PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN
PHƯƠNG PHÁP SỐ

Hoàng Văn Đông

Bộ môn Khoa học máy tính, Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Thuỷ Lợi

30/6/2019

Mục lục

Nghiệm và khoảng phân ly nghiệm

Xét phương trình một ẩn

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

trong đó f là hàm số cho trước. Khi đó, giá trị x_0 được gọi là nghiệm của phương trình nếu $f(x_0) = 0$.

Định lý tồn tại nghiệm

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a, b] và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thực trong khoảng [a, b].

Khoảng phân ly nghiệm

Khoảng [a,b] được gọi là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (1) nếu nó chứa một và chỉ một nghiệm của phương trình đó.
Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, đơn điệu trên đoạn [a,b] và $f(a)f(b) < 0$ thì đoạn [a,b] là một khoảng phân ly nghiệm của phương trình (1).

Ý tưởng: xây dựng một dãy các số $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ với x_0 là giá trị xuất phát sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Với α là một nghiệm đúng của phương trình (1).
Như vậy, với n khá lớn, ta có thể coi x_n là một nghiệm xấp xỉ của nghiệm đúng α.

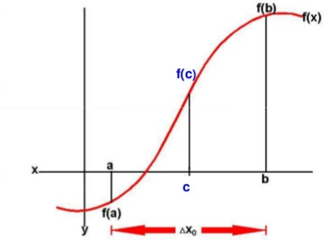
Định lý sai số

Với hàm $f(x)$ liên tục và khả vi trên đoạn [a, b], ngoài ra tồn tại m sao cho $0 < m \leq |f'(x)|$ với $\forall x \in$ [a, b]. Khi đó ta có đánh giá:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$

Phương pháp chia đôi

Ý tưởng: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a, b] và $f(a)f(b) < 0$ thì trong khoảng [a, b] phải tồn tại một nghiệm α. Ta sẽ tiến hành tiếp cận nghiệm α này bằng cách lần lượt chia đôi khoảng xét nghiệm và xác định lại khoảng chứa nghiệm cho đến khi khoảng xét đủ nhỏ.



Tiếp theo là các bước thực hiện phương pháp chia đôi giải gần đúng phương trình f(x) $= 0$ với sai số chấp nhận được ε.

Phương pháp chia đôi

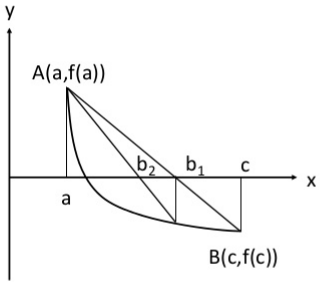
Bước 0: Đặt $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$
Nếu $f(x_0) = 0$, kết thúc, kết luận nghiệm.
Nếu $f(x_0) \neq 0$. Xét giá trị $c_0 = f(a_0)f(x_0)$.
Nếu $c_0 > 0$ thì khoảng nghiệm mới là $[x_0, b_0]$, đặt $a_1 = x_0, b_1 = b_0$
Nếu $c_0 < 0$ thì khoảng nghiệm mới là $[a_0, x_0]$. đặt $a_1 = a_0, b_1 = x_0$
...
Bước i: Đặt $x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$
Nếu $f(x_i) = 0$, kết thúc, kết luận nghiệm.
Nếu $f(x_i) \neq 0$. Xét giá trị $c_i = f(a_i)f(x_i)$.
Nếu $c_i > 0$ thì khoảng nghiệm mới là $[x_i, b_i]$, đặt $a_{i+1} = x_i, b_{i+1} = b_i$
Nếu $c_i < 0$ thì khoảng nghiệm mới là $[a_i, x_i]$. đặt $a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = x_i$
Kiểm tra sai số, nếu $\dfrac{b_{i+1} - a_{i+1}}{2} = \dfrac{b - a}{2^{i+2}} < \varepsilon$, dừng lại, kết luận nghiệm xấp xỉ là $\dfrac{b_{i+1} + a_{i+1}}{2}$. Nếu không, chuyển sang bước i + 1 cho đến khi đạt số vòng lặp giới hạn.

Phương pháp chia đôi

Ví dụ 1: Giải gần đúng phương trình f(x) = sin(x) - x^2cos(x) = 0

Phương pháp dây cung

Điều kiện để thực hiện phương pháp dây cung cũng giống như phương pháp chia đôi, là f(x) liên tục trên [a,b] và f(a), f(b) trái dấu.
Về nguyên tắc phương pháp dây cung cũng giống như phương pháp chia đôi, nghĩa là dựa vào hai điểm $a_0 = a, b_0 = b$ ban đầu ta sẽ chọn tiếp các điểm x_n nằm trong khoảng $[a_n, b_n]$, sao cho khoảng chọn luôn luôn chứa nghiệm đúng của phương trình, ở đây, điểm đó là giao điểm giữa dây cung nối hai điểm biểu diễn đồ thị tại hai đầu khoảng với trục hoành.



Phương pháp dây cung

Tiếp theo là các bước thực hiện phương pháp chia đôi giải gần đúng phương trình f(x) = 0 với sai số chấp nhận được ε cùng hằng số m thoả mãn $0 < m \leq |f'(x)|\ \forall x \in [a, b]$

Bước 0: Đặt $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$

Nếu $|f(x_0)| < m\varepsilon$, kết thúc, kết luận nghiệm.
Nếu $|f(x_0)| > m\varepsilon$. Xét giá trị $c_0 = f(a_0)f(x_0)$.
Nếu $c_0 > 0$ thì khoảng nghiệm mới là $[x_0, b_0]$, đặt $a_1 = x_0, b_1 = b_0$
Nếu $c_0 < 0$ thì khoảng nghiệm mới là $[a_0, x_0]$. đặt $a_1 = a_0, b_1 = x_0$

Phương pháp dây cung

Bước i: Đặt $x_i = \dfrac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$
Nếu $|f(x_i)| < m\varepsilon$, kết thúc, kết luận nghiệm.
Nếu $|f(x_i)| > m\varepsilon$. Xét giá trị $c_i = f(a_i)f(x_i)$.
Nếu $c_i > 0$ thì khoảng nghiệm mới là $[x_i, b_i]$, đặt $a_{i+1} = x_i, b_{i+1} = b_i$
Nếu $c_i < 0$ thì khoảng nghiệm mới là $[a_i, x_i]$. đặt $a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = x_i$
Nếu i lớn hơn số bước lặp tối đa thì thông báo và kết thúc, nếu không chuyển sang bước i+1.

Phương pháp dây cung

Trừ cách đánh giá sai số chung của phương pháp lặp đã nêu, phương pháp dây cung còn có thêm một cách đánh giá sai số khác nếu có thêm điều kiện của |f'(x)|.

Định lý

Giả sử f'(x) liên tục và không đổi dấu trên [a,b] và thỏa mãn:
$\exists m, M$ sao cho $0 < m \leq |f'(x)| \leq M < \infty \ \forall x \in [a, b]$
khi đó ta có:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M - m}{m}|x_n - x_{n-1}|$$

Phương pháp lặp đơn

Giả sử phương trình (1) có nghiệm trong khoảng [a,b] và ta biến đổi được về dạng tương đương

$$x = \varphi(x) \qquad (2)$$

Tiếp đó ta sẽ chọn giá trị $x_0 \in [a, b]$ làm giá trị xấp xỉ ban đầu rồi tính dần các nghiệm xấp xỉ x_n theo công thức

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \qquad (3)$$

Phương pháp lặp đơn

Điều kiện hội tụ

- $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình
- Mọi x_n đều $\in$ [a,b]
- Hàm $\varphi(x)$ có đạo hàm $\varphi'(x)$ và thỏa mãn: $|\varphi'(x)| \leq q < 1, x \in (a, b)$

Sai số

Sai số của phương pháp lặp đơn được đánh giá bởi công thức:

$$|x_n - \alpha| \leq q^n |b - a|$$

hoặc

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|$$

Phương pháp lặp đơn

Ví dụ 2: giải phương trình

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

Phương pháp tiếp tuyến

Cho f(x) sao cho giá trị của f(x) trái dấu tại a và b, đồng thời tồn tại đạo hàm f'(x) $\neq$ 0 trong khoảng [a, b] và đạo hàm cấp 2 tại mọi x $\in$ (a, b). Giả sử x là nghiệm đúng và x_n là nghiệm xấp xỉ tại bước lặp thứ n. Đặt $x = x_n + \Delta x_n$. Theo khai triển Taylor bậc 1 ta có:

$$f(x) = f(x_n + \Delta x_n) = f(x_n) + \Delta x_n f'(x_n) + \frac{\Delta x_n^2}{2!} f''(c) = 0$$

với c $\in (x_n, x)$

Phương pháp tiếp tuyến

Như vậy, nếu Δx_n đủ nhỏ thì ta có công thức gần đúng:

$$0 = f(x) \approx f(x_n) + \Delta x_n f'(x_n)$$

Do đó

$$\Delta x_n \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow x \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Từ đây ta suy ra công thức lặp của phương pháp tiếp tuyến:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Phương pháp tiếp tuyến

Điều kiện hội tụ

- $[a, b]$ là khoảng chứa nghiệm α của phương trình
- Đạo hàm bậc 1 và bậc 2 của f(x) không đổi dấu trong (a, b), nói cách khác **hàm f là hàm đơn điệu lồi hoặc đơn điệu lõm trên đoạn [a, b]**.
- Xấp xỉ đầu x_0 được chọn sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với $f''(x_0)$

Sai số

Trừ cách đánh giá sai số chung của phương pháp lặp đã nêu, phương pháp tiếp tuyến còn có thêm một cách đánh giá sai số khác.
Giả sử f'(x) liên tục và không đổi dấu trên [a,b] và thỏa mãn:
$\exists m, M$ sao cho $0 < m \leq |f'(x)|; |f''(x)| \leq M < \infty \ \forall x \in [a, b]$
khi đó ta có:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2$$