

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

по теме:
ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ ОДУ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Студент:
Группа R4134c

Шилов В.И.

Предподаватель:
Ассистент

Ракинин Е.А.

г. Санкт-Петербург, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОПИСАНИЕ РАБОТЫ	3
1.1 Цель работы	3
1.2 Задачи	3
1.3 Индивидуальное задание	3
2 ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ	4
2.1 Аналитическое решение	4
2.1.1 Приведение к стандартной форме	4
2.1.2 Частное решение неоднородного уравнения	5
2.1.3 Общее решение	5
2.2 Численное решение	6
2.2.1 Метод явного эйлера	6
2.2.2 Метод неявного эйлера	6
2.2.3 Метод Рунге-Кутты четвертого порядка	6
2.3 Визуализация результатов	7
3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	9

1 ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

1.1 Цель работы

Решить заданное дифференциальное уравнение второго порядка, используя численные методы интегрирования: метод явного Эйлера, метод неявного Эйлера, метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Сравнить точность результатов, полученных с использованием методов.

1.2 Задачи

1. Получить аналитическое решение дифференциального уравнения
2. Получить численное решение дифференциальное уравнение с трех помощью методов:
 - a) Метод явного Эйлера
 - б) Метод неявного Эйлера
 - в) Метод Рунге-Кутты четвертого порядка
3. Сделать визуализацию решений
4. Провести анализ точности методов

1.3 Индивидуальное задание

Таблица 1 — Коэффициенты согласно индивидуальному заданию

a	b	c	d
2.03	4.75	-6.53	5.91

2 ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

2.1 Аналитическое решение

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d \quad (1)$$

Подставляя заданные коэффициенты, получается:

$$2.03\ddot{x} + 4.75\dot{x} - 6.53x = 5.91 \quad (2)$$

Общее решение неоднородного уравнения $x(t)$ является суммой общего решения однородного уравнения $x_h(t)$ и частного решения неоднородного уравнения x_p :

$$x(t) = x_h(t) + x_p \quad (3)$$

2.1.1 Приведение к стандартной форме

Приводим исходное уравнение (2) к стандартной форме, разделив на коэффициент a :

$$\ddot{x} + 2.34\dot{x} - 3.2167x = 2.91 \quad (4)$$

Рассмотрим однородное уравнение:

$$\ddot{x} + 2.34\dot{x} - 3.2167x = 0 \quad (5)$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2.34r - 3.2167 = 0 \quad (6)$$

Решая квадратное уравнение, получены следующие корни характеристического уравнения:

$$r_1 = 0.971, r_2 = -3.311 \quad (7)$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x_h(t) = C_1 e^{0.971t} + C_2 e^{-3.311t} \quad (8)$$

2.1.2 Частное решение неоднородного уравнения

Так как правая часть уравнения является константой, частное решение можно найти как:

$$x_p = \frac{d}{c} \quad (9)$$

Подставляя значения, получаем:

$$x_p = -0.905 \quad (10)$$

2.1.3 Общее решение

Вид общего решения неоднородного уравнения (3) после подстановок:

$$x(t) = C_1 e^{0.971t} + C_2 e^{-3.311t} - 0.905 \quad (11)$$

Для определения констант C_1 и C_2 , используем начальные условия:

$$x(0) = 0.1, \dot{x}(0) = 0 \quad (12)$$

Тогда из условия $x(0) = 0.1$:

$$C_1 + C_2 - 0.905 = 0.1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1.005 \quad (13)$$

И также из условия $\dot{x}(0) = 0$ следует:

$$\dot{x}(t) = 0.971C_1 e^{0.971t} - 3.311C_2 e^{-3.311t} \quad (14)$$

$$\dot{x}(0) = 0.971C_1 - 3.311C_2 \quad (15)$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0.971C_1 - 3.311C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 1.005 \end{cases} \quad (16)$$

Получаем значения:

$$C_1 = 0.776, C_2 = 0.228 \quad (17)$$

Итоговое аналитическое решение:

$$x_h(t) = 0.776e^{0.971t} + 0.228e^{-3.311t} - 0.905 \quad (18)$$

Положительный знак у корня $r(1) = 0.971$ свидетельствует о нестабильности системы.

2.2 Численное решение

2.2.1 Метод явного эйлера

Метод первого порядка, использующий значение производной в начале шага

$$s_{n+1} = s_n + h \cdot f(t_n, s_n) \quad (19)$$

2.2.2 Метод неявного эйлера

Метод первого порядка, использующий значение производной в конце шага, что обеспечивает лучшую устойчивость по сравнению с методом явного Эйлера

$$s_{n+1} = s_n + h \cdot f(t_{n+1}, s_{n+1}) \quad (20)$$

2.2.3 Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Метод четвертого порядка, использующий четыре вычисления функции на шаг

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, s_n) \\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, s_n + \frac{h}{2}k_1) \\
k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, s_n + \frac{h}{2}k_2) \\
k_4 &= f(t_n + h, s_n + hk_3) \\
s_{n+1} &= s_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

2.3 Визуализация результатов

Для наглядности в графики были добавлены значения, полученные аналитическим решением. Код, осуществляющий вычисления и визуализацию прикреплен в integrators.ipynb.

При шаге 0.25 наименьшее отклонение обеспечивает метод Рунге-Кутты четвертого порядка, значения, полученные методом Рунге-Кутты отмечены красным на рисунке 1.

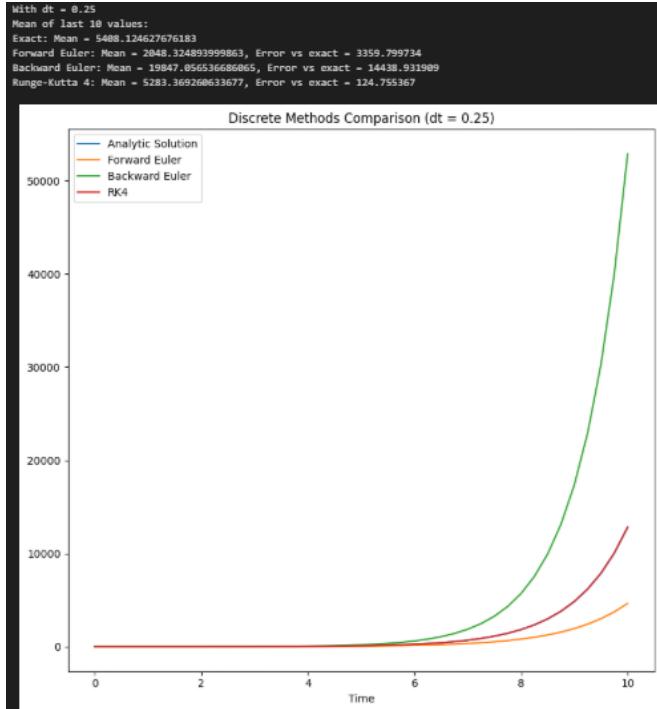


Рисунок 1 — Результат моделирования при шаге 0.25

При шаге 0.01 наименьшее отклонение также обеспечивает метод Рунге-Кутты, но метод неявного Эйлера имеет уже не такое сильное отклонение, что показано на рисунке 2.

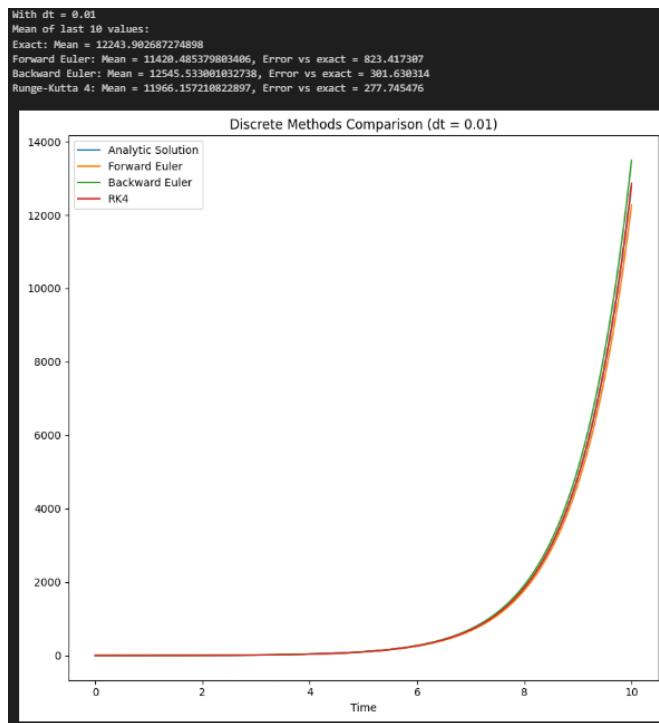


Рисунок 2 — Результат моделирования при шаге 0.001

При шаге 0.001 наименьшее отклонение метод неявного Эйлера, отмеченный на рисунке 3 зеленым цветом.

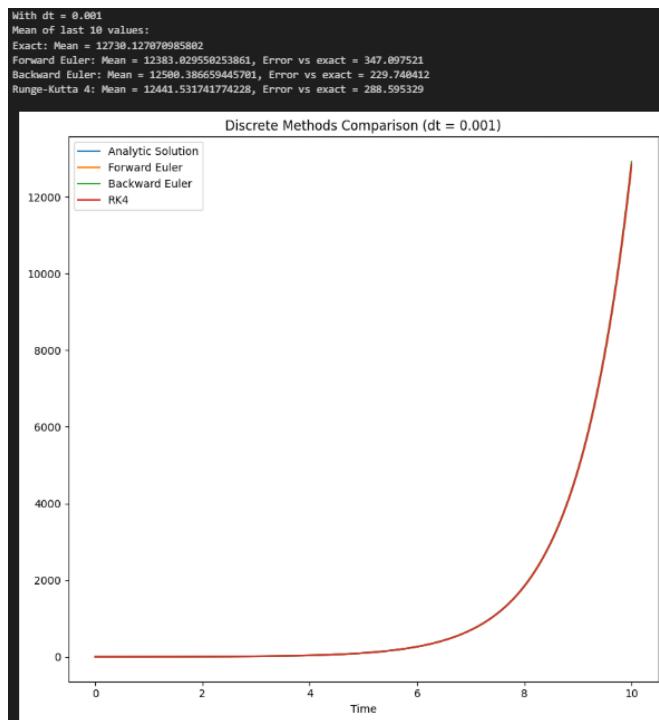


Рисунок 3 — Результат моделирования при шаге 0.0001

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно аналитическому решению, система неустойчива, что явно видно на рисунках 1, 2 и 3. Метод явного Эйлера показал худшие результаты, как с большим шагом 0.25, так и с маленьким 0.001. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка на большом и среднем шаге показал лучшие результаты, но на маленьком шаге метод неявного Эйлера показал наименьшие отклонения от аналитического решения. Такие результаты могут быть объяснены выбором параметров или погрешностью при вычислениях с малым шагом.