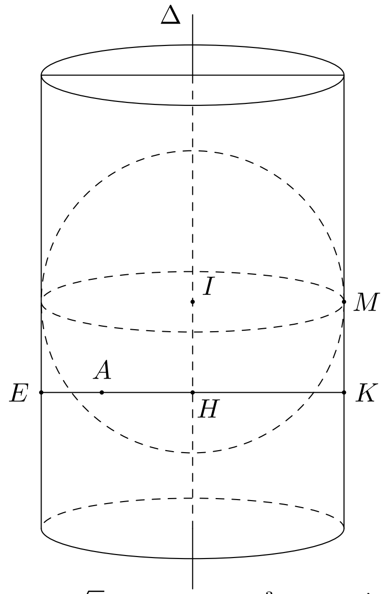
Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=9$; điểm $A(-3;1;-6)$ và đường thẳng $d\colon\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ A đến mặt phẳng (P) lần lượt là a và b. Giá trị của biểu thức $T=a+2b$ bằng

A. $9+\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}-2$. **C.** 9. **D.** $9-\sqrt{3}$.

LỜI GIẢI.

Tâm mặt cầu $I(0;0;1)$ và bán kính mặt cầu $R=3$.
Gọi M là tiếp điểm của (P) và (S). Khi đó điểm M sẽ chạy trên một đường tròn lớn của mặt cầu (S), đường tròn này nằm trong mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d tại tâm I của mặt cầu.
Các đường thẳng đi qua M song song với đường thẳng d sẽ tạo ra một mặt trụ (T) có bán kính đáy đúng bằng R, có trục của mặt trụ là đường thẳng Δ, đường thẳng Δ đi qua I và song song với d.



Phương trình tham số của đường thẳng Δ: $\begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=1+3t. \end{cases}$

Tìm được hình chiếu vuông góc H của A lên đường thẳng Δ là $H=(-4;2;-5)$.

Suy ra khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ là $\mathrm{d}(A;\Delta)=AH=\sqrt{3}<R \Rightarrow$ điểm A nằm trong mặt trụ (T).
Suy ra khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất của điểm A đến mặt phẳng (P) lần lượt là khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ điểm A đến các đường sinh của trụ (T).
Như trên hình vẽ, sẽ tương ứng là các đoạn thẳng $AK=AH+R=\sqrt{3}+3=a$ và

$$AE=R-AH=3-\sqrt{3}=b.$$

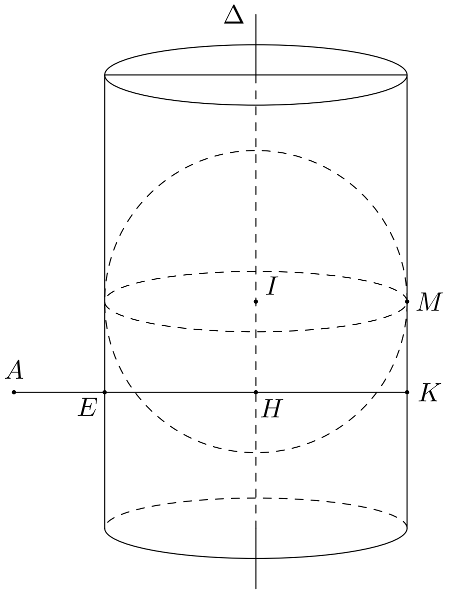
Suy ra $T=a+2b=9-\sqrt{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-2)^2+z^2=4$; điểm $A(0;-2;-2)$; mặt phẳng $(P)\colon ax+by+(2a-3b)z+c=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ A đến mặt phẳng (P) lần lượt là α và β. Giá trị của $T=2\alpha+\beta$ bằng

A. $4+4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}+2$. **C.** $2\sqrt{6}+4$. **D.** 8.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tâm mặt cầu $I=(0;2;0)$ và bán kính mặt cầu $R=2$.
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n}_{(P)}=(a;b;2a-3b)$.
Xét $\overrightarrow{u}=(-2;3;1)$. Dễ dàng có được $\overrightarrow{n}_{(P)}\cdot\overrightarrow{u}=-2a+3b+(2a-3b)=0$.
$\Rightarrow (P)$ luôn song song với véc-tơ $\overrightarrow{u}$.
Gọi M là tiếp điểm của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S). Như vậy, điểm M sẽ chạy trên một đường tròn lớn của mặt cầu (S), đường tròn này nằm trong mặt phẳng vuông góc với véc-tơ $\overrightarrow{u}$ và đi qua tâm I của mặt cầu.
Các đường thẳng đi qua M song song với véc-tơ $\overrightarrow{u}$ sẽ tạo ra một mặt trụ (T) có bán kính đáy đúng bằng R, có trục của mặt trụ là đường thẳng Δ, đường thẳng Δ đi qua I và song song với giá của $\overrightarrow{u}$.



Phương trình tham số của đường thẳng Δ: $\begin{cases} x=-2t \\ t=2+3t \\ z=t. \end{cases}$

Ta dễ dàng tìm được hình chiếu vuông góc H của A lên đường thẳng Δ là $H=(2;-1;-1)$.

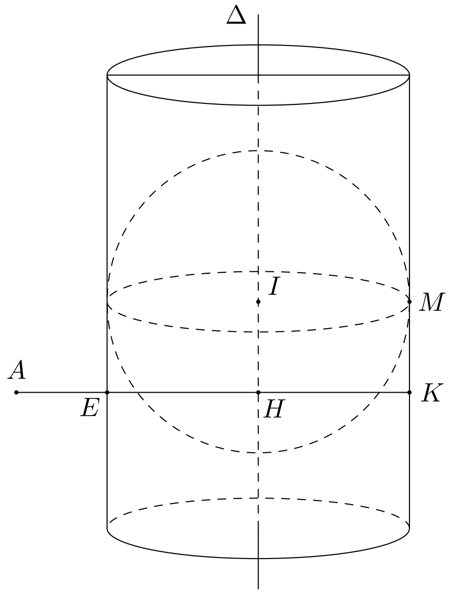
Suy ra khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ là $\mathrm{d}(A;\Delta) = AH = \sqrt{6} > R \Rightarrow A$ nằm ngoại mặt trụ (T).
Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm A đến mặt phẳng (P) là $\beta = 0$, vì tồn tại mặt phẳng (P) qua A.
Khoảng cách lớn nhất từ điểm A đến mặt phẳng (P) cũng là đến các đường sinh của trụ (T). Như hình vẽ, sẽ tương ứng với đoạn thẳng $AK = AH + R = \sqrt{6} + 2 = \alpha$.
Suy ra $T = 2\alpha + \beta = 2\sqrt{6} + 4$.
Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$; điểm $A(2;-2;-2)$; mặt phẳng $(P)\colon ax + by + (3a-b)z + c(-2-\sqrt{6}) = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S). Biết rằng a, b, c là những số nguyên dương. Khi khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 9.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tâm mặt cầu $I = (0;1;0)$ và bán kính mặt cầu $R = 1$.
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n}_{(P)} = (a;b;3a-b)$.
Dễ dàng có được $\overrightarrow{n}_{(P)} \cdot \overrightarrow{u} = -3a + b + (3a-b) = 0$.
$\Rightarrow (P)$ luôn song song với giá của véc-tơ $\overrightarrow{u} = (-3;1;1)$.
Gọi M là tiếp điểm của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S). Như vậy, điểm M sẽ chạy trên một đường tròn lớn của mặt cầu (S), đường tròn này nằm trong mặt phẳng vuông góc với giá của véc-tơ $\overrightarrow{u}$ và đi qua tâm I của mặt cầu.
Các đường thẳng đi qua M song song với giá của véc-tơ $\overrightarrow{u}$ sẽ tạo ra một mặt trụ (T) có bán kính đáy đúng bằng R, có trục của mặt trụ là đường thẳng Δ, đường thẳng Δ đi qua I và song song với véc-tơ $\overrightarrow{u}$.



Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 + t \\ z = t. \end{cases}$
Ta dễ dàng tìm được hình chiếu vuông góc H của A lên đường thẳng Δ là $H = (3;0;-1)$.
Suy ra khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ là $\mathrm{d}(A;\Delta) = AH = \sqrt{6} = R \Rightarrow A$ nằm ngoài mặt trụ (T).
Khoảng cách lớn nhất từ điểm A đến (P) cũng là đến các đường sinh của hình trụ (T). Như hình vẽ, sẽ tương ứng là đoạn thẳng $AK = AH + R = \sqrt{6} + 1$.
Khi đó mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{AH} = (1;2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Suy ra $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{3a-b}{1} \Leftrightarrow b = 2a$.
Suy ra $(P)\colon ax + 2ay + az + c = 0$.
Ta có

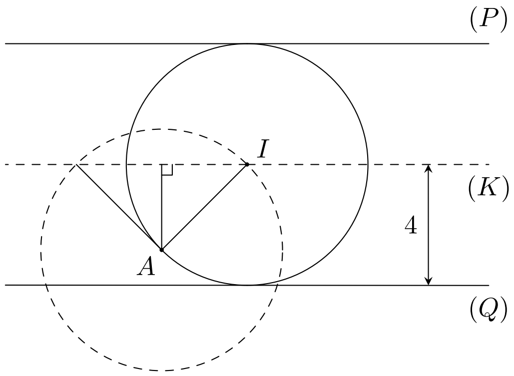
$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(I,(P)) = 1 \Leftrightarrow |2a + c(-2-\sqrt{6})| = |a|\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{aligned} &c = -(5+2\sqrt{6})a \text{ (loại vì } a,\ c \text{ không đồng thời nguyên)} \\ &c = a. \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 4a \geq 4$. Vì a là số nguyên dương.
Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $T_{\min} = 4$.
Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon 2x+2y-z-5=0$ và $(Q)\colon 2x+2y-z+19=0$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q), đồng thời đi qua điểm $A(0;1;0)$. Quỹ tích tâm I của mặt cầu (S) là đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

✍ LỜI GIẢI.



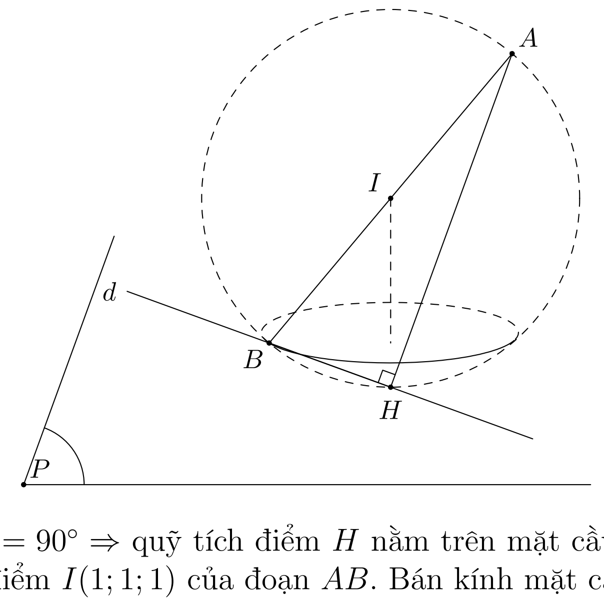
Dễ dàng tính được khoảng cách giữa hai mặt phẳng là $\mathrm{d}((P);(Q))=8 \Rightarrow$ bán kính mặt cầu (S) tiếp xúc với cả hai mặt phẳng là $R=4$.
Tâm $I(a;b;c)$ của mặt cầu (S) nằm trên mặt phẳng (R), là mặt phẳng nằm chính giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Do đó mặt (R) song song với (P), (Q) và nằm giữa (P), (Q) suy ra $(K)\colon 2x+2y-z+7=0$.
Mặt cầu (S) đi qua A, suy ra $IA=4 \Rightarrow$ tâm I nằm trên mặt cầu (S'), (S') có tâm A và bán kính bằng 4. Suy ra I nằm trên đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (K) và (S').
Khoảng cách từ A đến (K) là $\mathrm{d}(A;(K))=3$.
Bán kính đường tròn (C) là $r=\sqrt{R^2-[\mathrm{d}(A;(K))]^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$.
Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng là $(P)\colon x+2y-2z-9=0$ và hai điểm $A(-1;-1;2)$, $B(3;3;0)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua B. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên d. Quỹ tích điểm H là

A. mặt cầu có bán kính bằng 3. **B.** mặt cầu có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

C. đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{16}}{3}$. **D.** đường tròn có bán kính bằng 3.

✍ LỜI GIẢI.



Dễ thấy được góc $\widehat{AHB}=90^\circ \Rightarrow$ quỹ tích điểm H nằm trên mặt cầu (S) có đường kính AB. Tức là có tâm là trung điểm $I(1;1;1)$ của đoạn AB. Bán kính mặt cầu (S) là $R=IA=3$.

Đồng thời điểm $H \in d \subset (P) \Rightarrow H \in (P)$.
Suy ra điểm (H) sẽ nằm trên đường tròn giao tuyến (C) của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).
Khoảng cách từ (I) đến (P) là $\mathrm{d}(I;(P)) = \dfrac{8}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến (C) là $r = \sqrt{R^2 - [\mathrm{d}(I;(P))]^2} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{8}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon mx + my - z - m + 2 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P). Quỹ tích điểm H là

A. mặt cầu có bán kính bằng 2.

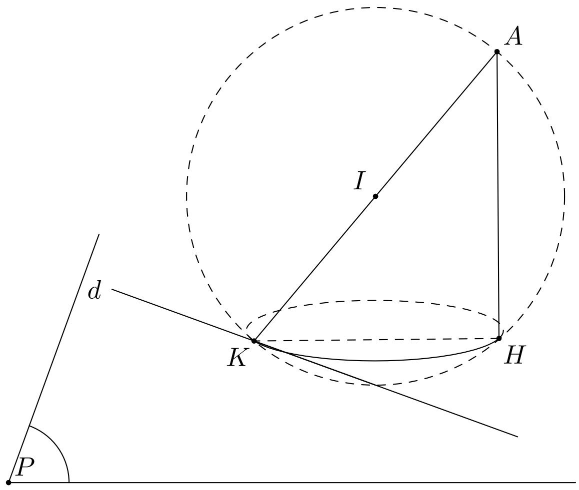
B. mặt cầu có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{38}}{2}$.

C. đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{38}}{4}$.

D. đường tròn có bán kính bằng 2.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt phẳng (P) luôn qua đường thẳng cố định, đường thẳng cố định này được như hình vẽ sau



Ta có $(P)\colon mx + my - z - m + 2 = 0 \Leftrightarrow m(x - y - 1) + (-z + 2) = 0$ đúng với $\forall m$.

Suy ra $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ -z + 2 = 0 \end{cases}$. Đặt $y = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.

Khi đó (P) luôn đi qua đường thẳng cố định $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d, suy ra tọa độ $K\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};2\right)$.

Dễ thấy được góc $\widehat{AHK} = 90^\circ \Rightarrow$ quỹ tích điểm H nằm trên mặt cầu (S) có đường kính AK.
Tức là có tâm là trung điểm $I = \left(\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ của đoạn AK.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \dfrac{\sqrt{38}}{4}$.

Ta có $d \perp (AHK) \Rightarrow$ mặt phẳng (AHK) là mặt phẳng cố định (ta có thể gọi là mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d).
Mặt phẳng (α) chứa đường kinh AK của mặt cầu (S).
Suy ra điểm H sẽ nằm trên đường tròn giao tuyến (C) của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α).

Bán kính đường tròn giao tuyến (C) là $r = R = \dfrac{\sqrt{38}}{4}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A = (3; 1; -1)$, $B(1; 2; 1)$, $C(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 \end{cases}$. Gọi S là một điểm chạy trên đường thẳng d, gọi K là trực tâm của tam giác SBC. Quỹ tích điểm H là

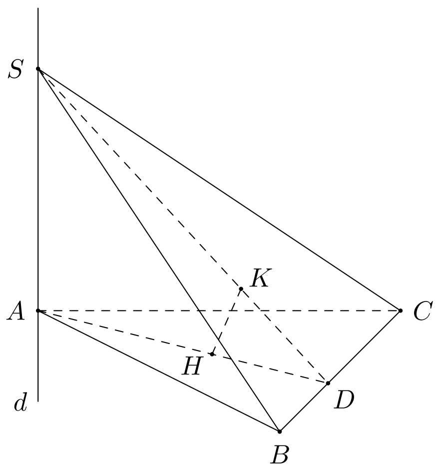
A. mặt cầu có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

B. mặt cầu có bán kính bằng $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

C. đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

D. đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và D là chân đường cao hạ tự đỉnh A xuống cạnh BC.
Ta đi chứng minh HK vuông góc với (SBC) như sau
Dễ thấy đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại A suy ra $SA \perp (ABC)$.
Gọi D là chân đường cao hạ từ đỉnh A lên cạnh BC.
Suy ra $BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SD \Rightarrow H \in (SAD)$.
$\Rightarrow BC \perp HK$.
Ta có $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.
Lại có $BK \perp SC$ (vì K là trực tâm tam giác SBC).
Suy ra $SC \perp (BHK) \Rightarrow HK \perp SC$; lại có $HK \perp BC$.
Suy ra $HK \perp KD \Rightarrow \widehat{HKD} = 90^\circ$.
Suy ra quỹ tích điểm K nằm trên mặt cầu (S_1) có đường kính là HD.
Mặt khác K lại nằm trên mặt phẳng (SAD) là mặt phẳng cố định đi qua A và vuông góc với BC. Mặt phẳng này đi qua đường kính HD nên sẽ cắt mặt cầu (S_1) theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính bằng bán kính mặt cầu (S_1) là $r = R = \dfrac{HD}{2}$.
Dễ thấy tam giác ABC cân tại A, suy ra D là trung điểm của BC và có $D(1; 2; -1)$.
Để tìm tọa độ trực tâm H, ta lập phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon x + 2y - 5 = 0$.

Gọi điểm $H(a; b; c) \Rightarrow \begin{cases} H \in (ABC) \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 5 = 0 \\ -4(c + 1) = 0 \\ -2(a - 1) + 1(b - 2) - 2(c - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{5} \\ b = \dfrac{6}{5} \\ c = -1. \end{cases}$

Suy ra $H\left(\dfrac{13}{5}; \dfrac{6}{5}; -1\right) \Rightarrow HD = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = R = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
Vậy quỹ tích điểm K là đường tròn có bán kính $r = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án (D) □

BÀI 9 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CẦU

Câu 1. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-2;1;3)$. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với trục hoành Ox có phương trình tương ứng là

A. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=14$.
C. $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=10$. **D.** $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=10$.

LỜI GIẢI.

Gọi H là hình chiếu của I lên trục Ox suy ra $H(-2;0;0)$.
Khi đó $R=IH=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.
Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=10$.
Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=36$. Số giao điểm của mặt cầu (S) với trục Ox là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** vô số.

LỜI GIẢI.

Phương trình của trục Ox là $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.

Số giao điểm của trục Ox và mặt cầu (S) chính là số nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=36 & (1) \\ x=t & (2) \\ y=0 & (3) \\ z=0. & (4) \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được

$$(t-1)^2+2^2=36 \Leftrightarrow t^2-2t-31=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t=1-4\sqrt{2} \\ &t=1+4\sqrt{2}. \end{aligned}\right.$$

Với hai giá trị của t, hệ (I) có 2 nghiệm và do đó trục Ox và mặt cầu (S) sẽ có 2 giao điểm.
Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-4)$ và tiếp xúc với trục Oz có phương trình tương ứng là

A. $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$. **B.** $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=20$.
C. $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29$. **D.** $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=13$.

LỜI GIẢI.

Gọi H là hình chiếu của I lên trục Oz suy ra $H(0;0;-4)$.
Khi đó $R=IH=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=13$.
Chọn đáp án D □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I\,(1;2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{x+2}{-2}$ có phương trình tương ứng là

A. $(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=19$. **B.** $(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$.

C. $(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. **D**. $(S):\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=18$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$ đi qua điểm $A(-1;4;-2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(1;3;-2)$.

Khoảng cách từ $I(1;2;3)$ đến đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{x+2}{-2}$ là

$$\mathrm{d}(I,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{u}\right]\right|}{|\overrightarrow{u}|}=\frac{\sqrt{11^2+(-9)^2+(-8)^2}}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}=\sqrt{19}.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{19}$ có phương trình là

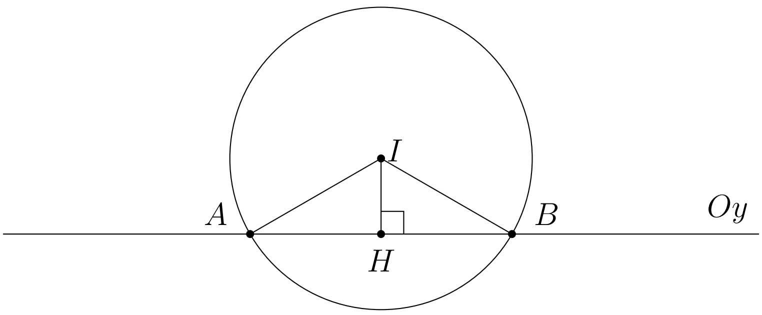
$$(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=19.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$ và cắt trục Oy tại hai điểm cách nhau một đoạn bằng 6. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. $\sqrt{22}$. **B**. 5. **C**. $2+2\sqrt{2}$. **D**. $\sqrt{14}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Giả sử mặt cầu (S) cắt trục Oy tại hai điểm A và B. Khi đó $AB=6$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $I(2;-1;3)$ lên trục $Oy \Rightarrow H(0;-1;0)$.

Khoảng cách từ I đến trục Oy là $IH=\sqrt{2^2+0^2+3^2}=\sqrt{13}$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $IA=R=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2+3^2}=\sqrt{22}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):\ (x-1)^2+y^2+(z-m)^2=25$. Gọi X là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Ox. Tích tất cả các phần tử của tập hợp X là

A. 25. **B**. -6. **C**. -25. **D**. 12.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu $(S):\ (x-1)^2+y^2+(z-m)^2=25$ có tâm $I(1;0;m)$ và có bán kính $R=5$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $I(1;0;m)$ lên trục Ox. Suy ra $H(1;0;0)$.

Để mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Ox thì $\mathrm{d}(I,Ox)=IH=R \Leftrightarrow |m|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-5. \end{array}\right.$

Vậy $X=\{-5;5\}$. Khi đó tích các phần tử của tập X là -25.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-m)^2=16$. Gọi X là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. Tổng tất cả các phần tử của tập X là

A. $-\dfrac{48}{13}$.　　**B.** $\dfrac{13}{48}$.　　**C.** $\dfrac{48}{13}$.　　**D.** $-\dfrac{13}{48}$.

LỜI GIẢI.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = t + 1. \end{cases}$

Thế vào phương trình của mặt cầu (S) ta được

$$(2t-1)^2 + (3t-3)^2 + (t+1-m)^2 = 16 \Leftrightarrow 14t^2 - 2(m+10)t + m^2 - 2m - 5 = 0.$$

Vì d và (S) tiếp xúc nhau nên phương trình trên phải có nghiệm kép, tức là

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m+10)^2 - 14(m^2 - 2m - 5) = 0 \Leftrightarrow -13m^2 + 48m + 170 = 0.$$

Phương trình này có tổng hai nghiệm thực là $m_1 + m_2 = \dfrac{48}{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng d tại $A(-2;0;-1)$ và đi qua hai điểm $B(2;0;-1)$, $C(0;4;-1)$. Bán kính của (S) là

A. $2\sqrt{2}$.　　**B.** $3\sqrt{2}$.　　**C.** $\sqrt{6}$.　　**D.** 3.

LỜI GIẢI.

Gọi tâm của mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$. Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{u}_d = 0 \\ IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2-a) - 2(0-b) + 1(-1-c) = 0 \\ (a+2)^2 + b^2 + (c+1)^2 = (a-2)^2 + b^2 + (c+1)^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + (c+1)^2 = a^2 + (b-4)^2 + (c+1)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b - c = 5 \\ 8a = 0 \\ 4a + 8b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = -1. \end{cases}$$

Suy ra bán kính của mặt cầu (S) là $R = IA = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính $R = 3$. Biết rằng (S) tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm $A(3;-1;0)$ và đi qua điểm $B(2;3;-1)$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + c$.

A. -3.　　**B.** 3.　　**C.** 5.　　**D.** 4.

LỜI GIẢI.

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{u}_d=0 \\ IA=IB \\ IA=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1(3-a)+2(-1-b)-2(0-c)=0 \\ (a-3)^2+(b+1)^2+c^2=(a-2)^2+(b-3)^2+(c+1)^2 \\ (a-3)^2+(b+1)^2+c^2=3^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-2b+2c=-1 \\ -2a+8b-2c=4 \\ (a-3)^2+(b+1)^2+c^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=\dfrac{c+1}{2} \\ (c-3)^2+\left(\dfrac{c+1}{2}+1\right)^2+c^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=\dfrac{c+1}{2} \\ \dfrac{9}{4}c^2-\dfrac{9}{2}c+\dfrac{9}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1. \end{cases}$$

Vậy $T=a+2b+c=1+2\cdot1+1=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu (S) có tâm $I(1;b;c)$ và bán kính bằng 3 tiếp xúc với hai trục Ox và Oy?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 8.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có khoảng cách từ tâm I đến đến hai trục Ox và Oy là

$$\begin{cases} R=3=\mathrm{d}(I,Ox)=\sqrt{y_I^2+z_I^2}=\sqrt{b^2+c^2} \\ R=3=\mathrm{d}(I,Oy)=\sqrt{x_f^2+z_t^2}=\sqrt{1^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-\pm1 \\ c=\pm2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Suy ra có tất cả 4 mặt cầu thỏa mãn bài toán, có tọa độ tâm lần lượt là $(1;1;2\sqrt{2})$, $(1;1;-2\sqrt{2})$, $(1;-1;2\sqrt{2})$, $(1-1;-2\sqrt{2})$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(a,b;c)$ và bán kính R (với $R>2$), tiếp xúc với các trục tọa độ và đi qua điểm $A(2;1;-3)$. Bán kính R bằng

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $2+4\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{2}+2\sqrt{11}$. **D.** $2+2\sqrt{2}$.

✍ LỜI GIẢI.

Tâm I và A cùng nằm ở cùng một góc "phần tám". Suy ra $\begin{cases} x_I\cdot x_A>0 \\ y_I\cdot y_A>0 \\ z_I\cdot z_A>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=a>0 \\ y_I=b>0 \\ z_I=c<0. \end{cases}$

Mặt cầu (S) tiếp xúc với các trục thì

$\mathrm{d}(I,Oz)=\mathrm{d}(I,Ox)=\mathrm{d}(I,Oy)=R\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{c^2+a^2}$.

Suy ra $|a|=|b|=|c|=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=a=b=-c$.

Mặt cầu (S) đi qua điểm A, suy ra

$$R=IA=\sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}-2\right)^2+\left(\frac{R}{\sqrt{2}}-1\right)^2+\left(-\frac{R}{\sqrt{2}}+3\right)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} R=6\sqrt{2}+2\sqrt{11} & \text{(thỏa)} \\ R=6\sqrt{2}-2\sqrt{11} & \text{(không thỏa).} \end{array}\right.$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là $R=6\sqrt{2}+2\sqrt{11}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R (với $R<2$), tiếp xúc với các trục tọa độ và đi qua điểm $A=(-3;2;2)$. Giá trị $T=b+c-a$ bằng

A. $7-4\sqrt{2}$. **B.** $21-12\sqrt{2}$. **C.** $6-3\sqrt{2}$. **D.** $18-9\sqrt{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tâm I và A cùng nằm cùng ở một góc "phần tám". Suy ra $\begin{cases} x_I\cdot x_A>0\\ y_I\cdot y_A>0\\ z_I\cdot z_A\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=a<0\\ y_I=b>0\\ z_I=c\le 0.\end{cases}$

Mặt cầu (S) tiếp xúc với các trục thì

$$\mathrm{d}\,(I,Oz)=\mathrm{d}(I,Ox)=\mathrm{d}(I,Oy)=R\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{c^2+a^2}.$$

Suy ra $|a|=|b|=|c|=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=-a=b=c$.

Mặt cầu (S) đi qua điểm A, suy ra

$R=IA=\sqrt{\left(-\dfrac{R}{\sqrt{2}}+3\right)^2+\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}+2\right)^2+\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}-2\right)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}R=7\sqrt{2}-8 & \text{(thỏa)}\\ R=-7\sqrt{2}+8 & \text{(loại)}.\end{array}\right.$

Suy ra tọa độ tâm $I=(a;b;c)=\left(-\dfrac{R}{\sqrt{2}};\dfrac{R}{\sqrt{2}};\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=(-7+4\sqrt{2};7-4\sqrt{2};7-4\sqrt{2})$.

Vậy $T=b+c-a=21-12\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=9$ và điểm $A=(3;-1;1)$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua A cắt (S) theo một dây cung có độ dài lớn nhất tương ứng là

A. $\begin{cases}x=6+3t\\ y=-2-t\\ z=4+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\ y=-1+t\\ z=1+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3t\\ y=t\\ z=-2-3.\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-3t\\ y=-1+t\\ z=1-2t\end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Dễ dàng thấy được dây cung dài nhất đúng bằng đường kính mặt cầu. Khi đó đường thẳng d đi qua tâm I của mặt cầu (S).

Suy ra véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=\overrightarrow{AI}=(-3;1;-3)$.

Đường thẳng d đi qua điểm A có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AI}=(-3;1;-3)$ có phương trình

$$\begin{cases}x=6+3t\\ y=-2-t\\ z=4+3t.\end{cases}$$

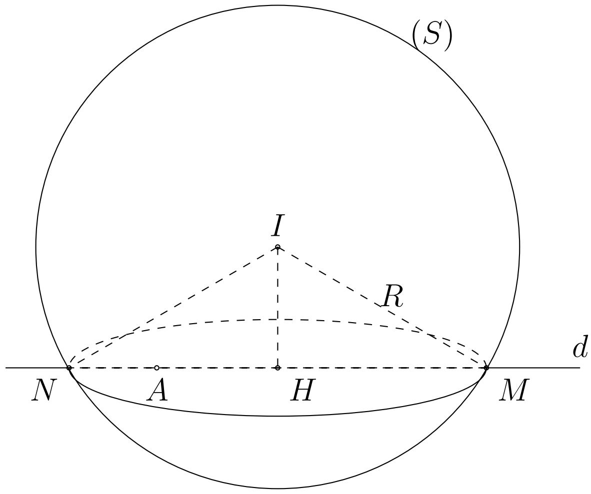
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-6=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-4)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=25$, điểm $A(2;2;0)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (P) đi qua A và cắt (S) theo dây cung MN. Giá trị lớn nhất của MN bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{21}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu (S) có tâm $I = (4;2;2)$ và bán kính $R = 5$.
Ta có $\mathrm{d}(I,(P)) = 2 < R \Rightarrow (S)$ cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{5^2 - 2^2} - \sqrt{21}$.
Đường thẳng d sẽ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm nằm trên đường tròn (C).
Để đường thẳng d cắt (S) theo dây cung dài nhất thì đúng bằng đường kính của (C).
Khi đó đường thẳng d đi qua hai điểm là A và H.
Suy ra giá trị lớn nhất của MN là $MN_{\max} = 2r = 2\sqrt{21}$.



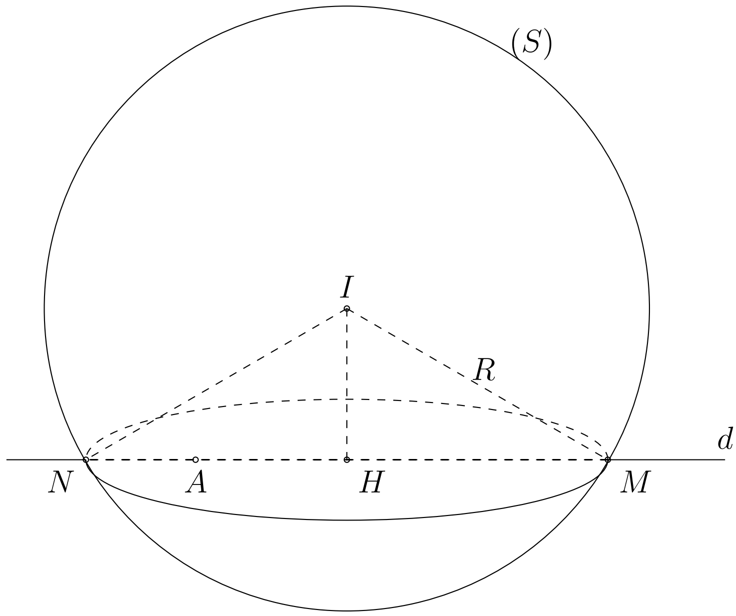
Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 2z - 8 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$, điểm $A = (4;1;1)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo dây cung dài nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(5;2;2)$. **B.** $(6;1;0)$. **C.** $(1;-2;-2)$. **D.** $(3;0;2)$.

✍ LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I = (3;3;4)$ và bán kính $R = 5$.
Có $IA = \sqrt{14} < R \Rightarrow A$ nằm trong (S).
Ta có khoảng cách $\mathrm{d}(I,(P)) = 3 < R \Rightarrow (P)$ cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính là $r = \sqrt{R^2 - [\mathrm{d}(I,(P))]^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ và có tâm đường tròn (C) là điểm H, điểm H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu I lên mặt phẳng (P) và có tọa độ là $H = (2;1;2)$.
Đường thẳng d sẽ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm nằm trên đường tròn (C). Để đường thẳng d cắt (S) theo dây cung dài nhất thì đúng bằng đường kính của (C).
Khi đó đường thẳng d đi qua hai điểm là A và H.
Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là $d\colon \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - t. \end{cases}$



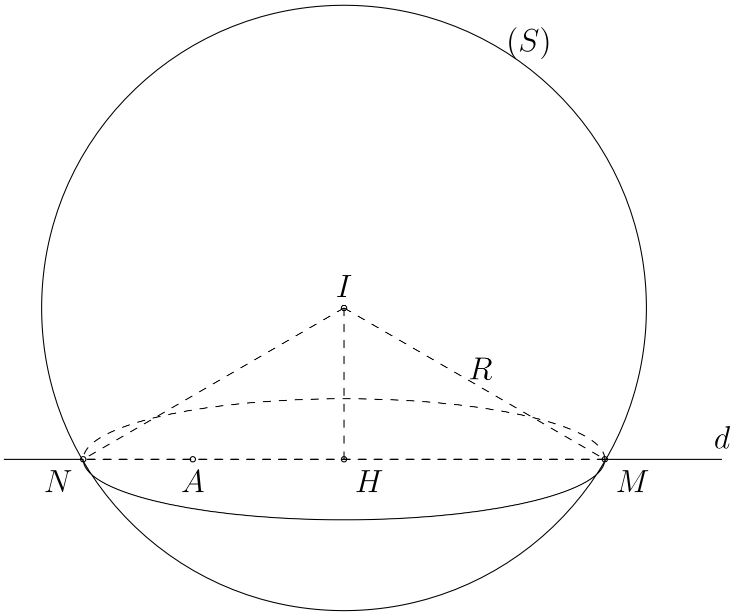
Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 2z - 8 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$, điểm $A = (4;1;1)$. Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A sẽ cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

✍ LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I=(3;3;4)$ và bán kính $R=5$. Có $IA=\sqrt{14}<R \Rightarrow A$ nằm trong (S).
Ta có khoảng cách $\mathrm{d}(I,(P))=3<R \Rightarrow (P)$ cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính là $r=\sqrt{R^2-[\mathrm{d}(I,(P))]^2}=\sqrt{5^2=3^2}=4$ và có tâm đường tròn (C) là điểm H, điểm H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu I lên mặt phẳng (P) và có tọa độ là $H=(2;1;2)$.
Đường thẳng d sẽ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M và N nằm trên đường tròn (C). Có $\overrightarrow{HA}=(2;0;-1) \Rightarrow HA=\sqrt{5}$.
Độ dài dây cung MN là



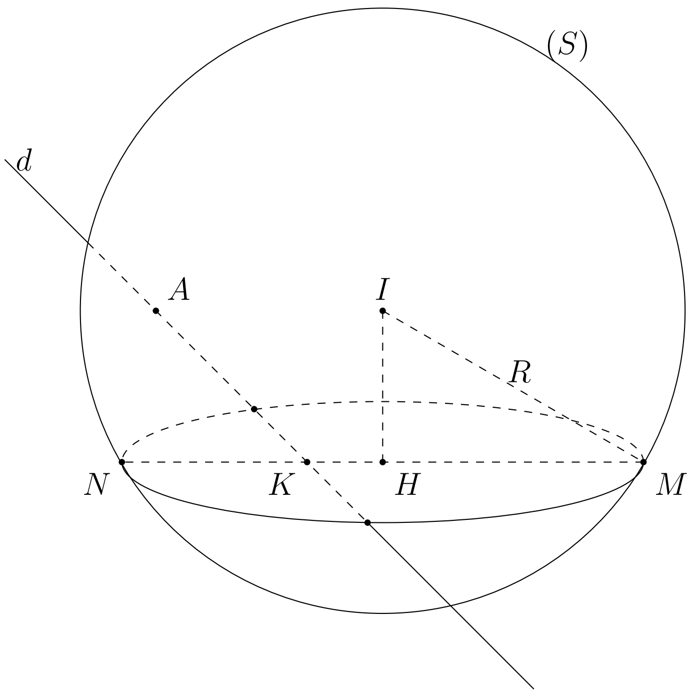
$$\begin{aligned} MN=2\sqrt{r^2-HK^2}=2\sqrt{16-HK^2} &\geq 2\sqrt{16-HA^2}\\ &= 2\sqrt{16-5}\\ &= 2\sqrt{11}. \end{aligned}$$

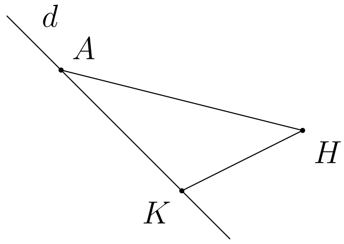
Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -2x+2y+z-5=0$ và mặ cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+z^2=25$, điểm $A=(0,3,-1)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất. Nếu $\overrightarrow{u}=(a;b;3)$ là một véc-tơ chỉ phương của d thì giá trị của biểu thức $T=2a+3b$ bằng

A. 27. **B.** 33. **C.** 17. **D.** 39.

✍ LỜI GIẢI.





Mặt cầu (S) có tâm $I=(2;0;0)$ và bán kính $R=5$.
Có $IA=\sqrt{14}<R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).
Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm mặt cầu I lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow H(0;2;1)$.
Ta có khoảng cách $\mathrm{d}(I,(P))=3<R \Leftrightarrow (P)$ cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán

kính là $r=\sqrt{R^2-[\mathrm{d}(I,(P))]^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ và có tâm là điểm H.
Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng dây cung mà d cắt (C).
Suy ra $MN=2\sqrt{r^2-HK^2}=2\sqrt{9-HK^2}$.
Lại có $HK\leq HA\Rightarrow MN=2\sqrt{16-HK^2}\geq 2\sqrt{16-HA^2}=2\sqrt{16-5}\leq 2\sqrt{11}$.
Dấu "= "xảy ra khi đó A trùng với K tức là khi đó $d\perp\overrightarrow{HA}=(0;1;-2)$.
Ta có cặp VTPT của đường thẳng d là $\overrightarrow{HA}$ và $\overrightarrow{n}_{(P)}=(-2;2;1)$.
Suy ra véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d=\left[\overrightarrow{HA},\overrightarrow{n}_{(P)}\right]=(5;4;2)$.

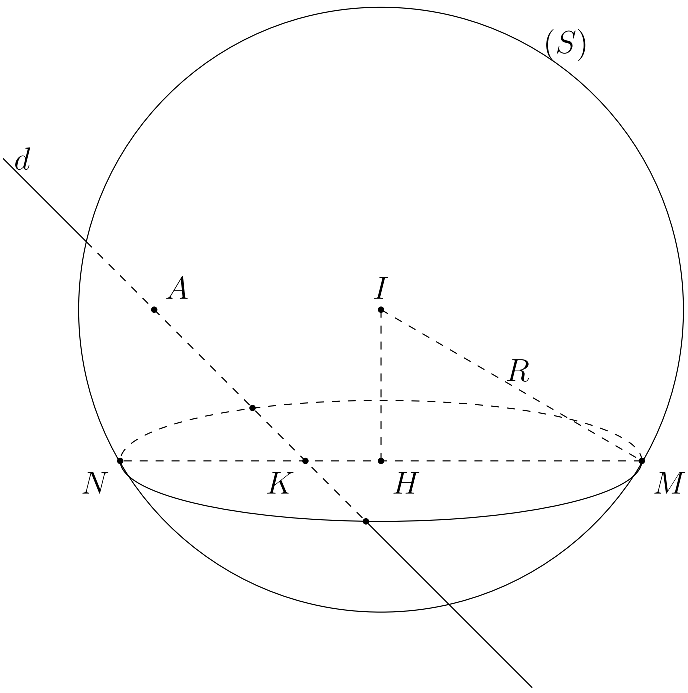
Ta có $\overrightarrow{u_d}\parallel\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\dfrac{d}{5}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{15}{2}\\ b=6\end{cases}\Rightarrow T=2a+3b=33.$

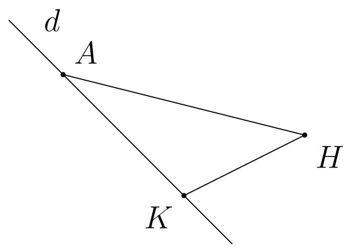
Chọn đáp án B □

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+6=0$ và mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25$, điểm $A=(1;2;-3)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất. Nếu phương trình của d là $\dfrac{x-2}{a}=\dfrac{y-m}{b}=\dfrac{z-n}{2}$ thì giá trị của biểu thức $T=a+b+m+n$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -4. **D.** -2.

✍ **LỜI GIẢI.**





Mặt cầu (S) có tâm $I=(1;-1;0)$ và bán kính $R=5$.
Có $IA=3\sqrt{2}<R\Rightarrow A$ nằm trong (S).
Ta có khoảng cách $\mathrm{d}(I,(P))=3<R\Rightarrow(P)$ cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính là $r=\sqrt{R^2-[\mathrm{d}(I,(P))]^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ và có tâm đường tròn (C) và điểm H là hình chiếu vuông góc của tâm I lên mặt phẳng $(P)\Rightarrow H(-1;0;-2)$.
Để đường thẳng d cắt (S) theo giao tuyến ngắn nhất thì $d\perp\overrightarrow{HA}=(2;2;-1)$.
Ta có cặp VTPT của đường thẳng d là $\overrightarrow{HA}$ và $\overrightarrow{n}_{(P)}=(2;-1;2)$.
Suy ra véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d=\left[\overrightarrow{HA},\overrightarrow{n}_{(P)}\right]=(3;-6;-6)=3(1;-2;-2)$.
Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $(1;-2;-2)$ và đi qua điểm $A(1;2;-3)$.
So sánh với giả thiết

$$\frac{x-2}{a}=\frac{y-m}{b}=\frac{2-n}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{1-2}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{2}{-2} & \Rightarrow a=-1,b=2\\ \dfrac{1-2}{a}=\dfrac{2-m}{b}=\dfrac{-3-n}{2} & \Rightarrow \dfrac{1-2}{-1}=\dfrac{2-m}{2}=\dfrac{-3-n}{2}.\end{cases}.$$

Suy ra $a=-1; b=2; m=0; n=-5\Rightarrow T=a+b+m+n=-4$.

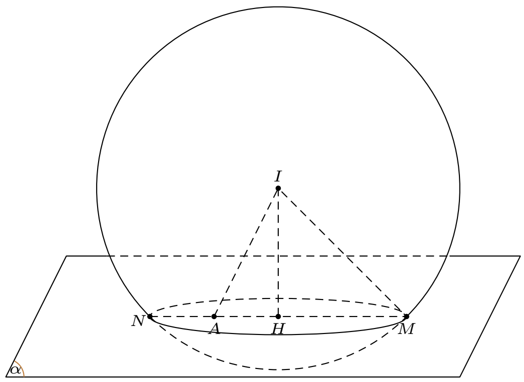
Chọn đáp án C □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25$ và điểm $A=(2;1;-1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất. Khi đó đường thẳng d sẽ luôn nằm trên một mặt phẳng cố định có phương trình $ax+y+cz+d=0$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ tương ứng bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mặt cầu (S) có tâm $I=(1;-1;0)$ và bán kính $R=5$.
Có $IA=\sqrt{6}<R\Rightarrow A$ nằm trong (S).
Đường thẳng d cắt (S) theo dây cung MN có độ dài được tính là (với H là trung điểm của MN)
$MN=2\sqrt{R^2-IH^2}=2\sqrt{25-IH^2}$;
$IH\le IA\Rightarrow MN=2\sqrt{25-IH^2}\ge 2\sqrt{25-IA^2}$.
Dấu "=" xảy ra khi $(IH\equiv IA)\perp d\Rightarrow$ đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với IA.
Tức là đường thẳng d khi đó sẽ luôn nằm trong mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với IA, tức là có VTPT là $\overrightarrow{IA}=(1;2;-1)$.



Suy ra phương trình

$$(P)\colon x+2y-z-6=0\Leftrightarrow ax+y+cz+d=0\Rightarrow\frac{a}{1}=\frac{1}{2}=\frac{c}{-1}=\frac{d}{-6}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ c=-\dfrac{1}{2}\\ d=-3.\end{cases}$$

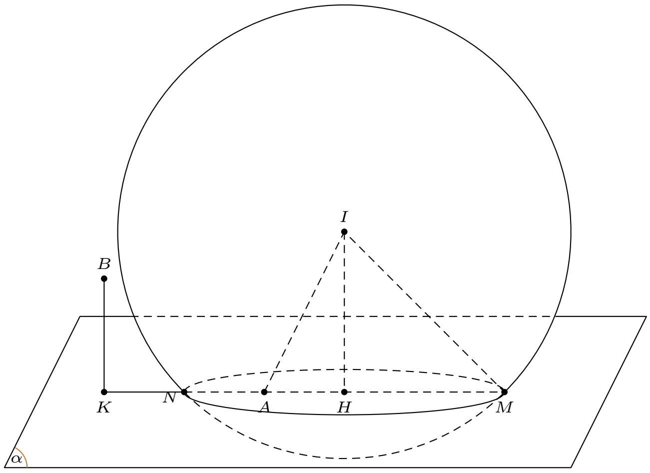
Suy ra $T=a+c+d=-3$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+z^2=9$ và hai điểm $A=(1;-1;1)$, $B=(3;0;-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo một dây cung nhỏ nhất. Khoảng cách nhỏ nhất từ B đến d có bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

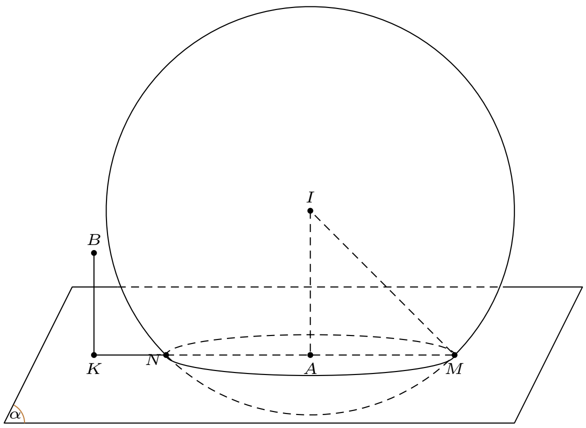


Mặt cầu (S) có tâm $I=(3;-2;0)$ và bán kính $R=3$. Có $IA=\sqrt{6}<R \Rightarrow A$ nằm trong (S).
Đường thẳng d cắt (S) theo dây cung MN có độ dài được tính là (với H là trung điểm của MN).
$MN=2\sqrt{R^2-IH^2}=2\sqrt{9-IH^2}$;
$IH \le IA \Rightarrow MN=2\sqrt{9-IH^2} \ge 2\sqrt{9-IA^2}$.
Dấu "=" xảy ra khi $(IH \equiv IA)\perp d \Rightarrow$ đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với IA.
Tức là đường thẳng d khi đó sẽ luôn nằm trong mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với IA, tức là có VTPT là $\overrightarrow{IA}=(-2;1;1)$,
suy ra phương trình $(P): -2x+y+z+2=0$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (P).
Khi đó ta thấy $\mathrm{d}(B;d)\ge \mathrm{d}(B;(P))=BK=\sqrt{6}$.
Xảy ra khi đường thẳng d đi qua A và K.
Vậy khoảng cách từ B đến d đạt giá trị nhỏ nhất là $\mathrm{d}(B;d)_{\min}=\sqrt{6}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$ và hai điểm $A=(2;3;2)$, $B=(4;1;1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất. Gọi khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất từ điểm B đến đường thẳng d lần lượt là α và β. Giá trị của biểu thức $T=13\alpha+\sqrt{13}\beta$ bằng

A. 14. **B.** $10\sqrt{13}$. **C.** 13. **D.** 26.

✍ **LỜI GIẢI.**



Mặt cầu (S) có tâm $I=(2;1;-1)$ và bán kính $R=6$. Có $IA=\sqrt{13}<R \Rightarrow A$ nằm trong (S).
Đường thẳng d cắt (S) theo dây cung MN có độ dài được tính là (với H là trung điểm của MN)
$MN=2\sqrt{R^2-IH^2}=2\sqrt{36-IH^2}$;
$IH \le IA \Rightarrow MN=2\sqrt{36-IH^2} \ge 2\sqrt{36-IA^2}$.
Dấu "=" xảy ra khi $(IH \equiv IA)\perp d \Rightarrow$ đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với IA.
Tức là đường thẳng d khi đó sẽ luôn nằm trong mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với IA,
tức là có VTPT là $\overrightarrow{IA}=(0;2;3)$, suy ra phương trình (P): $2y+3z-12=0$.
Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng d và mặt phẳng (P).
Khi đó ta thấy $\dfrac{7}{\sqrt{13}}=\mathrm{d}(B;(P))=BK\le \mathrm{d}(B;d)=BC\le BA=3$.
Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ B đến đường thẳng d lần lượt là

$$\begin{cases}\mathrm{d}(B;d)_{\max}=BA=3=\beta\\ \mathrm{d}(B;d)_{\min}=BK=\mathrm{d}(B;(P))=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\alpha\end{cases}\Rightarrow T=13\alpha+\sqrt{13}\beta=10\sqrt{13}.$$

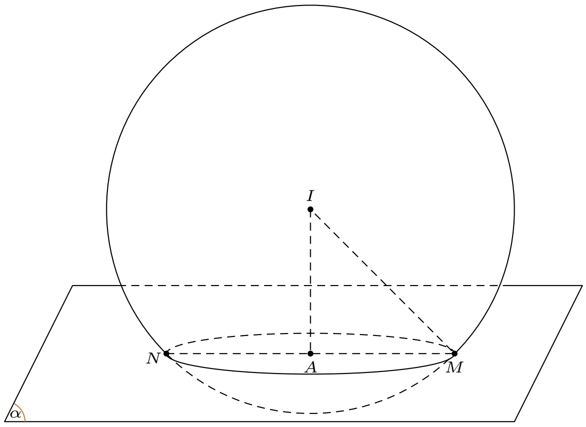
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=25$ và hai điểm $A=(1;2;0)$. Gọi $d\colon \begin{cases} x=m+at \\ y=n+3t \\ z=3+ct \end{cases}$ là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất đồng thời song song với mặt phẳng (Oyz). Giá trị của biểu thức $T=a+c+m+n$ bằng

A. -5. **B.** -7. **C.** 11. **D.** -3.

✍ LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I=(0;0;-2)$ và bán kính $R=5$. Có $IA=3<R\Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S). Đường thẳng d cắt (S) theo dây cung MN có độ dài được tính là (với H là trung điểm của MN) $MN=2\sqrt{R^2-IH^2}=2\sqrt{25-IH^2}$;
$IH\le IA\Rightarrow MN=2\sqrt{25-IH^2}\ge 2\sqrt{25-IA^2}$.
Dấu "=" xảy ra khi $(IH\equiv IA)\perp d$; có $\overrightarrow{IA}=(1;2;2)$.
Lại có đường thẳng d song song với (Oyz) suy ra đường thẳng $d\perp\vec{i}=(1;0;0)$.



Suy ra VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}=[\overrightarrow{IA},\vec{i}]=(0;2;-2)$.

Suy ra $\dfrac{a}{0}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{c}{-2}\Leftrightarrow a=0;c=-3\Rightarrow d\colon \begin{cases} x=m \\ y=n+3t \\ z=3-3t. \end{cases}$

Thay điểm A vào đường thẳng d, được $\begin{cases} 1=m \\ 2=n+3t \\ 0=3-3t \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \\ t=1 \end{cases}\Rightarrow T=a+c+n+m=-3.$

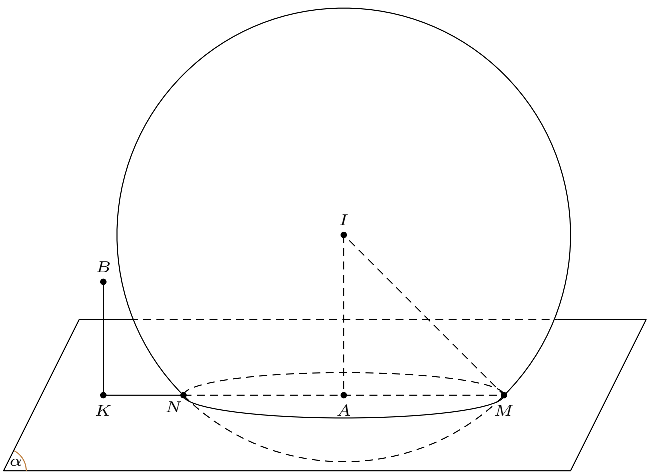
Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=40$ và hai điểm $A=(1;-2;0)$, $B=(-1;2;0)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất đồng thời khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Hỏi điểm nào dưới đây nằm trên đường thẳng d?

A. $(3;-6;0)$. **B.** $(-1;3;2)$. **C.** $(4;-4;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

✍ LỜI GIẢI.

Mặt cầu (S) có tâm $I=(2;0;1)$ và bán kính $R=2\sqrt{10}$. Có $IA=\sqrt{6}<R\Rightarrow A$ nằm trong (S). Đường thẳng d cắt (S) theo dây cung MN có độ dài nhỏ nhất khi và chỉ khi d vuông góc với IA tại điểm A. Tức là: $d\perp\{\overrightarrow{IA}=(-1;-2;-1)\}$.
Khi đó điểm d sẽ xoay quanh điểm A và tạo nên mặt phẳng cố định (P). Hay có thể hiểu rằng d nằm trên mặt phẳng (P), mặt phẳng này đi qua điểm A và có VTPT là $d\perp\{\overrightarrow{IA}=(-1;-2;-1)\}$.
Suy ra phương trình $(P): x+2y+z+3=0$.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên (P). Để khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất thì đường thẳng d phải đi qua điểm K. Như vậy là đường thẳng d sẽ đi qua hai điểm A và K. Ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm K là $K = (-2; 0; -1)$.
Suy ra VTCP của đường thẳng d là $\overrightarrow{AK} = (-3; 2; -1)$

$\Rightarrow d\colon \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -t \end{cases}$. Thay lần lượt các điểm từ các đáp án vào.

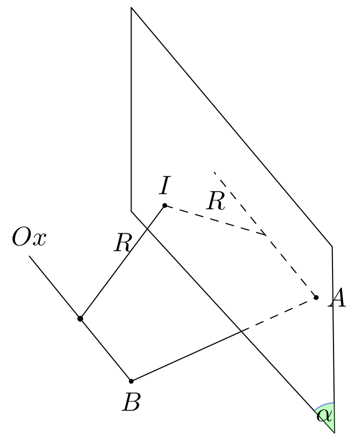
Chọn đáp án D □

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I tiếp xúc đồng thời với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ và trục hoành Ox. Hỏi quỹ tích tâm I là mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x + y - 2 = 0$. **B.** $y - 2 = 0$. **C.** $y - 1 = 0$. **D.** $x + z - 1 = 0$.

LỜI GIẢI.

Dễ dàng nhận thấy được đường thẳng d song song với trục hoành Ox.
Để (S) tiếp xúc với hai đường thẳng trên thì $\mathrm{d}(I; d) = \mathrm{d}(I; Ox) = R \Leftrightarrow I$ nằm trên mặt phẳng (P) nằm chính giữa hai đường thẳng này.
Hình vẽ minh họa.
Lấy điểm A bất kì nằm trên d và B là hình chiếu vuông góc của A lên Ox. Khi đó $AB \perp (P)$ và mặt phẳng (P) sẽ đi qua trung điểm M của AB.
Ta chọn $A = (1; 2; 0) \in d \Rightarrow B = (1; 0; 0)$. Tọa độ trung điểm của AB là $M = (1; 1; 0)$.



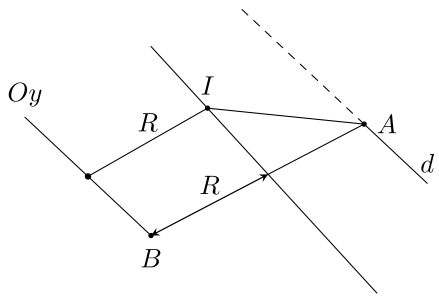
Mặt phẳng (P) có VTPT là $\overrightarrow{AB} = (0; -2; 0) \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(P)\colon y - 1 = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; 2a + b - 1)$ tiếp xúc đồng thời với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ và trục tung Oy . Khi bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $T = 3a - b$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

LỜI GIẢI.

Dễ dàng nhận thấy được đường thẳng d song song với trục tung Oy. Để (S) tiếp xúc với hai đường thẳng trên thì $\mathrm{d}(I; d) = \mathrm{d}(I; Oy) = R$.
Ta chọn $A = (2; 1; 0) \in d \Rightarrow B = (0; 1; 0)$ là hình chiếu vuông góc của A lên trục Oy. Tọa độ trung điểm của AB là $H = (1; 1; 0)$.
Khoảng cách giữa đường thẳng d và trục Oy là $\mathrm{d}(d; Oy) = AB = 2$.
Dễ dàng nhận thấy khi bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất là $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\mathrm{d}(d; Oy)}{2} = 1$.



Suy ra: $\begin{cases} IA = IB \\ \mathrm{d}(I;Oy) = R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b-1)^2+(2a+b-1)^2 = a^2+(b-1)^2+(2a+b-1)^2 \\ x_I^2+z_I^2 = R^2 = 1 \Leftrightarrow a^2+(2a+b-1)^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1+(2+b-1)^2 = 1 \Leftrightarrow b = -1 \end{cases} \Rightarrow T = 3a - b = 4.$

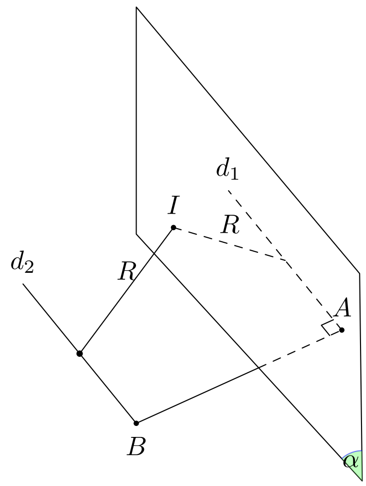
Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình là $d_1\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Quỹ tích tâm I là mặt phẳng

A. $(P)\colon 35x - 16y - 13z - 30 = 0$. **B.** $(P)\colon 12x - 21y - 10z - 13 = 0$.
C. $(P)\colon x + 3y - z - 11 = 0$. **D.** $(P)\colon 4x - 3y + z - 6 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hai đường thẳng này song song với nhau, nên quỹ tích tâm I {điểm cách đều hai đường thẳng } sẽ là mặt phẳng trung trực của hai đường thẳng, ta gọi là mặt phẳng (P).
Ta chọn $A(0;2;1) \in d_1 \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d_2 là $B\left(\dfrac{35}{11};\dfrac{6}{11};-\dfrac{2}{11}\right)$.
Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của đoạn AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTPT.
Ta có $M = \left(\dfrac{35}{22};\dfrac{14}{11};\dfrac{9}{22}\right)$ và
$\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{35}{11};-\dfrac{16}{11};-\dfrac{13}{11}\right) = \dfrac{1}{11}(35;-16;-13)$.



Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng

$$(P)\colon 35\left(x-\frac{35}{22}\right) - 16\left(y-\frac{14}{11}\right) - 13\left(z-\frac{9}{22}\right) = 0 \Leftrightarrow (P)\colon 35x-16y-13z-30=0.$$

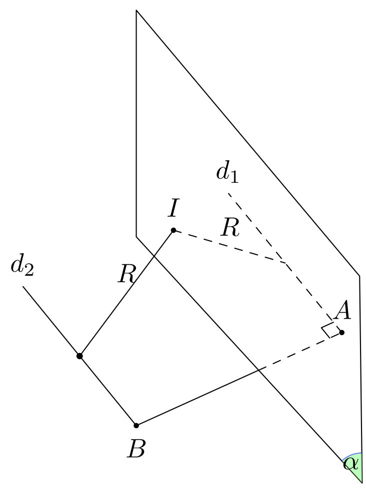
Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình là $d_1\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$ Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Khoảng cách OI nhỏ nhất bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Quỹ tích tâm I cũng là những điểm cách đều hai đường thẳng, chính là mặt phẳng trung trực của hai đường thẳng (tuy SGK không có cái khái niệm này, nhưng chúng ta vẫn đưa vào cho dễ hiểu).
Cách lập mặt phẳng trung trực (P):
Lấy điểm $A = (1;3;2) \in d_1 \Rightarrow B = (-3;-1;0)$ là hình chiếu vuông góc của nó lên đường thẳng d_2 Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTPT.
Ta có: $M = (-1;1;1)$ và $\overrightarrow{AB} = (-4;-4;-2)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng $(P)\colon -4(x+1) - 4(y-1) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 1 = 0$.



Điểm I chạy trên mặt phẳng (P), nên để OI nhỏ nhất thì I là hình chiếu vuông góc của O lên (P). Hay nói cách khác, ta có $OI_{\min} = \mathrm{d}(O;(P)) = \dfrac{1}{3}$.

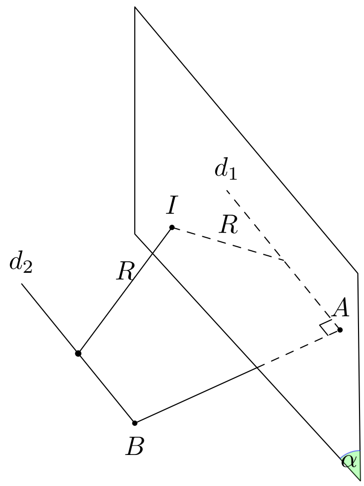
Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I = (a;b;-b+1)$ và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2, với a, b là những tham số thực. Khoảng cách OI nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{\dfrac{30}{11}}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{21}{11}}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{24}{5}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{19}{4}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Quỹ tích tâm I là tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng và là một mặt phẳng được tạo như sau:



- Chọn điểm $A(1;2;0) \in d_1$. Suy ra $B(3;-2;2)$ là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d_2.
- Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB là mặt phẳng cần lập. Vì đi qua trung điểm $M(2;0;1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2;-4;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên (P) có phương trình là

$$2(x-2) - 4y + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z - 3 = 0.$$

Vì $I \in (P)$ nên $a - 2b + (-b+1) - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3b + 2$.

Khoảng cách OI là

$$\begin{aligned} OI &= \sqrt{a^2 + b^2 + (-b+1)^2} = \sqrt{(3b+2)^2 + b^2 + (b-1)^2} = \sqrt{11b^2 + 10b + 5} \\ &= \sqrt{11\left(b + \frac{5}{11}\right)^2 + \frac{30}{11}} \geq \sqrt{\frac{30}{11}}. \end{aligned}$$

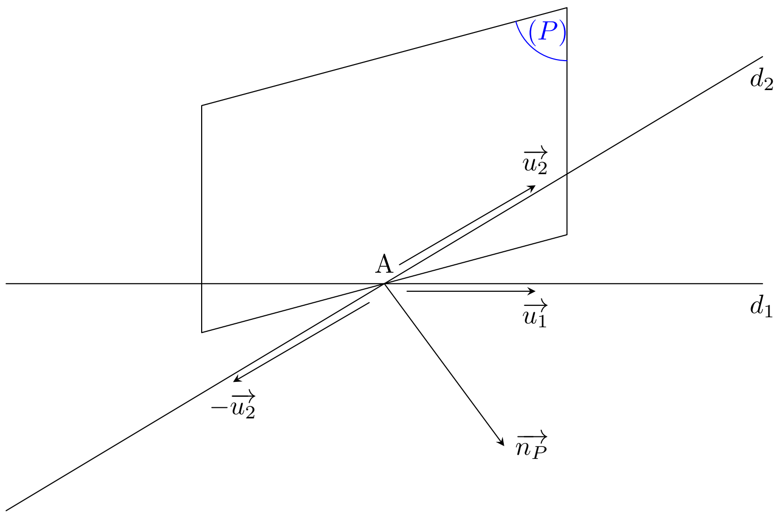
Vậy khoảng cách OI ngắn nhất bằng $\sqrt{\dfrac{30}{11}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Quỹ tích tâm I là hai mặt phẳng có phương trình là

A. $(P_1)\colon 3x + 2y - z - 8 = 0$, $(P_2)\colon x + 3z - 2 = 0$.
B. $(P_1)\colon x + 3y - 2z - 1 = 0$, $(P_2)\colon x + 3z - 2 = 0$.
C. $(P_1)\colon 3x + y - z - 7 = 0$, $(P_2)\colon 2x + y + 1 = 0$.
D. $(P_1)\colon x + 2y - z = 0$, $(P_2)\colon 2x + z - 3 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $A = (2;1;0)$.
Vì điểm I cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau nên tập hợp điểm I là hai mặt phẳng thỏa

- chứa đường phân giác góc tạo bởi d_1 và d_2,
- vuông góc với mặt phẳng tạo bởi d_1 và d_2.

Đặt $\overrightarrow{n}_d$ là véc-tơ pháp tuyến mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.
Ta có $\overrightarrow{n_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} + \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}$ và $\overrightarrow{n_2} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} - \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}$ lần lượt là hai véc-tơ chỉ phương của hai đường phân giác các góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.
Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n}_d \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = k\left[\overrightarrow{n}_d, \overrightarrow{n_2}\right]$ và $\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{n}_d \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{n_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = k\left[\overrightarrow{n}_d, \overrightarrow{n_1}\right]$ với $k \in \mathbb{R}$.
Do đó hai mặt phẳng trên có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là

- $\overrightarrow{n_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} + \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2;1;1) + \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1;1;-2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(3;2;-1)$.
- $\overrightarrow{n_2} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} - \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2;1;1) - \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1;1;-2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1;0;3)$.

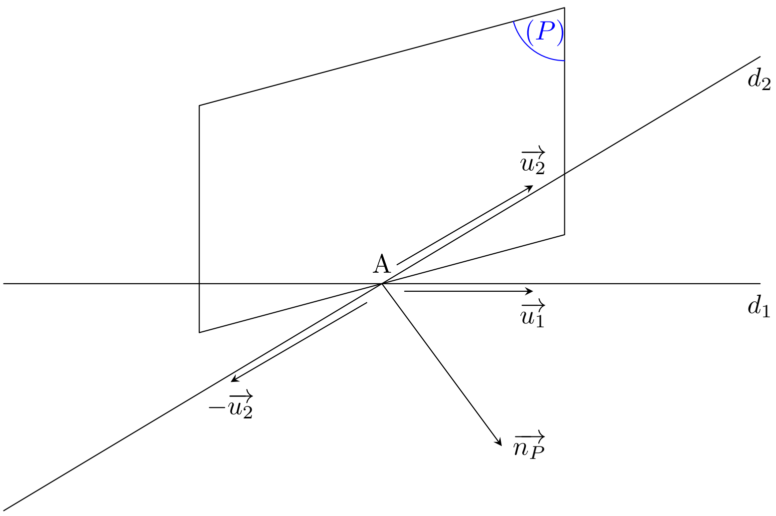
Vậy hai mặt phẳng cần tìm là $\begin{cases} (P_1)\colon 3x + 2y - z - 8 = 0 \\ (P_2)\colon x + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Khoảng cách OI nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $A = (2; 3; 0)$.
Vì điểm I cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau nên tập hợp điểm I là hai mặt phẳng thỏa

- chứa đường phân giác góc tạo bởi d_1 và d_2,
- vuông góc với mặt phẳng tạo bởi d_1 và d_2.

Đặt $\overrightarrow{n}_d$ là véc-tơ pháp tuyến mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.
Ta có $\overrightarrow{n_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} + \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}$ và $\overrightarrow{n_2} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} - \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}$ lần lượt là hai véc-tơ chỉ phương của hai đường phân giác các góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.
Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n}_d \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = k\left[\overrightarrow{n}_d, \overrightarrow{n_2}\right]$ và $\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{n}_d \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{n_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = k\left[\overrightarrow{n}_d, \overrightarrow{n_1}\right]$ với $k \in \mathbb{R}$.
Do đó hai mặt phẳng trên có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là

- $\overrightarrow{n_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} + \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{1}{3}(2; 2; 1) + \dfrac{1}{3}(1; 2; -2) = \dfrac{1}{3}(3; 4; -1)$.
- $\overrightarrow{n_2} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} - \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{1}{3}(2; 2; 1) - \dfrac{1}{3}(1; 2; -2) = \dfrac{1}{3}(1; 0; 3)$.

Do đó hai mặt phẳng ở trên là $\begin{cases} (P_1)\colon 3x + 4y - z - 18 = 0 \\ (P_2)\colon x + 3z - 2 = 0. \end{cases}$
Ta có $\mathrm{d}(O, (P_1)) = \dfrac{18}{\sqrt{26}}$ và $\mathrm{d}(O, (P_2)) = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$.
Do vậy $OI_{\min} = \mathrm{d}(O, (P_2)) = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$.
Chọn đáp án B □

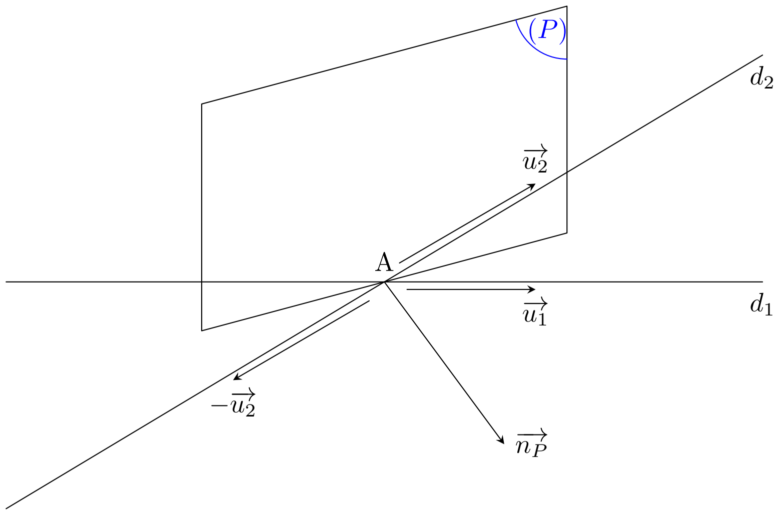
Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình là $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2 : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(a; b; a+b-2)$ và bán kính R; (S) tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M và N sao cho $\widehat{MAN}$ nhọn, với $A(3; 2; 1)$. Bán kính R đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

✍ LỜI GIẢI.

Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $A=(3;2;1)$.
Vì điểm I cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau nên tập hợp điểm I là hai mặt phẳng thỏa

- chứa đường phân giác góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2,
- vuông góc với mặt phẳng tạo bởi d_1 và d_2.



Có hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng là $\overrightarrow{u_1}=(2;2;1)$ và $\overrightarrow{u_2}=(2;-1;2)$.
Nhận thấy: $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}>0 \Rightarrow (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ là góc nhọn.
Đặt $\overrightarrow{n}_d$ là véc-tơ pháp tuyến mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.
Ta có $\overrightarrow{v}=\dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}+\dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}$ và $\overrightarrow{n}=\dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}-\dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}$ lần lượt là hai véc-tơ chỉ phương của hai đường phân giác các góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.
Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n}_d\\ \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n}=k\left[\overrightarrow{n}_d,\overrightarrow{v}\right]$ với $k\in\mathbb{R}$.
Do đó quỹ tích điểm I là mặt phẳng (P) như hình vẽ và có véc-tơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n}=\frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}-\frac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}=\frac{(2;2;1)}{3}-\frac{(2;-1;2)}{3}=\frac{1}{3}(0;3;-1).$$

Suy ra (P) có phương trình là $3y-z-5=0$.
Thay tọa độ tâm I vào (P), ta được: $3b-(a+b-2)-5=0\Leftrightarrow a=2b-3\Rightarrow I=(2b-3;b;3b-5)$.
Bán kính mặt cầu chính là

$$R=\mathrm{d}\left(I;d_1\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{u_1}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_1}|}=\frac{|(-5b+10;4b-6;2b-8)|}{3}=\frac{\sqrt{45b^2-180b+200}}{3}.$$

Suy ra: $R=\mathrm{d}\left(I;d_1\right)=\dfrac{\sqrt{45(b-2)^2+20}}{3}\geq\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\Rightarrow R_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng có phương trình là $d_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$, $d_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d_3:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và bán kính R, biết rằng (S) tiếp xúc với cả ba đường thẳng d_1,d_2 và d_3. Bán kính R bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{273}}{63}$.

✍ LỜI GIẢI.

Nhận xét: Ba đường thẳng d_1; d_2 và d_3 song song với nhau.
Gọi (α) là một mặt phẳng vuông góc với d_1; d_2 và d_3. Mặt phẳng (α) cắt d_1; d_2 và d_3 lần lượt tại M; N; P.
Khi đó bán kính mặt cầu tiếp xúc với 3 đường thẳng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.
Dễ thấy: $MN = \mathrm{d}(d_1;d_2)$; $NP = \mathrm{d}(d_2;d_3)$ và $MP = \mathrm{d}(d_1;d_3)$.

- Véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}} = \overrightarrow{u_{d_2}} = \overrightarrow{u_{d_3}} = (3;4;-1)$.
- Lấy điểm $I(1;1;2) \in d_1$; $J(-1;-4;2) \in d_2$ và $K(2;6;-1) \in d_3$.
- $MN = \mathrm{d}(d_1;d_2) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{u_{d_1}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_1}}\right|} = \sqrt{3}$.
- $NP = \mathrm{d}(d_2;d_3) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{JK};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_2}}\right|} = \sqrt{14}$.
- $MP = \mathrm{d}(d_1;d_3) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IK};\overrightarrow{u_{d_3}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_3}}\right|} = 3$.
- Diện tích tam giác MNP là $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.
- Bán kính mặt cầu là: $R = \dfrac{4 \cdot S_{\triangle MNP}}{MN \cdot NP \cdot MP} = \dfrac{2\sqrt{273}}{63}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng có phương trình là $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{1}$, $d_2 : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và $d_3 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I = (a; 2b; a+b-3)$ và bán kính R, biết rằng (S) tiếp xúc với cả ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 2b$ bằng

A. 11. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

✍ LỜI GIẢI.

Nhận xét: Ba đường thẳng d_1; d_2 và d_3 song song với nhau.
Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(d_1;d_2)$ và cách đều d_1 và d_2.

- Véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}} = \overrightarrow{u_{d_2}} = (2;2;1)$.
- Lấy điểm $M(1;2;0) \in d_1$ và điểm $N(4;2;3) \in d_2$. Trung điểm I của MN có tọa độ là $\left(\dfrac{5}{2};2;\dfrac{3}{2}\right)$.
- Mặt phẳng (P): $\begin{cases} \text{qua điểm } I\left(\dfrac{5}{2};2;\dfrac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{n_P} = \left[\left[\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{MN}\right]; \overrightarrow{u_{d_1}}\right] = (9;-18;18). \end{cases}$ $\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là $2x - 4y + 4z - 3 = 0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(d_1;d_3)$ và cách đều d_1 và d_3.

- Véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}} = \overrightarrow{u_{d_3}} = (2;2;1)$.
- Lấy điểm $M(1;2;0) \in d_1$ và điểm $P(3;1;-2) \in d_3$. Trung điểm J của MP có tọa độ là $\left(2;\dfrac{3}{2};-1\right)$.
- Mặt phẳng (Q): $\begin{cases} \text{qua điểm } J\left(2;\dfrac{3}{2};-1\right) \\ \text{Véc-tơ pháp tuyến } \overrightarrow{n_P} = \left[[\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{MP}]; \overrightarrow{u_{d_1}}\right] = (18;-9;-18) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (Q) là $4x - 2y - 4z - 9 = 0$.

Tâm I có tọa độ $(a;2b;a+b-3) \Rightarrow I$ thuộc mặt phẳng $2x + y - 2z - 6 = 0$.

Khi đó tọa độ của điểm I là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 4y + 4z - 3 = 0 \\ 4x - 2y - 4z - 9 = 0 \\ 2x + y - 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{4} \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} a = \dfrac{11}{4} \\ b = \dfrac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow 3a + 2b = 9.$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ lần lượt là $A(1;2;2)$; $B(2;0;4)$; $C(2;4;4)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC tại những tiếp điểm nằm trong các cạnh AB, BC, CA. Hỏi tâm I chạy trên đường thẳng nào dưới đây?

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + 2t \\ y = 1 \\ z = \dfrac{4}{3} - 2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = \dfrac{9}{5} + 2t \\ y = 2 \\ z = \dfrac{16}{5} - t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

LỜI GIẢI.

- Tâm I sẽ chạy trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.
- Dễ dàng tìm được tâm nội tiếp nhờ công thức
$$K = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c} = \frac{4 \cdot (1;2;2) + 3 \cdot (2;0;4) + 3 \cdot (2;4;4)}{4 + 3 + 3} = \left(\frac{9}{5}; 2; \frac{16}{5}\right).$$
- Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{n} = (2;0;-1)$.
- Suy ra đường thẳng d là $\begin{cases} x = \dfrac{9}{5} + 2t \\ y = 2 \\ z = \dfrac{16}{5} - t. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ lần lượt là $A(1;0;-3)$; $B(1;1;2)$; $C(2;1;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC. Biết rằng I nằm trên mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-8=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu (S) thỏa mãn bài toán?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** Vô số.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo đề suy ra tâm I nằm trên trục d của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lại có mặt phẳng (P) không vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên cũng không song song và không chứa đường thẳng d.

Vậy có 1 điểm I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ lần lượt là $A(1;2;-1)$; $B(2;0;1)$; $C(2;4;1)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo đề suy ra tâm I nằm trên trục d của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất khi nó bằng bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;4;0)$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow R_{\min}=r_{\triangle ABC}=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB+BC+CA}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án D □