Complementaria 5

Ejercicios sobre variables aleatorias con distribuciones continúas de mayor aplicación: Uniforme, Exponencial, Normal

Sergio Angulo

10 de septiembre de 2018

Contenido

Uniforme

Definición

En teoría de probabilidad y estadística, la distribución uniforme continua es una familia de distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas, tales que para cada miembro de la familia, todos los intervalos de igual longitud en la distribución en su rango son igualmente probables.

FDP

$$X \sim \mathrm{Uniforme}(a, b)$$

Su f.d.p. viene definida por:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 & si \quad d.l.c. \end{cases}$$

Valor Esperado

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Varianza

$$var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponencial

Definición

En estadística la distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua con un parámetro $\lambda > 0$ cuya función de densidad es:

FDP

$$X \sim exponencial(\lambda)$$

Su f.d.p. viene definida por:

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad 0 \leq x \\ 0 & si \quad d.l.c. \end{cases}$$

Valor Esperado

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza

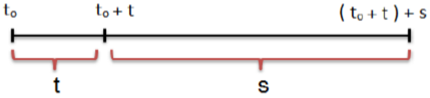
$$var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exponencial

Función de probabilidad acumulada

$$F_x(x) = P(X_E \leq X) = 1 - e^{-\lambda X}$$

Propiedad de no memoria



$$P(T > t + s | T > t) = e^{-\lambda s}$$

$$P(T > t + s) = 1 - P(T \leq t + s) = e^{-\lambda(t+s)}$$

Normal

Definición

En estadística y probabilidad se llama distribución normal, distribución de Gauss o distribución gaussiana o distribución de Laplace-Gauss, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece estadística y teoría de probabilidad.

FDP

$$X \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma)$$

Su f.d.p. viene definida por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$

Valor Esperado

$$E[X] = \mu$$

Varianza

$$var[X] = \sigma^2$$

Propiedades

Algunas propiedades de la distribución normal son las siguientes:

- Es simétrica respecto de su media, μ;
- La moda y la mediana son ambas iguales a la media, μ;
- Los puntos de inflexión de la curva se dan para $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.
- Distribución de probabilidad en un entorno de la media:
  1. en el intervalo$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ se encuentra comprendida, aproximadamente, el 68,26 % de la distribución;
  2. en el intervalo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ se encuentra, aproximadamente, el 95,44 % de la distribución;
  3. por su parte, en el intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ se encuentra comprendida, aproximadamente, el 99,74 % de la distribución.

Estandarización

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

es una variable aleatoria normal estándar: $Z \sim N(0, 1)$
Una consecuencia importante de esto es que la función de distribución de una distribución normal es, por consiguiente,

$$\Pr(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

A la inversa, si Z es una distribución normal estándar, $Z \sim N(0, 1)$, entonces

$$X = \sigma Z + \mu$$

Triangular

Definición

En probabilidad y estadística, la distribución triangular es la distribución de probabilidad continua que tiene un valor mínimo a, un valor máximo b y una moda m, de modo que la función de densidad de probabilidad es cero para los extremos (a y b), y afín entre cada extremo y la moda, por lo que su gráfico es un triángulo.$X \sim Triangular(a, m, b)$

FDP

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)} & si \quad a \leq x < m \\ \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)} & si \quad m \leq b \\ 0 & si \quad d.l.c. \end{cases}$$

Valor Esperado

$$E[X] = \frac{a+b+m}{3}$$

Varianza

$$\frac{a^2+b^2+m^2-ab-am-bm}{18}$$