Complementaria 9

Ejercicios sobre suma de variables aleatorias independientes y aplicaciones del Teorema del Límite Central (TLC)

08/10/2018

Contenido

Suma de Variables Aleatorias Independientes

Teorema 1

Si la función generadora de momentos existe, entonces es única y determina por completo a la distribución de probabilidad de X. Es decir, si dos variables aleatorias tienen la misma función generatriz de momentos, entonces, las dos variables tienen también la misma distribución de probabilidad.

Suma de Variables Aleatorias Independientes

Teorema 2

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes y la función generadora de momentos existe para todo $-h \leq t \leq h$ para algún $h > 0$, sea

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

entonces

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t)$$

Teorema del Límite Central (TLC)

Teorema

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$. Sea

$$S_n = X_1 + \cdots X_n$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z)$$

visto de otra forma

$$S_n \sim N\left(n\mu, \sigma^2 n\right) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Teorema del Límite Central (TLC)

Teorema

Sea $\overline{X_n}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño **n** obtenida de una población con densidad $f_X(x)$, media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Sea Z_n la variable aleatoria definida por $Z_n = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. Entonces Z_n es aproximadamente normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$ cuando n tiende a ∞.

$$\overline{X_n} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$