CÁC PHƯƠNG PHÁP TRONG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

PHƯƠNG PHÁP SỐ

Hoàng Văn Đông

Bộ môn Khoa học máy tính, Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Thuỷ Lợi

30/6/2019

Mục lục

- Ma trận và định thức
- Giải trực tiếp hệ phương trình đại số tuyến tính
- Giải gần đúng hệ phương trình đại số tuyến tính

Ma trận và định thức

Ma trận chữ nhật A cấp *mxn*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nếu m = n, ta gọi A là ma trận vuông cấp *n*.
Nếu ma trận vuông cấp *n* A có mọi phần tử $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ thì A được gọi là ma trận đường chéo chính. Đặc biệt, nếu $a_{ii} = 1 \ \forall i$ thì A là ma trận đơn vị.
Nếu ma trận vuông cấp *n* A thoả mãn $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$ thì A là ma trận tam giác trên, ngược lại, nếu $a_{ij} = 0 \forall i < j$ thì A là ma trận tam giác dưới.

Ma trận và định thức

Ma trận chuyển vị của A, kí hiệu A^T có dạng:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ma trận và định thức

Cho $\alpha = (i_1, i_2, ..., i_n)$ là một hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ Ta xét tất cả các cặp (i_k, i_h), trong đó k $<$ h.
Nếu $i_k > i_h$ thì ta gọi cặp (i_k, i_h) là cặp ngược.
Nếu trong α số cặp ngược là chẵn thì ta gọi α là hoán vị chẵn, ngược lại thì ta gọi α là hoán vị lẻ.

Định thức

Ma trận A vuông cấp n, định thức của ma trận A được tính bởi công thức

$$detA = \sum_{\alpha} s(i_1, i_2, ..., i_n) a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_n}$$

Trong đó $s(i_1, i_2, ..., i_n)$ nhận giá trị 1 nếu $(i_1, i_2, ..., i_n)$ là hoán vị chẵn, nhận giá trị -1 nếu $(i_1, i_2, ..., i_n)$ là hoán vị lẻ.

Ma trận và định thức

Hạng của ma trận

Cho ma trận A cấp mxn, số r thoả mãn điều kiện

- Tồn tại một ma trận con vuông cấp r của A có định thức khác 0
- Mọi ma trận con vuông cấp lớn hơn r đều có định thức bằng 0

được gọi là hạng của ma trận A

Các phép biến đổi không ảnh hưởng đến hạng của ma trận

- Đổi chỗ 2 hàng hoặc 2 cột bất kỳ.
- Nhân một hàng hay một cột bất kỳ với một số khác không.
- Cộng các thành phần tương ứng của 2 hàng hoặc hai cột bất kỳ.

Ma trận và định thức

Ma trận nghịch đảo

Ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông A cấp n là ma trận được ký hiệu là A^{-1}, thoả mãn điều kiện:

$$A{-}1\ A = A\ A^{-1} = E$$

Trong đó E là ma trận đơn vị.

- Ma trận A có ma trận nghịch đảo khi và chỉ khi ma trận A vuông và có định thức khác 0.
- $det\ A.det\ A^{-1} = 1$

Giải trực tiếp hệ phương trình đại số tuyến tính

Xét một hệ phương trình gồm n phương trình tuyến tính với n ẩn số $x_1, x_2, ..., x_n$ như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Giải trực tiếp hệ phương trình đại số tuyến tính

Hệ phương trình này có thể viết dưới dạng ma trận Ax = b, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nếu det A $\neq 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất x $= A^{-1}b$. Áp dụng công thức tính ma trận nghịch đảo ta có định lý Cramer.

Định lý Cramer

Gọi A_j là ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bằng cột b, khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất và x_j được tính bởi công thức

$$x_j = \frac{detA_j}{detA}$$

Phương pháp khử Gauss

Ý tưởng của phương pháp khử Gauss: biến đổi tương đương đưa phương trình về dạng A'x = b, trong đó A' là ma trận tam giác trên.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
\qquad \qquad \qquad a_{nn}\,x_n = b_n
\end{cases}
$$

Phương pháp khử Gauss

Quá trình xuôi: Ta tiến hành khử lần lượt biến x_i tại n - i phương trình cuối bằng cách cộng n - i phương trình cuối với một tích của hàng thứ i. Cụ thể, sau mỗi bước khử biến x_i, hệ số mới của n - i hàng cuối sẽ bằng:

$$a_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{ki}.a_{ij}}{a_{ii}} \ \forall j, k \geq i$$

Và giá trị của b sẽ thay đổi bởi công thức

$$b_j = b_j - \frac{a_{ki}.b_i}{a_{ii}}$$

Phương pháp khử Gauss

Quá trình ngược: là quá trình giải lại nghiệm sau khi có được hệ phương trình với hệ số ở dạng ma trận tam giác trên.

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$\dots$$

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Phương pháp khử Gauss-Jordan

Ý tưởng: biến đổi hệ phương trình về dạng hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số là ma trận đường chéo chính (hoặc ma trận đơn vị)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Phương pháp khử Gauss-Jordan

Ta lần lượt khử biến x_i tại n-1 phương trình trừ phương trình thứ i. Tại mỗi bước khử, các hệ số sẽ thay đổi theo công thức:

$$a_{jk} = a_{jk} - \frac{a_{ik}.a_{ji}}{a_{ii}} \; \forall j \neq i$$

Tương ứng,vector B cũng thay đổi theo công thức:

$$b_j = b_j - \frac{b_i.a_{ji}}{a_{ii}} \; \forall j \neq i$$

Sau khi biến đổi, nghiệm x của hệ sẽ được tính bởi:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Sử dụng phép biến đổi Gauss-Jordan để tính ma trận nghịch đảo

Cho ma trận A vuông cấp n, để tính ma trận nghịch đảo A^{-1} ta tiến hành theo phương pháp Gauss-Jordan như sau:
B1: Viết thêm ma trận đơn vị E bên cạnh ma trận A:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sử dụng phép biến đổi Gauss-Jordan để tính ma trận nghịch đảo

B2: Biến đổi theo phép biến đổi sơ cấp cho đến khi ma trận có dạng:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Sử dụng phép biến đổi Gauss-Jordan để tính ma trận nghịch đảo

Khi đó, ta có ma trận nghịch đảo có dạng

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Sự không ổn định của hệ phương trình tuyến tính

Trong các phương pháp khử, kết quả nhận được sẽ chính xác nếu mọi bước tính toán đều chính xác.
Tuy nhiên, hầu như mọi bước tính của chúng ta đều phải tiến hành làm tròn, trong khi đó, hệ phương trình tuyến tính lại mang tính không ổn định, hệ số của hệ phương trình lệch 0.1 đơn vị có thể khiến nghiệm lệch 1000 đơn vị.
Vì vậy, trong thực tế nếu cần giải hệ phương trình tuyến tính ta thường sử dụng phương pháp tính gần đúng vì nó cho kết quả chính xác hơn nhiều phương án giải đúng trực tiếp.

Cho phương trình $F(x) = 0$, trong đó F(x) là một hàm trên không gian định chuẩn nào đó và 0 được hiểu là phần tử 0 của không gian này. Ta biến đổi phương trình này về dạng tương đương x = G(x). Ta có định lý sau:

Định lý hội tụ nghiệm

Giả sử hàm $G(x)$ liên tục trên không gian định chuẩn nào đó và phép lặp $x_n = G(x_{n-1})$ với n = 1, 2, ... hội tụ tới x^* từ điểm xuất phát x_0. Khi đó, x^* là nghiệm của phương trình $x = G(x)$, nói cách khác $x^* = G(x^*)$.

Phương pháp lặp giải hệ phương trình đại số tuyến tính

Bắt đầu từ hệ phương trình tuyến tính

$$Ax = b$$

Ta tìm cách để đưa hệ phương trình về dạng

$$x = Cx + d$$

Trong đó ma trận C và vector d được tính từ A và b. Từ đó, ta xác định vector nghiệm ban đầu $x^{(0)}$ rồi thực hiện bước lặp để tính các nghiệm xấp xỉ $x^{(i)}$, i = 1, 2, ... theo công thức:

$$x^{(i)} = Cx^{(i-1)} + d$$

Phương pháp lặp giải hệ phương trình đại số tuyến tính

Định lý hội tụ và sai số của phương pháp lặp

Nếu tồn tại x^* sao cho $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ thì x^* là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$.
Nếu tồn tại chuẩn nào đó của ma trận C nhỏ hơn 1 thì sai số giữa nghiệm xấp xỉ $x^{(k)}$ và nghiệm đúng x^* được tính bởi 1 trong 2 công thức:

$$||x^{(k)} - x^*|| \le \frac{||C||}{1 - ||C||}||x^{(k)} - x^{(k-1)}||$$

$$||x^{(k)} - x^*|| \le \frac{||C||}{1 - ||C||}||x^{(1)} - x^{(0)}||$$

Thông thường, phương pháp lặp sẽ hội tụ nếu ma trận A là ma trận chéo trội, tức hệ số trên đường chéo chính có trị tuyệt đối lớn hơn tổng trị tuyệt đối của mọi hệ số cùng hàng.

Phương pháp lặp Jacobi

Xét hệ phương trình $Ax = b$ như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Phương pháp lặp Jacobi

Ta biến đổi hệ phương trình vệ dạng $\mathrm{x} = \mathrm{Cx} + \mathrm{d}$ với

$$C = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ . \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Sau đó ta tính lần lượt các nghiệm xấp xỉ $x^{(i)}$ bằng công thức:

$$x^{(i)} = Cx^{(i-1)} + d$$

Điều kiện hội tụ và sai số của phương pháp lặp Jacobi cũng giống với phương pháp lặp đơn.

Ví dụ

Sử dụng phương pháp lặp Jacobi giải gần đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Phương pháp lặp Gauss-Seidel

Phương pháp lặp Gauss-Seidel là phương pháp cải tiến từ phương pháp lặp Jacobi. Cụ thể, thay vì tính $x^{(k)}$ thông qua C, d và $x^{(k-1)}$, ta sử dụng luôn các thành phần của $x^{(k)}$ đã tính được để tính các thành phần còn lại:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

$$i = 1, 2, ..., n, \;\; k = 1, 2, ...$$

Điều kiện hội tụ của phương pháp Gauss-Seidel giống với phương pháp lặp đơn. Tuy nhiên sai số của phương pháp Gauss-Seidel lại được tính bởi công thức sau:

qi hệ số ma trận tam giác trên của hàng i
pi hệ số ma trận tam giác dưới của hàng i

Gọi $p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}|$, $q_i = \sum_{j=i+1}^{n} |c_{ij}|$, $\mu = \max_i \frac{q_i}{1 - p_i}$ Khi đó

$$||x^{(k)} - x^*|| \leq \frac{\mu}{1-\mu} ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||$$

hoặc

$$||x^{(k)} - x^*|| \leq \frac{\mu}{1-\mu} ||x^{(1)} - x^{(0)}||$$