МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №2
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

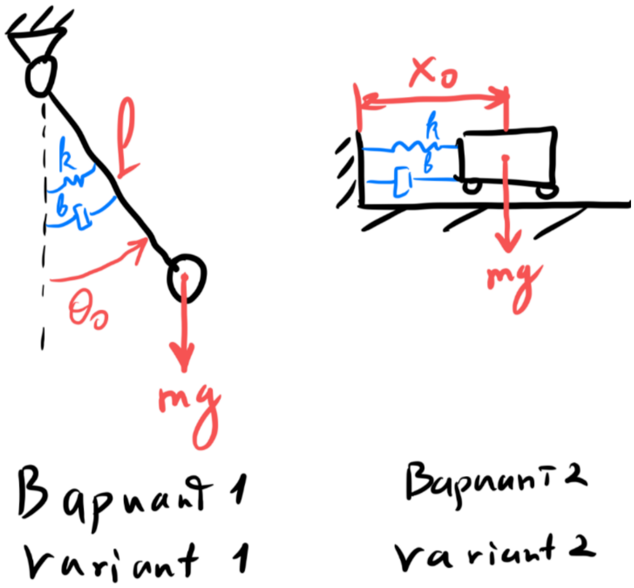
Студент:
Группа № R4133c *М. В. Рогальский*

Преподаватель:
Ассистент ФСУиР *Е. А. Ракшин*

Санкт-Петербург 2025

Задача:

Составить уравнение для следующих систем по варианту в таблице. Решить аналитически, сравнить полученные результаты.



Данные по варианту:

m, kg	k, N/m, Nm/rad	b, N*s/m, Nm*s/rad	l, m	theta_0, rad
0.4	20	0.02	0.43	0.4869619855

Решение:

- Кинетическая энергия маятника:

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

- Потенциальная энергия маятника:

$$P = mgl(1 - cos\theta) + \frac{1}{2} k\theta^2$$

- Лагранжиан:

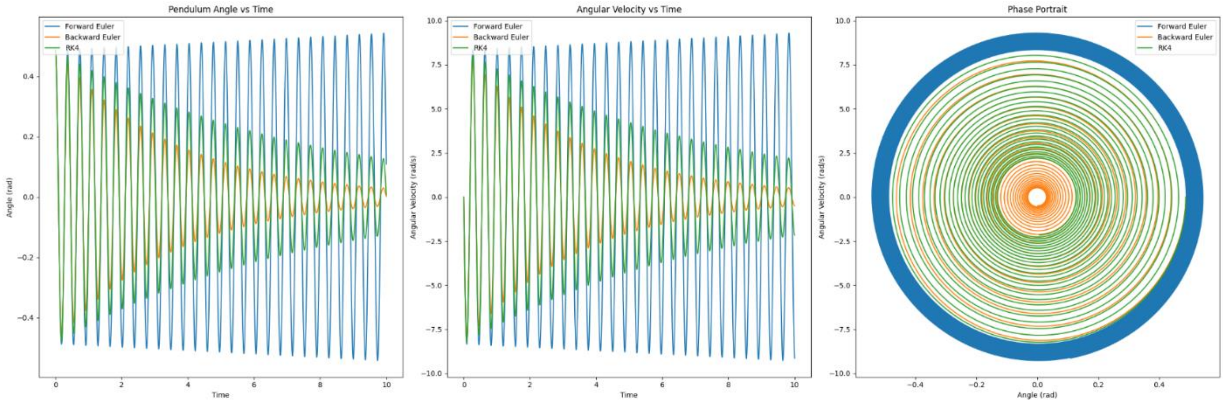
$$L = K - P = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k\theta^2 - mgl(1 - cos\theta))$$

- С демпфированием $Q = -b\dot{\theta}$:

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta + mglsin\theta = 0$$

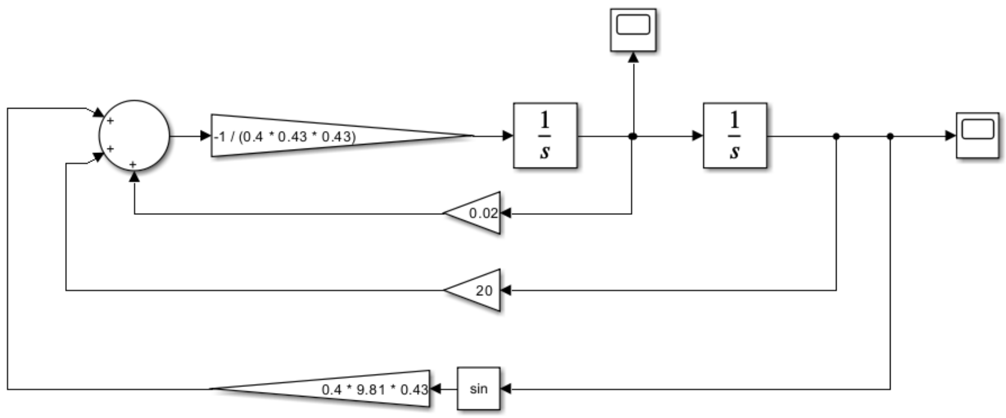
После написания функции с выше полученным ДУ, были получены графики (см. 506153_RogalskyMikhail_Task2.ipynb):

Шаг интегрирования 0.001.



Видно, что явный метод Эйлера дает расходимость, неявный метод Эйлера и Рунге-Кутты сходятся.

Схема, построенная в Simulink для сравнения с кодом:



Theta_0:

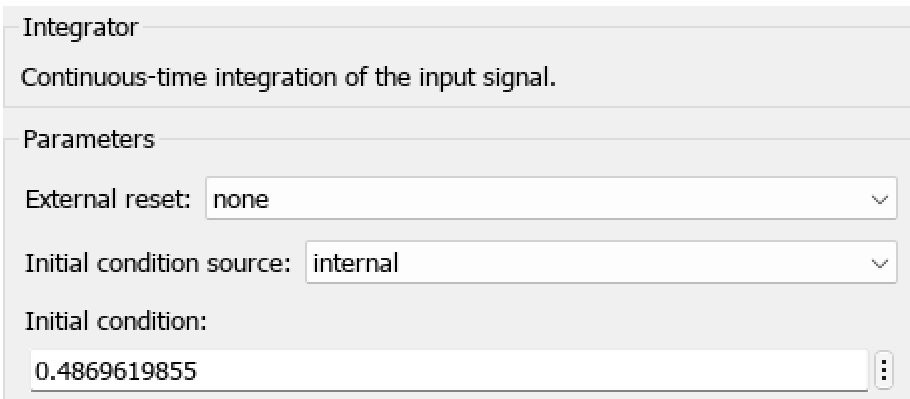


График скорости:

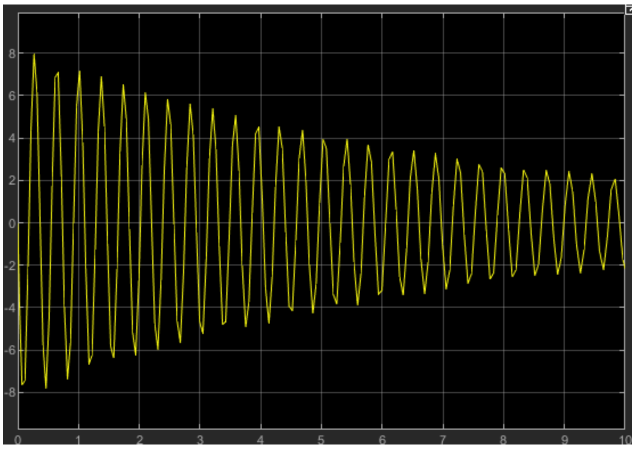
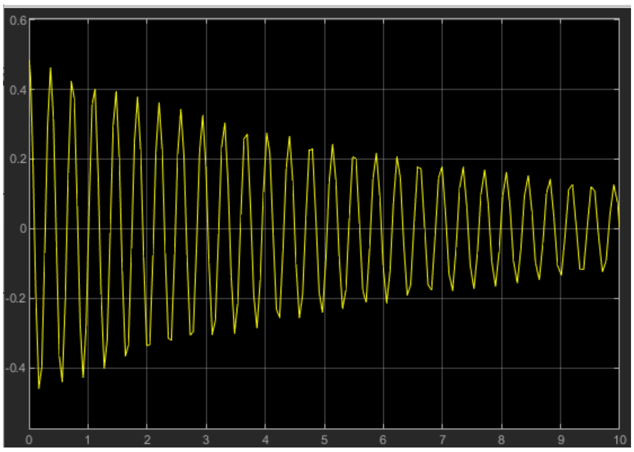


График угла:



Аналитическое решение:

Попробуем вывести аналитическое решение при помощи линеаризации:

$$\sin\theta \approx \theta.$$

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + (k + mgl)\theta = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$ml^2\lambda^2 + b\lambda + (k + mgl) = 0$$

$$0.07396\lambda^2 + 0.02\lambda + 21.68732 = 0$$

Получим комплексно-сопряженные корни:

$$\lambda_{1,2} = -0.13521 \pm 17.12343\, i$$

Считаем:

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{I(k + mgl)}}$$

$$\theta(t) = e^{-\zeta\omega_n t}[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)], \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Собственная частота:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k+mgl}{I}} \approx 17.12 \text{ рад/с}$$

Коэффициент затухания:

$$\alpha = b/(2I) = 0.02/(2 \times 0.07396) = 0.1352 \text{ с}^{-1}$$

Демпфированная частота:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx 17.12 \text{рад/с}$$

Коэффициент демпфирования:

$$\zeta = \alpha/\omega_n = 0.1352/17.12 = 0.0079$$

При t = 0:

$\theta(0) = e^0[A\cdot1 + B\cdot0] = A = \theta_0$

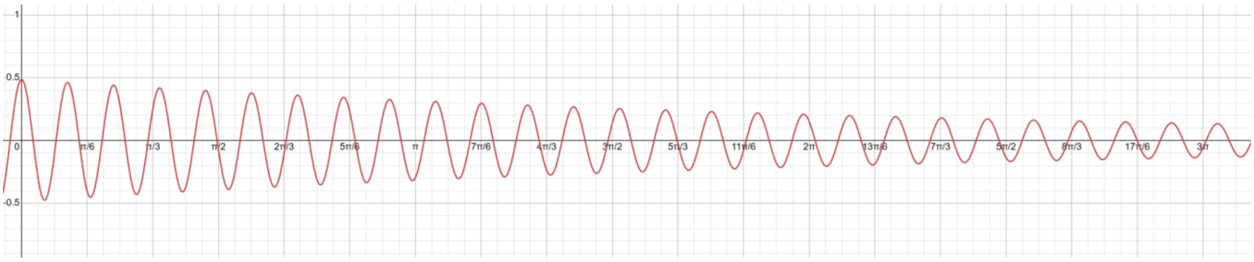
A = 0.4869619855

$B = \alpha A/\omega_d = (0.1352 \times 0.4869619855)/17.12 = 0.06584/17.12 = 0.003846$

Подставляем и получаем аналитическое решение:

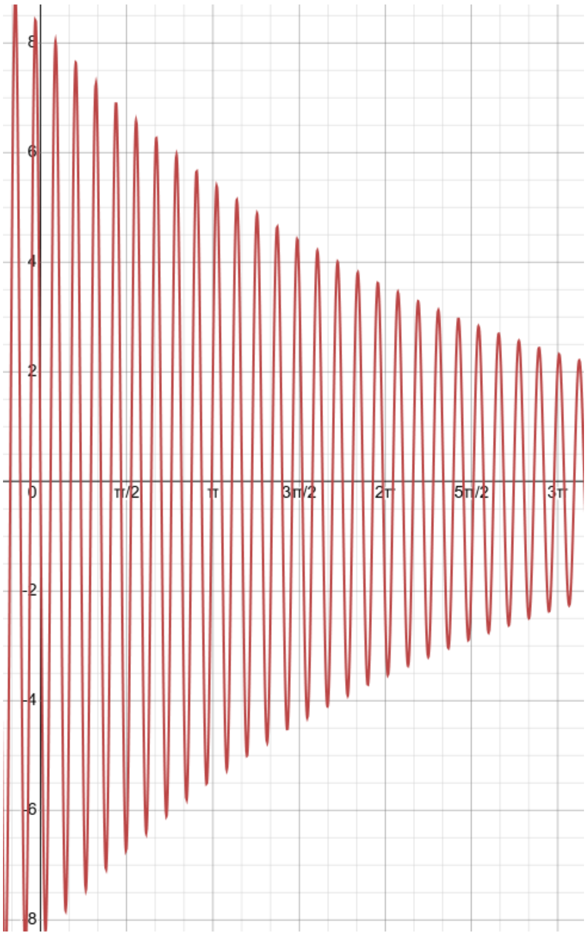
Угол:

$$\theta(t) = e^{-0.1352t}(0.48696\cos(17.12t) + 0.003846\sin(17.12t))\ \ рад$$



Угловая скорость (через производную уравнения угла выше в решении):

$$\dot{\theta}(t) = e^{-0.1352t}(-8.337\sin(17.12t) + 0.0658\cos(17.12t))\ \ \ рад/с$$



Вывод: как видно по графикам из кода, модели и полученных при аналитическом решении, при начальных условиях θ_0 = 0.4869619855 - интегрирование с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка довольно близко совпадает с аналитическим линеаризованным, метод неявного Эйлера затухает быстрее, а метод явного Эйлера и вовсе не затухает.

Поэтому наиболее точным в нашем случае является метод Рунге-Кутты.