

SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

PHƯƠNG PHÁP SỐ

Hoàng Văn Đông

Bộ môn Khoa học máy tính, Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Thủy Lợi

30/6/2019

- Tổng quan về phương pháp số
- Sai số tuyệt đối và sai số tương đối
- Cách viết số xấp xỉ
- Các quy tắc tính sai số
- Sai số tính toán và sai số phương pháp
- Sự ổn định trong quá trình tính toán

Tổng quan về phương pháp số

Phương pháp số (Numerical method) hay còn được gọi là Phương pháp tính (Computational method), Toán học tính toán (Computational mathematics) hoặc Giải tích số (Numerical analysis) là một lĩnh vực của toán học chuyên nghiên cứu các phương pháp giải gần đúng các bài toán dựa trên những **dữ liệu số** cụ thể và cho **kết quả cũng dưới dạng số**. Tóm lại, đây **là môn học về những phương pháp giải các bài toán bằng những con số cụ thể**.

Có hai vấn đề thường được quan tâm đến trong phương pháp số:

- Phương pháp giải bài toán
- Mối liên hệ giữa đáp án giải số chúng ta đạt được với đáp án đúng, hay **sai số** của đáp án.

Tổng quan về phương pháp số

Những dạng sai số thường gặp

- Sai số trong việc mô hình hoá bài toán
- Sai số phương pháp
- Sai số số liệu
- Sai số tính toán

Trong quá trình giải bài toán, sai số cuối cùng thường là tổng hợp của nhiều loại trong số các loại sai số kể trên, vì vậy nhiều khi đáp án giải số cách khá xa so với lời giải đúng và không có giá trị. Vì vậy, việc tìm ra các thuật toán hữu hiệu và ổn định là rất cần thiết.

Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Sai số tuyệt đối

Xét đại lượng đúng A và giá trị gần đúng của nó là a ($a \approx A$). Khi đó, giá trị:

$$\Delta_a = |a - A|$$

được gọi là sai số **tuyệt đối** của a (khi dùng để xấp xỉ A).

Sai số tuyệt đối giới hạn

Trong trường hợp không biết giá trị chính xác của đại lượng A , ta sẽ ước lượng sai số tuyệt đối của a bằng giá trị dương E_a sao cho:

$$|a - A| \leq E_a$$

Giá trị này được gọi là sai số **tuyệt đối giới hạn** của a (khi xấp xỉ A).

Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Sai số tương đối

Gọi Δ_a là sai số tuyệt đối khi sử dụng a để xấp xỉ A , khi đó đại lượng

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

được gọi là **sai số tương đối** của a .

Sai số tương đối giới hạn

Trong trường hợp không biết giá trị chính xác của đại lượng A , ta định nghĩa đại lượng :

$$\varepsilon_a = \frac{E_a}{|a|}$$

là **sai số tương đối giới hạn** của a .

Cách viết số xấp xỉ

Chữ số có nghĩa

Các chữ số từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái đến chữ số cuối cùng khác không phía bên phải là các **chữ số có nghĩa**.

Ví dụ số 2.520 có 3 chữ số có nghĩa, số 0.02458 có 4 chữ số có nghĩa.

Chữ số đáng tin

Chữ số đáng tin là các chữ số có nghĩa có đơn vị lớn gấp 2 lần sai số tuyệt đối trở lên.

$$0.07642 = 7 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-5}$$

$$0.0004 \cdot 2 = 0.0008 \leq 6 \cdot 10^{-3}$$

Ví dụ số $a = 0.07642$, $|\Delta_a| \leq 0.0004$, khi đó các chữ số đáng tin là 7 và 6.

Cách viết số xấp xỉ

- Viết kèm theo sai số như công thức $A = a \pm E_a$.
- Viết mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin, tức sai số tuyệt đối giới hạn không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng cuối cùng.

Cách viết số xấp xỉ

Sai số quy tròn

Trong tính toán với các con số ta thường làm tròn các số theo quy ước sau: nếu chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5 thì thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng một đơn vị, còn nếu chữ số bỏ đi đầu tiên < 5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng.

Giả sử a là xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn E , nếu ta quy tròn a thành a' với sai số quy tròn tuyệt đối giới hạn θ , hay $|a' - a| \leq \theta$, như vậy

$$|a' - A| = |a' - a + a - A| \leq |a' - a| + |a - A| \leq \theta + E$$

Do đó ta có thể lấy $\theta + E$ làm sai số tuyệt đối giới hạn của a' khi xấp xỉ A .

Các quy tắc tính sai số

Tổng quát

Xét hàm số u của hai biến x và y

$$u = f(x, y)$$

Biết sai số khi xấp xỉ x và y lần lượt là Δ_x và Δ_y , khi đó sai số của u sẽ là:

$$\Delta_u = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta_x + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \Delta_y$$

Các quy tắc tính sai số

Từ bài toán tổng quát, ta có các công thức tính sai số sau:

- Công thức sai số của tổng $u = x + y$:

$$\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y$$

- Công thức sai số của tích $u = xy$:

$$\Delta_u = |y|\Delta_x + |x|\Delta_y$$

- Công thức sai số của thương $u = x/y$:

$$\Delta_u = \left|\frac{1}{y}\right|\Delta_x + \left|\frac{1}{y^2}\right|\Delta_y$$

Sai số tính toán và sai số phương pháp

Sai số phương pháp

Khi giải một bài toán phức tạp ta phải thay bài toán đó bằng bài toán đơn giản hơn để có thể tính toán bằng tay hoặc bằng máy. Phương pháp thay bài toán phức tạp bằng một phương pháp đơn giản tính được như vậy gọi là phương pháp gần đúng. Sai số do phương pháp gần đúng tạo ra gọi là sai số phương pháp.

Sai số tính toán

Trong quá trình tính toán ta thường xuyên phải làm tròn các kết quả trung gian. Sai số tạo ra bởi tất cả những lần quy tròn như vậy được gọi là sai số tính toán.

Sự ổn định trong quá trình tính toán

Xét một quá trình tính toán về lý thuyết có vô hạn bước để tính ra một đại lượng nào đó. Ta nói rằng quá trình tính là ổn định nếu sai số tính toán tức là sai số quy tròn tích lũy lại không tăng vô hạn. Nếu sai số đó tăng vô hạn thì ta nói quá trình tính là không ổn định.

Để kiểm tra tính ổn định của một quá trình tính toán thường người ta giả sử sai số chỉ xảy ra tại một bước, các bước sau đó coi như không có sai số khác phát sinh. Nếu cuối cùng sai số tính toán không tăng vô hạn thì coi như quá trình tính là ổn định