MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

CHUYÊN ĐỀ TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG - CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO

§1. CÁC BÀI TOÁN VỀ NGUYÊN HÀM

A $F'(X)\mathrm{E}^{F(X)} = G'(X)\mathrm{E}^{G(X)} \Leftrightarrow F'(X)\mathrm{E}^{F(X)-G(X)} - G'(X) = 0$

Bài toán tổng quát

Ta có các biến đổi sau hay được sử dụng để đưa ra giả thiết cho bài toán:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)} &\Leftrightarrow f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} = g'(x)\mathrm{e}^{g(x)}\\
&\Leftrightarrow \frac{f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}}{g'(x)\mathrm{e}^{g(x)}} - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}}{\mathrm{e}^{g(x)}} - g'(x) = 0\\
&\Leftrightarrow f'(x)\mathrm{e}^{f(x)-g(x)} - g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cdots .
\end{aligned}$$

Phương pháp giải: Các bài toán này thường đưa về phương trình dạng $\mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ để tìm hàm số chưa biết $f(x)$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1} - \dfrac{2x}{f^2(x)} = 0$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}} xf(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. B. $\dfrac{15}{4}$. C. $\dfrac{45}{8}$. D. $\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&3f'(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0\\
\Leftrightarrow\ &3f'(x)\cdot\frac{\mathrm{e}^{f^3(x)}}{\mathrm{e}^{x^2+1}} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0\\
\Leftrightarrow\ &3f'(x)\cdot f^2(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)} - 2x\cdot\mathrm{e}^{x^2+1} = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\mathrm{e}^{f^3(x)} - \mathrm{e}^{x^2+1}\right)' = 0\\
\Rightarrow\ &\mathrm{e}^{f^3(x)} - \mathrm{e}^{x^2+1} = C. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Thay $x = 0$ vào $(*)$, ta có $\mathrm{e}^{f^3(0)} - \mathrm{e} = C \Leftrightarrow \mathrm{e} - \mathrm{e} = C \Leftrightarrow C = 0$.
Như vậy $\mathrm{e}^{f^3(x)} = \mathrm{e}^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

Do đó $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow u^3=x^2+1\Rightarrow 3u^2\,\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}u^2\,\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u=1$. Khi $x=\sqrt{7}$ thì $u=2$. Do đó

$$I=\int\limits_1^2 u\cdot\frac{3}{2}u^2\,\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\int\limits_1^2 u^3\,\mathrm{d}u=\frac{3}{8}u^4\Big|_1^2=\frac{45}{8}.$$

Chọn đáp án C

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)\cdot\mathrm{e}^{3f(x)-x^3-1}-x^2=0$ và $f(0)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{64}{3}$. B $\dfrac{63}{4}$. C $\dfrac{68}{3}$. D $\dfrac{16}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&f'(x)\cdot\mathrm{e}^{3f(x)-x^3-1}-x^2=0\\
\Leftrightarrow\ &f'(x)\cdot\frac{\mathrm{e}^{3f(x)}}{\mathrm{e}^{x^3+1}}-x^2=0\\
\Leftrightarrow\ &f'(x)\cdot\mathrm{e}^{3f(x)}-x^2\mathrm{e}^{x^3+1}=0\\
\Leftrightarrow\ &3f'(x)\cdot\mathrm{e}^{3f(x)}-3x^2\mathrm{e}^{x^3+1}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\mathrm{e}^{3f(x)}-\mathrm{e}^{x^3+1}\right)'=0\\
\Rightarrow\ &\mathrm{e}^{3f(x)}-\mathrm{e}^{x^3+1}=C.\qquad(**)
\end{aligned}$$

Thay $x=0$ vào $(**)$, ta có $\mathrm{e}^{3f(0)}-\mathrm{e}^{0^3+1}=C\Leftrightarrow \mathrm{e}-\mathrm{e}=C\Leftrightarrow C=0$.

Như vậy $\mathrm{e}^{3f(x)}=\mathrm{e}^{x^3+1}\Leftrightarrow 3f(x)=x^3+1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3+1}{3}$.

Do đó $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^4\dfrac{x^3+1}{3}\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{3}x\right)\Big|_0^4=\dfrac{68}{3}$.

Chọn đáp án C

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\dfrac{f'(x)+6x}{\mathrm{e}^{x^2-f(x)-2019}}-8x=0$ và $f(0)=-2019$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=-\dfrac{6064}{3}$. B $I=\dfrac{6050}{3}$. C $I=-\dfrac{6050}{3}$. D $I=\dfrac{6064}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{f'(x)+6x}{\mathrm{e}^{x^2-f(x)-2019}}-8x=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(f'(x)+6x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)+3x^2}}{\mathrm{e}^{4x^2-2019}}-8x=0\\
\Leftrightarrow\ &(f'(x)+6x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)+3x^2}-8x\mathrm{e}^{4x^2-2019}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{f(x)+3x^2}-\mathrm{e}^{4x^2-2019}\right)'=0\\&\Rightarrow \mathrm{e}^{f(x)+3x^2}-\mathrm{e}^{4x^2-2019}=C. \qquad (***)\end{aligned}$$

Thay $x=0$ vào $(***)$, ta có $\mathrm{e}^{f(0)}-\mathrm{e}^{-2019}=C \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2019}-\mathrm{e}^{-2019}=C \Leftrightarrow C=0$.
Như vậy $\mathrm{e}^{f(x)+3x^2}=\mathrm{e}^{4x^2-2019} \Leftrightarrow f(x)=x^2-2019$.

Do đó $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x^2-2019\right)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-2019x\right)\Big|_1^2=-\frac{6050}{3}$.

Chọn đáp án C

B CHO $Y=F(X)>0$, $F(H)=E^K$. BIẾT $\frac{F'(X)}{F(X)}=AX+B$, TÌM M ĐỂ $F(X)=M$ CÓ 2 NGHIỆM THỰC PHÂN BIỆT

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, $f(h)=e^k$ $(h,k\in\mathbb{R})$. Biết $\frac{f'(x)}{f(x)}=ax+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Phương pháp giải:

1. Lấy nguyên hàm hai vế $\frac{f'(x)}{f(x)}=ax+b$ ta được

$$\begin{aligned}\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(ax+b)dx &\Leftrightarrow \ln|f(x)|=\frac{ax^2}{2}+bx+C\\&\Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{ax^2}{2}+bx+C \text{ (do } f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R})\\&\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{ax^2}{2}+bx+C}.\end{aligned}$$

2. Dựa vào giả thiết $f(h)=e^k$ ta tìm được giá trị $C=C_o$ trong đó $C_o=k-\frac{ah^2}{2}-bh$. Từ đó ta có $f(x)=e^{\frac{ax^2}{2}+bx+C_o}$.

3. Xét phương trình $f(x)=m$ ta có

$$\begin{aligned}e^{\frac{ax^2}{2}+bx+C_o}=m &\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{ax^2}{2}+bx+C_o=\ln m\\ m>0\end{cases}\\&\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{ax^2}{2}+bx+C_o-\ln m=0\\ m>0\end{cases}.\end{aligned}$$

4. Phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta>0\\ m>0\end{cases}$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$. Biết $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

(A) $1 < m < e$. (B) $0 < m < e$. (C) $m > e$. (D) $0 < m \leq 1$.

Lời giải.

Lấy nguyên hàm hai vế $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$ ta được

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int (2-2x)dx &\Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x - x^2 + C\\ &\Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \text{ (do } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow f(x) = e^{2x-x^2+C}.\end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $f(0) = 1 \Leftrightarrow e^C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{2x-x^2}$.
Xét phương trình $f(x) = m$ ta có

$$\begin{aligned}e^{2x-x^2} = m &\Leftrightarrow \begin{cases}2x - x^2 = \ln m\\ m > 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-x^2 + 2x - \ln m = 0\\ m > 0\end{cases}.\end{aligned}$$

Phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 - \ln m > 0\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln m < 1\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m < e\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < e.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = e^3$. Biết $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

(A) $1 < m < e^{\frac{3}{4}}$. (B) $0 < m < e^{\frac{3}{4}}$. (C) $m > e^{\frac{3}{4}}$. (D) $m \geq e^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải.

Lấy nguyên hàm hai vế $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1$ ta được

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int (2x+1)dx &\Leftrightarrow \ln|f(x)| = x^2 + x + C\\ &\Leftrightarrow \ln f(x) = x^2 + x + C \text{ (do } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow f(x) = e^{x^2+x+C}.\end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $f(1) = e^3 \Leftrightarrow e^{2+C} = e^3 \Leftrightarrow C = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2+x+1}$.
Xét phương trình $f(x) = m$ ta có

$$e^{x^2+x+1} = m \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 + x + 1 = \ln m\\ m > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1-\ln m=0 \\ m>0 \end{cases}.$$

Phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4(1-\ln m)>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln m>\dfrac{3}{4} \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>e^{\frac{3}{4}} \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>e^{\frac{3}{4}}.$$

Chọn đáp án C

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(2)=e^4$. Biết $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=6x-4$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A $1<m<e^{\frac{-4}{3}}$. B $0<m<e^{\frac{-4}{3}}$. C $m>e^{\frac{-3}{4}}$. D $m>e^{\frac{-4}{3}}$.

Lời giải.

Lấy nguyên hàm hai vế $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=6x-4$ ta được

$$\begin{aligned} \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(6x-4)dx &\Leftrightarrow \ln|f(x)|=3x^2-4x+C \\ &\Leftrightarrow \ln f(x)=3x^2-4x+C \text{ (do } f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow f(x)=e^{3x^2-4x+C}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $f(2)=e^4\Leftrightarrow e^{4+C}=e^4\Leftrightarrow C=0\Leftrightarrow f(x)=e^{3x^2-4x}$.
Xét phương trình $f(x)=m$ ta có

$$\begin{aligned} e^{3x^2-4x}=m &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x=\ln m \\ m>0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x-\ln m=0 \\ m>0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+3\ln m>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln m>\dfrac{-4}{3} \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>e^{\frac{-4}{3}} \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>e^{\frac{-4}{3}}.$$

Chọn đáp án D

C CHO $F(A)=C$ TÌM $F(B)$ BIẾT $U(X)F'(X)=V(X)F^2(X)$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(a)=c$ và $u(x)f'(x)=v(x)f^2(x),\forall x\in[a;b]$. Biết rằng $f(x),v(x)\neq 0,\forall x\in[a;b]$. Tính $f(b)$. (Hàm số $\dfrac{v(x)}{u(x)}$ có nguyên hàm trên $[a;b]$.)

Phương pháp giải: Từ phương trình $u(x)f'(x) = v(x)f^2(x)$ và $f(x), v(x) \neq 0, \forall x \in [a;b]$ ta có

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{v(x)}{u(x)} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{v(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = h(x) + C.$$

Trong đó $h(x)$ là một nguyên hàm của $\dfrac{v(x)}{u(x)}$ trên $[a;b]$.

Với $x = a$, tính C, $f(b)$.

Cũng có thể tính trực tiếp qua tích phân

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{v(x)}{u(x)} \Rightarrow \int_a^b \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{v(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{f(a)} - \frac{1}{f(b)} = h(x)\Big|_a^b.$$

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $(x^2+1)^2 f'(x) = [f(x)]^2(x^2-1)$ với mọi $x \in [1;2]$. Biết rằng $f(x) \neq 0, \forall x \in [1;2]$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. B. $-\dfrac{2}{5}$. C. $-\dfrac{5}{2}$. D. $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Do $f(x) \neq 0, \forall x \in [1;2]$ nên từ giả thiết $(x^2+1)^2 f'(x) = [f(x)]^2(x^2-1)$, ta có

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \left(\frac{x}{x^2+1}\right)'\mathrm{d}x = -\frac{x}{x^2+1} + C.\end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được $-\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{x}{x^2+1} + C$.

Lại có $f(1) = 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} \Rightarrow f(2) = \dfrac{5}{2}$.

Có thể tính nhanh qua tích phân

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2 = \int_1^2 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}.$$

Do đó $-\dfrac{1}{f(2)} + \dfrac{1}{f(1)} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{f(2)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow f(2) = \dfrac{5}{2}$.

Nhận xét: Bài toán gốc không chuẩn khi chỉ cho $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $(x^2+1)^2 f'(x) = [f(x)]^2(x^2-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ vì hàm số $f(x)$ tìm được không xác định tại $x = 0$ và thiếu điều kiện để chia hai vế cho $f^2(x)$.

Chọn đáp án D

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x^2f'(x) = f^2(x)(x\cos x - \sin x)$ với mọi $x \in (0;\pi)$. Biết rằng $f(x) \neq 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. C. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. D. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Xét trên $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$, ta có

$$\begin{aligned} & x^2f'(x) = f^2(x)(x\cos x - \sin x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' \\ \Rightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\sin x}{x}\right)'\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ & -\frac{1}{f(x)} = \frac{\sin x}{x} + C. \end{aligned}$$

Lại có $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{3}{\pi} = \frac{3}{\pi} + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{\sin x} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án B

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(x^2+1)^2f'(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^xf^2(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(x) \neq 0, \forall x \in [0;1]$ và $f(0) = -1$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{\mathrm{e}}$. B. $\frac{1}{2\mathrm{e}}$. C. $\frac{\mathrm{e}^2}{2}$. D. $-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải.

Xét trên $[0;1]$, ta có

$$\begin{aligned} & (x^2+1)^2f'(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{(x^2+1)\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}\right)' \\ \Rightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}\right)'\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ & -\frac{1}{f(x)} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} + C. \end{aligned}$$

Lại có $f(0) = -1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{x^2+1}{\mathrm{e}^x} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án A

D CHO $F'(X) + G'(X)F(X) = H(X)$. TÍNH $F(A)$, BIẾT $F(B) = C$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + g'(x)f(x) = h(x)$ với $g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $h(x)$ là hàm liên tục trên khoảng $[a,b]$. Tính $f(a)$, biết rằng $f(b) = c$.

Phương pháp giải: Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}
f'(x)+g'(x)f(x)=h(x) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{g(x)}f'(x)+\mathrm{e}^{g(x)}g'(x)f(x)=\mathrm{e}^{g(x)}h(x)\\
&\Leftrightarrow \int\limits_a^b \left[\mathrm{e}^{g(x)}f'(x)+\mathrm{e}^{g(x)}g'(x)f(x)\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b \mathrm{e}^{g(x)}h(x)\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{g(x)}f(x)\right]\Big|_a^b=\int\limits_a^b \mathrm{e}^{g(x)}h(x)\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{g(b)}f(b)-\mathrm{e}^{g(a)}f(a)=\int\limits_a^b \mathrm{e}^{g(x)}h(x)\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow f(a)=\frac{\mathrm{e}^{g(b)}f(b)-\int\limits_a^b \mathrm{e}^{g(x)}h(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{g(a)}}.
\end{aligned}$$

Chú ý: trong trường hợp $h(x)=0$, ta có thể giải bài toán theo cách sau:
$f'(x)+g'(x)f(x)=0 \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=-\int g'(x)\,\mathrm{d}x$ (Với điều kiện $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$).

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Tính $f(-1)$, biết rằng $f(1)=1$.

A. e^4. B. 3. C. e^{-2}. D. e^3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } f'(x)+2f(x)=0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}f'(x)+\mathrm{e}^{2x}2f(x)=0\\
&\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1}\left[\mathrm{e}^{2x}f'(x)+\mathrm{e}^{2x}2f(x)\right]\,\mathrm{d}x=0\\
&\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{2x}f(x)\right]\Big|_{-1}^{1}=0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^2f(1)-\mathrm{e}^{-2}f(-1)=0\\
&\Leftrightarrow f(-1)=\mathrm{e}^4.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+2f(x)=6x-1$. Tính $f(-1)$, biết rằng $f(1)=2$.

A. $\mathrm{e}^{-4}-5$. B. e^4+5. C. $\mathrm{e}^{-4}+5$. D. e^4-5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) + 2f(x) = 6x - 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}f'(x) + \mathrm{e}^{2x}2f(x) = (6x-1)\mathrm{e}^{2x}$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \left[\mathrm{e}^{2x}f'(x) + \mathrm{e}^{2x}2f(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(6x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{2x}f(x)\right]\Big|_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2}(6x-1)\mathrm{e}^{2x}\right]\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 3\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{2x}f(x)\right]\Big|_{-1}^{1} = \left[(3x-2)\mathrm{e}^{2x}\right]\Big|_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2}f(-1) = \mathrm{e}^{2} + 5\mathrm{e}^{-2}$$

$$\Leftrightarrow f(-1) = \mathrm{e}^{4} - 5.$$

Chọn đáp án D

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + (2x-3)f(x) = 0$. Tính $f(-1)$, biết rằng $f(1) = 1$.

A e^{4}. B $-2\mathrm{e}^{-}6$. C -2. D e^{-6}.

Lời giải.

Ta có $f'(x) + (2x-3)f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2-3x}f'(x) + \mathrm{e}^{x^2-3x}(2x-3)f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left[\mathrm{e}^{x^2-3x}f'(x) + \mathrm{e}^{x^2-3x}(2x-3)f(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{x^2-3x}f(x)\right]\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{4}f(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(-1) = \mathrm{e}^{-6}.$$

Chọn đáp án D

E CHO $F'(X) = \dfrac{1}{X^2 - (A+B)X + AB}$, $F(A+C) + F(B-C) = M$, VỚI $0 < C < B - A$, $F(A-D) + F(B+D) = N$. TÍNH $T = F(T_1) + F(T_2) + F(T_3)$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{a;b\}$, với $a < b$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab}$. Biết rằng $f(a+c) + f(b-c) = m$, với $0 < c < b-a$, $m \in \mathbb{R}$ và $f(a-d) + f(b+d) = n$, với $d > 0$, $n \in \mathbb{R}$. Tính $T = f(t_1) + f(t_2) + f(t_3)$, với $t_1 \in (a;b)$ và $t_2, t_3 \in (-\infty;a) \cup (b+\infty)$.

Phương pháp giải: Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab} = \dfrac{1}{b-a}\left[\dfrac{1}{x-b} - \dfrac{1}{x-a}\right]$.

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{b-a}\ln\left|\dfrac{x-b}{x-a}\right| + C.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
$\dfrac{x-b}{x-a}$	$+$	||	- 0	$+$

* Khi $a < x < b$: Ta sử dụng giả thiết $f(a+c) + f(b-c) = m$, với $0 < c < b-a$, $m \in \mathbb{R}$ để tìm C_1.
* Khi $x < -1$ hoặc $x > 1$: Ta sử dụng giả thiết $f(a-d) + f(b+d) = n$, với $d > 0$, $n \in \mathbb{R}$ để tìm C_2.
Tính T.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3) + f(3) = 0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$. Tính $T = f(-2) + f(0) + f(4)$.

(A) $T = \ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 5$. (B) $T = \ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 5 + 2$.

(C) $T = \ln 3 - \dfrac{1}{2}\ln 5 + 1$. (D) $T = \ln 3 - \dfrac{1}{2}\ln 5 + 2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right]$.

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\dfrac{x-1}{x+1}$	$+$	||	- 0	$+$

* Khi $-1 < x < 1$: $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{x-1}{x+1}\right) + C_1$.

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 3 + C_1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3} + C_1 = 2$.

$\Rightarrow C_1 = 1$ và $f(0) = 2$.

* Khi $x < -1$ hoặc $x > 1$: $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + C_2$.

$f(-3) + f(3) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 2 + C_2 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} + C_2 = 0$.

$\Rightarrow C_2 = 0$ và $f(4) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$, $f(-2) = \dfrac{1}{2}\ln 3$.

Vậy $T = f(-2) + f(0) + f(4) = \dfrac{1}{2}\ln 3 + 2 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5} = \ln 3 - \dfrac{1}{2}\ln 5 + 2$.

Chọn đáp án (D)

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$. Biết rằng $f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{7}{2}\right) = 4$ và $f\left(\dfrac{3}{2}\right) + f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 2$. Tính $T = f(-1) + f(0) + f(2)$.

(A) $T = \dfrac{1}{2}\ln 6 + 2$. (B) $T = \dfrac{1}{2}\ln 6 + 4$. (C) $T = \dfrac{1}{2}\ln 2 + 1$. (D) $T = \dfrac{1}{2}\ln 3 + 3$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-1}\right]$.

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right| + C$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\dfrac{x-3}{x-1}$		$+$	‖	-	0	$+$	

* Khi $1 < x < 3$: $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{x-3}{x-1}\right) + C_1$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) + f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 3 + C_1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3} + C_1 = 4$.

$\Rightarrow C_1 = 2$ và $f(2) = 2$.

* Khi $x < 1$ hoặc $x > 3$: $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right) + C_2$.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{7}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 5 + C_2 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{5} + C_2 = 2$.

$\Rightarrow C_2 = 1$ và $f(-1) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + 1$, $f(0) = \dfrac{1}{2}\ln 3 + 1$.

Vậy $T = f(-1) + f(0) + f(2) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + 1 + \dfrac{1}{2}\ln 3 + 1 + 2 = \dfrac{1}{2}\ln 6 + 4$.

Chọn đáp án B

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$. Biết rằng $f(-2) + f(4) = 0$ và $f(0) + f(2) = 6$. Tính $T = f(-5) + f(-3) + f(1)$.

A $T = \dfrac{1}{4}\ln 3 + 2$. B $T = \dfrac{1}{4}\ln 2 + 4$. C $T = \dfrac{1}{4}\ln 6 + 6$. D $T = \dfrac{1}{4}\ln 6 + 8$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+1}\right]$.

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right| + C$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\dfrac{x-3}{x+1}$		$+$	‖	-	0	$+$	

* Khi $-1 < x < 3$: $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(-\dfrac{x-3}{x+1}\right) + C_1$.

$f(0) + f(2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\ln 3 + C_1 + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{3} + C_1 = 0$.

$\Rightarrow C_1 = 0$ và $f(1) = 0$.

* Khi $x < -1$ hoặc $x > 3$: $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right) + C_2$.

$f(-2) + f(4) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\ln 5 + C_2 + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5} + C_2 = 6$.

$\Rightarrow C_2 = 3$ và $f(-5) = \dfrac{1}{4}\ln 2 + 3$, $f(-3) = \dfrac{1}{4}\ln 3 + 3$.

Vậy $T = f(-5) + f(-3) + f(1) = \dfrac{1}{4}\ln 2 + 3 + \dfrac{1}{4}\ln 3 + 3 + 0 = \dfrac{1}{4}\ln 6 + 6$.

Chọn đáp án C

F CHO $P\left(F(X), F'(X), F''(X), X, \cdots\right) = Q(X)$, $F\left(A\right) = B$. TÍNH $F\left(X_0\right)$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $P\left(f(x), f'(x), f''(x), x, \cdots\right) = Q(x)$, $f\left(a\right) = b$ (a, b đã biết). Tính $f\left(x_0\right)$.

Phương pháp giải:

- Tìm $F(x)$ sao cho $P\left(f(x), f'(x), f''(x), x, \cdots\right) = F'(x)$.
- Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}F(x) = \int Q(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow F(x) = \int Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Kết hợp với giả thiết $f(a) = b$ ta tìm được $F(x)$, từ đó suy ra $f(x)$.
- Tính $f\left(x_0\right)$.

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{2}{3}$. B $I = 4$. C $I = \dfrac{3}{2}$. D $I = 6$.

Lời giải.

Ta có $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Từ đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

Do đó: $I = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\,\mathrm{d}x$.

Ta xét $I_1 = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = 1 - 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

Do đó $I_1 = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot 6 = 3$.

Ta xét $I_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = 2x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Do đó $I_1 = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 4$.

Chọn đáp án B

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-2}^{3} f\left(|3x-2|\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{7}{3}$. B $I = 5$. C $I = \dfrac{5}{3}$. D $I = 7$.

Lời giải.

Ta có $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$. Từ đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$	

Do đó: $I = \int\limits_{-2}^{\frac{2}{3}} f(2-3x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{3} f(3x-2)\,\mathrm{d}x$.

Ta xét $I_1 = \int\limits_{-2}^{\frac{2}{3}} f(2-3x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = 2 - 3x \Rightarrow \mathrm{d}t = -3\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -2 \Rightarrow t = 8 \\ x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

Do đó $I_1 = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^8 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\cdot 6 = 2$.

Ta xét $I_2 = \int\limits_{\frac{2}{3}}^{3} f(3x-2)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = 3x - 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow t = 0 \\ x = 3 \Rightarrow t = 7. \end{cases}$

Do đó $I_1 = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^7 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\cdot 1 = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án A

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-3}^{0} f\left(|x+1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = -2$. B $I = 2$. C $I = -1$. D $I = 0$.

Lời giải.

Ta có $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Từ đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

Do đó: $I = \int\limits_{-3}^{-1} f(-x-1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} f(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Ta xét $I_1 = \int\limits_{-3}^{-1} f(-x-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = -x-1 \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-3 \Rightarrow t=2 \\ x=-1 \Rightarrow t=0. \end{cases}$

Do đó $I_1 = \int\limits_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

Ta xét $I_2 = \int\limits_{-1}^{0} f(x+1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=1. \end{cases}$

Do đó $I_1 = \int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 0$.

Chọn đáp án D

G CHO $F'(X)\cdot F(X) = X^4 + X^2$, $F(0) = 2$. TÍNH $F^2(2)$

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x)\cdot f(x) = x^4 + x^2$, $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A $f^2(2) = \dfrac{302}{15}$. B $f^2(2) = \dfrac{332}{15}$. C $f^2(2) = \dfrac{324}{15}$. D $f^2(2) = \dfrac{323}{15}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} & f'(x)\cdot f(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow \left[f^2(x)\right]' = 2x^4 + 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & \int \left[f^2(x)\right]'\,\mathrm{d}x = \int \left(2x^4 + 2x^2\right)\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & f^2(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + C. \end{aligned}$$

Ta có $f(0) = 2 \Rightarrow f^2(0) = 4 \Rightarrow C = 4$, do đó $f^2(x) = \dfrac{2}{5}x^5 + \dfrac{2}{3}x^3 + 4$. Vậy $f^2(2) = \dfrac{332}{15}$.

Chọn đáp án B

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên lục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cdot(x^2+2x+1)$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

A $\dfrac{10}{3\mathrm{e}}$. B $\dfrac{10\mathrm{e}}{3}$. C $\dfrac{4}{3\mathrm{e}}$. D $\dfrac{7}{3\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\mathrm{e}^x f(x) + \mathrm{e}^x f'(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \left(\mathrm{e}^x f(x)\right)' = x^2 + 2x + 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\int \left(e^x f(x)\right)' \, dx = \int \left(x^2+2x+1\right) \, dx \\
\Leftrightarrow\quad & e^x f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C \\
\Leftrightarrow\quad & f(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C\right).
\end{aligned}$$

Mà $f(0)=1$ nên $C=1$. Vậy $f(1)=\dfrac{10}{3e}$.

Chọn đáp án A

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị $f^2(3)$.

A 844. B 843. C 840. D 822.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 15x^4 + 12x \\
\Leftrightarrow\quad & [f'(x)\cdot f(x)]' = 15x^4 + 12x \\
\Leftrightarrow\quad & f'(x)\cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + C_1.
\end{aligned}$$

Do $f(0) = f'(0) = 1$ nên ta có $C_1 = 1$. Do đó:

$$\begin{aligned}
& f'(x)\cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\
\Leftrightarrow\quad & f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + C_2.
\end{aligned}$$

Mà $f(0)=1$ nên $C_2=1$. Do đó $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1$. Vậy $f^2(3) = 844$.

Chọn đáp án A

H HÀM SỐ $Y = F(X)$ CÓ BAO NHIÊU ĐIỂM CỰC TRỊ TRONG KHOẢNG $(A;B)$

Bài toán tổng quát

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)$. Hỏi đồ thị hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(a;b)$?

Phương pháp giải:
Để tìm được số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=F(x)$ thì ta chỉ cần xét dấu hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$.

VÍ DỤ 8. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(0;4\pi)$?

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Ta chỉ cần xét dấu của $g(x) = x\cos x - \sin x$ trên $(0; 4\pi)$. Điều này tương đương với việc đi tìm các nghiệm của $g(x)$ mà qua mỗi nghiệm $g(x)$ đổi dấu.

Có $g'(x) = -x\sin x$. Trên $(0; 4\pi)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = 2\pi \\ x = 3\pi. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	0		π		2π		3π		4π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	2π	$\searrow$		$\nearrow$	4π
			$-\pi$				-3π		

Từ bảng biến thiên ta thấy trong khoảng $(0; 4\pi)$ phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm $x_1 \in (0; 2\pi)$, $x_2 \in (2\pi; 3\pi)$, $x_3 \in (3\pi, 4\pi)$.
Do đó ta có bảng xét dấu của $g(x)$ như sau

x	0		x_1		x_2		x_3		4π
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $g(x)$ suy ra đồ thị hàm $F(x)$ có 3 điểm cực trị trên $(0; 4\pi)$.
Chọn đáp án C

Câu 15. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2^{x+1} - x^2\ln 2 - x\ln 4 - 1}{4 - x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 2)$?

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Do $4 - x^2 > 0$, $\forall x \in (-2; 2)$ do đó ta chỉ cần xét dấu của $g(x) = 2^{x+1} - x^2\ln 2 - x\ln 4 - 1$ trên $(-2; 2)$.
Điều này tương đương với việc đi tìm các nghiệm của $g(x)$ mà qua mỗi nghiệm $g(x)$ đổi dấu.
Có $g'(x) = 2\ln 2 \cdot (2^x - x - 1)$, $g''(x) = 2\ln 2 \cdot (2^x\ln 2 - 1)$.
Ta thấy $g''(x)$ có nghiệm duy nhất $x = -\log_2 \ln 2$ nên $g'(x)$ có không quá 2 nghiệm trên $\mathbb{R}$.
Mà nhận thấy $x = 0$; $x = 1$ là 2 nghiệm của $g'(x)$. Vậy $g'(x)$ có hai nghiệm phân biệt.
Ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	-2		0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$7 - 8\ln 2$
	$-\dfrac{1}{2}$				$3 - 3\ln 2 > 0$		

Từ bảng biến thiên ta thấy trong khoảng $(-2; 2)$ phương trình $g(x) = 0$ có 1 nghiệm $g(x)$ đổi dấu qua nó.
Vậy đồ thị hàm $F(x)$ có 1 điểm cực trị trên $(-2; 2)$.
Chọn đáp án B

Câu 16. Biết $F(x)$ liên tục trên $\left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + \ln(2x+3) + 4}{x+2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Ta chỉ cần xét dấu của $g(x) = 2x^2 - 6x + \ln(2x+3) + 4$ trên $\left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. Điều này tương đương với việc đi tìm các nghiệm của $g(x)$ mà qua mỗi nghiệm $g(x)$ đổi dấu.

Có $g'(x) = 4x - 6 + \dfrac{2}{2x+3}$. Giải phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	$-\dfrac{3}{2}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$14{,}72$	$\searrow$	$1{,}27$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy trong khoảng $\left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$ phương trình $g(x) = 0$ có 1 nghiệm mà $g(x)$ đổi dấu qua nó.

Vậy đồ thị hàm $F(x)$ có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án B

§2. TÍCH PHÂN SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

A CHO $G(U) = X$ VỚI $U = F(X)$, $G(U)$ ĐƠN ĐIỆU TRÊN $[A; B]$. TÍNH $I = \displaystyle\int_A^B H(U)\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $g(u) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với $u = f(x)$ và hàm $g(u)$ đơn điệu trên $[a; b]$. Tính $I = \displaystyle\int_a^b h(u)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Đặt $t = u$, vì $g(u) = x$ nên $x = g(t)$, suy ra $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Vì hàm $g(t)$ đơn điệu trên $[a; b]$ nên ứng với mỗi giá trị của x, phương trình $g(t) = x$ có duy nhất một nghiệm t.

Đổi cận: $x = a \Rightarrow g(t) = a \Leftrightarrow t = c$; $x = b \Rightarrow g(t) = b \Leftrightarrow t = d$.

Vậy $I = \displaystyle\int_c^d (h(t)) \cdot (g'(t))\,\mathrm{d}t$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$I = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ⓐ $\frac{5}{4}$. Ⓑ $\frac{4}{5}$. Ⓒ $-\frac{5}{4}$. Ⓓ $-\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Đặt $t = f(x)$, vì $f^3(x) + f(x) = x$ nên $x = t^3 + t$, suy ra $\mathrm{d}x = (3t^2 + 1)\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t^3 + t = 0 \Leftrightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t^3 + t = 2 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $I = \int\limits_0^1 t(3t^2 + 1)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (3t^3 + t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{4}.$

Chọn đáp án Ⓐ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x) + 2f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_0^3 \left(1 - f^2(x)\right)\,\mathrm{d}x.$

Ⓐ $-\frac{15}{26}$. Ⓑ $-\frac{26}{15}$. Ⓒ $\frac{15}{26}$. Ⓓ $\frac{26}{15}$.

Lời giải.

Đặt $t = f(x)$, vì $f^3(x) + 2f(x) = x$ nên $x = t^3 + 2t$, suy ra $\mathrm{d}x = (3t^2 + 2)\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t^3 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$; $x = 3 \Rightarrow t^3 + 2t = 3 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $I = \int\limits_0^1 (1 - t^2)(3t^2 + 2)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (-3t^4 + t^2 + 2)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + 2t\right)\Big|_0^1 = \frac{26}{15}.$

Chọn đáp án Ⓓ

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ⓐ $\frac{12}{97}$. Ⓑ $-\frac{97}{12}$. Ⓒ $\frac{97}{12}$. Ⓓ $-\frac{12}{97}$.

Lời giải.

Đặt $t = f(x)$, vì $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = x$ nên $x = t^3 - t^2 + t$, suy ra $\mathrm{d}x = (3t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t^3 - t^2 + t = 1 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$;
$x = 6 \Rightarrow t^3 - t^2 + t = 6 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+3) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy $I = \int\limits_1^2 t(3t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 (3t^3 - 2t^2 + t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{3}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_1^2 = \frac{97}{12}.$

Chọn đáp án Ⓒ

B CHO $F(X)+F(A-X)=G(X)$. TÍNH $\int\limits_0^A F(X)\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(a-x)=g(x)$ (với $a>0$). Tính tích phân $\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Đặt $a-x=t \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Bảng đổi cận

x	0	a
t	a	0

Khi đó ta có

$$I=\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_a^0 f(a-t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^a f(a-t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^a f(a-x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $2I=\int\limits_0^a \left[f(x)+f(a-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^a g(x)\mathrm{d}x$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=2x^2-4x+10$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{26}{3}$. (B) $\dfrac{52}{3}$. (C) $\dfrac{13}{3}$. (D) $\dfrac{14}{3}$.

Lời giải.

Đặt $2-x=t \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Bảng đổi cận

x	0	2
t	2	0

Khi đó ta có

$$I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_2^0 f(2-t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^2 f(2-t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $2I=\int\limits_0^2 \left[f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 (2x^2-4x+10)\mathrm{d}x=\dfrac{52}{2} \Rightarrow I=\dfrac{26}{3}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(1+x^2)f(1-x)=1-x^2f(x)$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{8}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)+(1+x^2)f(1-x)=1-x^2f(x) \Leftrightarrow f(x)+f(1-x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Đặt $1-x=u \Rightarrow \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$. Bảng đổi cận

x	0	1
u	1	0

Khi đó ta có

$$I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0 f(1-u)\mathrm{d}u=\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $2I=\int\limits_0^1 \left[f(x)+f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Đặt $x=\tan t \Rightarrow \mathrm{d}x=(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$. Bảng đổi cận

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Suy ra $I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 t)\mathrm{d}x}{1+\tan^2 t}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=g'(x)$, $g(0)=10$, $g(2)=8$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

(A) 2. (B) -2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $2x=t \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Bảng đổi cận

x	0	1
t	0	2

Khi đó ta có

$$I=\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

Đặt $2-x=u \Rightarrow \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$. Bảng đổi cận

x	0	2
u	2	0

Khi đó ta có

$$J=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_2^0 f(2-u)\mathrm{d}u=\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $2J = \int\limits_0^2 [f(x) + f(2-x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 g'(x)\mathrm{d}x = g(2) - g(0) = 8 - 10 = -2 \Rightarrow I = -2$.

Chọn đáp án B

C CHO $A \cdot F(X) + B \cdot F(-X) = G(X)$, $G(X)$ LÀ HÀM SỐ ĐÃ BIẾT, $A + B \neq 0$. TÍNH $I = \int\limits_{-N}^{N} F(X)\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a \cdot f(x) + b \cdot f(-x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ là hàm số đã biết, $a + b \neq 0$. Tính $I = \int\limits_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải:

- Bước 1. Đặt $t = -x$, ta có $I = \int\limits_{n}^{-n} -f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-n}^{n} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-n}^{n} f(-x)\,\mathrm{d}x$.
- Bước 2. Ta có $(a+b)I = \int\limits_{-n}^{n} g(x)\,\mathrm{d}x$, suy ra $I = \dfrac{1}{a+b}\int\limits_{-n}^{n} g(x)\,\mathrm{d}x$, rồi tính tích phân.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + f(-x) = \cos^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{\pi}{2} + 2\ln 2$. B $I = \dfrac{\pi}{4}$. C $I = \dfrac{3\pi}{4}$. D $I = \dfrac{\pi}{4} + \ln 2$.

Lời giải.

Đặt $t = -x$, ta có $I = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} -f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $2I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án B

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $-3f(x) + f(-x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=\frac{2}{3}$. Ⓑ $I=-\frac{1}{3}$. Ⓒ $I=\frac{1}{3}$. Ⓓ $I=-\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=-x$, ta có $I=\int\limits_{1}^{-1}-f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $-2I=\int\limits_{-1}^{1}\left[-3f(x)+f(-x)\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$.

Vậy $I=-\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+2f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=12$. Ⓑ $I=4$. Ⓒ $I=6$. Ⓓ $I=0$.

Lời giải.

Đặt $t=-x$, ta có $I=\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}}-f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Ta có

$$\begin{aligned}
3I &= \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[f(x)+2f(-x)\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-\cos x\,\mathrm{d}x+2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x+2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\cos x\,\mathrm{d}x\\
&= 2\left(-\sin x\right)\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}}+2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\left(-\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=2(2+2+2)=12.
\end{aligned}$$

Vậy $I=4$.

Chọn đáp án Ⓑ

Ⓓ CHO $F(X)+KF(U(X))=G(X)$, $U(U(X))=X$. TÍNH $I=\int\limits_{A}^{B}\frac{F(X)}{V(X)}\,\mathrm{D}X$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập $[a;b]$ thỏa

$$f(x)+kf(u(x))=g(x),\ \forall x\in[a;b];$$

trong đó: g liên tục trên $[a;b]$ và $u:[a;b]\to[a;b]$ thỏa mãn $u(u(x))=x$.

Tính $I=\int\limits_{a}^{b}\frac{f(x)}{v(x)}\,\mathrm{d}x$, với v là hàm số liên tục trên $[a;b]$ cho trước thỏa $v(x)\neq 0$, $\forall x\in[a;b]$.

Phương pháp giải: Đặt $J = \int\limits_a^b \frac{f(u(x))}{v(x)}\,\mathrm{d}x$.

Từ giả thiết, ta có

$$\frac{f(x)}{v(x)} + k\frac{f(u(x))}{v(x)} = \frac{g(x)}{v(x)},\ \forall x \in [a;b];$$

suy ra

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)}{v(x)}\,\mathrm{d}x + k\int\limits_a^b \frac{f(u(x))}{v(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{g(x)}{v(x)}\,\mathrm{d}x;$$

hay $I + kJ = c_1$, với $c_1 = \int\limits_a^b \frac{g(x)}{v(x)}\,\mathrm{d}x$.

Mặt khác, đặt $t = u(x)$, ta có $x = u(u(x)) = u(t)$. Suy ra

$$f(u(t)) + kf(t) = g(u(t)),\ \forall t \in [a;b].$$

Khi đó, ta có

$$\frac{f(u(t))}{v(t)} + k\frac{f(t)}{v(t)} = \frac{g(u(t))}{v(t)},\ \forall t \in [a;b].$$

Suy ra

$$\int\limits_a^b \frac{f(u(t))}{v(t)}\,\mathrm{d}t + k\int\limits_a^b \frac{f(t)}{v(t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \frac{g(u(t))}{v(t)}\,\mathrm{d}t;$$

hay $J + kI = c_2$, với $c_2 = \int\limits_a^b \frac{g(u(t))}{v(t)}\,\mathrm{d}t$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} I + kJ &= c_1 \\ kI + J &= c_2 \end{cases};$$

ta tính được giá trị I.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2};2\right].$$

Tính $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $-\frac{3}{2}$. Ⓑ $\frac{3}{2}$. Ⓒ $\frac{9}{2}$. Ⓓ $-\frac{9}{2}$.

Lời giải.

Nội dung lời giải cho Bài toán gốc

Đặt $J = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.
Từ giả thiết, ta có

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x + 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} 3 \, \mathrm{d}x.$$

Suy ra $I + 2J = \frac{9}{2}$.
Mặt khác, đặt $t = \frac{1}{x}$. Khi đó, ta có

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{3}{t}, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

Suy ra

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}x + 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{3}{t^2} \mathrm{d}x;$$

hay $2I + J = \frac{9}{2}$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} I + 2J & = \frac{9}{2} \\ 2I + J & = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Vậy $I = \frac{3}{2}$.
Chọn đáp án B

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$f(x) + 3f(-x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tính $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, \mathrm{d}x$.

A $\ln 3$. B $-\ln 3$. C $\ln \sqrt{3}$. D $-\ln \sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $J = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) \, \mathrm{d}x$.
Từ giả thiết, ta có

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, \mathrm{d}x + 3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 + \sin x} \mathrm{d}x;$$

hay $I + 3J = \ln 3$.
Mặt khác, đặt $t = -x$. Khi đó, ta có

$$f(-t) + 3f(t) = \frac{\cos t}{2 - \sin t}, \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Suy ra

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t + 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{2-\sin t}\,\mathrm{d}t;$$

hay $3I + J = -\ln 3$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} I + 3J &= \ln 3 \\ 3I + J &= -\ln 3. \end{cases}$$

Vậy $I = -\dfrac{\ln 3}{2} = -\ln\sqrt{3}$.
Chọn đáp án D

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa

$$3f(x) + 2f(1-x) = (x^2-2x+2)^2(1+x^2),\ \forall x \in [0;1].$$

Tính $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{11}{5}$. B $\dfrac{5}{11}$. C $\dfrac{11}{25}$. D $\dfrac{25}{11}$.

Lời giải.

Đặt $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
Từ giả thiết, ta có

$$3\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{f(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2-2x+2)^2\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $3I + 2J = \dfrac{28}{15}$.
Mặt khác, đặt $t = 1-x$. Khi đó, ta có

$$3f(1-t) + 2f(t) = (1+t^2)^2(t^2-2t+2),\ \forall t \in [0,1].$$

Suy ra

$$3\int_0^1 \frac{f(1-t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+t^2)(t^2-2t+2)\,\mathrm{d}t;$$

hay $2I + 3J = \dfrac{17}{10}$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3I + 2J &= \frac{28}{15} \\ 2I + 3J &= \frac{17}{10}. \end{cases}$$

Vậy $I = \dfrac{11}{25}$.
Chọn đáp án C

E CHO $Y = F(X)$ LÀ HÀM SỐ CHẴN (HOẶC LẺ), $\int\limits_B^C F(X)\,\mathrm{D}X = U$ VÀ $\int\limits_{\frac{C}{K}}^{\frac{A}{K}} F(-KX)\,\mathrm{D}X = V$. TÍNH $\int\limits_B^A F(X)\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn (hoặc lẻ), có đạo hàm trên đoạn $[-a;a]$, $\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = u$ và $\int\limits_{\frac{c}{k}}^{\frac{a}{k}} f(-kx)\,\mathrm{d}x = v$ (với các số thực dương b, c, k thỏa mãn $b, c, \frac{c}{k}, \frac{a}{k} \in [-a;a]$). Tính $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Áp dụng phương pháp đổi biến số và vận dụng các tính chất của hàm số chẵn hoặc lẻ.

- $f(-x) = f(x)$ với $y = f(x)$ là hàm số chẵn.
- $f(-x) = -f(x)$ với $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

VÍ DỤ 5. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$, $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. B. $I = 5$. C. $I = 11$. D. $I = 14$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x$ thì $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 1$ thì $t = 2$ và $x = 3$ thì $t = 6$.

Khi đó $\int\limits_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_2^6 f(-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_2^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ (do $y = f(t)$ là hàm số chẵn).

Suy ra $\int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$.

Từ đó, ta có $\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 14$.

Chọn đáp án D

Câu 9. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-8;8]$, $\int\limits_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^4 f(-2x)\,\mathrm{d}x =$

2. Tính $\displaystyle\int\limits_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=6$. Ⓑ $I=7$. Ⓒ $I=5$. Ⓓ $I=8$.

Lời giải.

Đặt $t=2x$ thì $\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=1$ thì $t=2$ và $x=4$ thì $t=8$.

Khi đó $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} f(-2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{8} f(-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{8} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$ (do $y=f(t)$ là hàm số chẵn).

Suy ra $\displaystyle\int\limits_{2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

Từ đó, ta có $\displaystyle\int\limits_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x=7$.

Chọn đáp án Ⓑ

Câu 10. Cho $y=f(x)$ là hàm số lẻ, có đạo hàm trên đoạn $[-9;9]$, $\displaystyle\int\limits_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x=4$ và $\displaystyle\int\limits_{1}^{3} f(-3x)\,\mathrm{d}x=2$.

Tính $\displaystyle\int\limits_{-4}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=-2$. Ⓑ $I=0$. Ⓒ $I=2$. Ⓓ $I=6$.

Lời giải.

Đặt $t=-3x$ thì $\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=1$ thì $t=3$ và $x=3$ thì $t=9$.

Khi đó $\displaystyle\int\limits_{1}^{3} f(-3x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_{3}^{9} f(-t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}\int\limits_{3}^{9} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}\int\limits_{3}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x$ (do $y=f(t)$ là hàm số lẻ).

Suy ra $\displaystyle\int\limits_{3}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x=-6$.

Từ đó, ta có $\displaystyle\int\limits_{-4}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x=-2$.

Chọn đáp án Ⓐ

F $$\int\limits_{A}^{B}\frac{\mathrm{D}X}{(X+C)\sqrt{X+D}+(X+D)\sqrt{X+C}}=\frac{2}{C-D}\left[\sqrt{B+D}-\sqrt{B+C}-\left(\sqrt{A+I\right.\right.$$

Bài toán tổng quát

Cho a, b, c và d là các số dương. Khi đó

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x+c)\sqrt{x+d}+(x+d)\sqrt{x+c}}=\frac{2}{c-d}\left[\sqrt{b+d}-\sqrt{b+c}-\left(\sqrt{a+d}-\sqrt{a+c}\right)\right]$$

Phương pháp giải:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x+c)\sqrt{x+d}+(x+d)\sqrt{x+c}} &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x+c}\sqrt{x+d}\left(\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}\right)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{c-d}\int_a^b \frac{\sqrt{x+c}-\sqrt{x+d}}{\sqrt{x+c}\sqrt{x+d}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{c-d}\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{x+d}}-\frac{1}{\sqrt{x+c}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{c-d}\left(\sqrt{x+d}-\sqrt{x+c}\right)\Big|_a^b\\ &= \frac{2}{c-d}\left[\sqrt{b+d}-\sqrt{b+c}-\left(\sqrt{a+d}-\sqrt{a+c}\right)\right].\end{aligned}$$

VÍ DỤ 6. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P = a+b+c$.

A 8. B 2. C 0. D 9.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x = \left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\Big|_1^2\\ &= \sqrt{3}+\sqrt{2}-3.\end{aligned}$$

Suy ra $a = 3$, $b = 2$ và $c = 3$. Do đó $P = a+b+c = 8$.
Chọn đáp án A

Câu 11. Biết $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+3}+(x+3)\sqrt{x+1}} = -\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c}$, với a, b, $c \in \mathbb{Z}^+, a > c$. Tính $P = a+b+c$.

A 15. B 30. C 10. D 8.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+3}+(x+3)\sqrt{x+1}} &= \int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)} = \int_2^4 \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_2^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)\mathrm{d}x = \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)\Big|_2^4\\ &= -\sqrt{7}+2\sqrt{5}-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=7$, $b=5$ và $c=3$. Do đó $P=a+b+c=15$.
Chọn đáp án A

Câu 12. Biết $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x+3}+(x+3)\sqrt{x+2}} = a\left(1-\sqrt{2}\right)-b\sqrt{3}+c\sqrt{7}$, với $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P=a+b+c$.

A 8. B 3. C 6. D 4.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x+3}+(x+3)\sqrt{x+2}} &= \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right)} = \int_1^5 \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^5 \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)\mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right)\Big|_1^5\\ &= 4(1-\sqrt{2})-2\sqrt{3}+2\sqrt{7}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=$, $b=2$ và $c=2$. Do đó $P=a+b+c=8$.
Chọn đáp án A

Câu 13. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$, với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A $P=24$. B $P=12$. C $P=18$. D $P=46$.

Lời giải.
Ta có

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}.\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} &= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x = \int_2^2 \left(x^{-\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = 4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2.\end{aligned}$$

Suy ra $a=32$, $b=12$, $c=2$. Vậy $P=a+b+c=32+12+2=46$.
Chọn đáp án D

G CHO $F(X)$ LÀ HÀM SỐ CHẴN. BIẾT $\displaystyle\int_0^B F(KX)\,DX = T$. TÍNH $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta F[U(X)]U'(X$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$ và là hàm số chẵn. Biết $\int\limits_0^b f(kx)\,\mathrm{d}x = T$ (với $a = kb$). Tính $I = \int\limits_\alpha^\beta f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x$ (trong đó $u(x)$ là hàm số liên tục trên $[\alpha;\beta]$ và $u(\alpha) = -a$, $u(\beta) = a$).

Phương pháp giải: Đặt $v = kx \Rightarrow \mathrm{d}v = k\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x = 0 \Rightarrow v = 0$, $x = b \Rightarrow v = a$.

Do đó $T = \int\limits_0^b f(kx)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{k}\int\limits_0^a f(v)\,\mathrm{d}v \Rightarrow \int\limits_0^a f(v)\,\mathrm{d}v = kT$.

Đặt $t = u(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = u'(x)\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x = \alpha \Rightarrow t = -a$, $x = \beta \Rightarrow t = a$.

Khi đó $I = \int\limits_\alpha^\beta f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2kT$.

Lưu ý:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$ và là hàm số chẵn thì $\int\limits_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$ và là hàm số lẻ thì $\int\limits_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$, $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. B. $(3;6)$. C. $\left(\sqrt{2};5\right)$. D. $(1;4)$.

Lời giải.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$. Ta có

$$4 = \int\limits_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Từ giả thiết ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2. \quad (2)$

Lấy (1) cộng với (2), ta có

$$4+2=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{f(x)\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy suy ra $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=6\in(5;9)$.

Chọn đáp án A

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cot x)\,\mathrm{d}x=m$, $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=1$.Xác định m để tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ nhận giá trị dương.

A $m>1$. B $m>0$. C $m>-1$. D $m<1$.

Lời giải.

Đặt $t=\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\left(1+\cot^2 x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
Với $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$. Ta có

$$m=-\int\limits_1^0 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.\quad (1)$$

Từ giả thiết ta có $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=1.\quad(2)$
Lấy (1) cộng với (2), ta có

$$m+1=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{f(x)\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=m+1$, vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m+1>0\Leftrightarrow m>-1$.

Chọn đáp án C

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\ln 2} f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(5;9)$. B $(3;6)$. C $\left(\sqrt{2};5\right)$. D $(1;2\sqrt{2})$.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$. Ta có

$$1 = \int\limits_1^2 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Từ giả thiết ta có $\displaystyle\int\limits_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) f(x)\,\mathrm{d}x = 2. \quad (2)$

Lấy (1) cộng với (2), ta có

$$1 + 2 = \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy suy ra $I = \displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \in \left(\sqrt{2}; 5\right)$.

Chọn đáp án C

H BIẾT $\displaystyle\int\limits_0^1 F(2X)\,\mathrm{D}X = 4$. TÍNH $I = \displaystyle\int\limits_{-2}^2 F(X)\,\mathrm{D}X$

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và là hàm số chẵn. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Tính $I = \displaystyle\int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 16$. B $I = 4$. C $I = 8$. D $I = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.
Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; với $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $4 = \displaystyle\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 8$.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn trên $[-2; 2]$ nên $I = \displaystyle\int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 8 \cdot 2 = 16$.

Chọn đáp án A

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4; 4]$ và là hàm số chẵn. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 f(4x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_{-2}^6 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 40$. (B) $I = 20$. (C) $I = 10$. (D) $I = 5$.

Lời giải.

Đặt $t = 4x \Rightarrow \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $5 = \int\limits_0^1 f(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 20$.

Đặt $u = x - 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$; đổi cận: $x = -2 \Rightarrow u = -4$, $x = 6 \Rightarrow u = 4$

Suy ra $I = \int\limits_{-4}^4 f(u)\,\mathrm{d}u = 2\int\limits_0^4 f(u)\,\mathrm{d}u = 2 \cdot 20 = 40$ (do f là hàm số chẵn).

Chọn đáp án (A)

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và là hàm số chẵn. Biết $\int\limits_{-1}^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(|2 - 4x|)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 2$. (B) $I = 4$. (C) $I = 8$. (D) $I = 32$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$, đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = -2$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $8 = \int\limits_{-1}^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^2 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_{-2}^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 16$.

Với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ thì $|2 - 4x| = 4x - 2$.

Đặt $u = |2 - 4x| = 4x - 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}x$, đổi cận: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0$, $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Suy ra $I = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\int\limits_{-2}^2 f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$ (do f là hàm số chẵn).

Chọn đáp án (A)

I CHO $\alpha F(X) + \beta F(U) = G(X)$ VỚI $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. TÍNH $\int\limits_A^B F(X)\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho $f(x), f(u)$ liên tục trên $\mathscr{D}$ đồng thời thỏa mãn $\alpha f(x) + \beta f(u) = g(x)$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tính $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Mấu chốt của bài toán là phải tìm ra hàm số $f(x)$. Từ điều kiện thay $x = u$ ta có

$$\begin{cases} \alpha f(x) + \beta f(u) = g(x) \\ \alpha f(u) + \beta f(x) = g(u). \end{cases}$$

Từ hệ trên ta tìm ra $f(x)$.

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên $[-4;4]$, biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

A -10. **B** -6. **C** 6. **D** 10.

Lời giải.

Kiến thức cần nhớ:

① Cho hàm số $f(x)$ **liên tục và lẻ** trên đoạn $[-a;a]$. Ta có $I = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

② Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $[-a;a]$.
Ta có $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \ (1)}$ và $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \ (2)}$

③ Giá trị tích phân không phụ thuộc vào kí hiệu biến $\boxed{\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} f(u)\,\mathrm{d}u = \int\limits_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \cdots}$

Xét $I_1 = \int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x = 2$. Đặt $t = -x \Rightarrow x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận

x	-2	0
t	2	0

Khi đó $I_1 = -\int\limits_{2}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Xét $I_2 = \int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{2} f(2x)\mathrm{d}x$

Đặt $u = 2x \Rightarrow x = \dfrac{u}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$. Đổi cận

x	1	2
u	2	4

Khi đó $I_2 = -\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -8$.

Do đó $I = \int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x + I = \int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 2 - 8 = -6$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-1;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x$.

(A) $I = 2$. (B) $I = 5$. (C) $I = 11$. (D) $I = 14$.

Lời giải.

Do $f(x)$ là hàm chẵn nên $f(-x) = f(x)$ hay $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x = 3$.

Xét $K = \int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x = 3$. Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Đổi cận:

x	1	3
t	2	6

Khi đó $K = \frac{1}{2}\int\limits_2^6 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 2K = 6$.

Vậy $\int\limits_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 8 + 6 = 14$.

Chọn đáp án (D)

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-\pi;\pi]$ thoả mãn $\int\limits_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 2018$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 0$. (B) $I = \frac{1}{2018}$. (C) $I = 2018$. (D) $I = 4036$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận:

x	$-\pi$	π
t	π	$-\pi$

Khi đó $I = \int\limits_{\pi}^{-\pi} \frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^t f(-t)}{2018^t+1}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^x f(-x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x$.

Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-\pi;\pi]$ nên $f(-x) = f(x) \Rightarrow I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^x f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x$.

Vậy $2I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{f(x)}{2018^x + 1}\mathrm{d}x + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{2018^x f(x)}{2018^x + 1}\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot 2018 \Rightarrow I = 2018.$

Chọn đáp án C

J CHO $2F(X) + 3F(-X) = \dfrac{1}{X^2+4}$. TÍNH $I = \int\limits_{-2}^{2} F(X)\,\mathrm{D}X$.

VÍ DỤ 10. Cho $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \dfrac{1}{x^2+4}$. Tính $I = \int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{\pi}{20}$. B $\dfrac{\pi}{10}$. C $-\dfrac{\pi}{20}$. D $-\dfrac{\pi}{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f(-x) = \dfrac{1}{x^2+4} \\ 2f(-x) + 3f(x) = \dfrac{1}{x^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 6f(-x) = \dfrac{2}{x^2+4} \\ 6f(-x) + 9f(x) = \dfrac{3}{x^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{x^2+4}.$$

Vậy $I = \dfrac{1}{5}\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$.

Đặt $x = 2\tan u, u \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, khi đó $\mathrm{d}x = 2(1 + \tan^2 u)\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x = -2 \Rightarrow u = -\dfrac{\pi}{4}, x = 2 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $I = \dfrac{1}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{2(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u}{4(1+\tan^2 u)} = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{10}\,\mathrm{d}u = \dfrac{\pi}{20}$.

Chọn đáp án A

Câu 20. Cho $f(x), f(1-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 2x + 1$. Tính $I = \int\limits_{0}^{2} f(x)\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{104}{27}$. B $I = \dfrac{34}{9}$. C $I = \dfrac{52}{9}$. D $I = 10$.

Lời giải.

Từ giả thiết thay x bởi $1 - x$ ta có hệ

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 2x + 1 \\ 2f(1-x) + f(x) = 3(1-x)^2 - 2(1-x) + 1 = 3x^2 - 4x + 2. \end{cases}$$

Hệ tương đương

$$\begin{cases} 4f(x) + 2(1-x) = 6x^2 - 4x + 2 \\ 2f(1-x) + f(x) = 3x^2 - 4x + 2 \end{cases} \Rightarrow 3f(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2.$$

Vậy $I = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 2 \Rightarrow t = 3$.

Vậy $I = \int\limits_1^3 \frac{2}{3}t^2\,\mathrm{d}t = \left.\frac{2}{9}t^3\right|_1^3 = \frac{52}{9}$.

Chọn đáp án C

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \frac{1}{2}$. B $I = \frac{5}{2}$. C $I = \frac{3}{2}$. D $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết thay x bởi $\frac{1}{x}$ và ta có hệ

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) + 4f(x) = 6 \cdot \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = \frac{2}{x} - x$.

Do đó $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án C

K CHO $F(KX) = HF(X)$ $(H, K \in \mathbb{R})$. BIẾT $\int\limits_0^1 F(X)\,\mathrm{D}X = A$. TÍNH $\int\limits_1^K F(X)\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(kx) = hf(x)$ $(h, k \in \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = a$.

Tính $\int\limits_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Đặt $x = ku \Rightarrow \mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & 0 & k \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó $\int\limits_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int\limits_0^1 f(ku)\,\mathrm{d}u = k \cdot h \cdot \int\limits_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = k \cdot h \cdot a$.

Vậy $\int\limits_1^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^k f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot h\cdot a - a = a(hk-1)$.

VÍ DỤ 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 5. **B** 3. **C** 8. **D** 2.

Lời giải.

Đặt $x = 2u \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int\limits_0^1 f(2u)\,\mathrm{d}u = 2\cdot 3\cdot\int\limits_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 2\cdot 3\cdot 1 = 6$.

Vậy $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 6 - 1 = 5$.

Chọn đáp án **A**

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(5x) = 2f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2019$. Tích phân $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 18171. **B** 18173. **C** 18178. **D** 18172.

Lời giải.

Đặt $x = 5u \Rightarrow \mathrm{d}x = 5\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 5 \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5\cdot\int\limits_0^1 f(5u)\,\mathrm{d}u = 5\cdot 2\cdot\int\limits_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 5\cdot 2\cdot 2019 = 20190$.

Vậy $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 20190 - 2019 = 18171$.

Chọn đáp án **A**

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3x) = 2f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tích phân $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 25. **B** 23. **C** 28. **D** 22.

Lời giải.

Đặt $x = 3u \Rightarrow \mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$

Khi đó $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \int\limits_0^1 f(3u)\,\mathrm{d}u = 3 \cdot 2 \cdot \int\limits_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.

Vậy $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 30 - 5 = 25$.

Chọn đáp án A

L CHO $Y = F(X)$ LÀ HÀM SỐ CHẴN VÀ LIÊN TỤC TRÊN ĐOẠN $[-A; A]$. TÍNH TÍCH PHÂN $I = \int\limits_{-A}^{A} \dfrac{F(X)}{K^X + 1}\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho $a, k \in \mathbb{R}, a \neq 0, k > 0$, hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-a; a]$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{f(x)}{k^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Ta có $I = \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{f(x)}{k^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = -t$. Ta có $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ và $\begin{cases} x = -a \Rightarrow t = a \\ x = a \Rightarrow t = -a. \end{cases}$

Khi đó $I = \int\limits_{a}^{-a} \dfrac{f(-t)}{k^{-t} + 1}(-\,\mathrm{d}t) = \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{f(t)k^t}{k^t + 1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{f(x)k^x}{k^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{f(x)}{k^x + 1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{f(x)k^x}{k^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{f(x)(k^x + 1)}{k^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Do đó $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

VÍ DỤ 12. Biết $\int\limits_{-a}^{a} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = 9$ trong đó $a \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + \dfrac{1}{a}$.

A $T = -\dfrac{10}{3}$. B $T = \dfrac{5}{2}$. C $T = \dfrac{10}{3}$. D $T = 0$.

Lời giải.

Nội dung lời giải cho Bài toán gốc Ta có $9=\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=-t$. Ta có $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$ và $\begin{cases}x=-a\Rightarrow t=a\\ x=a\Rightarrow t=-a.\end{cases}$

Khi đó $9=\int\limits_{a}^{-a}\frac{(-t)^2}{\mathrm{e}^{-t}+1}(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{-a}^{a}\frac{t^2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $9+9=\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^2(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x$.

Do đó $9=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}=\frac{a^3}{3}\Rightarrow a^3=27\Leftrightarrow a=3$.

Vậy $T=\frac{10}{3}$.

Chọn đáp án C

Câu 24. Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x\sin 2x}{1+\pi^x}\,\mathrm{d}x=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $T=a+b+c$.

A $T=\frac{3}{5}$. B 0. C $T=\frac{3}{10}$. D $T=-\frac{3}{10}$.

Lời giải.

Xét $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x\sin 2x}{1+\pi^x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x$. Ta được $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$ và $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(-3t)\sin(-2t)}{1+\pi^{-t}}(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3t\sin 2t\cdot\pi^t}{1+\pi^t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x\sin 2x\cdot\pi^x}{1+\pi^x}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x\sin 2x}{1+\pi^x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x\sin 2x\cdot\pi^x}{1+\pi^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x\sin 2x(1+\pi^x)}{1+\pi^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Do đó $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x-\cos 5x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\sin x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{10}\sqrt{3}$.

Suy ra $a=\frac{3}{10}$, $b=c=0$.

Vậy $T=\frac{3}{10}$.

Chọn đáp án C

Câu 25. Cho số thực $a>1$ và $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left[(a+1)\sqrt{a+1}-1\right]$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

(A) $1 < a < 2$. (B) $a > 2$. (C) không tồn tại a. (D) $1 < a < \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Xét $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = -x$. Ta được $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$ và $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = -1. \end{cases}$

Khi đó $I = \int\limits_{1}^{-1} \frac{\sqrt{a-t}+\sqrt{a+t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}(-\,\mathrm{d}t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(\sqrt{a-t}+\sqrt{a+t}\right)\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}\right)\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}\right)\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}\right)\mathrm{d}x$.

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(a+x)\sqrt{a+x}-(a-x)\sqrt{a-x}\right]\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{3}\left[(a+1)\sqrt{a+1}-(a-1)\sqrt{a-1}\right] \end{aligned}$$

Theo giả thiết

$$\begin{aligned} & I = \frac{2}{3}\left[(a+1)\sqrt{a+1}-1\right] \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}\left[(a+1)\sqrt{a+1}-(a-1)\sqrt{a-1}\right] = \frac{2}{3}\left[(a+1)\sqrt{a+1}-1\right] \\ \Leftrightarrow\ & (a-1)\sqrt{a-1} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (a-1)^3 = 1 \Leftrightarrow a-1 = 1 \Leftrightarrow a = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

M CHO $F(X)$ LÀ HÀM SỐ CHẴN VÀ LIÊN TỤC TRÊN $[-A;A]$ THÌ $\int\limits_{-A}^{A} \frac{F(X)}{M^X+1}\,\mathrm{D}X = \frac{1}{2}\int\limits_{-A}^{A} F(X)\,\mathrm{D}X = \int\limits_{0}^{A} F(X)\,\mathrm{D}X$ VỚI $M > 0,\ M \neq 1$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ với $m > 0$, $m \neq 1$.

Phương pháp giải:

- Chứng minh $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

  a) Ta có $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^a \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x$

  b) Tính $\displaystyle\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x$

  Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=-a \Rightarrow t=a; x=0 \Rightarrow t=0$.

  $\displaystyle\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_a^0 \frac{f(-t)}{m^{-t}+1}(-\,\mathrm{d}t) = -\int_a^0 f(t)\cdot\frac{m^t}{1+m^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{f(t)\cdot m^t}{m^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{f(x)\cdot m^x}{m^x+1}\,\mathrm{d}x$

  Thay vào I ta được: $I = \displaystyle\int_0^a f(x)\cdot\frac{m^x+1}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Chứng minh: $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

  Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=-a \Rightarrow t=a; x=0 \Rightarrow t=0$.

  $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} \frac{f(-t)}{m^{-t}+1}(-\,\mathrm{d}t) = -\int_a^{-a} f(t)\cdot\frac{m^t}{1+m^t}\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^a \frac{f(t)\cdot m^t}{m^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^a \frac{f(x)\cdot m^x}{m^x+1}\,\mathrm{d}x$

  Vậy $2I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} \frac{m^x f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

VÍ DỤ 13. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-1;1]$ thoả mãn $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Kết quả của tích phân $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $I=8$. Ⓑ 4. Ⓒ $I=2$. Ⓓ $I=\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $x=-t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = -1. \end{cases}$

Khi đó $I = -\int\limits_{1}^{-1} \dfrac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^{t}f(-t)}{\mathrm{e}^{t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^{x}f(-x)}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x.$

Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$ nên $f(-x) = f(x) \Rightarrow I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^{x}f(x)}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x.$

Vậy $2I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^{x}f(x)}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \Rightarrow I = 2.$

Chọn đáp án C

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-1;1]$ thoả mãn $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Kết quả của tích phân $I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+7^{x}}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 5$. B. 20. C. $I = 10$. D. $I = 0$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{7^{x}+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \dfrac{f(x)}{7^{x}+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \dfrac{f(x)}{7^{x}+1}\,\mathrm{d}x.$

Tính $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{f(x)}{7^{x}+1}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 1; x = 0 \Rightarrow t = 0$.

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{f(x)}{7^{x}+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{0} \frac{f(-t)}{7^{-t}+1}(-\mathrm{d}t) = -\int\limits_{1}^{0} f(t)\cdot\frac{7^{t}}{1+7^{t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \frac{f(t)\cdot 7^{t}}{7^{t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x)\cdot 7^{x}}{7^{x}+1}\,\mathrm{d}x$$

Thay vào I ta được: $I = \int\limits_{0}^{1} f(x)\cdot\dfrac{7^{x}+1}{7^{x}+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 10.$

Chọn đáp án C

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-\pi;\pi]$ thoả mãn $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2019$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{f(x)}{2020^{x}+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 0$. B. $I = \dfrac{2019}{2}$. C. $I = 2019$. D. $I = 4038$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = -\pi \Rightarrow t = \pi \\ x = \pi \Rightarrow t = -\pi. \end{cases}$

Khi đó $I = -\int\limits_{\pi}^{-\pi} \dfrac{f(-t)}{2020^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{f(-t)}{2020^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{2020^{t} f(-t)}{2020^{t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{2020^{x} f(-x)}{2020^{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-\pi;\pi]$ nên $f(-x) = f(x) \Rightarrow I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{2020^{x} f(x)}{2020^{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

Vậy $2I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{f(x)}{2020^{x}+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{2020^{x} f(x)}{2020^{x}+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2019 \Rightarrow I = \dfrac{2019}{2}$.

Chọn đáp án C

N CHO $F\left[U(X)\right] = V(X)$. TÍNH $\int\limits_{U(A)}^{U(B)} F(X)\,DX$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left[u(x)\right] = v(x)$. Tính $\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$, trong đó $u'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

Phương pháp giải: Vì $u'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$ nên $f\left[u(x)\right] = v(x) \Leftrightarrow f\left[u(x)\right] \cdot u'(x) = v(x) \cdot u'(x) \quad (*)$.
Lấy tích phân hai vế của $(*)$ với cận dưới là a, cận trên là b.

$$\begin{aligned}\int\limits_{a}^{b} f\left[u(x)\right] \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{a}^{b} v(x) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= k \quad (\text{với } k \text{ là hằng số}).\end{aligned}$$

Đặt $t = u(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = u'(x)\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x = a \Rightarrow t = u(a)$ và $x = b \Rightarrow t = u(b)$. Khi đó

$$\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = k \text{ hay } \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = k.$$

VÍ DỤ 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+2x-2\right) = 3x-1$. Tính $\int\limits_{1}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{135}{4}$. B. $\dfrac{125}{4}$. C. $\dfrac{105}{4}$. D. $\dfrac{75}{4}$.

Lời giải.

Vì $3x^2+2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f\left(x^3+2x-2\right) = 3x-1 \Leftrightarrow f\left(x^3+2x-2\right) \cdot (3x^2+2) = (3x-1)(3x^2+2) \quad (*)$.

Lấy tích phân hai vế của $(*)$ với cận dưới là 1, cận trên là 2.

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 f\left(x^3+2x-2\right)\cdot\left(3x^2+2\right)\mathrm{d}x &= \int\limits_1^2 (3x-1)(3x^2+2)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_1^2 \left(9x^3-3x^2+6x-2\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{9x^4}{4}-x^3+3x^2-2x\right)\Bigg|_1^2\\ &= \frac{135}{4}.\end{aligned}$$

Đặt $t=x^3+2x-2 \Rightarrow \mathrm{d}t=(3x^2+2)\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x=1\Rightarrow t=1$ và $x=2\Rightarrow t=10$. Khi đó

$$\int\limits_1^{10} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{135}{4} \text{ hay } \int\limits_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{135}{4}.$$

Chọn đáp án A

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^2+3x+1\right)=x+1$. Tính $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\frac{37}{6}$. B $\frac{16}{3}$. C $\frac{464}{3}$. D $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Vì $2x+3\neq 0, \forall x\in[0;1]$ nên $f\left(x^3+3x+1\right)=x+1 \Leftrightarrow f\left(x^3+3x+1\right)\cdot(2x+3)=(x+1)(2x+3)$ $(*)$
.
Lấy tích phân hai vế của $(*)$ với cận dưới là 0, cận trên là 1.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 f\left(x^2+3x+1\right)\cdot(2x+3)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 (x+1)(2x+3)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^1 \left(2x^2+5x+3\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_0^1\\ &= \frac{37}{6}.\end{aligned}$$

Đặt $t=x^2+3x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=(2x+3)\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=5$. Khi đó

$$\int\limits_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{37}{6} \text{ hay } \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{37}{6}.$$

Chọn đáp án A

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\sin x+2)=\cos x$. Tính $\displaystyle\int_2^{\frac{5}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A) $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. B) $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{8}$. C) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{8}$. D) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Vì $\cos x\neq 0$, $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$ nên $f(\sin x+2)=\cos x \Leftrightarrow f(\sin x+2)\cdot\cos x=\cos^2 x \quad (*)$.

Lấy tích phân hai vế của $(*)$ với cận dưới là 0, cận trên là $\dfrac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin x+2)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}\\ &= \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

Đặt $t=\sin x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$ và $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{5}{2}$. Khi đó

$$\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\text{ hay }\int_2^{\frac{5}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn đáp án D

CHO $Y=F(X)$ THỎA MÃN $P(F(X),F'(X),F''(X),X,\cdots)=Q(X)$, $F(A)=B$ (A, B ĐÃ BIẾT). TÍNH $F(X_0)$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $P(f(x),f'(x),f''(x),x,\cdots)=Q(x)$, $f(a)=b$ (a, b đã biết). Tính $f(x_0)$.

Phương pháp giải:

- Tìm $F(x)$ sao cho $P(f(x),f'(x),f''(x),x,\cdots)=F'(x)$.
- Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}F(x)=\int Q(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow F(x)=\int Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Kết hợp với giả thiết $f(a)=b$ ta tìm được $F(x)$, từ đó suy ra $f(x)$.

- Tính $f(x_0)$.

VÍ DỤ 15. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$, $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

(A) $f^2(2) = \dfrac{302}{15}$. (B) $f^2(2) = \dfrac{332}{15}$. (C) $f^2(2) = \dfrac{324}{15}$. (D) $f^2(2) = \dfrac{323}{15}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow \left[f^2(x)\right]' = 2x^4 + 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & \int \left[f^2(x)\right]' \mathrm{d}x = \int \left(2x^4 + 2x^2\right) \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & f^2(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + C. \end{aligned}$$

Ta có $f(0) = 2 \Rightarrow f^2(0) = 4 \Rightarrow C = 4$, do đó $f^2(x) = \dfrac{2}{5}x^5 + \dfrac{2}{3}x^3 + 4$. Vậy $f^2(2) = \dfrac{332}{15}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên lục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 1)$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

(A) $\dfrac{10}{3\mathrm{e}}$. (B) $\dfrac{10\mathrm{e}}{3}$. (C) $\dfrac{4}{3\mathrm{e}}$. (D) $\dfrac{7}{3\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\mathrm{e}^x f(x) + \mathrm{e}^x f'(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow (\mathrm{e}^x f(x))' = x^2 + 2x + 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \int (\mathrm{e}^x f(x))' \mathrm{d}x = \int \left(x^2 + 2x + 1\right) \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C \\ \Leftrightarrow\ & f(x) = \mathrm{e}^{-x} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C\right). \end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1$ nên $C = 1$. Vậy $f(1) = \dfrac{10}{3\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị $f^2(3)$.

(A) 844. (B) 843. (C) 840. (D) 822.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left[f'(x)\right]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow\ & \left[f'(x) \cdot f(x)\right]' = 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow\ & f'(x) \cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + C_1. \end{aligned}$$

Do $f(0) = f'(0) = 1$ nên ta có $C_1 = 1$. Do đó:

$$\begin{aligned} & f'(x) \cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2} f^2(x)\right)' = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + C_2. \end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1$ nên $C_2 = 1$. Do đó $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1$. Vậy $f^2(3) = 844$.
Chọn đáp án A

---

§3. TÍCH PHÂN SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

A CHO $F(X)$ CÓ $F(A) = M_0$, $\int\limits_A^B [F'(X)]^2 \, DX = M_1$ VÀ $\int\limits_A^B G(X) \cdot F(X) \, DX = M_2$. TÍNH TÍCH PHÂN $\int\limits_A^B F(X) \, DX$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn $f(a) = m_0$, $\int\limits_a^b [f'(x)]^2 \, dx = m_1$ và $\int\limits_a^b g(x) \cdot f(x) \, dx = m_2$. Tính $\int\limits_a^b f(x) \, dx$.

Phương pháp giải:

- Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) \, dx \\ v = \int g(x) \, dx. \end{cases}$

  Áp dụng công thức tính phân từng phần tính được $\int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = m_3$.

- Chọn số λ sao cho $\int\limits_a^b (f'(x) - \lambda g(x))^2 \, dx = 0$. Suy ra $f'(x) = \lambda g(x)$.

- Kết hợp với điều kiện ban đầu xác định được hàm số $f(x)$. Từ đó tính $\int\limits_a^b f(x) \, dx$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0) = 0$,

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 \, dx = \dfrac{\pi}{4}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) \, dx = \dfrac{\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$ bằng

A 1. B $\dfrac{\pi}{4}$. C 2. D $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Nội dung lời giải cho bài toán gốc.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) \, dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{\pi}{4} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) \, dx = -f(x) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) \, dx$.

Lại có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \dfrac{x + \dfrac{\sin 2x}{2}}{2} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$. Ta thấy

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \cos x]^2 \, dx &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 \, dx - 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) \, dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0. \end{aligned}$$

Do đó $f'(x) - \cos x = 0 \Rightarrow f(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + C$.

Mà $f(0) = 0$, suy ra $f(x) = \sin x$. Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Chọn đáp án A

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0) = \dfrac{3}{2}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 \, dx = \dfrac{\pi}{4}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot f(x) \, dx = \dfrac{\pi}{8}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$ bằng

A 1. B $\dfrac{\pi}{4}$. C 0. D $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) \, dx \\ v = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$\frac{\pi}{8} = f(x) \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} \cdot f'(x) \, dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} \cdot f'(x) \, dx \quad \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(x) \, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Lại có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2} \, \mathrm{d}x = \left. \frac{x - \frac{\sin 4x}{4}}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ta thấy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x) + \sin 2x\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0.$$

Do đó $f'(x) + \sin 2x = 0 \Rightarrow f(x) = -\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Mà $f(0) = \frac{3}{2}$, suy ra $f(x) = \frac{\cos 2x}{2} + 1$. Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 2x}{2} + 1\right) \mathrm{d}x = \left.\left(\frac{\sin 2x}{4} + x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án D

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(3) = 14$, $\int_0^3 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{135}{2}$, $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x = 11$. Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x) \, \mathrm{d}x$.

A $I = \frac{124}{5}$. B $I = \frac{94}{5}$. C $I = \frac{28}{3}$. D $I = \frac{508}{7}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x) \, \mathrm{d}x \\ v = 2\sqrt{x+1} \end{cases}$. Khi đó

$$\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x = 2f(x)\sqrt{x+1}\Big|_0^3 - \int_0^3 f'(x) \cdot 2\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x = 56 - 2\int_0^3 f'(x)\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x = 11.$$

Suy ra $\int_0^3 f'(x)\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x = \frac{45}{2}$. Ta thấy

$$\int_0^3 \left[f'(x) - 3\sqrt{x+1}\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^3 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x - 6\int_0^3 f'(x)\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x + 9\int_0^3 (x+1) \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{135}{2} - 6 \cdot \frac{45}{2} + 9 \cdot \frac{15}{2} = 0.$$

Do đó $f'(x) - 3\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow f'(x) = 3\sqrt{x+1} \Rightarrow f(x) = \int 3\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x = 2(x+1)\sqrt{x+1} + C$.

Kết hợp với $f(0) = 0$, $f(3) = 14$ ta được $f(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 2$.

Khi đó $I = \int_0^3 f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^3 \left[2(x+1)\sqrt{x+1} - 2\right] \mathrm{d}x = \left.\left(\frac{4}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} - 2x\right)\right|_0^3 = \frac{94}{5}$.

Chọn đáp án B

B CHO $F(X)$ CÓ $F(B) = B_0, [F'(X)]^2 = C \cdot F(X) + U(X)$. TÍNH TÍCH PHÂN $I = \int\limits_0^B F(X)\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; b]$, thỏa mãn đồng thời

$$f(b) = b_0, \quad [f'(x)]^2 = c \cdot f(x) + u(x).$$

Tính tích phân $I = \int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Ý tưởng của phương pháp là từ giả thiết, biến đổi đưa về tích phân có dạng

$$\int\limits_0^b [f'(x) - \alpha \cdot x]^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Các bước tiến hành như sau

B1. Từ đẳng thức đã cho, lấy tích phân hai vế trên đoạn $[0; b]$, thu được

$$\int\limits_0^b [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^b c \cdot f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^b u(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^b c \cdot f(x)\mathrm{d}x + A.$$

B2. Biểu diễn tích phân $\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$ qua tích phân của hàm $f'(x)$. Giả sử thu được

$$\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^b - \int\limits_0^b xf'(x)\mathrm{d}x = B - \int\limits_0^b xf'(x)\mathrm{d}x.$$

B3. Từ các kết quả ở 2 bước trên, khéo léo đưa về tích phân

$$\int\limits_0^b [f'(x) - \alpha \cdot x]^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Từ đó suy ra $f'(x) = \alpha \cdot x$, kết hợp dữ kiện ban đầu để tìm $f(x)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 3]$, thỏa mãn đồng thời

$$f(3) = 4, \quad [f'(x)]^2 = 8x^2 - 20 - 4f(x).$$

Tích phân $I = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A -9. B -6. C 9. D 21.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra

$$\int\limits_0^3 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \left[8x^2 - 20 - 4f(x)\right]\mathrm{d}x = 12 - 4\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Áp dụng tích phân từng phần, ta có

$$\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 xf'(x)\mathrm{d}x = 3\cdot 4 - \int\limits_0^3 xf'(x)\mathrm{d}x. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^3 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 12 - 4\left(12 - \int\limits_0^3 xf'(x)\mathrm{d}x\right)\\ \Leftrightarrow &\int\limits_0^3 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 4xf'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^3 4x^2\mathrm{d}x = 0\\ \Leftrightarrow &\int\limits_0^3 [f'(x) - 2x]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C. \end{aligned}$$

Mà $f(3) = 4$ nên $C = -5$. Suy ra $f(x) = x^2 - 5$. Vậy $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = -6$.

Chọn đáp án B

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời

$$f(1) = 2, \quad [f'(x)]^2 = 8x^2 + 4 - 4f(x).$$

Tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A 2. B $\dfrac{1}{3}$. C $\dfrac{21}{4}$. D $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra

$$\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[8x^2 + 4 - 4f(x)\right]\mathrm{d}x = \frac{20}{3} - 4\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Áp dụng tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = 2 - \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{20}{3} - 4\left(2 - \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x\right)\\
\Leftrightarrow &\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 4x^2\mathrm{d}x = 0\\
\Leftrightarrow &\int_0^1 [f'(x) - 2x]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C.
\end{aligned}$$

Mà $f(1) = 2$ nên $C = 1$. Suy ra $f(x) = x^2 + 1$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án D

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$, thỏa mãn đồng thời

$$f(2) = 5, \quad [f'(x)]^2 = 32x^2 - 24 - 8f(x).$$

Tích phân $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A $-\frac{5}{4}$. B $\frac{5}{2}$. C $-\frac{2}{3}$. D $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra

$$\int_0^2 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[32x^2 - 24 - 8f(x)\right]\mathrm{d}x = \frac{112}{3} - 8\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Áp dụng tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = 10 - \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{112}{3} - 8\left(10 - \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x\right)\\
\Leftrightarrow &\int_0^2 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x - \int_0^2 8xf'(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 16x^2\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)-4x\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x)=4x \Rightarrow f(x)=2x^2+C.$$

Mà $f(2)=5$ nên $C=-3$. Suy ra $f(x)=2x^2-3$. Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án C

C CHO $F(X) = F(U)\cdot U' + G(X)$ TRONG ĐÓ $U(A)=A, U(B)=C$. TÍNH $\int\limits_C^B F(X)\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và thỏa mãn $f(x)=f(u)\cdot u'+g(x)$ trong đó $u(x), g(x)$ liên tục trên $[a,b]$, $g(x)$ là hàm đã biết thỏa mãn $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=c\in[a,b] \end{cases}$. Tính $\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải:

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_a^b f(u)\cdot u'\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính $I=\int\limits_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A $I=2\ln^2 2$. B $I=2\ln 2$. C $I=3+2\ln^2 2$. D $I=\ln^2 2$.

....

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \\
\Rightarrow \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^4 f(2\sqrt{x}-1)\mathrm{d}(2\sqrt{x}-1) + \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^4 \\
&= \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln^2 4 \\
&= \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x + 2\ln^2 2 \\
\Rightarrow \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x &= 2\ln^2 2 \\
\Rightarrow \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x &= 2\ln^2 2.
\end{aligned}
$$

Chọn đáp án A

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $[1;\mathrm{e}]$ thỏa mãn $f(x) = \dfrac{f(\ln x + 1) + \sqrt{2+\ln x}}{x}$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$. B $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$. C $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$. D $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$
\begin{aligned}
\int\limits_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{f(\ln x+1)}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^{\mathrm{e}} f(\ln x+1)\mathrm{d}(\ln x+1) + \int\limits_1^{\mathrm{e}} \sqrt{2+\ln x}\,\mathrm{d}(2+\ln x) \\
&= \int\limits_1^2 f(u)\mathrm{d}u + \frac{2}{3}\sqrt{(2+\ln x)^3}\Big|_1^{\mathrm{e}} \\
&= \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right) \\
\Rightarrow \int\limits_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \int\limits_2^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$f(x) = f(\sin x)\cos x + \mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin x \cos^3 x.$$

Biết $\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a\mathrm{e} + b)$. Tính $a + b$.

A -1. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x) + I_1 \\
&= \int\limits_0^1 f(u)\mathrm{d}u + I_1 \\
&= \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + I_1 \\
\Rightarrow I_1 &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x \\
\Rightarrow I_1 &= \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Đặt $\sin^2 x = t \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x\cos x$, $\cos^2 x = 1 - t$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t(1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - \frac{1}{2}[\mathrm{e}^t t\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t] \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) - \frac{1}{2}\mathrm{e} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-2).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow a + b = -1$.

Chọn đáp án A

D **CHO** $F(A) = 1$ **VÀ** $F(X) \cdot F(A - X) = \mathrm{E}^{X^2 - AX}, \forall X \in [0; A]$, $G(X)$ **LÀ MỘT HÀM SỐ CÓ ĐẠO HÀM LIÊN TỤC TRÊN ĐOẠN** $[0; A]$ **VÀ THỎA MÃN** $G'(X) = G'(A - X)$. **TÍNH** $I = \displaystyle\int\limits_0^A \frac{G(X)F'(X)}{F(X)}\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ sao cho $f(a) = 1$ và $f(x) \cdot f(a - x) = \mathrm{e}^{x^2 - ax}, \forall x \in [0; a]$, $g(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ và thỏa mãn $g'(x) = g'(a - x)$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^a \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Ta có $f(a) \cdot f(0) = \mathrm{e}^{a^2 - a^2} \Rightarrow f(0) = 1$ và $\ln f(x) + \ln f(a - x) = x^2 - ax$.

Đặt $\begin{cases} u = g(x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \ln f(x). \end{cases}$

Ta có:

$$I = \int\limits_0^a \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= g(x)\ln f(x)\Big|_0^a - \int\limits_0^a g'(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= g(a)\ln f(a) - g(0)\ln f(0) \int\limits_0^a g'(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x = a - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, đổi cận

x	0	a
u	a	0

Do đó $I = -\displaystyle\int\limits_0^a g'(a - x)\ln f(a - x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra

$$2I = -\int\limits_0^a g'(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^a g'(a - x)\ln f(a - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int\limits_0^a g'(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^a g'(x)\ln f(a - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int\limits_0^a g'(x)\left(\ln f(x) + \ln f(a - x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int\limits_0^a g'(x) \cdot (x^2 - ax)\,\mathrm{d}x.$$

Đến đây việc tính tích phân đã rất dễ dàng rồi.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ sao cho $f(1)=1$ và $f(x)\cdot f(1-x)=\mathrm{e}^{x^2-x}, \forall x\in[0;1]$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(2x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A $I=-\dfrac{1}{60}$. **B** $I=\dfrac{1}{10}$. **C** $I=-\dfrac{1}{10}$. **D** $I=\dfrac{1}{60}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(x)\cdot f(1-x)=\mathrm{e}^{x^2-x}, \forall x\in[0;1]$ lấy logarit hai vế ta được

$$\ln f(x)+\ln f(1-x)=x^2-x. \tag{1}$$

Đặt $\begin{cases} u=2x^3-3x^2 \\ \mathrm{d}v=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=6(x^2-x)\,\mathrm{d}x \\ v=\ln f(x). \end{cases}$

Suy ra

$$I=\int\limits_0^1 \frac{(2x^3-3x^2)f(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left((2x^2-3x^2)\ln f(x)\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 6(x^2-x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int\limits_0^1 6(x^2-x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x=1-t\Rightarrow\ \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$. Đổi cận:

x	0	1
u	1	0

Ta có:

$$I=\int\limits_1^0 6\left((1-t)^2-(1-t)\right)\ln f(1-t)\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int\limits_0^1 6(t^2-t)\ln f(1-t)\,\mathrm{d}t.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}2I &= -\int_0^1 6(x^2-x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 6(x^2-x)\ln f(1-x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1 6(x^2-x)\left(\ln f(x)+\ln f(1-x)\right)\mathrm{d}x\\ &= -6\int_0^1 (x^2-x)^2\,\mathrm{d}x, \text{(theo (1))}\\ &= -6\int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)\,\mathrm{d}x\\ &= -6\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Vậy $I = -\dfrac{1}{10}$.

Chọn đáp án C

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ sao cho $f(2)=1$ và $f(x)\cdot f(2-x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}, \forall x\in[0;2]$. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{(3x^2-6x+3)f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A $I = -\dfrac{8}{5}$. B $I = \dfrac{16}{5}$. C $I = \dfrac{8}{5}$. D $I = -\dfrac{16}{5}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(x)\cdot f(2-x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}, \forall x\in[0;2]$ lấy logarit hai vế ta được

$$\ln f(x) + \ln f(2-x) = x^2-2x. \qquad (1)$$

Đặt $\begin{cases} u = x^3-6x+3\\ \mathrm{d}v = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u = 3(x^2-2x)\,\mathrm{d}x\\ v = \ln f(x).\end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned}I &= \int_0^2 \frac{(x^3-6x+3)f(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \left((x^3-6x+3)\ln f(x)\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 3(x^2-2x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^2 3(x^2-2x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Đặt $x = 2-t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận:

x	0	2
u	2	0

Ta có:

$$I = \int\limits_2^0 3\left((2-t)^2 - 2(2-t)\right)\ln f(2-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int\limits_0^2 3(t^2-2t)\ln f(2-t)\,\mathrm{d}t.$$

Suy ra

$$2I = -\int\limits_0^2 3(x^2-2x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 3(x^2-2x)\ln f(2-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int\limits_0^2 3(x^2-2x)\left(\ln f(x) + \ln f(2-x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -3\int\limits_0^2 (x^2-2x)(x^2-2x)\,\mathrm{d}x, \text{(theo (1))}$$

$$= -3\int\limits_0^2 (x^4-4x^3+4x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= -3\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{5}.$$

Vậy $I = \dfrac{8}{5}$.

Chọn đáp án C

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ sao cho $f(1)=1$ và $f(x)\cdot f(1-x) = \mathrm{e}^{x^2-2x+1}, \forall x \in [0;1]$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(4x^3-6x^2+3)f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A $I = -\dfrac{3}{10}$. B $I = \dfrac{3}{5}$. C $I = \dfrac{3}{10}$. D $I = -\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(x)\cdot f(1-x) = \mathrm{e}^{x^2-2x+1}, \forall x \in [0;1]$ lấy logarit hai vế ta được

$$\ln f(x) + \ln f(1-x) = x^2 - 2x + 1. \qquad (1)$$

Đặt $\begin{cases} u = 4x^3 - 6x^2 + 3 \\ \mathrm{d}v = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 12(x^2-2x)\,\mathrm{d}x \\ v = \ln f(x). \end{cases}$

Suy ra

$$I = \int\limits_0^1 \frac{(4x^3-6x^2+3)f(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left((4x^3-6x^2+3)\ln f(x)\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 12(x^2-x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int\limits_0^1 12(x^2-x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x = 1-t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận:

x	0	1
u	1	0

Ta có:

$$I=\int_1^0 12\left((1-t)^2-(1-t)\right)\ln f(1-t)\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1 12(t^2-t)\ln f(1-t)\,\mathrm{d}t.$$

Suy ra

$$2I=-\int_0^1 12(x^2-x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 12(x^2-x)\ln f(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 12(x^2-x)\left(\ln f(x)+\ln f(1-x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=-12\int_0^1 (x^2-x)(x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x,\ (\text{theo }(1))$$

$$=-12\int_0^1 (x^4-3x^3+3x^2-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-12\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{5}.$$

Vậy $I=\dfrac{3}{10}$.

Chọn đáp án C

E CHO HÀM SỐ $Y=F(X)$ LIÊN TỤC TRÊN $\mathbb{R}$ THỎA MÃN $F'(X)+P(X)F(X)=Q(X),\ \forall X\in\mathbb{R}$ VÀ $F(X_0)=C_0$. XÁC ĐỊNH HÀM F.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+p(x)f(x)=q(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x_0)=C_0$. Xác định hàm f.

Phương pháp giải: Gọi $P(x)$ là một nguyên hàm của $p(x)$, $h(x)=\displaystyle\int\left(\mathrm{e}^{P(x)}\cdot q(x)\right)\mathrm{d}x$. Ta có

$$\begin{aligned}&f'(x)+p(x)f(x)=q(x)\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{P(x)}f'(x)+\mathrm{e}^{P(x)}\cdot p(x)\cdot f(x)=\mathrm{e}^{P(x)}\cdot q(x)\\ \Leftrightarrow\ &\left(\mathrm{e}^{P(x)}f(x)\right)'=\mathrm{e}^{P(x)}\cdot q(x).\end{aligned}$$

Nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\begin{aligned}&\int\left(\mathrm{e}^{P(x)}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^{P(x)}\cdot q(x)\right)\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{P(x)}f(x)=h(x)+C\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{h(x)+C}{\mathrm{e}^{P(x)}}.$$

Từ $f(x_0) = C_0$ ta suy ra giá trị C và thu được hàm $f(x)$.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2xf(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

(A) $\frac{2}{\mathrm{e}}$. (B) $\frac{1}{\mathrm{e}}$. (C) $\frac{3}{\mathrm{e}}$. (D) $\frac{4}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Nội dung lời giải cho Bài toán gốc Ta có $f'(x) + 2xf(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} f'(x) + \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x \cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{x^2} f(x)\right)' = 1$.

Nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int \left(\mathrm{e}^{x^2} f(x)\right)' \mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} f(x) = x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+C}{\mathrm{e}^{x^2}}.$$

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{0+C}{\mathrm{e}^0} = C \Rightarrow f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{x^2}} \Rightarrow f(1) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + (2x+1)f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

(A) $\frac{2}{\mathrm{e}}$. (B) $\frac{1}{\mathrm{e}}$. (C) $\frac{3}{\mathrm{e}}$. (D) $\frac{4}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) + (2x+1)f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{x^2+x} f'(x) + \mathrm{e}^{x^2+x} \cdot 2x \cdot f(x) = \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\mathrm{e}^{x^2+x} f(x)\right)' = \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\begin{aligned} & \int \left(\mathrm{e}^{x^2+x} f(x)\right)' \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{x^2+x} f(x) = \mathrm{e}^x + C \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + C}{\mathrm{e}^{x^2+x}}. \end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{1+C}{1} = C + 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2+x}} = \mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\dfrac{f'(x)}{3x^2+1} + f(x) = \mathrm{e}^{-x^3-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

(A) $\frac{2}{\mathrm{e}^2}$. (B) $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. (C) $\frac{1}{\mathrm{e}}$. (D) $\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{f'(x)}{3x^2+1}+f(x)=\mathrm{e}^{-x^3-x}\\
\Leftrightarrow\ & f'(x)+(3x^2+1)f(x)=(3x^2+1)\mathrm{e}^{-x^3-x}\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{x^3+x}f'(x)+\mathrm{e}^{x^3+x}\cdot(3x^2+1)\cdot f(x)=1\\
\Leftrightarrow\ & \left(\mathrm{e}^{x^3+x}f(x)\right)'=1.
\end{aligned}$$

Nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\begin{aligned}
&\int\left(\mathrm{e}^{x^3+x}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{x^3+x}f(x)=x+C\\
\Leftrightarrow\ & f(x)=\frac{x+C}{\mathrm{e}^{x^3+x}}.
\end{aligned}$$

Mà $f(0)=1\Rightarrow 1=\dfrac{0+C}{1}=C+1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x^3+x}}\Rightarrow f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Chọn đáp án B

F CHO $F(X)$ CÓ ĐẠO HÀM LIÊN TỤC TRÊN ĐOẠN $[M,N]$ THỎA MÃN $F(X_0)=C, X_0\in[M,N]$, $\displaystyle\int_M^N [F'(X)]^2\,\mathrm{D}X=A$ VÀ $\displaystyle\int_M^N G(X)\cdot F(X)\,\mathrm{D}X=B$. TÍNH TÍCH PHÂN $\displaystyle\int_M^N F(X)\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[m,n]$ thỏa mãn $f(x_0)=c, x_0\in[m,n]$, $\displaystyle\int_m^n [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=a$ và $\displaystyle\int_m^n g(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=b$. Tính tích phân $\displaystyle\int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải:

① Từ tích phân $b=\displaystyle\int_m^n g(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ áp dụng tích phân từng phần và giả thiết ta đưa về tích phân $\displaystyle\int_m^n h(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\beta$.

② Chọn α sao cho $\displaystyle\int_m^n [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\alpha\int_m^n h(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x+\alpha^2\int_m^n h^2(x)\,\mathrm{d}x=0$.

③ Áp dụng tính chất $\int\limits_m^n [f'(x)+\alpha h(x)]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = -\alpha \cdot h(x)$.

④ Từ đó kết hợp với giả thiết ta tìm được $f(x)$.

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{3}{5}$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}$ và $\int\limits_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{37}{180}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 [f(x)-1]\,\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{15}$. B. $-\frac{1}{10}$. C. $-\frac{1}{15}$. D. $\frac{1}{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{37}{180} &= \int\limits_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(x^4\right)\\ &= \frac{1}{4}\left[f(x)\,x^4\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{3}{20} - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{9}$.

Ta có $\int\limits_0^1 |f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 4\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x \int\limits_0^1 4x^8\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9} + 4\cdot\frac{-2}{9} + \frac{4}{9} = 0$.

Suy ra $\int\limits_0^1 \left[f'(x)+2x^4\right]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2x^4 \Rightarrow f(x) = -\frac{2x^5}{5} + C$.

Mà $f(1) = \frac{3}{5} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x^5 + 1$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 [f(x)-1]\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{15}$.

Chọn đáp án C

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 9$

và $\int\limits_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{2}{3}$.　B $\dfrac{5}{2}$.　C $\dfrac{7}{4}$.　D $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{2} = \int\limits_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^4 f(x)}{4}\right|_0^1 - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1$, do đó ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]^2\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x + 18\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x + 81\int\limits_0^1 x^8\,\mathrm{d}x\\ &= 9 - 18 + 9 = 0.\end{aligned}$$

Do đó $f'(x) = -9x^4$, kết hợp với $f(1) = 1$, suy ra $f(x) = -\dfrac{9x^5}{5} + \dfrac{14}{5}$. Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 0$; $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.　B $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.　C $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$.　D $2 - \mathrm{e}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = (x+1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = x\mathrm{e}^x \end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{e^2 - 1}{4} = x.\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x.e^x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 x.e^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{e^2 - 1}{4}$.

Xét $\int\limits_0^1 [f'(x) + x\mathrm{e}^x]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 x\cdot\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 0$.

$\Rightarrow f'(x) = -x\mathrm{e}^x \Rightarrow f(x) = -\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (1-x)\mathrm{e}^x + C$.

Mà $f(1) = 0$ nên $C = 0$.

Do đó $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 2 - \mathrm{e}$.

Chọn đáp án D

G TÍNH TÍCH PHÂN $\int\limits_A^B \frac{(AX+B)^2\,\mathrm{D}X}{[(AX+B)\,\mathrm{SIN}\,X + A\,\mathrm{COS}\,X]^2}$

Bài toán tổng quát

Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{(Ax+B)^2\,\mathrm{d}x}{[(Ax+B)\sin x + A\cos x]^2}$

Phương pháp giải: Biến đổi tích phân về dạng $I = \displaystyle\int\limits_a^b \frac{Ax+B}{\cos x}\cdot\frac{(Ax+B)\cdot\cos x}{[(Ax+B)\sin x + A\cos x]^2}\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{Ax+B}{\cos x} \\ \mathrm{d}v = \dfrac{(Ax+B)\cdot\cos x}{[(Ax+B)\sin x + A\cos x]^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{(Ax+B)\sin x + A\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-1}{(Ax+B)\sin x + A\cos x} \end{cases}$

Tích phân trở thành

$$I = -\frac{Ax+B}{\cos x\cdot[(Ax+B)\sin x + A\cos x]}\Bigg|_a^b + \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}.$$

VÍ DỤ 7. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x\sin x + \cos x)^2} = -\frac{a\pi}{b + c\pi\sqrt{3}} + d\sqrt{3}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c + d$.

Ⓐ $P = 9$. Ⓑ $P = 10$. Ⓒ $P = 7$. Ⓓ $P = 8$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x}{\cos x} \\ \mathrm{d}v = \dfrac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-1}{x\sin x + \cos x}. \end{cases}$

Tích phân trở thành

$$I = -\frac{x}{\cos x(x\sin x + \cos x)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)} + \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-4\pi}{3 + \pi\sqrt{3}} + \sqrt{3}.$$

Từ đó suy ra $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 1$.

Vậy $P = a + b + c + d = 9$.

Chọn đáp án Ⓐ

Câu 13. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(\sin x - x\cos x)^2} = -a\pi + \frac{b\pi}{c - d\pi\sqrt{3}} + e\sqrt{3}$, với a, b, c, d, e là các số nguyên dương.

Tính $P = 2a + b + c + d + 3e$.

A $P = 16$. B $P = 15$. C $P = 17$. D $P = 18$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \sin x}{(\sin x - x\cos x)^2} \, \mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x}{\sin x} \\ \mathrm{d}v = \dfrac{x \sin x}{(\sin x + x\cos x)^2} \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-1}{\sin x - x\cos x}. \end{cases}$

Tích phân trở thành

$$I = -\frac{x}{\sin x(\sin x - x\cos x)}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{3}\right)} - \cot x\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{9 - \pi\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Từ đó suy ra $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$, $c = 9$, $d = 1$, $e = \frac{1}{3}$.

Vậy $P = 2a + b + c + d + 3e = 16$.

Chọn đáp án A

Câu 14. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{(x\sin x + \cos x)^2} = \frac{a - b\pi}{a + b\pi}$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

A $P = 17$. B $P = 15$. C $P = 19$. D $P = 21$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2} \, \mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x}{\cos x} \\ \mathrm{d}v = \dfrac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2} \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-1}{x\sin x + \cos x}. \end{cases}$.

Tích phân trở thành

$$I = -\frac{x}{\cos x(x\sin x + \cos x)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -\frac{\dfrac{\pi}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} + \tan x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-2\pi}{\pi + 4} + 1 = \frac{4 - \pi}{4 + \pi}.$$

Từ đó suy ra $a = 4$, $b = 1$.

Vậy $P = a^2 + b^2 = 17$.

Chọn đáp án A

H BIẾT $\int\limits_{A}^{B} \frac{F(X) \cdot T'}{T} \mathrm{DX} = \alpha$, $F(B) \cdot \mathrm{LN}\, B - F(A) \cdot \mathrm{LN}\, A = \beta$. TÍNH $I = \int\limits_{A}^{B} F'(X) \cdot \mathrm{LN}\, T\, \mathrm{DX}$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $t = t(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$, biết $\int\limits_{a}^{b} \frac{f(x) \cdot t'}{t} \mathrm{d}x = \alpha$, $f(b) \cdot \ln b - f(a) \cdot \ln a = \beta$. Tính $I = \int\limits_{a}^{b} f'(x) \cdot \ln t \,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải:

- Xác định đúng $u = \ln t$ và phần còn lại là $\mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x$.
- Dựa vào giả thiết, ta tính kết quả của tích phân cần tìm.

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$, biết $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = 1$, $f(\mathrm{e}) = 1$. Tính $I = \int\limits_{1}^{\mathrm{e}} f'(x) \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \mathrm{e}$. (B) $I = 0$. (C) $I = 2\mathrm{e}$. (D) $I = 2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Nên $I = [f(x) \cdot \ln x]\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = f(\mathrm{e}) - 1 = 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$, biết $\int\limits_{0}^{\mathrm{e}-1} \frac{f(x)}{x+1} \mathrm{d}x = -1$, $f(\mathrm{e}-1) = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{\mathrm{e}-1} f'(x) \cdot \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

(A) -1. (B) 1. (C) 3. (D) -3.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Nên $I = [f(x) \cdot \ln(x+1)]\Big|_0^{\mathrm{e}-1} - \int\limits_{0}^{\mathrm{e}-1} \frac{f(x)}{x+1} \mathrm{d}x = f(\mathrm{e}-1) - (-1) = 3$.

Chọn đáp án (C)

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;10]$, biết $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1$ và $2f(\mathrm{e}) - 4f(\mathrm{e}^2) = 5$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f'(x)\cdot\ln(x^2)\,\mathrm{d}x$.

(A) -4. (B) 3. (C) 4. (D) -7.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Nên $I = \left[f(x)\cdot\ln(x^2)\right]\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - 2\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 4f(\mathrm{e}^2) - 2f(\mathrm{e}) - 2 = -7$.

Chọn đáp án (D)

I $\mathcal{H}$ LÀ HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $Y = F(X)$, $X = A$, $X = B$ VÀ TRỤC OX. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG $Y = K$ CHIA $\mathcal{H}$ THÀNH HAI PHẦN CÓ TỈ LỆ DIỆN TÍCH CHO TRƯỚC.

Bài toán tổng quát

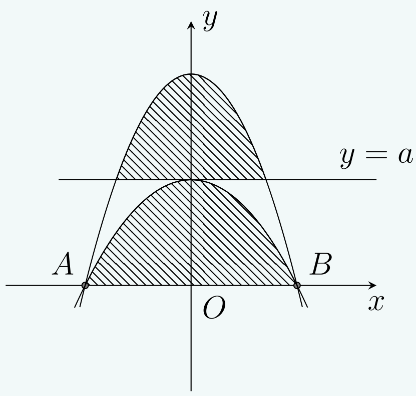
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\mathcal{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ và trục Ox. Tìm điều kiện để đường thẳng $y = k$ chia $\mathcal{H}$ thành hai phần có tỉ lệ diện tích cho trước.

Phương pháp giải: Ta tính diện tích của từng phần, dựa vào tỉ lệ đề bài yêu cầu ta tìm k.

VÍ DỤ 9.

Cho parabol $(P_1)\colon y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d\colon y = a$ $(0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

(A) $T = 32$. (B) $T = 64$. (C) $T = 72$. (D) $T = 99$.



Lời giải.

Đường thẳng $y = a$ cắt (P_1) tại hai điểm có hoành độ $-\sqrt{4-a}$ và $\sqrt{4-a}$. Vậy

$$S_1 = \int\limits_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} (-x^2 + 4 - a)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{4-a}\cdot(4-a).$$

Parabol (P_2) có dạng $y = m\left(x^2 - 4\right)$. Chú ý vì nó còn đi qua điểm $(0; a)$ nên $m = -\dfrac{a}{4}$. Vậy $(P_2)\colon y = -\dfrac{a}{4}x^2 + a$. Từ đó suy ra

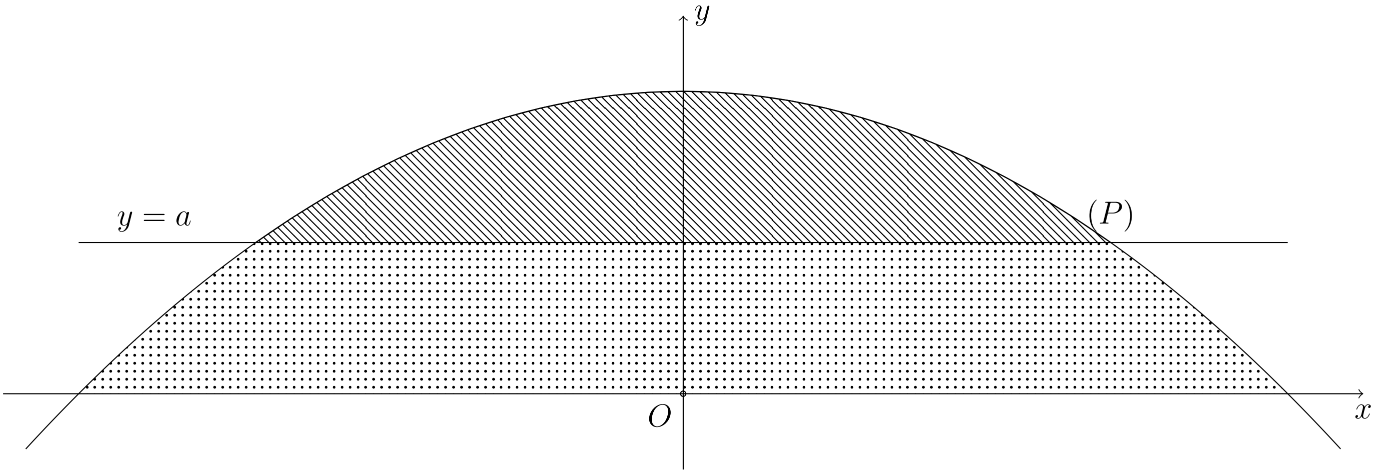
$$S_2 = \int\limits_{-2}^{2} \left(-\frac{a}{4}x^2 + a\right) \mathrm{d}x = \frac{8a}{3}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{16(4-a)^3}{9} = \frac{64a^2}{9} \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64.$$

Chọn đáp án B

Câu 17. Cho parabol $(P)\colon y = -\dfrac{1}{16}x^2 + 4$. Gọi $\mathcal{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi (P) và Ox. Đường thẳng $y = a$ $(0 < a < 4)$ chia hình phẳng $\mathcal{H}$ thành hai phần bằng nhau (phần gạch chéo và phần chấm). Tính a.



A $a = 4 - 2\sqrt[3]{2}$. B $a = 4 - \sqrt[3]{2}$. C $a = 4 + 2\sqrt[3]{2}$. D $a = 4 + \sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = a$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-4\sqrt{4-a}$ và $4\sqrt{4-a}$, (P) cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ -8 và 8.
Diện tích của hình phẳng $\mathcal{H}$ là

$$S = 2\int\limits_{0}^{8} \left(-\frac{1}{16}x^2 + 4\right) \mathrm{d}x = \frac{128}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng $y = a$ là

$$S_2 = 2\int\limits_{0}^{4\sqrt{4-a}} \left(-\frac{1}{16}x^2 + 4 - a\right) \mathrm{d}x = \frac{16}{3}\left(\sqrt{4-a}\right)^3.$$

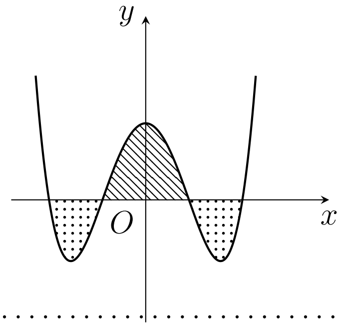
Suy ra

$$\frac{16}{3}\left(\sqrt{4-a}\right)^3 = \frac{64}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4-a} = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow a = 4 - 2\sqrt[3]{2}.$$

Chọn đáp án A

Câu 18.

Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + m$ có đồ thị là (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành. Biết rằng $S_1 = S_2$. Biết rằng giá trị của $m = \dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a^2 + b^2$.

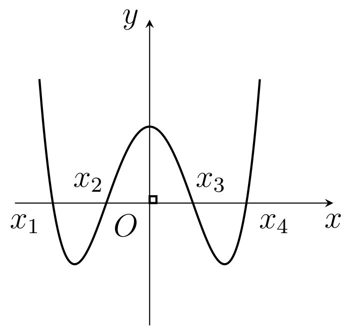


A $T = 25$. **B** $T = 61$. **C** $T = 281$. **D** $T = 1321$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^4 - x^2 + m = 0 \quad (1)$. Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, ta được phương trình $t^2 - t + m = 0 \quad (2)$.

Ta có (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm cùng dương



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}.$$

Gọi các nghiệm của phương trình (1) là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \neq 0$. Do đồ thị (C) nhận trục tung là trục đối xứng nên ta có yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\int\limits_0^{x_4} (x^4 - 3x^2 + m)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow 3x_4^4 - 5x_4^2 + 15m = 0.$$

Mặt khác x_4 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có

$$x_4^4 - x_4^2 + m = 0.$$

Do đó ta có

$$\begin{cases} x_4^4 - x_4^2 + m = 0 \\ 3x_4^3 - 5x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2 = \dfrac{5}{6} \\ m = \dfrac{5}{36}. \end{cases}$$

Ta thấy $m = \dfrac{5}{36}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $T = 5^2 + 36^2 = 1321$.

Chọn đáp án D

§4. CÁC BÀI TOÁN ĐƯA VỀ DẠNG $(UV)'$ HOẶC $(U/V)'$

A CHO $H(X)\,[F(X)]^2 - F(X)F''(X) + [F'(X)]^2 = 0$, BIẾT $F(A) = \alpha > 0, F(C) = \beta$ (VỚI $A \leq C \leq B$). TÌM $F(D)$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến, có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn $h(x)\,[f(x)]^2 - f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ trong đó $h(x)$ là hàm liên tục trên $[a;b]$. Biết $f(a) = \alpha > 0, f(c) = \beta$ (với $a \leq c \leq b$). Tìm $f(d)$ (với $d \in (a;b)$).

Phương pháp giải: Ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned}
& h(x)\left[f(x)\right]^2 - f(x)f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & h(x)\left[f(x)\right]^2 = f(x)f''(x) - \left[f'(x)\right]^2 \\
\Leftrightarrow\ & h(x) = \frac{f(x)f''(x) - \left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = h(x) \\
\Rightarrow\ & \frac{f'(x)}{f(x)} = \int h(x)\,\mathrm{d}x + C_1 \\
\Rightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(g(x) + C_1\right)\mathrm{d}x \text{ (với } g(x) \text{ là một nguyên hàm của } h(x)) \\
\Rightarrow\ & \ln f(x) = u(x) + C_1 x + C_2 \text{ (với } u(x) \text{ là một nguyên hàm của } g(x)) \\
\Rightarrow\ & f(x) = \mathrm{e}^{u(x) + C_1 x + C_2}.
\end{aligned}$$

Dựa vào điều kiện $f(a) = \alpha, f(c) = \beta$ suy ra C_1 và C_2. Khi đó ta có $f(x)$ rồi tìm $f(d)$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2 - f(x)f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1,\ f(2) = \mathrm{e}^4$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}$. B. e. C. $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. D. e^2.

Lời giải.

Do $f(x)$ là hàm số đồng biến biến nên $f'(x) > 0, \forall x \in [0;2]$.
Suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [0;2]$. Ta thấy

$$\begin{aligned}
& \left[f(x)\right]^2 - f(x)f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[f(x)\right]^2 = f(x)f''(x) - \left[f'(x)\right]^2 \\
\Leftrightarrow\ & 1 = \frac{f(x)f''(x) - \left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 1 \\
\Rightarrow\ & \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C_1 \\
\Rightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + C_1\right)\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \\
\Rightarrow\ & f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2}.
\end{aligned}$$

Vì $f(0) = 1$ suy ra $C_2 = 0$ và $f(2) = \mathrm{e}^4$ nên suy ra $C_1 = 1$. Do đó $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2} + x}$.
Vậy $f(1) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.
Chọn đáp án C

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $x\left[f(x)\right]^2 - f(x)f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1,\ f(1) = \mathrm{e}$. Khi đó $f(2)$ bằng

A. $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. B. e. C. e^3. D. e^2.

Lời giải.

Do $f(x)$ là hàm số đồng biến biến nên $f'(x) > 0, \forall x \in [0;2]$.
Suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [0;2]$. Ta thấy

$$\begin{aligned}
& x\left[f(x)\right]^2 - f(x)f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & x\left[f(x)\right]^2 = f(x)f''(x) - \left[f'(x)\right]^2\\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{f(x)f''(x) - \left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = x\\
\Rightarrow\ & \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C_1\\
\Rightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ & \ln f(x) = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2\\
\Rightarrow\ & f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2}.
\end{aligned}$$

Vì $f(0) = 1$ suy ra $C_2 = 0$ và $f(1) = \mathrm{e}$ nên suy ra $C_1 = \dfrac{5}{6}$. Do đó $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{6} + \frac{5x}{6}}$.
Vậy $f(2) = \mathrm{e}^3$.
Chọn đáp án C

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;\pi]$ và thỏa mãn $\sin x\left[f(x)\right]^2 - f(x)f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(\pi) = \mathrm{e}^{\pi}$. Khi đó $f(2)$ bằng

A $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$. B e. C $\mathrm{e}^{\frac{\pi-2}{2}}$. D 1.

Lời giải.

Do $f(x)$ là hàm số đồng biến biến nên $f'(x) > 0, \forall 2 \in [0;3]$.
Suy ra $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [0;3]$. Ta thấy

$$\begin{aligned}
& \sin x\left[f(x)\right]^2 - f(x)f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \sin x\left[f(x)\right]^2 = f(x)f''(x) - \left[f'(x)\right]^2\\
\Leftrightarrow\ & \sin x = \frac{f(x)f''(x) - \left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \sin x\\
\Rightarrow\ & \frac{f'(x)}{f(x)} = -\cos x + C_1\\
\Rightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(-\cos x + C_1\right)\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ & \ln f(x) = -\sin x + C_1x + C_2\\
\Rightarrow\ & f(x) = \mathrm{e}^{-\sin x + C_1x + C_2}.
\end{aligned}$$

Vì $f(0) = 1$ suy ra $C_2 = 0$ và $f(\pi) = \mathrm{e}^{\pi}$ nên suy ra $C_1 = 1$. Do đó $f(x) = \mathrm{e}^{-\sin x + x}$.
Vậy $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi-2}{2}}$.
Chọn đáp án C

B BIẾT $F'(X)\cdot G(X)+F(X)\cdot K(X)=H(X)$. TÍNH $\int\limits_A^B F(X)\,\mathrm{d}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Biết $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot k(x)=h(x)$, $\forall x\in[a;b]$, $h(x)$, $g(x)$, $k(x)$ là hàm đã biết liên tục trên $[a;b]$, $g(x)\neq 0$, $\forall x\in[a;b]$ và $f(x_0)=m$ với $x_0\in[a;b]$.

Tính $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Ta tìm hàm $f(x)$ bằng cách tìm cách biến đổi điều kiện

$$\begin{aligned} & f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot k(x)=h(x)\\ \Leftrightarrow\ & f'(x)+f(x)\cdot\frac{k(x)}{g(x)}=\frac{h(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

Đưa về dạng $f'(x)+p(x)f(x)=q(x)$ với $P'(x)=p(x)$.
Nhân cả hai vế với $\mathrm{e}^{P(x)}$ ta được

$$\begin{aligned} & f'(x)\cdot\mathrm{e}^{P(x)}+(P(x))'\cdot\mathrm{e}^{P(x)}\cdot f(x)=q(x)\cdot\mathrm{e}^{P(x)}\\ \Leftrightarrow\ & \left(f(x)\cdot\mathrm{e}^{P(x)}\right)'=q(x)\cdot\mathrm{e}^{P(x)}\\ \Leftrightarrow\ & f(x)\cdot\mathrm{e}^{P(x)}=\int q(x)\cdot\mathrm{e}^{P(x)}\,\mathrm{d}x=n(x)+C.\end{aligned}$$

Từ điều kiện $f(x_0)=m$ ta tìm được C và từ đó tìm được hàm $f(x)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$. Biết $f'(x)\cdot\cos x+f(x)\cdot\sin x=1$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ và $f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}$.   B $I=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.   C $I=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.   D $I=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x)\cdot\cos x+f(x)\cdot\sin x=1\\ \Leftrightarrow\ & f'(x)+f(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}\\ \Leftrightarrow\ & f'(x)\cdot\frac{1}{\cos x}+f(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\\ \Leftrightarrow\ & \left(f(x)\cdot\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}\\ \Rightarrow\ & \int\left(f(x)\cdot\frac{1}{\cos x}\right)'\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+C\\ \Leftrightarrow\ & f(x)\cdot\frac{1}{\cos x}=\tan x+C.\end{aligned}$$

Có $f(0)=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(x)=\sin x+\cos x$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x=(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

(A) e. (B) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (C) $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. (D) $-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f'(x)+2xf(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$, ta suy ra

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x\mathrm{e}^{x^2}f(x)=2x\\
\Leftrightarrow\ & \left[\mathrm{e}^{x^2}f(x)\right]'=2x\\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_0^1\left[\mathrm{e}^{x^2}f(x)\right]'\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{x^2}f(x)\Big|_0^1=x^2\Big|_0^1\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{e}f(1)-f(0)=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $xf'(x)+f(x)=1$ và $f(1)=2$. Tính $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $2+\ln 3$. (B) $1+2\ln 2$. (C) $3+\ln 2$. (D) $3-2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $xf'(x)+f(x)=1 \Leftrightarrow xf'(x)+x'f(x)=1 \Leftrightarrow (xf(x))'=1 \Leftrightarrow xf(x)=x+C$.

Mà $f(1)=2 \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

Khi đó $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=(x+\ln x)\Big|_1^3=2+\ln 3$.

Chọn đáp án (A)

C CHO $[F'(X)]^2+F(X)\cdot F''(X)=G(X)$. TÌM HÀM SỐ $Y=F^2(X)$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=g(x)$ với mọi x thuộc khoảng D. Tìm hàm số $y=f^2(x)$.

Phương pháp giải: Ta có

$$\begin{aligned}
[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=g(x) &\Leftrightarrow (f(x)\cdot f'(x))'=g(x)\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)''=g(x)\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}f^2(x)=h(x)+C_1x+C_2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad f^2(x) = 2h(x) + 2C_1x + 2C_2.$$

Vậy $f^2(x) = 2h(x) + 2C_1x + 2C_2$ (trong đó $h''(x) = g(x)$, C_1, C_2 là các hằng số).

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2\mathrm{e}^x - 4$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Giá trị của $f^2(1)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(6; 7)$. B. $(10; 11)$. C. $(8; 9)$. D. $(9; 10)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2\mathrm{e}^x - 4 &\Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = 2\mathrm{e}^x - 4 \\
&\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = 2\mathrm{e}^x - 4x + C_1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} f^2(x) = 2\mathrm{e}^x - 2x^2 + C_1x + C_2 \\
&\Leftrightarrow f^2(x) = 4\mathrm{e}^x - 4x^2 + 2C_1x + 2C_2.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 = 2\mathrm{e}^0 - 4 \cdot 0 + C_1 \\ 2^2 = 4\mathrm{e}^0 - 4 \cdot 0^2 + 2C_1 \cdot 0 + 2C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Suy ra $f^2(x) = 4\mathrm{e}^x - 4x^2 + 4x \Rightarrow f^2(1) = 4\mathrm{e}$.

Chọn đáp án B

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 6x - \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ và $f(1) = 0$. Tính $f^2(2)$.

A. $5 + 2\sqrt{2}$. B. $14 + 2\sqrt{2}$. C. $\dfrac{5 + 2\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{14 + 2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 6x - \frac{1}{4x\sqrt{x}} &\Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = 6x - \frac{1}{4x\sqrt{x}} \\
&\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + C_1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} f^2(x) = x^3 + \sqrt{x} + C_1x + C_2 \\
&\Leftrightarrow f^2(x) = 2x^3 + 2\sqrt{x} + 2C_1x + 2C_2.
\end{aligned}$$

Ta có

$$f(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 3 + \dfrac{1}{2} + C_1 \\ 0 = 2 + 2 + 2C_1 + 2C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{7}{2} \\ C_2 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Suy ra $f^2(x) = 2x^3 + 2\sqrt{x} - 7x + 3 \Rightarrow f^2(2) = 5 + 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = -8\sin 2x$ và $f(0) = 2$, $f'(0) = 4$. Biết $f^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a\pi + b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$, tính $a + b$.

A. 6. B. 0. C. 8. D. 12.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = -8\sin 2x &\Leftrightarrow (f(x)\cdot f'(x))' = -8\sin 2x\\ &\Leftrightarrow f(x)\cdot f'(x) = 4\cos 2x + C_1\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}f^2(x) = 2\sin 2x + C_1x + C_2\\ &\Leftrightarrow f^2(x) = 4\sin 2x + 2C_1x + 2C_2.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 2\\ f'(0) = 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 4 + C_1\\ 2^2 = 2C_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4\\ C_2 = 2.\end{cases}$$

Suy ra $f^2(x) = 4\sin 2x + 8x + 4 \Rightarrow f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi + 4 \Rightarrow a = 4, b = 4 \Rightarrow a + b = 8$.

Chọn đáp án C

D CHO $(X-M)(X-N)F'(X) + (N-M)F(X) = (X-M)(X-N) \quad (1)$ VỚI MỌI $X \in \mathbb{R}\setminus\{M;N\}$ VÀ $F(P) = R$. XÁC ĐỊNH $F(Q)$ VÀ CÁC BIỂU THỨC LIÊN QUAN.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{n;m\}$ với $m > n$, thỏa mãn $(x-m)(x-n)f'(x)+(n-m)f(x) = (x-m)(x-n) \quad (1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}\setminus\{m;n\}$ và $f(p) = r$. Xác định $f(q)$ và các biểu thức liên quan.

Phương pháp giải:

- Chia hai vế của (1) cho $(x-m)^2$, ta được

$$\frac{x-n}{x-m}f'(x) + \frac{n-m}{(x-m)^2}f(x) = \frac{x-n}{(x-m)^2}. \quad (2)$$

- Đẳng thức (2) được viết lại như sau

$$\left[\frac{x-n}{x-m}f(x)\right]' = \frac{x-n}{(x-m)^2} \Rightarrow \frac{x-n}{x-m}f(x) = \int \frac{x-n}{(x-m)^2}\,\mathrm{d}x.$$

- Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{x-n}{(x-m)^2}\,\mathrm{d}x$.
- Chọn được hàm số $y = f(x)$.
- Xác định $f(q)$ và các biểu thức liên quan.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$, thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+f(x) = x^2+x$ với mọi $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ và $f(1) = -2\ln 2$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a^2 + b^2$.

A $P = \frac{1}{2}$. B $P = \frac{3}{4}$. C $P = \frac{13}{4}$. D $P = \frac{9}{2}$.

. . . .

Lời giải.
Từ giả thiết, ta có
$$\frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}.$$
Nhận thấy $\frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\left[\frac{x}{x+1}f(x)\right]'$.
Do đó, từ giả thiết viết lại như sau $\left[\frac{x}{x+1}f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.
Suy ra $\frac{x}{x+1}f(x)=\int\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C$.
Mà $f(1)=-2\ln 2\Rightarrow C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}f(x)=x-\ln|x-1|-1$.
Cho $x=2$ ta được $\frac{2}{3}f(2)=2-\ln 3-1\Rightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$.
Suy ra $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$. Vậy $P=a^2+b^2=\frac{9}{2}$.
Chọn đáp án D

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$, thỏa mãn $x(x+2)f'(x)+2f(x)=x^2+2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$ và $f(-1)=-2$. Biết $f(1)=a+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a^2+b^2$.

A $P=4$. B $P=36$. C $P=9$. D $P=45$.

Lời giải.
Từ giả thiết, ta có
$$\frac{x}{x+2}f'(x)+\frac{2}{(x+2)^2}f(x)=\frac{x}{x+2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}.$$
Nhận thấy $\frac{x}{x+2}f'(x)+\frac{2}{(x+2)^2}f(x)=\left[\frac{x}{x+2}f(x)\right]'$.
Do đó, từ giả thiết viết lại như sau $\left[\frac{x}{x+2}f(x)\right]'=\frac{x}{x+2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$.
Suy ra $\frac{x}{x+2}f(x)=\int\frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x=x-2\ln|x+2|+C$.
Mà $-2=f(-1)\Rightarrow C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}f(x)=x-2\ln|x+2|-1$.
Cho $x=1$ ta được $\frac{1}{3}f(1)=1-2\ln 3-1\Rightarrow f(1)=0-6\ln 3$.
Suy ra $a=0$ và $b=-6$. Vậy $P=a^2+b^2=36$.
Chọn đáp án B

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$, thỏa mãn $(x-1)(x-2)f'(x)-f(x)=x^2-3x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ và $f(-1)=3$. Biết $f(0)=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A $P=6$. B $P=-4$. C $P=-2$. D $P=0$.

Lời giải.
Từ giả thiết, ta có
$$\frac{x-1}{x-2}f'(x)-\frac{1}{(x-2)^2}f(x)=\frac{x-1}{x-2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}.$$
Nhận thấy $\frac{x-1}{x-2}f'(x)-\frac{1}{(x-2)^2}f(x)=\left[\frac{x-1}{x-2}f(x)\right]'$.
Do đó, từ giả thiết viết lại như sau $\left[\frac{x-1}{x-2}f(x)\right]'=\frac{x-1}{x-2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.
Suy ra $\frac{x-1}{x-2}f(x)=\int\frac{x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{1}{x-2}\right)\,\mathrm{d}x=x+\ln|x-2|+C$.
Với $x=-1$, suy ra $\frac{2}{3}f(-1)=-1+\ln 3+C\Rightarrow C=3-\ln 3$.

Do đó $\dfrac{x-1}{x-2}f(x) = x + \ln|x-2| + 3 - \ln 3$.

Cho $x = 0$, ta được $\dfrac{1}{2}f(0) = \ln 2 + 3 - \ln 3 \Rightarrow f(0) = 6 + 2\ln 2 - 2\ln 3$.

Suy ra $a = 6$, $b = 2$ và $c = -2$. Vậy $P = a + b + c = 6 + 2 + (-2) = 6$.

Chọn đáp án A

---

§5. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ $Y = F(X)$

A DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI (P) VÀ ĐƯỜNG THẲNG AB BẰNG $\mathcal{S}$. GỌI X_1, X_2 LẦN LƯỢT LÀ HOÀNH ĐỘ CỦA A VÀ B. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA $(X_1 + X_2)^2$.

Bài toán tổng quát

Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2 + c$ có đồ thị (P). Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (P) vuông góc với nhau. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\mathcal{S}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Tính giá trị của $(x_1 + x_2)^2$.

Phương pháp giải: Ta có $y' = x$.
Tiếp tuyến tại điểm A và điểm B của parabol vuông góc với nhau suy ra

$$y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow x_1x_2 = -1.$$

Điểm $A\left(x_1; \dfrac{1}{2}x_1^2 + c\right)$, điểm $B\left(x_2; \dfrac{1}{2}x_2^2 + c\right)$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{y - \frac{1}{2}x_1^2 - c}{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}x(x_2 + x_1) - \frac{1}{2}x_2x_1 + c. \end{aligned}$$

Không mất tổng quát giả sử $x_1 < x_2$.
Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi (AB) và (P) là

$$\mathcal{S} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2}x(x_2 + x_1) - \frac{1}{2}x_2x_1 + c - \frac{1}{2}x^2 - c\right] \mathrm{d}x.$$

Lấy tích phân và thay điều kiện $x_1x_2 = -1$ ta được

$$12\mathcal{S} = (x_2 - x_1)^3.$$

Suy ra $x_2 - x_1 = \sqrt[3]{12\mathcal{S}}$.
Do đó, $(x_2 + x_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + 4x_1x_2 = \left(\sqrt[3]{12\mathcal{S}}\right)^2 - 4$.

VÍ DỤ 1. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P). Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (P) vuông góc với nhau. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\frac{9}{4}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Giá trị của $(x_1 + x_2)^2$ bằng

A. 7. B. 5. C. 13. D. 11.

Lời giải.

Ta có $y' = x$.
Tiếp tuyến tại điểm A và điểm B của parabol vuông góc với nhau suy ra

$$y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow x_1x_2 = -1.$$

Điểm $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1^2\right)$, điểm $B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2^2\right)$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - \frac{1}{2}x_1^2}{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x(x_2 + x_1) - \frac{1}{2}x_2x_1.$$

Không mất tổng quát giả sử $x_1 < x_2$.
Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi (AB) và (P) là

$$\frac{9}{4} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2}x(x_2 + x_1) - \frac{1}{2}x_2x_1 - \frac{1}{2}x^2\right] \mathrm{d}x.$$

Lấy tích phân và thay điều kiện $x_1x_2 = -1$ ta được

$$27 = (x_2 - x_1)^3.$$

Suy ra $x_2 - x_1 = \sqrt[3]{27} = 3$.
Do đó, $(x_2 + x_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + 4x_1x_2 = (3)^2 - 4 = 5$.

Chọn đáp án B

Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + 2019$ có đồ thị (P). Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (P) vuông góc với nhau. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\frac{16}{3}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Giá trị của $(x_1 + x_2)^2$ bằng

A. $\frac{19}{3}$. B. 12. C. 13. D. $\frac{25}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x$.
Tiếp tuyến tại điểm A và điểm B của parabol vuông góc với nhau suy ra

$$y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow x_1x_2 = -1.$$

Điểm $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1^2 + 2019\right)$, điểm $B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2^2 + 2019\right)$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-\frac{1}{2}x_1^2-2019}{\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x(x_2+x_1)-\frac{1}{2}x_2x_1+2019.$$

Không mất tổng quát giả sử $x_1 < x_2$.
Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi (AB) và (P) là

$$\frac{16}{3}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2}x(x_2+x_1)-\frac{1}{2}x_2x_1+2019-\frac{1}{2}x^2-2019\right]\,\mathrm{d}x.$$

Lấy tích phân và thay điều kiện $x_1x_2=-1$ ta được

$$12\cdot\frac{16}{3}=(x_2-x_1)^3.$$

Suy ra $x_2-x_1=\sqrt[3]{64}=4$.
Do đó, $(x_2+x_1)^2=(x_2-x_1)^2+4x_1x_2=(4)^2-4=12$.
Chọn đáp án B

Câu 2. Cho đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{26}{3}$ có đồ thị (P). Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (P) vuông góc với nhau. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\frac{2}{3}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Giá trị của $(x_1+x_2)^2$ bằng

A. $\frac{7}{2}$. B. 0. C. 1. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải.
Ta có $y'=x$.
Tiếp tuyến tại điểm A và điểm B của parabol vuông góc với nhau suy ra

$$y'(x_1)\cdot y'(x_2)=-1\Leftrightarrow x_1x_2=-1.$$

Điểm $A\left(x_1;\frac{1}{2}x_1^2-\frac{26}{3}\right)$, điểm $B\left(x_2;\frac{1}{2}x_2^2-\frac{26}{3}\right)$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-\frac{1}{2}x_1^2+\frac{26}{3}}{\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x(x_2+x_1)-\frac{1}{2}x_2x_1-\frac{26}{3}.$$

Không mất tổng quát giả sử $x_1 < x_2$.
Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi (AB) và (P) là

$$\frac{2}{3}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2}x(x_2+x_1)-\frac{1}{2}x_2x_1-\frac{26}{3}-\frac{1}{2}x^2+\frac{26}{3}\right]\,\mathrm{d}x.$$

Lấy tích phân và thay điều kiện $x_1x_2=-1$ ta được

$$12\cdot\frac{2}{3}=(x_2-x_1)^3.$$

Suy ra $x_2-x_1=\sqrt[3]{8}$.
Do đó, $(x_2+x_1)^2=(x_2-x_1)^2+4x_1x_2=(2)^2-4=0$.

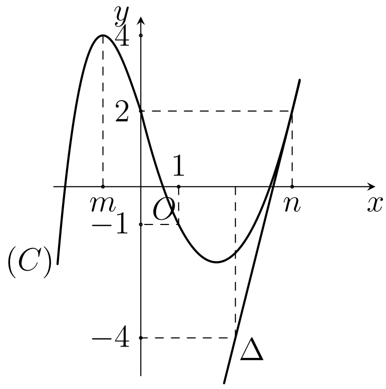
Chọn đáp án B

B CHO $Y = F(X)$ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $X = M$, CÓ ĐỒ THỊ NHƯ HÌNH VẼ VÀ ĐƯỜNG THẲNG Δ LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ TẠI ĐIỂM CÓ HOÀNH ĐỘ BẰNG N. TÍNH $I = \int\limits_M^N F''(AX+B)\,DX$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = m$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng n.

Tính $I = \int\limits_m^n f''(ax+b)\,\mathrm{d}x$.

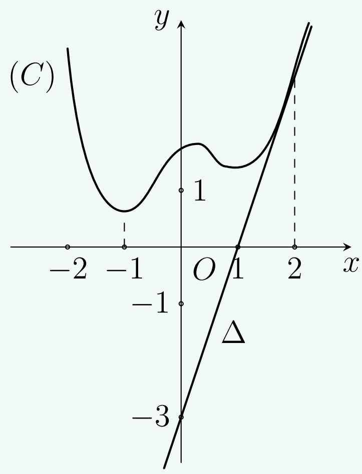


Dựa vào đồ thị hàm số ta có thể:

- Xác định các điểm cực trị $x = m, \ldots$. Khi đó $f'(m) = 0, \ldots$
- Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại các tiếp điểm :$k_1 = f'(n), \ldots$
- Kết hợp với các phương pháp tính tích phân: đổi biến số ...

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 2. Tính $\int\limits_1^4 f''(x-2)\,\mathrm{d}x$.



A 4. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

Lời giải.

Nhận xét:

- Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 2 là $y = 3x - 3$ nên $f'(2) = 3$.
- Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$ nên $f'(-1) = 0$.

Xét tích phân $I = \int\limits_1^4 f"(x-2)\,\mathrm{d}x$.

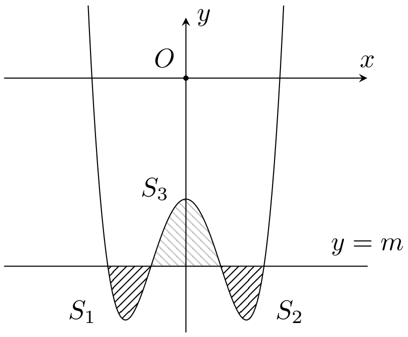
Đặt $t = x - 2$. Khi $x = 1 \Rightarrow t = -1; x = 4 \Rightarrow t = 2$.

$I = \int\limits_{-1}^{2} f"(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{2} f"(x)\,\mathrm{d}x = [f'(x)]\Big|_{-1}^{2} = f'(2) - f'(-1) = 3.$

Chọn đáp án **D**

Bài toán tổng quát

Cho đồ thị (C): $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để $S_1 + S_2 = S_3$.



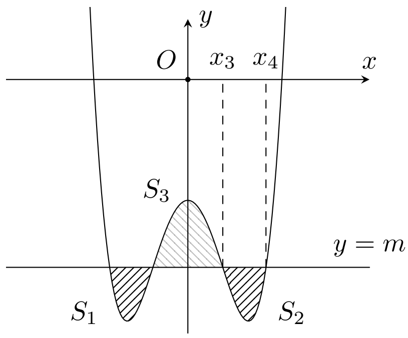
Phương pháp giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$ax^4 + bx^2 + c - m = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$, phương trình (1) trở thành

$$at^2 + bt + c - m = 0. \quad (2)$$



Đồ thị (C) cắt d tại 4 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, khi đó phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm dương của (2) với $t_1 < t_2$.

Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự là $x_1 = -\sqrt{t_1}$, $x_2 = -\sqrt{t_2}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$.

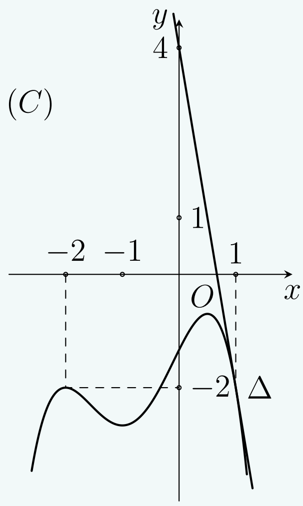
Do tính đối xứng của đồ thị hàm bậc 4 trùng phương, ta có

$$\int_0^{x_3} (f(x) - m)\,\mathrm{d}x = \int_{x_3}^{x_4} (m - f(x))\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^{x_4} (f(x) - m)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Từ phương trình cuối, kết hợp với x_4 là nghiệm của phương trình $f(x_4) = 0$ ta giải hệ phương trình để tìm m.

VÍ DỤ 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -2$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1. Tính $\int\limits_0^2 f"\left(\frac{3x-4}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.



(A) -4. (B) 6. (C) -3. (D) 4.

Lời giải.

Nhận xét:

- Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y = -6x+4$ nên $f'(1) = -6$.
- Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -2$ nên $f'(-2) = 0$.

Xét tích phân $I = \int\limits_0^2 f"\left(\frac{3x-4}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \frac{3x-4}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot \mathrm{d}t$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = -2; x = 2 \Rightarrow t = 1$.

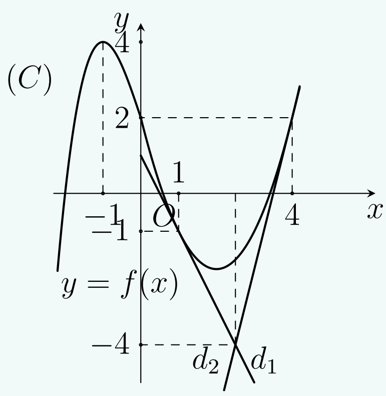
$$I = \frac{2}{3}\int\limits_{-2}^{1} f"(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int\limits_{-2}^{1} f"(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[f'(x)\right]\Big|_{-2}^{1} = \frac{2}{3}\left(f'(1) - f'(-2)\right) = -4.$$

Chọn đáp án (A)

VÍ DỤ 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng d_1 và d_2 là hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ lần lượt bằng 1 và 4.

Tính $I = \int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot f"\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} x\cdot f"\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$.



(A) $\frac{8}{3}$. (B) 3. (C) $\frac{7}{3}$. (D) 4.

Lời giải.

Nhận xét:

- Phương trình tiếp tuyến d_1 của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y = -2x+1$ nên $f'(1) = -2$.

- Phương trình tiếp tuyến d_2 của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 4 là $y = 4x - 14$ nên $f'(4) = 4$.
- Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$ nên $f'(-1) = 0$.

Xét tích phân $I = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot f"\left(x^3\right) \,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} x \cdot f"\left(x^2\right) \,\mathrm{d}x$.

Tính tích phân $I_1 = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot f"\left(x^3\right) \,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow x^2 \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}t$. Khi $x = -1 \Rightarrow t = -1; x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$I_1 = \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{1} f"(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{1} f"(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot [f'(x)] \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \left(f'(1) - f'(-1)\right) = -\frac{2}{3}$.

Tính tích phân $I_2 = \int\limits_{1}^{2} x \cdot f"\left(x^2\right) \,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow x \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}t$. Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 2 \Rightarrow t = 4$.

$I_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{1}^{4} f"(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int\limits_{1}^{4} f"(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot [f'(x)] \Big|_{1}^{4} = \frac{1}{2} \left(f'(4) - f'(1)\right) = 3$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3}$.

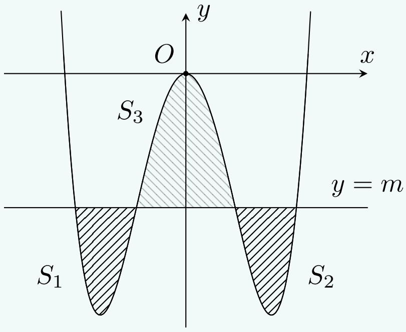
Chọn đáp án C

C TƯƠNG GIAO HÀM TRÙNG PHƯƠNG - BÀI TOÁN DIỆN TÍCH

VÍ DỤ 5.

Đồ thị $(C)\colon y = x^4 - 4x^2$ cắt đường thẳng $d\colon y = m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Biết rằng $S_1 + S_2 = S_3$, khi đó $m = -\frac{a}{b}$ ở dạng tối giản với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính giá trị của $T = a - b$.

A $T = 29$. B $T = 11$. C $T = 3$. D $T = 25$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^4 - 4x^2 - m = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$, phương trình (1) trở thành

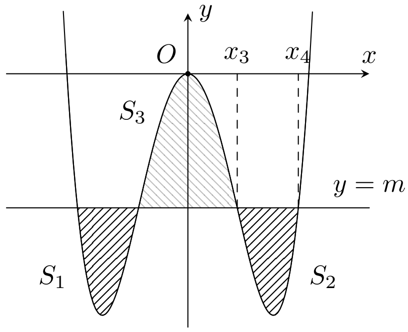
$$t^2 - 4t - m = 0. \quad (2)$$

Đồ thị (C) cắt d tại 4 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, khi đó phương trình

(2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+m > 0 \\ 4 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 0.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm dương của (2) với $t_1 < t_2$.
Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự là $x_1 = -\sqrt{t_1}$, $x_2 = -\sqrt{t_2}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$.
Do tính đối xứng qua trục Oy của (C) nên yêu cầu của bài toán trở thành



$$\int_0^{x_3} (x^4 - 4x^2 - m)\mathrm{d}x = \int_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 4x^2 + m)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_4} (x^4 - 4x^2 - m)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} - mx\right)\Bigg|_0^{x_4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} - mx_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_4^4 - 20x_4^2 - 15m = 0.$$

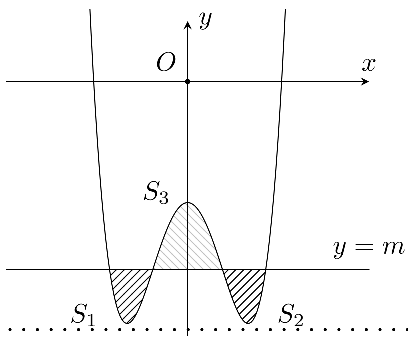
Suy ra x_4 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_4^4 - 4x_4^2 - m = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 - 15m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 - 15m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_4^2 = 0 \text{ (loại)} \\ x_4^2 = \dfrac{10}{3} \end{array}\right. \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 - 15m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2 = \dfrac{10}{3} \\ m = -\dfrac{20}{9} \text{ (thỏa mãn).} \end{cases}$$

Vậy $m = -\dfrac{20}{9}$. Do đó $a = 20$, $b = 9$.
Suy ra $T = a - b = 11$.
Chọn đáp án B

Câu 3.
Đồ thị (C): $y = 2x^4 - 4x^2 - 2$ cắt đường thẳng d: $y = m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Biết rằng $S_1 + S_2 = S_3$, khi đó $m = -\dfrac{a}{b}$ ở dạng tối giản với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính giá trị của $T = a + b$.



A $T = -19$. B $T = 19$. C $T = 1$. D $T = 37$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$2x^4 - 4x^2 - 2 - m = 0. \quad (1)$$

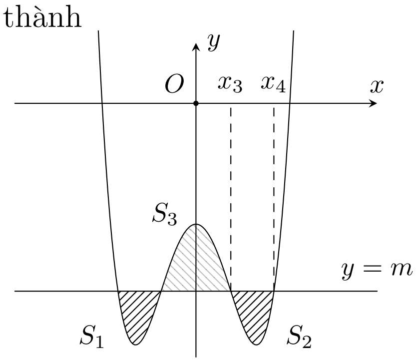
Đặt $t = x^2$, phương trình (1) trở thành

$$2t^2 - 4t - 2 - m = 0. \quad (2)$$

Đồ thị (C) cắt d tại 4 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, khi đó phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(-2 - m) > 0 \\ 2 > 0 \\ -1 - \dfrac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -2.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm dương của (2) với $t_1 < t_2$.
Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự là $x_1 = -\sqrt{t_1}$, $x_2 = -\sqrt{t_2}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$.
Do tính đối xứng qua trục Oy của (C) nên yêu cầu của bài toán trở thành



$$\int_0^{x_3} (2x^4 - 4x^2 - 2 - m)\mathrm{d}x = \int_{x_3}^{x_4} (-2x^4 + 4x^2 + 2 + m)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_4} (2x^4 - 4x^2 - 2 - m)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} - (2+m)x\right)\Bigg|_0^{x_4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} - (2+m)x_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0.$$

Suy ra x_4 là nghiệm của hệ phương trình

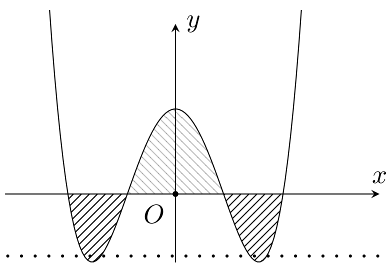
$$\begin{cases} 2x_4^4 - 4x_4^2 - 2 - m = 0 \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_4^2 = 0 \text{ (loại)} \\ x_4^2 = \dfrac{5}{3} \end{array}\right. \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2 = \dfrac{5}{3} \\ m = -\dfrac{28}{9} \text{ (thỏa mãn).} \end{cases}$$

Vậy $m = -\dfrac{28}{9}$. Do đó $a = 28$, $b = 9$.
Suy ra $T = a + b = 37$.
Chọn đáp án D

Câu 4.
Cho đồ thị (C_m): $y = x^4 - 3x^2 + 1 - m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng tổng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(-1; 0)$. B $(0; 1)$. C $(1; 2)$. D $(-2; -1)$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là

$$x^4 - 3x^2 + 1 - m = 0. \tag{1}$$

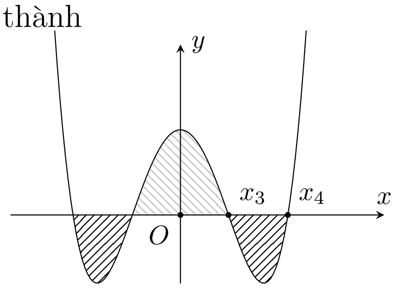
Đặt $t = x^2$, phương trình (1) trở thành

$$t^2 - 2t + 1 - m = 0. \tag{2}$$

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, khi đó phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9-4(1-m) > 0\\ 3 > 0\\ 1-m > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5+4m > 0\\ m < 1\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < m < 1.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm dương của (2) với $t_1 < t_2$.
Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự là $x_1 = -\sqrt{t_1}$, $x_2 = -\sqrt{t_2}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$.
Do tính đối xứng qua trục Oy của (C_m) nên yêu cầu của bài toán trở thành



$$\int_0^{x_3} (x^4 - 3x^2 + 1 - m)\mathrm{d}x = \int_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 3x^2 - 1 + m)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_4} (x^4 - 3x^2 + 1 - m)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + (1-m)x\right)\Bigg|_0^{x_4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - x_4^3 + (1-m)x_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_4^4 - 5x_4^2 + 5(1-m) = 0.$$

Suy ra x_4 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x_4^4 - 3x_4^2 + 1 - m = 0\\ x_4^4 - 5x_4^2 + 5(1-m) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x_4^4 - 10x_4^2 = 0\\ x_4^4 - 3x_4^2 + 1 - m = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_4^2 = 0 \text{ (loại)}\\ x_4^2 = \dfrac{5}{2}\end{array}\right.\\ x_4^4 - 3x_4^2 + 1 - m = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_4^2 = \dfrac{5}{2}\\ m = -\dfrac{1}{4} \text{ (thỏa mãn).}\end{cases}$$

Vậy $m = -\frac{1}{4} \in (-1; 0)$.
Chọn đáp án A

D VẬT CHUYỂN ĐỘNG VỚI VẬN TỐC THEO $V = F(T)$ CÓ ĐỒ THỊ (C) ĐÃ BIẾT. XÁC ĐỊNH QUÃNG ĐƯỜNG ĐI.

Bài toán tổng quát

Cho một vật chuyển động với vận tốc theo $v = f(t)$ có đồ thị (C) đã biết. Xác định quãng đường đi của vật.

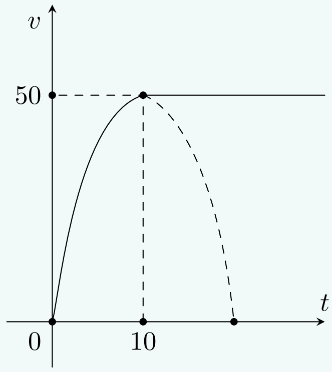
Phương pháp giải:

- Bước 1: Tìm phương trình của v theo dữ kiện trên hình.

- Bước 2: Áp dụng tính chất vật lý $s' = v$ từ đó tìm được s.

VÍ DỤ 6.

Một ô tô bắt đầu chuyển động với vận tốc $v(t) = at^2 + bt$, với t tính bằng giây, v tính bằng m/s. Sau 10 giây ô tô chuyển động với vận tốc cao nhất $v(t) = 50$ m/s và giữ nguyên vận tốc đó, đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Tính quãng đường đường ô tô đi trong 20 giây đầu.



A. $s = \dfrac{2600}{3}$ m.
B. $s = \dfrac{2500}{3}$ m.
C. $s = \dfrac{2000}{3}$ m.
D. $s = 800$ m.

Lời giải.

- Do đồ thị hình vẽ là parabol đi đi qua điểm $(0;0)$ và điểm $(10;50)$ là đỉnh. Nên

$$\begin{cases} a10^2 + b10 = 50 \\ -\dfrac{b}{2a} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 10. \end{cases}$$

Vậy $v(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 10t$.

- Quãng đường ô tô đi trong 20 giây đầu

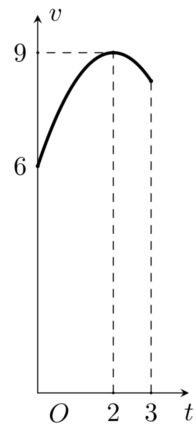
$$\int\limits_0^{10} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t\right) \mathrm{d}t + \int\limits_{10}^{20} 50 \,\mathrm{d}t = \left. -\frac{1}{6}t^3 + 5t^2 \right|_0^{10} + \left. 50t \right|_{10}^{20} = \frac{2500}{3}.$$

Vậy $s = \dfrac{2500}{3}$ m.

Chọn đáp án B

Câu 5.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v(km/h) phụ thuộc thời gian t(h)có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s = 26{,}75$ km.
B. $s = 25{,}25$ km.
C. $s = 24{,}25$ km.
D. $s = 24{,}75$ km.

Lời giải.

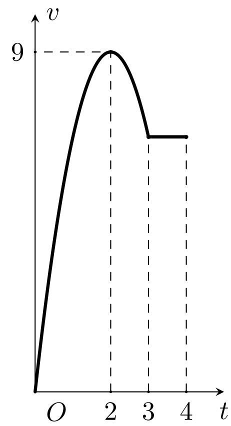
Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol đi qua có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên suy ra $\begin{cases} c = 6 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ a = -\dfrac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = -\dfrac{3}{4}t^2 + 3t + 6$ m/h.

Vậy quãng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 3 giờ là $s = \displaystyle\int_0^3 \left(-\dfrac{3}{4}t^2 + 3t + 6\right) \mathrm{d}t = 24{,}75$ km.

Chọn đáp án (D)

Câu 6.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v(km/h) phụ thuộc thời gian t(h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.



(A) $s = 26{,}5$ km. (B) $s = 28{,}5$ km. (C) $s = 27$ km. (D) $s = 24$ km.

Lời giải.

Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol đi qua có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên suy ra $\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\dfrac{9}{4} \\ b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = -\dfrac{9}{4}t^2 + 9t$ km/h.

Suy ra $v(3) = \dfrac{27}{4}$ km/h.

Vậy quãng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 4 giờ là $s = \displaystyle\int_0^3 \left(-\dfrac{9}{4}t^2 + 9t\right) \mathrm{d}t + \int_3^4 \dfrac{27}{4} \mathrm{d}t = 27$ km.

Chọn đáp án (C)

E $\mathcal{H}$ LÀ HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $Y = F(X)$, $X = A$, $X = B$ VÀ TRỤC OX. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG $Y = K$ CHIA $\mathcal{H}$ THÀNH HAI PHẦN CÓ TỈ LỆ DIỆN TÍCH CHO TRƯỚC.

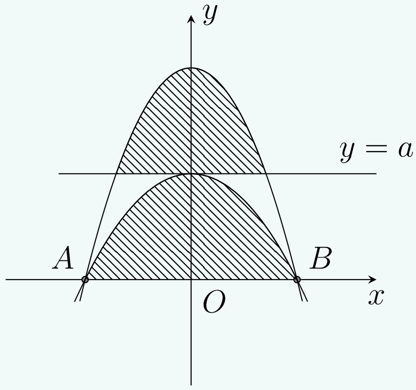
Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\mathcal{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ và trục Ox. Tìm điều kiện để đường thẳng $y = k$ chia $\mathcal{H}$ thành hai phần có tỉ lệ diện tích cho trước.

Phương pháp giải: Ta tính diện tích của từng phần, dựa vào tỉ lệ đề bài yêu cầu ta tìm k.

VÍ DỤ 7.

Cho parabol (P_1): $y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng d: $y = a$ $(0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.



(A) $T = 32$. (B) $T = 64$. (C) $T = 72$. (D) $T = 99$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = a$ cắt (P_1) tại hai điểm có hoành độ $-\sqrt{4-a}$ và $\sqrt{4-a}$. Vậy

$$S_1 = \int_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} (-x^2 + 4 - a)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{4-a} \cdot (4-a).$$

Parabol (P_2) có dạng $y = m(x^2 - 4)$. Chú ý vì nó còn đi qua điểm $(0; a)$ nên $m = -\frac{a}{4}$. Vậy (P_2): $y = -\frac{a}{4}x^2 + a$. Từ đó suy ra

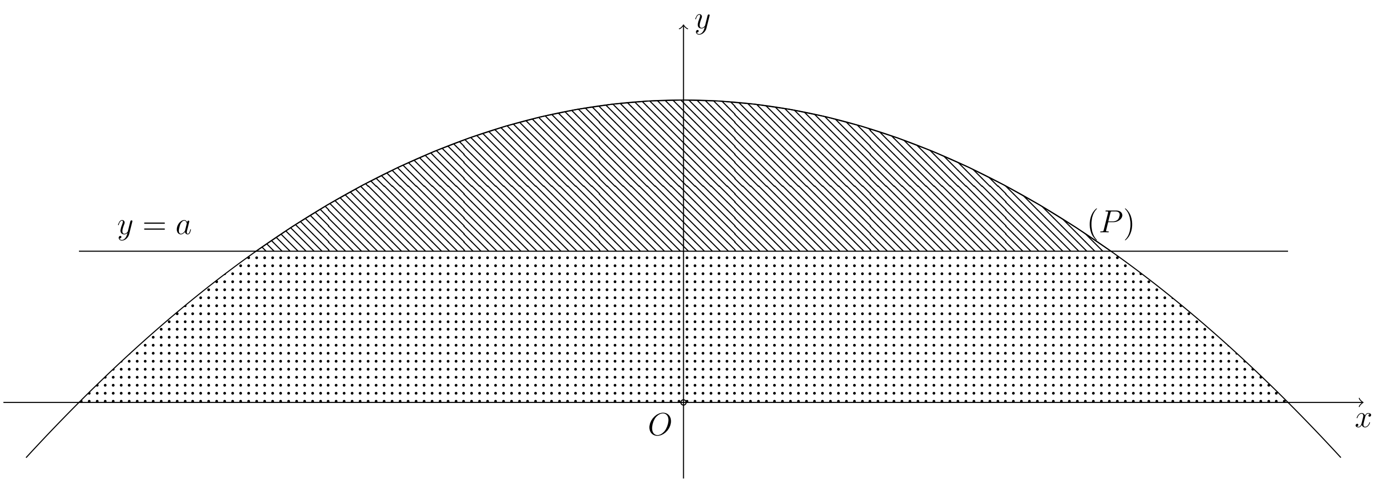
$$S_2 = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{a}{4}x^2 + a\right)\,\mathrm{d}x = \frac{8a}{3}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{16(4-a)^3}{9} = \frac{64a^2}{9} \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 7. Cho parabol (P): $y = -\frac{1}{16}x^2 + 4$. Gọi $\mathcal{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi (P) và Ox. Đường thẳng $y = a$ $(0 < a < 4)$ chia hình phẳng $\mathcal{H}$ thành hai phần bằng nhau (phần gạch chéo và phần chấm). Tính a.



(A) $a = 4 - 2\sqrt[3]{2}$. (B) $a = 4 - \sqrt[3]{2}$. (C) $a = 4 + 2\sqrt[3]{2}$. (D) $a = 4 + \sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = a$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-4\sqrt{4-a}$ và $4\sqrt{4-a}$, (P) cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ -8 và 8.
Diện tích của hình phẳng $\mathcal{H}$ là

$$S = 2\int\limits_0^8 \left(-\frac{1}{16}x^2 + 4\right) \mathrm{d}x = \frac{128}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng $y = a$ là

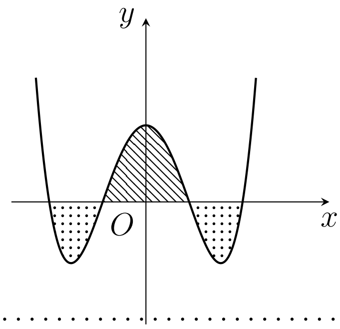
$$S_2 = 2\int\limits_0^{4\sqrt{4-a}} \left(-\frac{1}{16}x^2 + 4 - a\right) \mathrm{d}x = \frac{16}{3}\left(\sqrt{4-a}\right)^3.$$

Suy ra

$$\frac{16}{3}\left(\sqrt{4-a}\right)^3 = \frac{64}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4-a} = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow a = 4 - 2\sqrt[3]{2}.$$

Chọn đáp án (A)

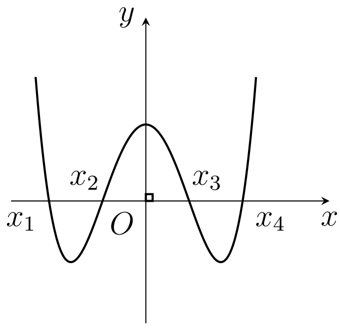
Câu 8.
Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + m$ có đồ thị là (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành. Biết rằng $S_1 = S_2$. Biết rằng giá trị của $m = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a^2 + b^2$.



(A) $T = 25$. (B) $T = 61$. (C) $T = 281$. (D) $T = 1321$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^4 - x^2 + m = 0 \quad (1)$. Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, ta được phương trình $t^2 - t + m = 0 \quad (2)$.
Ta có (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm cùng dương



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}.$$

Gọi các nghiệm của phương trình (1) là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \neq 0$. Do đồ thị (C) nhận trục tung là trục đối xứng nên ta có yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\int\limits_0^{x_4} (x^4 - 3x^2 + m)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow 3x_4^4 - 5x_4^2 + 15m = 0.$$

Mặt khác x_4 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có

$$x_4^4 - x_4^2 + m = 0.$$

Do đó ta có

$$\begin{cases} x_4^4 - x_4^2 + m = 0 \\ 3x_4^3 - 5x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2 = \dfrac{5}{6} \\ m = \dfrac{5}{36}. \end{cases}$$

Ta thấy $m = \dfrac{5}{36}$ thỏa yêu cầu bài toán.
Vậy $T = 5^2 + 36^2 = 1321$.
Chọn đáp án D

§6. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ $Y = F'(X)$

A CHO HÀM SỐ $Y = F'(X)$ LIÊN TỤC TRÊN $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ CÓ ĐỒ THỊ GIAO VỚI TRỤC HOÀNH TẠO THÀNH CÁC MIỀN $S_1, S_2, \ldots$ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HOẶC LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ $Y = F(X)$ TRÊN $\mathscr{D}$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ có đồ thị giao với trục hoành tạo thành các miền $S_1, S_2, \ldots$ Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$.

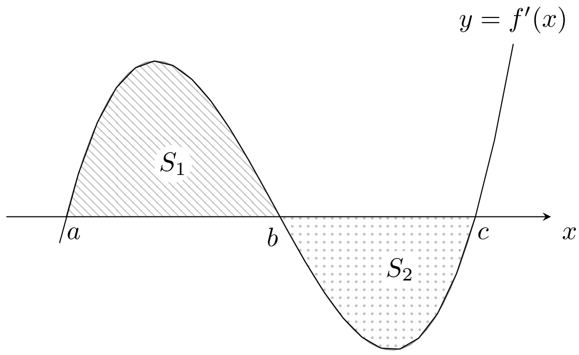
Phương pháp giải:

Bước 1. Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$. Dựa vào bảng thiên chọn ra các giá trị *có thể* là GTNN hoặc GTLN.
Chú ý. Dựa vào đáp án trắc nghiệm có thể bỏ qua bước 1 và làm từ bước 2.

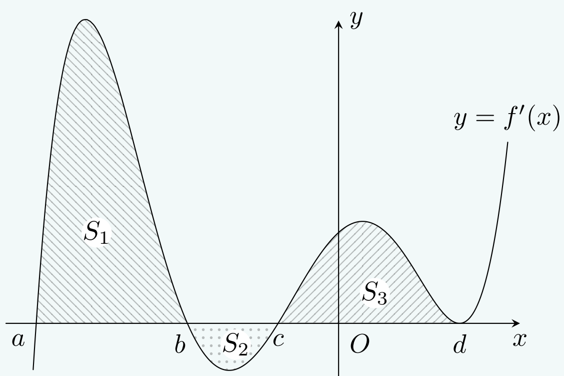
Bước 2. So sánh các giá trị *có thể* là GTNN hoặc GTLN để ra kết quả bài toán bằng cách sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân.

Với S_1, S_2 là diện tích miền như hình bên ta có

- $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = S_1 > 0$.
- $\displaystyle\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(b) = -S_2 < 0$.



VÍ DỤ 1.
Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c và tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ d. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành, biết $S_1 > S_3 > S_2$ (hình vẽ bên). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$.



A $\min f(x) = f(a)$. B $\min f(x) = f(b)$. C $\min f(x) = f(c)$. D $\min f(x) = f(d)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	?	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(d)$	$\nearrow$	?

Ta thấy $\min f(x) \in \{f(a);\ f(c)\}$. Mặt khác ta có

- $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = S_1 \Rightarrow f(a) = f(b) - S_1.$
- $\displaystyle\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(b) = -S_2 \Rightarrow f(c) = f(b) - S_2.$

Mà $S_1 > S_2$ nên $f(a) < f(c)$. Vậy $\min f(x) = f(a)$.

Cách khác. Dựa vào đáp án trắc nghiệm ta thấy $\min f(x) \in \{f(a);\ f(b);\ f(c);\ f(d)\}$ nên ta so sánh các giá trị đó như sau

- $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = S_1 > 0 \Rightarrow f(b) > f(a).$
- $\displaystyle\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(b) = -S_2 < 0 \Rightarrow f(b) > f(c).$
- $\displaystyle\int_c^d f'(x)\,\mathrm{d}x = f(d) - f(c) = S_3 > 0 \Rightarrow f(d) > f(c).$

Ta thấy $\min f(x) \in \{f(a);\ f(c)\}$, tương tự cách trên ta có $\min f(x) = f(a)$.

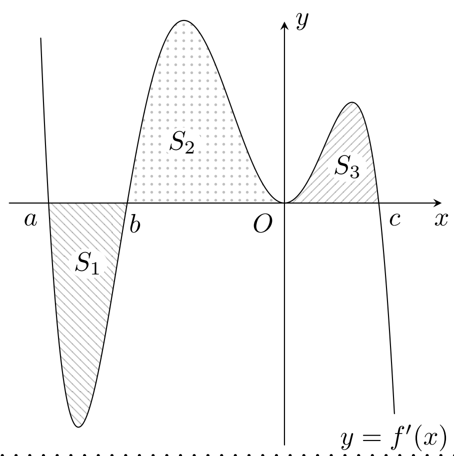
Chọn đáp án A

Câu 1.

Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c và tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ O. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành, biết $S_2 > S_1 > S_3$ (hình vẽ bên). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

A $\max f(x) = f(a)$. B $\max f(x) = f(b)$.

C $\max f(x) = f(c)$. D $\max f(x) = f(0)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		0		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	?	↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(0)$	↗	$f(c)$	↘	?

Ta thấy $\max f(x) \in \{f(a);\ f(c)\}$. Mặt khác ta có

- $\displaystyle\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = -S_1 \Rightarrow f(a) = f(b) + S_1.$

- $\displaystyle\int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(b) = S_2 + S_3 \Rightarrow f(c) = f(b) + S_2 + S_3.$

Mà $S_1 < S_2$ nên $f(a) < f(c)$. Vậy $\max f(x) = f(c)$.

Cách khác. Dựa vào đáp án trắc nghiệm ta thấy $\max f(x) \in \{f(a);\ f(b);\ f(c);\ f(d)\}$ nên ta so sánh các giá trị đó như sau

- $\displaystyle\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = -S_1 < 0 \Rightarrow f(b) < f(a).$

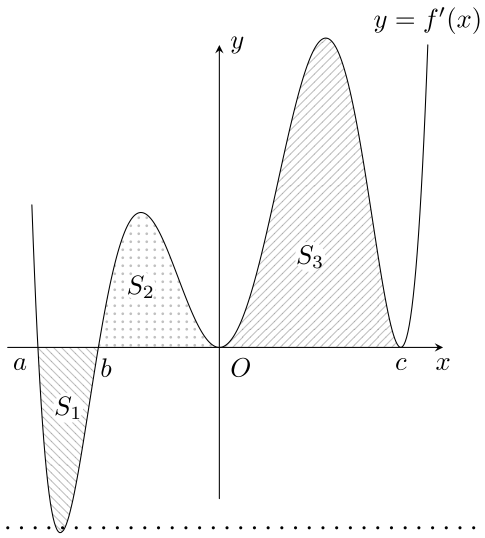
- $\displaystyle\int\limits_b^0 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(0) - f(b) = S_2 > 0 \Rightarrow f(b) < f(0).$

- $\displaystyle\int\limits_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(0) = S_3 > 0 \Rightarrow f(0) < f(c).$

Ta thấy $\max f(x) \in \{f(a);\ f(c)\}$, tương tự cách trên ta có $\max f(x) = f(c)$.
Chọn đáp án C

Câu 2.
Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b và tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ O và điểm có hoành độ là c. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành, biết $S_1 < S_2 < S_3$ (hình vẽ bên). Đặt $M = \max\limits_{x\in[a,c]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[a,c]} f(x)$. Tổng của M và m là

A $f(a) + f(b)$. B $f(b) + f(0)$.
C $f(b) + f(c)$. D $f(a) + f(c)$.



Lời giải.
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		0		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$?$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$?$

Ta thấy $m = f(b)$ và $M \in \{f(a);\ f(c)\}$. Mặt khác ta có

- $\displaystyle\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = -S_1 \Rightarrow f(a) = f(b) + S_1.$

- $\displaystyle\int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(b) = S_2 + S_3 \Rightarrow f(c) = f(b) + S_2 + S_3.$

Mà $S_1 < S_2 < S_3$ nên $f(a) < f(c)$ do đó $M = f(c)$. Vậy $M + m = f(c) + f(b)$.
Cách khác. Dựa vào đáp án trắc nghiệm ta thấy $M, m \in \{f(a);\ f(b);\ f(c);\ f(d)\}$ nên ta so sánh các giá trị đó như sau

- $\displaystyle\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = -S_1 < 0 \Rightarrow f(b) < f(a).$

- $\displaystyle\int\limits_b^0 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(0) - f(b) = S_2 > 0 \Rightarrow f(b) < f(0).$

- $\displaystyle\int\limits_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(0) = S_3 > 0 \Rightarrow f(0) < f(c).$

Ta thấy $m = f(b)$ và $M \in \{f(a);\ f(c)\}$, tương tự cách trên ta có $M = f(c)$.
Chọn đáp án C

B CHO $Y = F'(X)$ ĐƯỢC CHO BỞI NHƯ HÌNH VẼ. TÍNH DIỆN TÍCH S CỦA HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI ĐỒ THỊ (C) VÀ ĐỒ THỊ (C') CỦA HÀM SỐ $Y = G(X)$.

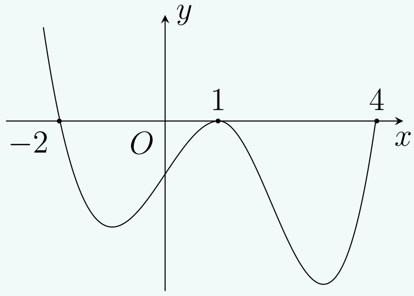
Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathscr{D}$, có đồ thị (C) và $f(x_i) = y_i, i \in \mathbb{N}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho bởi như hình vẽ. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đồ thị (C') của hàm số $y = g(x)$.

Phương pháp giải: Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta xác định được hàm số $y = f'(x)$. Lấy nguyên hàm của hàm $y = f'(x)$ và điều kiện $f(x_i) = y_i$, ta xác định được hàm số $y = f(x)$. Từ đó, ta tính được diện tích S cần tìm.

VÍ DỤ 2.
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng, diện tích hình phẳng giới hạn bởi Ox, đường cong $(C)\colon y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt là 9 và 12. Biết $f(1) = 3$, giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

A 21. B 9. C 3. D 2.



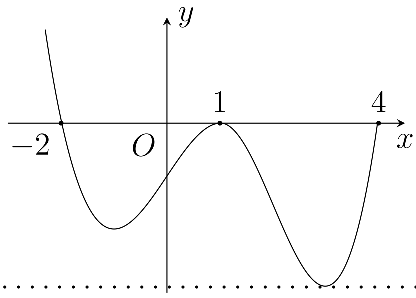
Lời giải.

- Ta có:
$$\int_{-2}^{1} |f'(x)|\, dx = \int_{1}^{-2} f'(x)dx = f(-2) - f(1) = 9$$
suy ra $f(-2) = 9 + f(1) = 12$.
$$\int_{1}^{4} |f'(x)|\, dx = \int_{4}^{1} f'(x)dx = f(1) - f(4) = 12$$
suy ra $f(4) = f(1) - 12 = -9$.
- Vậy $f(-2) + f(4) = 3$.

Chọn đáp án C

Câu 3.
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng, diện tích hình phẳng giới hạn bởi Ox, đường cong $(C)\colon y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt là S_1 và S_2. Biết $f(-2) + f(4) = kf(1)$ thì $S_1 = S_2$. Giá trị k là

A 1. B 2. C 3. D 4.



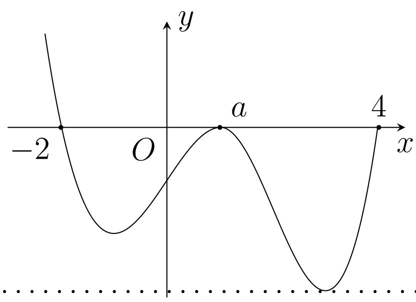
Lời giải.

- Ta có
$$\int_{-2}^{1} |f'(x)|\, dx = \int_{1}^{-2} f'(x)dx = f(-2) - f(1) = S_1$$
$$\int_{1}^{4} |f'(x)|\, dx = \int_{4}^{1} f'(x)dx = f(1) - f(4) = S_2$$
- Vì $S_1 = S_2$ suy ra $f(-2) + f(4) = 2f(1)$. Vậy $k = 2$.

Chọn đáp án B

Câu 4.
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng, diện tích hình phẳng giới hạn bởi Ox, đường cong $(C)\colon y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;a]$ và $[a;4]$ lần lượt là 9 và 12. Biết $\dfrac{f(-2)}{f(4)} = 2$, giá trị biểu thức $f(a)$ bằng

A 31. B 32. C 33. D 34.



Lời giải.

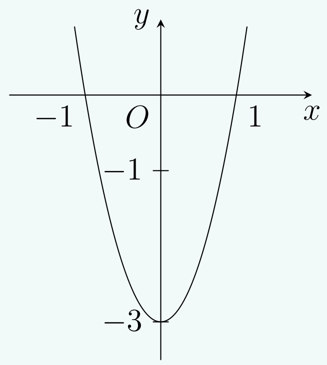
- Ta có
$$\int_{-2}^{a} |f'(x)|\, dx = \int_{a}^{-2} f'(x)dx = f(-2) - f(a) = 9$$
suy ra $f(-2) = 9 + f(a)$.
$$\int_{a}^{4} |f'(x)|\, dx = \int_{4}^{a} f'(x)dx = f(a) - f(4) = 12$$
suy ra $f(4) = f(a) - 12$.

- Vì $\dfrac{f(-2)}{f(4)} = 2$ suy ra $\dfrac{f(a)+9}{f(a)-12} = 2 \Leftrightarrow f(a) = 33$.

Chọn đáp án C

C TÍNH DIỆN TÍCH GIỚI HẠN BỞI (C) BIẾT ĐỒ THỊ $F'(X)$

VÍ DỤ 3.
Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathrm{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.



A $\dfrac{21}{4}$.
B $\dfrac{27}{4}$.
C 9.
D $\dfrac{5}{4}$.

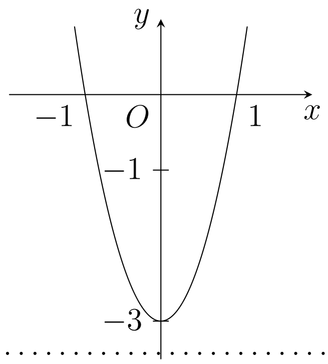
Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho là $y = x^3 - 3x + 2$.
Xét phương trình: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$
$\Rightarrow S = \displaystyle\int_{-2}^{1} \left|x^3 - 3x + 2\right| \mathrm{d}x = \dfrac{21}{4}$.
Chọn đáp án B

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathrm{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng $y = x + 2$.



A 8. **B** 4. **C** 2. **D** 16.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho là $y = x^3 - 3x + 2$.

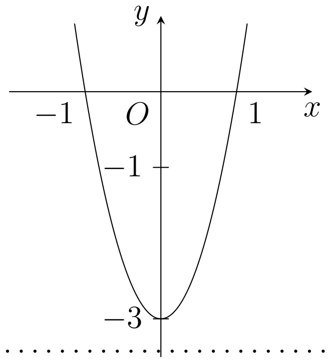
Xét phương trình: $x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2. \end{array}\right.$

$\Rightarrow S = \displaystyle\int\limits_{-2}^{0} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x = 8.$

Chọn đáp án **A**

Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathrm{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C') : y = f(x - 3)$ và trục hoành.



A $\dfrac{27}{4}$. **B** $\dfrac{21}{2}$. **C** 9. **D** 7.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho là $y = x^3 - 3x + 2 \Leftrightarrow y = f(x - 3) = (x - 3)^3 - 3(x - 3) + 2$.

Xét phương trình: $(x - 3)^3 - 3(x - 3) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 1 \\ x - 3 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$\Rightarrow S = \displaystyle\int\limits_{1}^{4} \left|(x - 3)^3 - 3(x - 3) + 2\right| \mathrm{d}x = \frac{27}{4}.$

Chọn đáp án (A)

§7. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

A CHO $F(A) = M_1$, $F(B) = M_2$ VÀ $\int\limits_A^B [F'(X)]^2 \,\mathrm{D}X = A$, $\int\limits_A^B F(X) \cdot G'(X) \,\mathrm{D}X = B$. TÍNH TÍCH PHÂN $\int\limits_A^B F(X) \,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn $f(a) = m_1$, $f(b) = m_2$ và $\int\limits_a^b [f'(x)]^2 \, dx = A$, $\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = B$. Tính tích phân $\int\limits_a^b f(x) \, dx$.

Phương pháp giải:

- Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, kết hợp với giả thiết $f(a) = m_1$, $f(b) = m_2$ để tính được $\int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = C$.
- Tính tích phân $\int\limits_a^b g(x) \, dx = D$.
- Tìm số thực m thỏa mãn: $A + 2mC + m^2 D = 0$. Từ đó suy ra

$$\int\limits_a^b \left([f'(x)]^2 + 2m \cdot f'(x) \cdot g(x) + m^2 \cdot [g(x)]^2\right) dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_a^b [f'(x) + m \cdot g(x)]^2 \, dx = 0.$$

Mà $[f'(x) + m \cdot g(x)]^2 \geqslant 0$, $\forall x \in [a;b]$ nên suy ra $\int\limits_a^b [f'(x) + m \cdot g(x)]^2 \, dx \geqslant 0$.

Do đó

$$\int\limits_a^b [f'(x) + m \cdot g(x)]^2 \, dx = 0 \Leftrightarrow [f'(x) + m \cdot g(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -m \cdot g(x).$$

Suy ra $f(x) = \int (m \cdot g(x)) \, dx = G(x) + C$. Kết hợp với giả thiết $f(a) = m_1$, $f(b) = m_2$ ta tìm được $C = C_1$.

Do đó $f(x) = G(x) + C_1$. Từ đó tính được tích phân $\int\limits_a^b f(x) \, dx$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 \, dx = \frac{\pi}{4}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(x) \, dx = \frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$.

A 2. **B** -1. **C** 1. **D** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có:

- $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 \, dx = \frac{\pi}{4}$. (1)

- Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \cos x \,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases}$.

  Khi đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \qquad (3)$

Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([f'(x)]^2 + 2\sin x f'(x) + \sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - 2\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0.$$

Đẳng thức trên tương đương với $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + \sin x]^2\,\mathrm{d}x = 0$.

Mà $[f'(x)+\sin x]^2 \geqslant 0$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)+\sin x]^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)+\sin x]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow [f'(x)+\sin x]^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\sin x.$$

Suy ra $f(x) = \displaystyle\int (-\sin x)\,\mathrm{d}x = \cos x + C$.

Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = 0$ nên $f(x) = \cos x$.

Vậy $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = 1$.

Chọn đáp án C

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = \ln 2$, $f(0) = 0$ và $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

A $\frac{1}{2}\ln 2$. B $-\frac{1}{2}\ln^2 2$. C $\frac{1}{2}\ln^2 2$. D $-\frac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có:

- $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \qquad (1)$

- Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \dfrac{1}{(x+1)^2}\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)\, dx \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}.$

  Khi đó:
$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{f(x)}{x+1}\Bigg|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\, dx = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2} \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\, dx = \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

- $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \left(-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}. \qquad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra
$$\int\limits_0^1 \left([f'(x)]^2 - 2\frac{f'(x)}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Đẳng thức trên tương đương với $\displaystyle\int\limits_0^1 \left[f'(x) - \frac{1}{x+1}\right]^2 dx = 0.$

Mà $\left[f'(x) - \dfrac{1}{x+1}\right]^2 \geqslant 0, \forall x \in [0;1]$ nên suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 \left[f'(x) - \frac{1}{x+1}\right]^2 dx \geqslant 0.$

Do đó
$$\int\limits_0^1 \left[f'(x) - \frac{1}{x+1}\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \left[f'(x) - \frac{1}{x+1}\right]^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Suy ra $f(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x+1}\, dx = \ln|x+1| + C.$

Vì $\begin{cases} f(1) = \ln 2 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 2 = \ln 2 + C \\ 0 = \ln 1 + C \end{cases} \Rightarrow C = 0$ nên $f(x) = \ln|x+1|.$

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln|x+1|}{x+1}\, dx = \int\limits_0^1 \ln(x+1)\, d(\ln(x+1)) = \frac{1}{2}\ln^2(x+1)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln^2 2.$

Chọn đáp án C

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = \ln 2$, $f(0) = 0$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\, dx = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\, dx = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\, dx.$

A $\dfrac{1}{2}\ln 2.$ B $-\dfrac{1}{2}\ln^2 2.$ C $\dfrac{1}{2}\ln^2 2.$ D $-\dfrac{1}{2}\ln 2.$

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có:

- $\displaystyle\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\, dx = \frac{1}{2}. \qquad (1)$

- Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$.

  Khi đó:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{f(x)}{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$ (3)

Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra

$$\int_0^1 \left([f'(x)]^2 - 2\frac{f'(x)}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Đẳng thức trên tương đương với $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x) - \frac{1}{x+1}\right]^2 \mathrm{d}x = 0.$

Mà $\left[f'(x) - \dfrac{1}{x+1}\right]^2 \geqslant 0, \forall x \in [0;1]$ nên suy ra $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x) - \frac{1}{x+1}\right]^2 \mathrm{d}x \geqslant 0.$

Do đó

$$\int_0^1 \left[f'(x) - \frac{1}{x+1}\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \left[f'(x) - \frac{1}{x+1}\right]^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Suy ra $f(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1| + C.$

Vì $\begin{cases} f(1) = \ln 2 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 2 = \ln 2 + C \\ 0 = \ln 1 + C \end{cases} \Rightarrow C = 0$ nên $f(x) = \ln|x+1|$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln|x+1|}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}\left(\ln(x+1)\right) = \frac{1}{2}\ln^2(x+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln^2 2.$

Chọn đáp án C

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{9}{5}$ và $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{3}{4}$. B $\dfrac{1}{5}$. C $\dfrac{1}{4}$. D $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Do đó $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2tf(t)\,\mathrm{d}t.$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 2tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5} \Rightarrow \int_0^1 2xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}.$

Từ giả thiết, ta có:

- $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{9}{5}.$ (1)

- Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = x^2\mathrm{d}x. \end{cases}.$

  Khi đó:

$$\frac{2}{5} = \int_0^1 2xf(x)\,\mathrm{d}x = x^2f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}. \quad (2)$$

- $\displaystyle\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\int_0^1 \left([f'(x)]^2 - 6\cdot x^2\cdot f'(x) + 9x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{5} - 6\cdot\frac{3}{5} + 9\cdot\frac{1}{5} = 0.$$

Đẳng thức trên tương đương với $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x) - 3x^2\right]^2\mathrm{d}x = 0.$

Mà $[f'(x) - 3x^2]^2 \geqslant 0$, $\forall x \in [0;1]$ nên suy ra $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x) - 3x^2\right]^2\mathrm{d}x \geqslant 0.$

Do đó

$$\int_0^1 \left[f'(x) - 3x^2\right]^2\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \left[f'(x) - 3x^2\right]^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2.$$

Suy ra $f(x) = \displaystyle\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + C.$

Vì $f(1) = 1 \Rightarrow C = 0$ nên $f(x) = x^3$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$

Chọn đáp án C

B CHO $\displaystyle\int_A^B F(X) = C$, $\displaystyle\int_A^B F(X)\cdot G(X)\,DX = D$. TÌM MIN $\displaystyle\int_A^B F^2(X)\,DX$.

Bài toán tổng quát

Đây là nhóm các bài toán có sử dụng đến Bất đẳng thức Holder với trường hợp $p = q = 2$:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_a^b f(x) = c$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = d$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Đặt $\begin{cases} m = \int\limits_a^b mf(x)\,\mathrm{d}x \\ n = \int\limits_a^b ng(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Holder cho tích phân ta có:

$$(mc+nd)^2 = \left(\int\limits_a^b f(x)\cdot(m\cdot g(x)+n)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b (m\cdot g(x)+n)^2\,\mathrm{d}x.$$

VÍ DỤ 2. Cho hàm số liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $0 < m < 1$. **B** $1 < m < 2$. **C** $2 < m < 3$. **D** $3 < m < 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết đặt $\begin{cases} a = \int\limits_0^1 af(x)\,\mathrm{d}x \\ b = \int\limits_0^1 b\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(a+b)^2 = \left(\int\limits_0^1 (a+b\mathrm{e}^x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int\limits_0^1 (a+b\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lại có

$$\int\limits_0^1 (a+b\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (a^2+2ab\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^2-1)a^2+2(e-1)ab+b^2.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \dfrac{(a+b)^2}{\frac{1}{2}(e^2-1)b^2+2(e-1)ab+a^2}$ với mọi $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2>0$.

Do đó $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \max\left\{\dfrac{(a+b)^2}{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\,b^2+2\,(\mathrm{e}-1)\,ab+a^2}\right\} = -1+\dfrac{1}{3-\mathrm{e}}+\dfrac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 3,1.$

Đẳng thức xảy ra khi $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+3} \cdot \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-3}$.
Vậy $3 < m < 4$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$, m có giá trị bằng

A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết đặt $\begin{cases} a = \int\limits_0^1 af(x)\,\mathrm{d}x \\ b = \int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(a+b)^2 = \left(\int\limits_0^1 (a+bx)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int\limits_0^1 (a+bx)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lại có

$$\int\limits_0^1 (a+bx)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (a^2+2abx+b^2x^2)\,\mathrm{d}x = a^2+ab+\frac{b^2}{3}.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \ge \dfrac{(a+b)^2}{a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}}$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ và $a^2+b^2>0$.

Do đó $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \ge \max\left\{\dfrac{(a+b)^2}{a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}}\right\} = 4$.

Đẳng thức xảy ra khi $f(x) = 6x - 2$

Chọn đáp án D

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải.

Từ giả thiết đặt $\begin{cases} a = \int\limits_0^1 af(x)\,\mathrm{d}x \\ b = \int\limits_0^1 bx^2 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

Áp dụng Bất đẳng thức Holder ta có:

$$(a+b)^2 = \left(\int_0^1 (a+bx^2)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 (a+bx^2)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ta có $\displaystyle\int_0^1 (a+bx^2)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(a^2+2abx^2+b^2x^4\right)\,\mathrm{d}x = a^2 + \frac{2ab}{3} + \frac{b^2}{5}$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \ge \max\left\{\frac{(a+b)^2}{a^2+\frac{2ab}{3}+\frac{b^2}{5}}\right\} = 6.$

Đẳng thức xảy ra khi $f(x) = \dfrac{15}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D

CHO $F(0)=M, \displaystyle\int_0^1 \left[F'(X)\cdot F^{2\alpha}(X)+1\right]\mathrm{D}X = 2\int_0^1 \sqrt{F'(X)}\cdot F^{\alpha}(X)\,\mathrm{D}X$. TÍNH $\displaystyle\int_0^1 F^{2\alpha+1}(X)\,\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f'(x)>0, f(x)>0, \forall x\in[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=m, \displaystyle\int_0^1 \left[f'(x)\cdot f^{2\alpha}(x)+1\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}\cdot f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f^{2\alpha+1}(x)\,\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải: Ta có $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x)\cdot f^{2\alpha}(x)+1\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)}\cdot f^{\alpha}(x)-1\right]^2\mathrm{d}x = 0. \qquad (*)$$

Do $\left[\sqrt{f'(x)}\cdot f^{\alpha}(x)-1\right]^2 \ge 0, \forall x\in[0;1] \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)}\cdot f^{\alpha}(x)-1\right]^2\mathrm{d}x \ge 0$.

Giả sử có $x_0\in[0;1]$ sao cho $\sqrt{f'(x_0)}f^{\alpha}(x_0)-1\ne 0 \Rightarrow \left[\sqrt{f'(x_0)}\cdot f^{\alpha}(x_0)-1\right]^2>0$.

Khi đó, xét $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm $g(x)=\left[\sqrt{f'(x)}\cdot f^{\alpha}(x)-1\right]^2$.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)}\cdot f^{\alpha}(x)-1\right]^2\mathrm{d}x = G(1)-G(0)=S(H)$.

Trong đó $S(H)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $g(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=0, x=1$.

Do $S(H)>0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)}\cdot f^{\alpha}(x)-1\right]^2\mathrm{d}x > 0$.

Điều này mâu thuẫn với $(*) \Rightarrow \sqrt{f'(x)}\cdot f^{\alpha}(x)-1=0, \forall x\in[0;1]$.

Do đó ta có $f'(x)\cdot f^{2\alpha}(x)=1\Rightarrow \int f'(x)\cdot f^{2\alpha}(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{f^{2\alpha+1}(x)}{\alpha+1}=x+C$.

Do $f(0)=m\Rightarrow C=\dfrac{m^{2\alpha+1}}{\alpha+1}\Rightarrow \int\limits_0^1 f^{2\alpha+1}(x)\,\mathrm{d}x=\left[\dfrac{\alpha+1}{2}x^2+m^{2\alpha+1}\right]\Big|_0^1$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn $f(0)=2$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\cdot f^2(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

Tính $\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{15}{2}$. B $\dfrac{17}{2}$. C $\dfrac{19}{2}$. D $\dfrac{15}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1\left[f'(x)\cdot f^2(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0.$ (1).

Ta có $\left[\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2\geq 0,\forall x\in[0;1]\Rightarrow\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x\geq 0.$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)=1\Leftrightarrow f'(x)\cdot f^2(x)=1$.

Ta có $\int f'(x)\cdot f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{f^3(x)}{3}=x+C$.

Do $f(0)=2\Rightarrow C=\dfrac{8}{3}\Rightarrow f^3(x)=3x+8$.

Vậy ta có $\int\limits_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(3x+8)\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{3x^2}{2}+8x\right)\Big|_0^1=\dfrac{19}{2}$.

Chọn đáp án C

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\cdot f^4(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}\cdot f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $\int\limits_0^1 f^5(x)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

A $22\mathrm{e}-19$. B $23\mathrm{e}-17$. C $\mathrm{e}+17$. D $32\mathrm{e}-27$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1\left[f'(x)\cdot f^4(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}\cdot f^2(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}\cdot f^2(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0.$ (1).

Ta có $\left[\sqrt{f'(x)}f^2(x)-1\right]^2\geq 0,\forall x\in[0;1]\Rightarrow\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}\cdot f^2(x)-1\right]^2\mathrm{d}x\geq 0.$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\int\limits_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f^2(x) - 1\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)} \cdot f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f^4(x) = 1$.

Ta có $\int f'(x) \cdot f^4(x) \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{f^5(x)}{5} = x + C$.

Do $f(0) = 2 \Rightarrow C = \dfrac{32}{5} \Rightarrow f^5(x) = 5x + 32$.

Vậy $\int\limits_0^1 f^5(x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (5x+32)\,\mathrm{e}^x\big|_0^1 - 5\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 32\mathrm{e} - 27$.

Chọn đáp án D

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 2$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x) \cdot f^2(x) + 1\right] \mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \,\mathrm{d}x$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại tiếp điểm M, biết $x_M = \dfrac{1}{2}$.

A $\dfrac{\sqrt[3]{19}}{2}$. B $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$. C $\sqrt[3]{\dfrac{4}{1038}}$. D $\sqrt[3]{\dfrac{4}{361}}$.

Lời giải.

Ta có $\left[\sqrt{f'(x)}f(x) - 1\right]^2 \geq 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) - 1\right]^2 \mathrm{d}x \geq 0$. (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\int\limits_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) - 1\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f^2(x) = 1$.

Ta có $\int f'(x) \cdot f^2(x) \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{f^3(x)}{3} = x + C$.

Do $f(0) = 2 \Rightarrow C = \dfrac{8}{3} \Rightarrow f^3(x) = 3x + 8 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3x+8} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+8}}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{1}{2}$ là $k = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{4}{361}}$.

Chọn đáp án D

D CHO $F(B) = B_0$, $\int\limits_0^1 G(X) \cdot F(X)\mathrm{D}X = A$ VÀ $\int\limits_0^1 \left[F'(X)\right]^2 \mathrm{D}X = B$. TÍNH TÍCH PHÂN $\int\limits_A^B F(X)\mathrm{D}X$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn đồng thời

$$f(b) = b_0, \int\limits_0^1 g(x) \cdot f(x)\mathrm{d}x = A \text{ và } \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = B.$$

Tính tích phân $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp giải:

- **Cách 1.**
  - Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, kết hợp với giả thiết $f(b) = b_0$, $\int\limits_0^1 g(x) \cdot f(x)\mathrm{d}x = A$ để tính được $\int\limits_0^1 h(x) \cdot f'(x)\mathrm{d}x = K$.
  - Ta cần tìm α sao cho $\int\limits_0^1 [f'(x) + \alpha \cdot h(x)]^2 \, \mathrm{d}x = 0$, tức là

$$\int\limits_a^b [f'(x) + \alpha \cdot h(x)]^2 \, \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow [f'(x) + \alpha \cdot h(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\alpha \cdot h(x).$$

  - Từ đó ta tính được $f(x) = \int -\alpha \cdot h(x)\mathrm{d}x = G(x) + C$. Kết hợp với giả thiết $f(b) = b_0$ ta tìm được C. Từ đó tính được $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

- **Cách 2.** Dùng bất đẳng thức Holder

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \text{ với } p, q \text{ thỏa } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m|f(x)|^p = n|g(x)|^q$.

  Hệ quả Với $p = q = 2$ thì BĐT trở thành $\left(\int f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int g^2(x)\mathrm{d}x$.

  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực k sao cho $f(x) = k \cdot g(x)$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn đồng thời

$$f(1) = 1, \int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \text{ và } \int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \frac{9}{5}.$$

Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A $\frac{1}{4}$.	**B** $\frac{3}{4}$.	**C** $\frac{1}{5}$.	**D** $\frac{4}{5}$.

Lời giải.

- **Cách 1.** Dùng tích phân từng phần
  Đặt
  $$\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$
  Khi đó
  $$\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f'(x) \cdot \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \Rightarrow \int\limits_0^1 x^2 \cdot f'(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}.$$
  Bây giờ giả thiết được đưa về
  $$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \frac{9}{5} \\ \displaystyle\int\limits_0^1 x^2 \cdot f'(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}. \end{cases}$$
  Hàm số dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2$, $x^2f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x) + \alpha x^2]^2$.
  Với mỗi số thực α ta có
  $$\int\limits_0^1 \left[f'(x) + \alpha x^2\right]^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x + 2\alpha \int\limits_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2 \int\limits_0^1 x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{9}{5} + 2\alpha \cdot \frac{3}{5} + \frac{\alpha^2}{5} = \frac{1}{5}(\alpha+3)^2.$$
  Ta cần tìm α sao cho $\displaystyle\int\limits_0^1 \left[f'(x) + \alpha x^2\right]^2 dx = 0$, tức là $\frac{1}{5}(\alpha+3)^2 = 0$ hay $\alpha = -3$.
  Do đó $\displaystyle\int\limits_0^1 \left[f'(x) - 3x^2\right]^2 \mathrm{d}x = 0$, suy ra $f'(x) = 3x^2, \forall x \in [0;1]$, do đó $f(x) = x^3 + C$.
  Lại có $f(1) = 1$ nên $C = 0$, tức là $f(x) = x^3$.
  Vậy $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

- **Cách 2.** Dùng bất đẳng thức Holder
  Dùng tích phân từng phần ta được $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2 \cdot f'(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$.
  Theo bất đẳng thức Holder, ta có
  $$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\int\limits_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int\limits_0^1 x^4\mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 \cdot \frac{9}{5} = \frac{9}{25}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $f'(x) = kx^2$, thay vào $\int\limits_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{5}$ ta được $k = 3$.
Suy ra $f'(x) = 3x^2$, nên $f(x) = x^3 + C$.
Lại có $f(1) = 1$ nên $C = 0$, tức là $f(x) = x^3$.
Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án A

Câu 8. Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời

$$f(1) = 0,\ \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = 7 \text{ và } \int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 1. **B** $\dfrac{7}{5}$. **C** $\dfrac{7}{4}$. **D** 4.

Lời giải.

- **Cách 1.** Dùng tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kết hợp với giả thiết $f(1) = 0$ ta suy ra $\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

Bây giờ giả thiết được đưa về

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = 7 \\ \int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1. \end{cases}$$

Hàm số dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^3 f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x) + \alpha x^3\right]^2$.
Với mỗi số thực α ta có

$$\int\limits_0^1 \left[f'(x) + \alpha x^3\right]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x + 2\alpha \int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2 \int\limits_0^1 x^6\,\mathrm{d}x = 7 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{7} = \frac{1}{7}(\alpha - 7)^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int\limits_0^1 \left[f'(x) + \alpha x^3\right]^2\,\mathrm{d}x = 0$, tức là $\dfrac{1}{7}(\alpha - 7)^2 = 0$ hay $\alpha = 7$.

Do đó $\int\limits_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2 dx = 0$, suy ra $f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1]$, do đó $f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + C$.

Lại có $f(1)=0$ nên $C=\frac{7}{4}$, tức là $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{5}$.

- **Cách 2.** Dùng bất đẳng thức Holder
  Dùng tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kết hợp với giả thiết $f(1)=0$ ta suy ra $\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=-1$.

Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$(-1)^2=\left(\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leq\int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x\cdot\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^7}{7}\Big|_0^1\cdot 7=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $f'(x)=kx^3$, thay vào $\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=-1$ ta được $k=-7$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3$, nên $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$.

Lại có $f(1)=0$ nên $C=\frac{7}{4}$, tức là $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{5}$.

Chọn đáp án B

Câu 9. Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời

$$f(1)=1,\int\limits_0^1 x^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{11}{78}\text{ và }\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\frac{4}{13}.$$

Tính $f(2)$.

A $f(2)=2$. B $f(2)=\frac{251}{7}$. C $f(2)=\frac{256}{7}$. D $f(2)=\frac{261}{7}$.

Lời giải.

- **Cách 1.** Ta có

$$\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}(f(x))=\frac{4}{13}\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{4}{13}.$$

Dùng tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 x^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^6}{6}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int\limits_0^1 x^6 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kết hợp với giả thiết $f(1) = 1$, ta suy ra $\int\limits_0^1 x^6 f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{13}$.

Bây giờ giả thiết được đưa về

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{13} \\ \int\limits_0^1 x^6 f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{13}. \end{cases}$$

Hàm số dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2$, $x^6 f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x) + \alpha x^6]^2$.

Tương tự như bài trên ta tìm được $\alpha = -2$, suy ra $f'(x) = 2x^6$, do đó $f(x) = \dfrac{2}{7}x^7 + C$.

Lại có $f(1) = 1$ nên $C = \dfrac{5}{7}$, tức là $f(x) = \dfrac{2}{7}x^7 + \dfrac{5}{7}$.

Vậy $f(2) = \dfrac{2}{7} \cdot 2^7 + \dfrac{5}{7} = \dfrac{261}{7}$.

- **Cách 2.** Dùng bất đẳng thức Holder
  Dùng tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 x^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\int\limits_0^1 x^6 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kết hợp với giả thiết $f(1) = 1$, ta suy ra $\int\limits_0^1 x^6 f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{13}$.

Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\frac{2}{13}\right)^2 = \left(\int\limits_0^1 x^6 f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int\limits_0^1 x^{12}\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{169}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $f'(x) = kx^6$, thay vào $\int\limits_0^1 x^6 f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{13}$ ta được $k = 2$.

Suy ra $f'(x) = 2x^6$, nên $f(x) = \dfrac{2}{7}x^7 + C$.

Lại có $f(1) = 1$ nên $C = \dfrac{5}{7}$, tức là $f(x) = \dfrac{2}{7}x^7 + \dfrac{5}{7}$.

Vậy $f(2) = \dfrac{2}{7} \cdot 2^7 + \dfrac{5}{7} = \dfrac{261}{7}$.

Chọn đáp án D

E CHO $F(A) = M$, $\int\limits_0^A [F'(X)]^2\, DX = N$ VÀ $\int\limits_0^A F(X)\cdot G(X)\, DX = P$. TÍNH TÍCH PHÂN $\int\limits_0^A F(X)\, DX$

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(a) = m$, $\int\limits_0^a [f'(x)]^2\, dx = n$ và $\int\limits_0^a f(x)\cdot g(x)\, dx = p$. Tính tích phân $\int\limits_0^a f(x)\, dx$. Trong đó biết $g(x)$ là hàm tường minh biết trước.

Phương pháp giải: Ta làm các bước sau

Bước 1. Xử lí biểu thức tích phân $\int\limits_0^a f(x)\cdot g(x)\, dx = p$ bằng phương pháp tích phân từng phần để xuất hiện $\int\limits_0^a f'(x)\cdot g_1(x)\, dx = p_1$. Trong đó $g_1(x) = \int g(x)\, dx$.

Bước 2. Nhóm hằng đẳng thức Ta có $\begin{cases} \int\limits_0^a [f'(x)]^2\, dx = n \\ 2k\cdot \int\limits_0^a f'(x)\cdot g_1(x)\, dx = 2k\cdot p_1 \\ k^2 \int\limits_0^a (g_1(x))^2\, dx = k^2\cdot q \end{cases}$.

Tìm số k sao cho $n + 2kp_1 + k^2q = 0$ khi đó ta được $\int\limits_0^a [f'(x) + kg_1(x)]^2\, dx = 0$. Từ đó suy ra $f'(x) = kg_1(x)$, dựa vào điều kiện $f(a) = m$ ta tìm được chính xác $f(x)$.

Bước 3. Tính $\int\limits_0^a f(x)\, dx$.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2) = 2$, $\int\limits_0^2 [f'(x)]^2\, dx = \dfrac{512}{9}$ và $\int\limits_0^{16} f\left(\sqrt[4]{x}\right)\, dx = -\dfrac{224}{9}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 f(x)\, dx$.

Ⓐ $I = -\dfrac{20}{3}$. Ⓑ $I = \dfrac{32}{4}$. Ⓒ $I = -\dfrac{32}{15}$. Ⓓ $I = \dfrac{108}{5}$.

Lời giải.

Bước 1. Xử lí tích phân $\int\limits_0^{16} f\left(\sqrt[4]{x}\right)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{224}{9}$.

Đặt $t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow t^4 = x \Rightarrow 4t^3\,\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}x$.
Đổi cận ta được $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 16 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $\int\limits_0^{16} f\left(\sqrt[4]{x}\right)\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^{2} f(t)\cdot t^3\,\mathrm{d}t = -\dfrac{224}{9} \Leftrightarrow \int\limits_0^{2} f(x)\cdot x^3\,\mathrm{d}x = -\dfrac{56}{9}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^3\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^4}{4}. \end{cases}$

Khi đó: $-\dfrac{56}{9} = \int\limits_0^{2} x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^4}{4}f(x)\right]\Bigg|_0^2 - \int\limits_0^{2} \dfrac{x^4}{4}f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^{2} x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{512}{9}$.

Bước 2. Nhóm hằng đẳng thức

Ta có $\begin{cases} \int\limits_0^{2} \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{512}{9} \\ -2\cdot\int\limits_0^{2} x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = -2\cdot\dfrac{512}{9} \\ \int\limits_0^{2} x^8\,\mathrm{d}x = \dfrac{512}{9} \end{cases}$

Suy ra ta có $\int\limits_0^{2} \left[f'(x) - x^4\right]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = x^4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^5}{5} + C$, mà $f(2) = 2 \Rightarrow C = -\dfrac{22}{5}$.

Vậy $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{22}{5}$.

Bước 3. Vậy $I = \int\limits_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2} \left(\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{22}{5}\right)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{20}{3}$.

Chọn đáp án A

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn điều kiện $f(2) = 3$, $\int\limits_0^{2} \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_0^{2} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{266}{115}$. B $\dfrac{2}{115}$. C $\dfrac{562}{115}$. D $\dfrac{297}{115}$.

Lời giải.

Theo giả thiết $\int\limits_0^{2} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \int_0^2 3x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad (1).$

Ta có $I = \int\limits_0^{2} 3x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = 3x^2\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = x^3 \end{cases}$

Khi đó $I = x^3 f(x)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 24 - \int_0^2 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $1 = 24 - \int\limits_0^2 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^2 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 23$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^2 \left[\frac{4}{23}x^3 f'(x) - \left[f'(x)\right]^2\right]\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^2 f'(x)\left[\frac{4}{23}x^3 - f'(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{23}x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{23}x^4 + C$$

Theo giả thiết $f(2) = 3 \Rightarrow C = \dfrac{53}{23}$. Khi đó $f(x) = \dfrac{1}{23}x^4 + \dfrac{53}{23}$.

Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\dfrac{1}{23}x^4 + \dfrac{53}{23}\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{1}{115}x^5 + \dfrac{53}{23}\right)\Big|_0^2 = \dfrac{562}{115}$.

Chọn đáp án C

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(1) = 2$, $\int\limits_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{11}$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{49}{11}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{7}{11}$. B 2. C $\dfrac{1}{11}$. D 1.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{3}{11} = \frac{1}{5}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(x^5) = \frac{1}{5}x^5 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{5}\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{55}$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{11}.$$

Kết hợp $\begin{cases} \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{49}{11} \\ \int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{7}{11} \end{cases}$ và $\int\limits_0^1 x^{10}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{11}$ ta được:

$$\int\limits_0^1 \left[[f'(x)]^2 - 14x^5 f'(x) + 49x^{10}\right] \mathrm{d}x = \frac{49}{11} - \frac{98}{11} + \frac{49}{11} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) - 7x^5] \,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 7x^5.$$

Khi đó $f(x) = \dfrac{7x^6}{6} + \dfrac{5}{6}$ vì $f(1) = 2$.

Do đó $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{7x^6}{6} + \frac{5}{6}\right) \mathrm{d}x = 1$.

Chọn đáp án D

---

§8. TÍCH PHÂN CHỨA THAM SỐ

A TÌM $F(X)$, BIẾT $\displaystyle\int\limits_{X_0}^{\varphi(X)} F(T)\,\mathrm{D}T = G(X)$.

Bài toán tổng quát

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[x_0; +\infty)$. Tìm hàm số $f(x)$, biết $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x)$.

Phương pháp giải: Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $f(t)$, ta có

$$\int\limits_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)\big|_{x_0}^{\varphi(x)} = F\left(\varphi(x)\right) - F(x_0) = g(x).$$

Đạo hàm hai vế ta có

$$F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g'(x) \Rightarrow f(\varphi(x)) = \frac{g'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Bằng cách đặt $u = \varphi(x)$, ta rút x ra theo u thay vào ta được hàm $f(u)$, từ đó suy ra hàm $f(x)$.

VÍ DỤ 1. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm $f(9)$, biết rằng $\displaystyle\int\limits_1^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = x\cos(\pi x)$.

A $f(9) = -\dfrac{1}{6}$. B $f(9) = \dfrac{1}{6}$. C $f(9) = -\dfrac{1}{9}$. D $f(9) = \dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $f(t)$ trên khoảng $(0; +\infty)$, suy ra

$$F(t)\big|_1^{x^2} = F(x^2) - F(1) = x\cos(\pi x)$$

từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&\left(F(x^2)-F(1)\right)' = 2xf(x^2) = \cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi x)\\
\Leftrightarrow\ & f(x^2) = \frac{\cos(\pi x)}{2x} - \frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\\
\Rightarrow\ & f(x) = \frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \frac{\pi}{2}\sin(\pi\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(9) = -\dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án A

Câu 1. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm $f(-1)$, biết rằng $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = x^8 + 2x^6 - 3x^2$.

A $f(-1) = 1$. B $f(-1) = -1$. C $f(-1) = 7$. D $f(-1) = -7$.

Lời giải.

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $f(t)$ trên $\mathbb{R}$, suy ra

$$F(t)\big|_0^{x^2} = F(x^2) - F(0) = x^8 + 2x^6 - 3x^2$$

từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&\left(F(x^2)-F(0)\right)' = 2xf(x^2) = 8x^7 + 12x^5 - 6x\\
\Rightarrow\ & f(x^2) = 4x^6 + 6x^4 - 3\\
\Rightarrow\ & f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(-1) = -1$.

Chọn đáp án B

Câu 2. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm $f(\pi)$, biết rằng $\displaystyle\int_0^{\cos x} f(t)\,\mathrm{d}t = \cos^3 x$.

A $f(\pi) = -3\pi^2$. B $f(\pi) = -3$. C $f(\pi) = -1$. D $f(\pi) = 3\pi^2$.

Lời giải.

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $f(t)$ trên $\mathbb{R}$, suy ra

$$F(t)\big|_0^{\cos x} = F(\cos x) - F(1) = \cos^3 x$$

từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&\left(F(\cos x)-F(1)\right)' = -f(\cos x)\sin x = -3\cos^2 x\sin x\\
\Rightarrow\ & f(\cos x) = 3\cos^2 x\\
\Rightarrow\ & f(x) = 3x^2.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(\pi) = 3\pi^2$.

Chọn đáp án D

B CHO $Y = F(X)$ LIÊN TỤC TRÊN KHOẢNG K. BIẾT RẰNG $\int_A^{U(X)} F(T)\,DT = G(U(X))$. TÍNH GIÁ TRỊ $F(B)$.

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K. Biết rằng

$$\int\limits_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = g(u(x)),\ \forall x \in K.$$

Tính giá trị $f(b)$.

Phương pháp giải:

PP 1: Gọi F là một nguyên hàm của hàm số f trên K, tức là $F'(x) = f(x),\quad \forall x \in K$. Khi đó, ta có

$$\int\limits_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(u(x)) - F(a).$$

Từ giả thiết

$$\int\limits_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = g(u(x)),\ \forall x \in K,$$

suy ra $F(u(x)) = g(u(x)) + F(a)$, hay $F(x) = g(x) + F(a)$. Do đó, ta có

$$f(x) = F'(x) = g'(x).$$

Vậy, ta có kết quả $f(b) = g'(b)$.

PP 2: Sử dụng công thức đạo hàm theo cận trên

$$\left(\int\limits_a^{\alpha(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \alpha'(x)\, f(\alpha(x)).$$

Từ giả thiết

$$\int\limits_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = g(u(x)),\ \forall x \in K,$$

đạo hàm 2 vế theo biến x, ta được

$$u'(x) f(u(x)) = u'(x) g'(u(x)).$$

Vậy, ta có kết quả $f(b) = g'(b)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng

$$\int\limits_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = e^{x^2} + x^4 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giá trị $f(4)$ là

(A) $e^4 + 8$. (B) $e^4 + 4$. (C) $4e^4$. (D) 1.

Lời giải.

PP1: Gọi F là một nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có

$$F(x^2) - F(0) = \int\limits_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = e^{x^2} + x^4 - 1.$$

Suy ra $F(x) = e^x + x^2 - 1 + F(0)$, hay $f(x) = F'(x) = e^x + 2x$. Vậy

$$f(4) = F'(4) = e^4 + 8.$$

PP2: Từ giả thiết, ta có

$$\int\limits_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = e^{x^2} + x^4 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đạo hàm 2 vế theo biến x, ta được

$$2x\,f(x^2) = 2xe^{x^2} + 4x^3.$$

Suy ra

$$f(x^2) = e^{x^2} + 2x^2.$$

Vậy, ta có kết quả

$$f(4) = f(2^2) = e^4 + 8.$$

Chọn đáp án A

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0, +\infty)$. Biết rằng

$$\int\limits_{x^2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = e^2 - x^2\,e^{x^2+\frac{1}{x^2}},\ \forall x \neq 0.$$

Giá trị $\ln f(1)$ là

A 2. B -2. C 1. D -1.

Lời giải.

Gọi F là một nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có

$$F(1) - F(x^2) = \int\limits_{x^2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = e^2 - x^2\,e^{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

Suy ra

$$F(x) = -e^2 + xe^{x+\frac{1}{x}} + F(1).$$

Khi đó, ta có

$$f(x) = F'(x) = \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}.$$

Vậy, ta có kết quả

$$\ln f(1) = \ln e^2 = 2.$$

Chọn đáp án A

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ thỏa

$$\int\limits_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad \forall x > 1.$$

Tính $f(4)$.

A 1. **B** $\frac{1}{2}$. **C** $\frac{1}{4}$. **D** $\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có

$$\int\limits_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad \forall x > 1;$$

nên đạo hàm 2 vế theo biến x, ta được

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Suy ra $f(x) = \frac{1}{x}$. Vậy $f(4) = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **C**