Complementaria 4

EJERCICIOS SOBRE VARIABLES ALEATORIAS CON DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE MAYOR APLICACIÓN.

Sergio Angulo

10 de septiembre de 2018

Contenido

Bernoulli

Definición

Si X es una variable aleatoria que mide el "número de éxitos", y se realiza un único experimento con dos posibles resultados (éxito o fracaso), se dice que la variable aleatoria X se distribuye como una Bernoulli de parámetro p .

Función de probabilidad

$$X \sim Bernuolli(p)$$

Su función de probabilidad viene definida por:

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$$
$$\text{con } \ x = \{0, 1\}$$

Valor Esperado

$$E[X] = p = \mu$$

Varianza

$$var[X] = p(1-p) = pq$$

Uniforme

Definición

La distribución uniforme discreta es una distribución de probabilidad que asume un número finito k de valores con la misma probabilidad.

Función de probabilidad

$$X \sim \mathrm{Uniforme}(k)$$

Si la distribución asume los valores reales $x_1, x_2 \ldots x_n$ su función de probabilidad es:

$$p(x_i) = \frac{1}{n}$$

Valor Esperado

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i$$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - \mu^2$$

Hipergeométrica

Definición

Suponga que se tiene una población de N elementos de los cuales, d pertenecen a la categoría A y $N-d$ a la B. La distribución hipergeométrica mide la probabilidad de obtener x $(0 \leq x \leq d)$ elementos de la categoría A en una muestra sin reemplazo de n elementos de la población original.

Función de probabilidad

$$X \sim Hipergeometrica(N, n, k)$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Valor Esperado

$$E[X] = \frac{nd}{N}$$

Varianza

$$Var[X] = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{nd}{N}\right)\left(1 - \frac{d}{N}\right)$$

Binomial

Definición

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Función de probabilidad

$$X \sim \mathrm{Binomial}(n, p)$$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

$0 \leq p \leq 1$

donde $x = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Valor Esperado

$$E[X] = np$$

Varianza

$$var[X] = np(1-p)$$

Geométrica

La distribución geométrica es cualquiera de las dos distribuciones de probabilidad discretas siguiente:

- La distribución de probabilidad del número X del ensayo de Bernoulli necesaria para obtener un éxito, contenido en el conjunto $\{1, 2, 3, ...\}$.
- La distribución de probabilidad del número $Y = X - 1$ de fallos antes del primer éxito, contenido en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Función de probabilidad

$$X \sim Geometrica(p)$$

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$$

para $x = 1, 2, 3, ...$

Valor Esperado

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

Varianza

$$var[X] = \frac{(1 - p)}{p^2}$$

Binomial Negativa

Definición

La distribución binomial negativa es una distribución de probabilidad discreta que incluye a la distribución de Pascal. Es una ampliación de las distribuciones geométricas, utilizada en procesos en los cuales se ve necesaria la repetición de ensayos hasta conseguir un número de casos favorables (primer éxito).

Función de probabilidad

$$X \sim BinomialNegativa(p, k)$$

$$\begin{aligned} f_b(x; k, p) &= \binom{x-1}{x-k} p^k (1-p)^{x-k} \\ &= \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \end{aligned}$$

Valor Esperado

$$E[X] = \frac{k}{p}$$

Varianza

$$var[X] = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

Poisson

Definición

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo. Concretamente, se especializa en la probabilidad de ocurrencia de sucesos con probabilidades muy pequeñas, o sucesos raros.

Función de probabilidad

$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda, t)$$

$$f(x, \lambda t) = \frac{e^{-t\lambda}(t\lambda)^x}{x!}$$

Para $x = 0, 1, 2, \ldots$ y $\lambda, t \geq 0$

Valor Esperado

$$E[X] = \lambda t$$

Varianza

$$var[X] = \lambda t$$