CHƯƠNG 1
SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Sau khi nghiên cứu chương 1, yêu cầu sinh viên:

1. Hiểu được Phương Pháp Số là gì, vai trò và tầm quan trọng của Phương pháp số.
2. Hiểu được sai số tuyệt đối và sai số tương đối.
3. Nắm được cách viết số xấp xỉ.
4. Nắm được các qui tắc tính sai số.
5. Hiểu và biết cách đánh giá sai số tính toán và sai số phương pháp .

1.1. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP SỐ

1.1.1. Phương pháp số là gì?

Phương pháp số (numerical method) hay đôi khi còn được gọi là Phương pháp tính (Computational method), Toán học tính toán (Computational mathematics) hoặc Giải tích số (Numerical analysis) là một lĩnh vực của toán học chuyên nghiên cứu các phương pháp giải gần đúng các bài toán bằng cách dựa trên những ***dữ liệu số*** cụ thể và cho ***kết quả cũng dưới dạng số***. Nói gọn hơn, phương pháp số như bản thân tên gọi của nó, có nghĩa là phương pháp giải các bài toán bằng những con số cụ thể.

Trong phương pháp số chúng ta thường quan tâm đến hai vấn đề:

- Phương pháp để giải bài toán.
- Mối liên hệ giữa lời giải số gần đúng và lời giải đúng, hay vấn đề ***sai số*** của lời giải.

1.1.2. Những dạng sai số thường gặp

Khi thực hiện một bài toán bằng phương pháp số ta thường gặp những loại sai số sau đây:

- *Sai số trong việc mô hình hóa* bài toán
- *Sai số phương pháp*
- *Sai số của số liệu*
- *Sai số tính toán*

Những sai số trên đây tổng hợp lại nhiều khi dẫn đến những lời giải quá cách xa so với lời giải đúng và vì vậy không thể dùng được. Chính vì vậy việc tìm ra những thuật toán hữu hiệu để giải các bài toán thực tế là điều rất cần thiết.

1.2. SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI

1.2.1. Sai số tuyệt đối

Trong tính gần đúng ta làm việc với các giá trị gần đúng của các đại lượng. Cho nên vấn đề đầu tiên cần nghiên cứu là vần đề sai số.Xét đại lượng đúng A và đại lượng gần đúng của nó là a. Ta nói a xấp xỉ A và viết $a \approx A$.

Trị tuyệt đối $\Delta_a = | a-A |$ (1.1)

được gọi là sai số tuyệt đối của a (khi dùng a để xấp xỉ A).

Trong thực tế ta không biết được số đúng A, do đó nói chung sai số tuyệt đối không tính được. Vì vậy ta tìm cách ước lượng sai số tuyệt đối của a bằng số $E_a>0$ sao cho

$$| a - A | \le E_a \tag{1.2}$$

Số dương E_a được gọi là *sai số tuyệt đối giới hạn* của a. Rõ ràng nếu E_a là sai số tuyệt đối giới hạn của a thì mọi $E > E_a$ đều là sai số tuyệt đối giới hạn của a. Nếu sai số tuyệt đối giới hạn quá lớn so với sai số tuyệt đối thì nó không còn có ý nghĩa về phương diện sai số nữa. Trong những điều kiện cụ thể người ta cố gắng chọn E_a là số dương bé nhất có thể được thoã mãn (1.1). Nếu E_a là sai số tuyệt đối giới hạn của a khi xấp xỉ A thì ta quy ước viết:

$$A = a \pm E_a \tag{1.3}$$

với ý nghĩa của (1.1), tức là

$$a - E_a \le A \le a + E_a \tag{1.4}$$

1.2.2. Sai số tương đối

Gọi Δ_a là sai số tuyệt đối của a khi dùng a để xấp xỉ A, khi đó đại lượng

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \tag{1.5}$$

được gọi là ***sai số tương đối*** của a. Tuy nhiên một lần nữa ta thấy rằng A thường không biết, vì vậy người ta định nghĩa đại lượng

$$\varepsilon_a = \frac{E_a}{|a|} \tag{1.6}$$

là sai số tương đối giới hạn của a. Từ đây ta có

$$E_a = |a| \varepsilon_a \tag{1.7}$$

Từ đây người ta thường viết

$$A = a(1 \pm \varepsilon_a) \tag{1.8}$$

Vì trong thực tế chúng ta chỉ có thể thao tác với các sai số giới hạn, do đó người ta thường gọi một cách đơn giản E_a là sai số tuyệt đối, ε_a là sai số tương đối. Đôi khi người ta biểu diễn sai số tương đối dưới dạng %. Ví dụ với $a = 10$, $E_a = 0.05$, khi đó ta có $\varepsilon_a = 0.05/10 = 0.5\ \%$.

1.2.3. Chú thích:

Sai số tuyệt đối không nói lên đầy đủ "chất lượng" của một số xấp xỉ, “chất lượng” ấy còn được phản ánh qua sai số tương đối.

1.3. CÁCH VIẾT SỐ XẤP XỈ

1.3.1. Chữ số có nghĩa

Một số viết dưới dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số, nhưng ta chỉ kể các chữ số từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái đến chữ số cuối cùng khác không phía bên phải là các ***chữ số có nghĩa***. Chẳng hạn số 2.740 có 3 chữ số có nghĩa, số 0.02078 có 4 chữ số có nghĩa.

1.3.2. Chữ số đáng tin

Mọi số thập phân đều có dạng

$$a = \pm\, \overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-m}} = \pm \sum \alpha_s 10^s$$

Trong đó α_s là những số nguyên từ 0 đến 9. Giả sử a là xấp xỉ của số A với sai số tuyệt đối là Δ_a. Nếu $\Delta_a \le 0.5*10^s$ thì ta nói rằng chữ số α_s là *đáng tin* (và như vậy các chữ số có nghĩa bên trái α_s đều là đáng tin). Nếu $\Delta_a > 0.5*10^s$ thì ta nói rằng chữ số α_s là *đáng nghi* (và như vậy các chữ số bên phải α_s đều là đáng nghi).

Ví dụ. Số xấp xỉ $a = 4.67329$

với $\Delta_a = 0.004726$. Ta có $|\Delta_a| \le 0.5*10^{-2}$ do đó các chữ số đáng tin là: 4,6,7; các chữ số đáng ngờ là 3,2, 9.

với $\Delta_a = 0.005726$. Ta có $|\Delta_a| \le 0.5*10^{-1}$ (nhưng $|\Delta_a| > 0.5*10^{-2}$) do đó các chữ số đáng tin là: 4,6; các chữ số đáng ngờ là 7, 3, 2, 9.

1.3.3. Cách viết số xấp xỉ

a. Kèm theo sai số

Cách thứ nhất là viết kèm theo sai số như công thức (1.3) $\quad A = a \pm E_a$

b. Mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin

Cách thứ hai là viết theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin; có nghĩa là sai số tuyệt đối giới hạn không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng cuối cùng.

1.3.4. Sai số quy tròn

Trong tính toán với các con số ta thường làm tròn các số theo quy ước sau: nếu chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5 thì thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng một đơn vị, còn nếu chữ số bỏ đi đầu tiên < 5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng.

Giả sử a là xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn là E . Giả sử ta quy tròn a thành a' với sai số quy tròn tuyệt đối giới hạn là θ, tức là:

$$|a' - a| \le \theta.$$

Ta có

$$|a' - A| = |a' - a + a - A| \le |a' - a| + |a - A| \le \theta + E$$

Vậy có thể lấy $\theta + E$ làm sai số tuyệt đối giới hạn của a'. Như vậy việc quy tròn làm tăng sai số tuyệt đối giới hạn.

1.4. CÁC QUY TẮC TÍNH SAI SỐ

1.4.1. Mở đầu

Ta xét bài toán tổng quát hơn như sau:

Xét hàm số u của 2 biến số x và y:

$$u = f(x,y)$$

Giả sử x là xấp xỉ của giá trị đúng X, y là xấp xỉ của giá trị đúng Y và ta coi u là xấp xỉ của giá trị đúng $U = f(X,Y)$.

Cho biết sai số về x và y, hãy lập công thức tính sai số về u.

Cho biến x ta sẽ ký hiệu $\Delta x = x - X$ là số gia của x, còn dx là vi phân của x.

Theo định nghĩa về sai số tuyệt đối, ta có $|\Delta x| \le \Delta_x$

Theo công thức vi phân của hàm nhiều biến ta có:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Từ đây

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

Suy ra

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\Delta_y \qquad (1.9)$$

1.4.2. Sai số của tổng

Cho $u = x + y$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

Từ (1.9) suy ra

$$\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y \qquad (1.10)$$

Ta có quy tắc sau:

Sai số tuyệt đối giới hạn của một tổng bằng tổng các sai số tuyệt đối giới hạn của các số hạng.

Ghi chú. Xét trường hợp $u = x - y$ và x, y cùng dấu. Lúc đó ta có

$$\delta_u = \Delta_u/|u| = (\Delta_x + \Delta_y)/|x-y|$$

Ta thấy rằng nếu $|x - y|$ rất bé thì sai số tương đối giới hạn rất lớn. Do đó trong tính toán người ta tìm cách tránh trừ những số gần nhau.

1.4.3. Sai số của tích

Cho $u = xy$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Từ (1.9) suy ra

$$\Delta_u = |y|\Delta_x + |x|\Delta_y$$

Do đó $\delta_u = \Delta_u/|u| = \Delta_x/|x| + \Delta_y/|y| = \delta_x + \delta_y$

Vậy

$$\delta_u = \delta_x + \delta_y \qquad (1.11)$$

Ta có quy tắc sau:

Sai số tương đối giới hạn của một tích bằng tổng các sai số tương đối giới hạn của các số hạng của tích.

Xét trường hợp đặc biệt $u = x^n$ ta có

$$\delta_x n = n\,\delta_x \qquad (1.12)$$

1.4.4. Sai số của thương

Cho $u = x/y$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

Từ (1.9) suy ra

$$\Delta_u = \left|\frac{1}{y}\right|\Delta_x + \left|\frac{x}{y^2}\right|\Delta_y$$

Ta có

$$\Delta_u / |u| = \Delta_u \cdot \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{y}{x}\right|\left(\left|\frac{1}{y}\right|\Delta_x + \left|\frac{x}{y^2}\right|\Delta_y\right) = \left|\frac{1}{x}\right|\Delta_x + \left|\frac{1}{y}\right|\Delta_y =$$

Suy ra:

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y \qquad (1.13)$$

Ta có quy tắc sau:

Sai số tương đối giới hạn của một thương bằng tổng các sai số tương đối giới hạn của các số hạng của thương.

1.4.5. Sai số của hàm bất kỳ

Cho $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Theo công thức vi phân của hàm nhiều biến ta có:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

Từ đây ta có

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Suy ra

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\Delta_{x_1} + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|\Delta_{x_2} + \ldots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\Delta_{x_n} \quad (1.14)$$

Ví dụ. Tính sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của thể tích hình cầu:

$$V = (1/6)\pi d^3$$

nếu cho đường kính $d = 3.7 \pm 0.05$ cm và $\pi = 3.14 \pm 0.0016$.

Giải.

Xem π và d là đối số của hàm V, áp dụng (1.12) và (1.13) ta có

$\delta_V = \delta_\pi + 3\delta_d$ (Hệ số 1/6 không ảnh hương đến sai số tương đối)

$\delta_\pi = 0.0016/3.14 = 0.0005$

$\delta_d = 0.05/3.7 = 0.0135$

Suy ra $\delta_V = 0.0005 + 3 * 0.0135 = 0.04$

Mặt khác $V = (1/6)\pi d^3 = 26.5$ cm^3

Ta có $\Delta_V = |V| * \delta_V = 26.5 * 0.04 = 1.06 \approx 1.1$ cm^3

$V = 26.5 \pm 1.1$ cm^3

1.5. SAI SỐ TÍNH TOÁN VÀ SAI SỐ PHƯƠNG PHÁP

Như chúng tôi đã nhắc đến ở trên, khi giải một bài toán phức tạp ta phải thay bài toán đó bằng bài toán đơn giản hơn để có thể tính toán bằng tay hoặc bằng máy. Phương pháp thay bài toán phức tạp bằng một phương pháp đơn giản tính được như vậy gọi là ***phương pháp gần đúng***. Sai số do phương pháp gần đúng tạo ra gọi là sai số phương pháp. Mặc dầu bài toán đã ở dạng đơn giản, có thể tính toán được bằng tay hoặc trên máy tính, nhưng trong quá trình tính toán ta thường xuyên phải làm tròn các kết quả trung gian. Sai số tạo ra bởi tất cả những lần quy tròn như vậy được gọi là ***sai số tính toán***. Trong thực tế việc đánh giá các loại sai số, nhất là sai số tính toán nhiều khi là bài toán rất khó thực hiện. Để hiểu rõ hơn bản chất của sai số phương pháp và sai số tính toán ta xét ví dụ sau:

Ta biết rằng với số x bất kỳ ta có

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Công thức này có thể dùng để tính giá trị e^x. Tuy nhiên đây là tổng vô hạn, nên trong thực tế ta chỉ tính được tổng $S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, nghĩa là chúng ta đã dùng phương pháp gần đúng. Khi tính tổng S_n ta lại thường xuyên phải làm tròn, do đó ta lại gặp sai số khi tính toán S_n. Việc đưa ra một đánh giá về sai số tổng hợp của cả hai loại sai số trên là bài toán rất phức tạp.

1.6. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA MỘT QUÁ TRÌNH TÍNH TOÁN

Xét một quá trình tính toán về lý thuyết có vô hạn bước để tính ra một đại lượng nào đó. Ta nói rằng quá trình tính là *ổn định nếu sai số tính toán tức là sai số quy tròn tích lũy lại không tăng vô hạn*. Nếu sai số đó tăng vô hạn thì ta nói quá trình tính là không ổn định.

Rõ ràng nếu quá trình tính không ổn định thì không có hy vọng tính được đại lượng cần tính với sai số nhỏ hơn sai số cho phép.

Để kiểm tra tính ổn định của một quá trình tính toán thường người ta giả sử sai số chỉ xảy ra tại một bước, các bước sau đó coi như không có sai số khác phát sinh. Nếu cuối cùng sai số tính toán không tăng vô hạn thì coi như quá trình tính là ổn định.

1.7. MỘT VÀI ĐIỀU VỀ MỐI QUAN HỆ GIỮA THỰC TẾ VÀ MÔ HÌNH

Theo những điều vừa nói trên đây thì chúng ta luôn hiểu thực tế là tuyệt đối đúng, sai số chỉ xảy ra khi ta muốn mô hình hóa thực tế và tiến hành tính toán mô hình đó. Thực vậy, chúng ta có cảm giác rằng giới tự nhiên đang hoạt động một cách chính xác: hệ mặt trời đã có khoảng 5 tỷ năm tuổi, nhưng sự vận hành của nó có vẻ vẫn hoàn hảo: hàng ngày mặt trời mọc, mặt trời lặn đều theo quy luật. Cứ sau 365 ngày + 1/4 ngày thì quả đất quay đủ một vòng quanh mặt trời và hầu hết các vùng trên trái đất đều trải qua bốn mùa. Chúng ta có thể hình dung rằng chỉ cần mỗi năm sự vận hành của các hành tinh sai lệch đi chút ít thì trong hàng tỷ năm sai số tích lũy có thể sẽ gây nên những biến cố khôn lường! Tuy nhiên theo các nhà thiên văn thì sự vận hành của các hành tinh không tuyệt đối hoàn hảo như ta tưởng. Xét vị trí của mặt trời và trái đất chẳng hạn, theo lý thuyết thì nếu ngày hôm nay mặt trời đứng ở vị trí giữa bầu trời tính từ đông sang tây thì sau 24 giờ nữa nó cũng ở vị trí giữa bầu trời (tất nhiên là có thể chếch về phía nam nếu ta đang ở Việt nam). Nhưng trong thực tế không phải như vậy. Các nhà thiên văn đã không thể xây dựng được múi giờ một cách chính xác và nhất quán nếu dựa vào vị trí của mặt trời. Nói cụ thể hơn, nếu dựa vào vị trí mặt trời của năm nay làm múi giờ cho các vùng trên trái đất thì năm sau thời gian đó không còn thích hợp cho quỹ đạo của mặt trời nữa, mà có khác đi chút ít. Chính vì sự "đỏng đảnh" của mặt trời như vậy nên các nhà thiên văn đã đưa ra khái niệm mặt trời trung bình và thời gian trung bình. So với mặt trời trung bình và thời gian trung bình thì hàng năm mặt trời thật đi lệch trong khoảng thời gian từ -14,3 đến +16,3 phút. Tuy nhiên sở dĩ các sai số này không tích lũy từ năm này sang năm khác là vì các sai số giao động quanh vị trí trung bình và triệt tiêu lẫn nhau theo thời gian.

Nghĩa là, không chỉ mô hình của chúng ta, mà ngay cả giới tự nhiên cũng có những sai số. Tuy nhiên các sai số trong giới tự nhiên đều có quy luật và thường triệt tiêu lẫn nhau, do đó không làm ảnh hưởng đến sự vận hành của các vật thể.

BÀI TẬP

Bài 1. Khi đo 1 số góc ta được các giá trị sau:

$$a = 21^{o}37'3''; \qquad b = 1^{o}10'$$

Hãy xác định sai số tương đối của các số xấp xỉ đó biết rằng sai số tuyệt đối trong phép đo là 1''.

Bài 2. Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số xấp xỉ sau đây cho biết sai số tương đối của chúng:

a) $a= 13267$; $\delta_a=0,1\%$

b) $b=2,32$; $\delta_b=0,7\%$

Bài 3. Hãy xác định số các chữ số đáng tin trong các số a,b với sai số như sau:

a) $a= 0,3941$; $\Delta_a=0,25.10^{-2}$

b) $b=38,2543$; $\Delta_a= 0,27.10^{-2}$

Bài 4. Hãy xác định số những chữ số đáng tin trong các số a với sai số tương đối như sau:

a) $a=1,8921$; $\delta_a=0,1.10^{-2}$

b) $a=22,351$; $\delta_a=0,1$

Bài 5. Hãy qui tròn các số dưới đây(xem là đúng) với 3 chữ số có nghĩa đáng tin và xác định sai số tuyệt đối Δ và sai số tương đối δ của chúng:

a) $a= 2,514$; b) $0,16152$

c) $0,01204$; d) $-0,0015281$

Bài 6. Hãy xác định giá trị của các hàm số dưới đây cùng với sai số tuyệt đối và sai số tương đối ứng với những giá trị của các đối số cho với mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin.

a) $u=\ln(x+y^2)$; $x=0,97$; $y=1,132$

b) $u=(x+y)^2z$; $x=3,28$; $y=0,932$; $z=1,132$