Complementaria 8

Variables Aleatorias Conjuntas

Sergio Angulo

23 de septiembre de 2018

Contenido

Variables Aleatorias Conjuntas

Definición

Si X y Y son dos variables aleatorias, la distribución de probabilidad de sus ocurrencias simultáneas puede representarse por una función $g_{XY}(XY)$ para cualquier par de valores (x, y) dentro del rango de las variables aleatorias; a esto se le denomina distribución de probabilidad conjunta.

Propiedades

- $$P_{XY}(X = x, Y = y) = g_{XY}(x, y)$$

- $$P_{XY}(X, Y) = g_{XY}(X, Y) \geq 0$$

- $$\sum_{R(X)} \sum_{R(Y)} g_{XY}(X, Y) = 1$$

Distribuciones Marginales

- $$g_X(X) = \sum_{R(Y)} g_{XY}(X, Y)$$

- $$g_Y(Y) = \sum_{R(X)} g_{XY}(X, Y)$$

Distribución Condicional

- $$g_{X|Y}(X,Y) = \frac{g_{XY}(X,Y)}{g_Y(Y)}$$
- $$g_{Y|X}(X,Y) = \frac{g_{XY}(X,Y)}{g_X(X)}$$

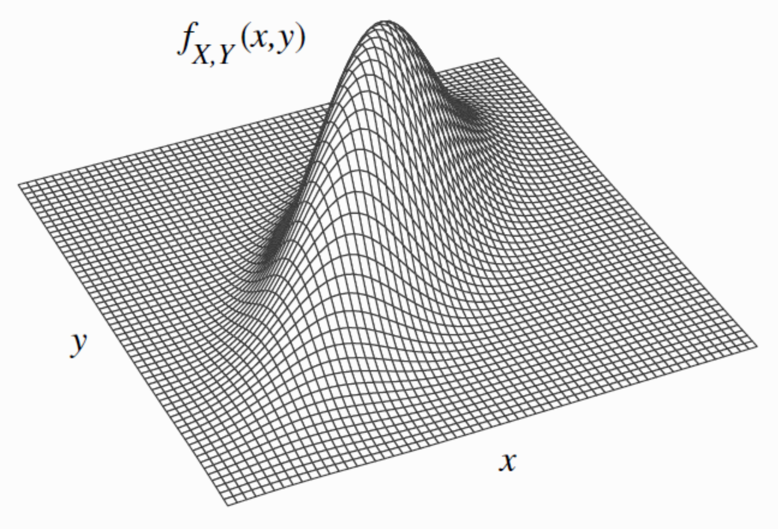
Independencia

$$g_{XY}(X,Y) = g_X(X) * g_Y(Y)$$

Propiedades

- $$P_{XY}(X \leq x, Y \leq y) = F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{xy}(x,y)dxdy$$
- $$f_{xy}(x,y) = \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} F_{X,Y}(x,y)$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dxdy = 1 \quad \& \quad f_{xy}(x,y) \geq 0$$

Propiedades

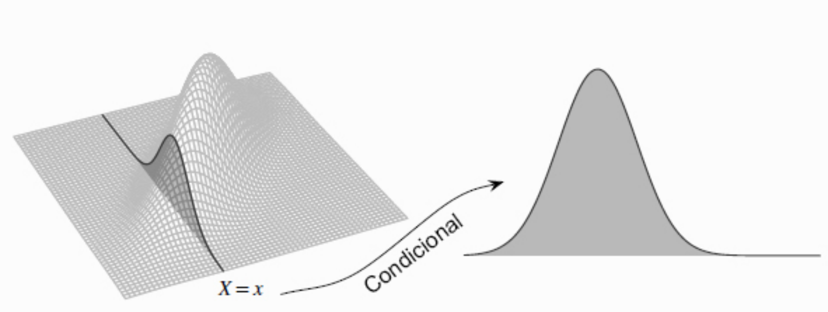


Distribuciones Marginales

- $$f_X(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y)dy$$
- $$f_Y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y)dx$$

Distribución Condicional

$$f_{X|Y}(X,Y) = \frac{f_{XY}(X,Y)}{f_Y(Y)} \qquad f_{Y|X}(X,Y) = \frac{f_{XY}(X,Y)}{f_X(X)}$$



Distribución Condicional

Propiedades

- Regla de Bayes

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(y|x) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)}$$

- $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_Y(y) dy$$

Independencia

Independencia

$$f_{XY}(X, Y) = f_X(X) * f_Y(Y)$$

Varianza y Covarianza de una V.A.

- $$Var(X) = \sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- $$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Coeficiente de Correlación

Coeficiente de Correlación

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(XY)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

$$\rho_{XY} = \begin{cases} 1 & \rightarrow \quad \text{Relación lineal directa} \\ 0 & \rightarrow \quad \text{No existe relación lineal} \\ -1 & \rightarrow \quad \text{Relación lineal inversa} \end{cases}$$

Propiedad Fundamental del Valor Esperado Condicional

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \sum_{R(X)} E(X|y)g_y(y)$$