TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

PHƯƠNG PHÁP SỐ

Hoàng Văn Đông

Bộ môn Khoa học máy tính, Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Thuỷ Lợi

30/6/2019

Mục lục

Tính gần đúng đạo hàm

Áp dụng đa thức nội suy

Giả sử người ta phải tính xấp xỉ đạo hàm của hàm số f(x) trên đoạn (a,b). Trước hết người ta thay hàm f(x) bằng đa thức nội suy p(x), sau đó lấy đạo hàm p'(x) và coi là xấp xỉ của đạo hàm f'(x):

$$f'(x) \approx p'(x)$$

Tính gần đúng đạo hàm

Áp dụng công thức Taylor

Với công thức Taylor bậc 1 ta có:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(c);\ \ c \in (x, x+h)$$

Với h đủ nhỏ, ta có thể bỏ qua số hạng ứng với đạo hàm cấp 2 và thu được công thức xấp xỉ:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Công thức hình thang

Ta chia đoạn [a,b] thành n đoạn con bằng nhau:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

$$x_i = a + ih; h = \frac{b-a}{n}$$

Ta có xấp xỉ:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h\frac{y_i + y_{i+1}}{2};\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1$$

Suy ra:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}) = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2y_1 + ... + 2y_{n-1}) = I^*$$

Công thức hình thang

Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp 2 liên tục và $|f''(x)| \leq M_2, x \in [a, b]$, khi đó ta có đánh giá

$$|I - I^*| \leq \frac{M_2}{12} h^2 (b - a)$$

Ví dụ: Tính gần đúng tích phân:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx$$

Công thức Simpson

Ta chia đoạn [a,b] thành 2n đoạn con bằng nhau:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{2n} = b$$

$$x_i = a + ih; h = \frac{b-a}{2n}$$

Coi khoảng nối 3 điểm liên tiếp nhau là 1 đoạn (tổng cộng có n đoạn). Đoạn thứ i gồm các điểm $x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}$. Ta xấp xỉ hàm lấy tích phân bởi đa thức bậc hai $p_x(x)$ trong khoảng thứ i:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p_2(x)dx; \ \forall\ 0 \leq i \leq n-1$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}); \ \forall\ 0 \leq i \leq n-1$$

Công thức Simpson

Tổng kết lại, ta có công thức xấp xỉ Simpson:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n_1}) \tag{1}$$

$$+2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})]$$

Công thức Simpson

Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp 4 liên tục và

$$|f^{(4)}| \leq M_4, \;\; x \in [a, b]$$

khi đó ta có đánh giá:

$$|I - I^*| \leq \frac{M_4}{180} h^4 (b - a)$$