GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

PHƯƠNG PHÁP SỐ

Hoàng Văn Đông

Bộ môn Khoa học máy tính, Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Thuỷ Lợi

30/6/2019

Mục lục

- Phương pháp Euler
- Phương pháp Euler cải tiến
- Phương pháp Runge - Kutta

Phương pháp Euler

Cho phương trình vi phân

$$\begin{aligned} &y'(x) = f(x,y);\ \ x \in [a,b], x_0 = a \\ &y(x_0) = y_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Ta sẽ giải gần đúng phương trình (1) bằng cách tìm giá trị gần đúng của y_i tại các điểm:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

$$x_i = a + ih; h = \frac{b-a}{n}$$

Ta có khai triển Taylor của y(x) tại x_i:

$$y(x) = y(x_i) + \frac{x - x_i}{1!}y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}y''(c_i);\ \ c_i \in (x_i, x)$$

Thay $x = xi + 1 = x_i + h, y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ vào đẳng thức trên ta có

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}y''(c_i);\ \ c_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Trong trường hợp h đủ nhỏ, ta có công thức xấp xỉ:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Phương pháp Euler cải tiến

Theo công thức tích phân Newton - Leibniz

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx \frac{h}{2}[y'(x_i) + y'(x_{i+1})]$$

$$\Leftrightarrow y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

Đặt $z = y_i + hf(x_i, y_i)$, ta thu được công thức Euler cải tiến:

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, z)]$$

Phương pháp Euler

Giải phương trình sau bằng phương pháp Euler và Euler cải tiến

$$y' = \frac{xy}{2};\; x \in [0,1],\; y(0) = 1;\; h = 0.1$$

Xét khai triển Taylor bậc 2

$$y(x) = y(x_i) + \frac{x - x_i}{1!}y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}y''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{3!}y'''(c_i);\ c_i \in (x_i, x)$$

Thay $x = x_{i+1} = x_i + h$, ta có

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(c_i);\ c_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Ta có:
$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$
$y''(x_i) = f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y(x_i))y'(x_i)$
Như vậy công thức khai triển được viết lại thành

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)y'_i] + O(h^3)$$

Phương pháp Runge - Kutta

Đặt:
$y_{i+1} = y_i + r_1 k_1^{(i)} + r_2 k_2^{(i)}$
trong đó $k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$
$k_2^{(i)} = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1^{(i)})$
Giải hệ số ta được $r_1 + r_2 = 1; \alpha r_2 = \beta r_2 = 1/2$
Chọn $r_1 = r_2 = 1/2, \alpha = \beta = 1$; ta thu được công thức Runge - Kutta 2:
$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$
$k_2^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_1^{(i)})$
$y_{i+1} = y_i + 1/2(k_1^{(i)} + k_2^{(i)});\ i = 0, 1, ..., n-1$

Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge - Kutta 3:

$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$

$k_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2)$

$k_3^{(i)} = hf(x_i + h, y_i - k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)})$

$y_{i+1} = y_i + (1/6)(k_1^{(i)} + 4k_2^{(i)} + k_3^{(i)});\ \ i = 0, 1, ..., n-1$

Công thức Runge - Kutta 4:

$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$

$k_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2)$

$k_3^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2)$

$k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$

$y_{i+1} = y_i + (1/6)(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)});\ i = 0, 1, ..., n-1$