CONTROL 4
RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE EDOS NO-LINEALES

CRISTÓBAL BERTOGLIO - ITALO CIPRIANO - GINO MONTECINOS
- HÉCTOR OLIVERO - AXEL OSSES

Fecha de entrega - Parte 1: 18 hrs, 13 de Mayo, 2017 (50% de la nota)
Fecha de entrega - Parte 2: 18 hrs, 3 de Junio, 2017 (50% de la nota)

Instrucciones Generales

Los resultados de esta tarea deben ser presentados en un informe breve. Algunos puntos a tener en cuenta:

(1) El canal de comunicación para responder las dudas sobre el enunciado será el foro de cada sección.
(2) Esta tarea se debe resolver en grupos de 2 personas. Los integrantes de los grupos pueden ser de secciones diferentes.
(3) El lenguaje de programación deberá ser Matlab.
(4) Se debe preparar un informe con la solución de la tarea en pdf (se sugiere LaTeX) que incluya el nombre, apellido y sección de cada uno de los integrantes. El informe debe contener: una introducción general del problema, el desarrollo de cada pregunta (resultados y análisis de gráficos) y una breve conclusión.
(5) Los gráficos deben ser claros, sus ejes deben estar etiquetados de modo tal que indiquen tanto la variable que representa como sus unidades en forma legible. Cada gráfico tiene que tener un título que explique claramente su contenido. Si en el gráfico aparece más de una curva, el nombre de cada curva se debe indicar en una leyenda.
(6) Los códigos, es decir los archivos .m a ejecutarse directamente en Matlab, deben estar adjuntos, documentados y legibles (nombres de variables adecuados y CADA linea de código debe incluir comentarios). Debe indicarse con qué parámetros se ejecutan las funciones programadas para cada ítem. Se evaluará la facilidad para ejecutar y evaluar los distintos códigos.
(7) Los códigos se deben compactar junto con el informe en un archivo único que se subirá a u-cursos, cuyo nombre incluya el nombre y apellido del alumno. La tarea debe ser subida solo por UNO de los alumnos del grupo.
(8) No se permitirá retraso en la entrega, por lo tanto el no cumplimiento de los plazos de entrega se penalizará asignando la nota 1.0 para la parte correspondiente.

Parte 2: métodos numéricos para sistemas de EDOs no-lineales

Esta parte de la tarea trata sobre la resolución numérica de EDOs acopladas de orden 1 y de EDOs de segundo orden. El modelo completo de ecuaciones diferenciales consiste en las siguientes componentes:

- El potencial eléctrico se representa mediante el modelo de Fitzhugh-Nagumo, dado por el siguiente sistema de EDOs de orden 1:

$$\begin{cases} u' = c_1 u(u-\alpha)(1-u) - c_2 r \ , u(0) = u_0 \\ r' = c_2(u - c_3 r) \ , r(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

  con $u(t)$ el potencial eléctrico (normalizado) a través de la membrana de la célula, y $r(t)$ se le denota variable de restitución, ya que es la encargada de devolver el potencial al valor inicial después de recibido el estímulo eléctrico (representado por la condición inicial $u(0)$). Los parámetros se tomarán con los siguientes valores: $c_1 = 0.175, c_2 = 0.025, \alpha = 0.1, c_3 = 0.65$, $0 \leq t \leq 800$ milisegundos.
- La tensión $\sigma(t)$ que produce la célula cardiaca y que le permite contraerse la simularemos mediante el modelo de Bestel simplificado

$$\sigma' = -|a(t)|\sigma + \sigma_{max}\max(a(t), 0), \quad \sigma(0) = 0 \tag{2}$$

$$a(t) = b_1 + (b_2 - b_1) f(t) \tag{3}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } u(t) > \chi \\ 0 \text{ si } u(t) \leq \chi \end{cases} \tag{4}$$

  con los valores de las constantes dados por $b_1 = -0.03, b_2 = 20, \chi = 0.3, \sigma_{max} = 1$.
- Finalmente, el acortamiento de la célula cardiaca $y(t)$ lo modelamos usando un oscilador armónico

$$y'' + cy' + ky = -\sigma(t), \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{5}$$

  con $k = 0.001$ y c la mitad del amortiguamiento crítico que depende del valor de k.

Indicación: Para sistemas de EDOs lineares de orden 1 del tipo

$$X' = F(X, t)$$

con $X(t)$ un vector y F un operador (lineal o no-lineal), los métodos numéricos se formulan igual como en EDOs escalares de orden 1. Supongamos un método numérico del tipo:

$$X_{n+1} = X_n + h(\theta F(X_{n+1}, t_{n+1}) + (1-\theta) F(X_n, t_n))$$

con $1 \geq \theta \geq 0$. En el caso $\theta = 0$, tenemos el método de Euler progresivo, y por lo tanto cada ecuación del sistema discretizado se resuelve de forma separada. En el caso $\theta > 0$, se tiene que despejar el vector X_{n+1} y escribirlo en función del vector X_n. El caso $\theta = 1$ corresponde al método de Euler retrógrado y el caso $\theta = 1/2$ al método del trapecio.

Resuelva las preguntas que se proponen a continuación. Use siempre un paso de tiempo de $h = 1.0$.

(1) **[1.5 pt]** Resuelva numéricamente el sistema de primer orden (1) para el potencial eléctrico usando el método de Euler progresivo. Grafique los resultados para ambas variables $u(t), r(t)$ considerando $u_0 = 2\alpha$.

(2) [**0.5 pt**] Usando el valor de $u(t)$ calculado en la pregunta anterior, resuelva numéricamente la EDO (2) con un método de Euler retrógrado. Grafique la tensión de la célula $\sigma(t)$.

(3) [**0.5 pt**] Escriba la EDO (5) como un sistema de orden 1.

(4) [**2.0 pt**] Use un método de trapecio para resolver numéricamente el sistema de orden 1 obtenido de la EDO (5). Grafique $y(t)$.

(5) [**1.5 pt**] Ahora simularemos algunas patologías cardiacas. Resuelva todos los problemas del (1) al (5) en forma conjunta para los mismos valores de parámetros de las preguntas anteriores pero reemplazando en cada caso solamente la constante que se indica a continuación por el nuevo valor:

- Bloqueo eléctrico (impedimento de generar suficiente potencial): $u_0 = 1.5\alpha$.
- Infarto al miocardio (muerte de células por falta de oxígeno): $\sigma_0 = 0.1$.
- Fibrosis (producción excesiva de colágeno): $k = 1$.

Grafique las variables dependientes $u(t), r(t), \sigma(t), y(t)$ resultantes para cada caso.