Complementaria 3

Ejercicios sobre variables aleatorias discretas y continuas, funciones de probabilidad, funciones de densidad, funciones de distribución acumulada, valor esperado, varianza y función generatriz de momentos.

Sergio Angulo

10 de septiembre de 2018

Contenido

Variables Aleatorias

Definición

Una variable aleatoria (v.a.) es un número real asociado al resultado de un experimento aleatorio, es decir, una función real en el espacio muestral,

$$
\begin{aligned}
X :& \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\
& w \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

En términos formales una variable aleatoria es una función definida sobre un espacio de probabilidad.

Variable Aleatoria Discreta

Definición

Sea (Ω, B, P) un Espacio de Probabilidad. Una Variable Aleatoria discreta sobre Ω es una función:

$$\begin{aligned} X : &\Omega \to \mathbb{R} \\ &\omega \to \omega(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tal que el rango de X es un conjunto finito o infinito numerable. Es decir,

$$\begin{aligned} R(X) &= \{x_1, x_2, ..., x_n\} \\ R(X) &= \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \sim \mathbb{N} \end{aligned}$$

Función de Probabilidad

Definición

En teoría de la probabilidad, una función de probabilidad (también denominada función de masa de probabilidad) es una función que asocia a cada punto de su espacio muestral X la probabilidad de que ésta lo asuma.

$$g_x(x) = P(X = x)$$

Hay que advertir que el concepto de función de probabilidad solo tiene sentido para variables aleatorias que toman un conjunto discreto de valores. Para variables aleatorias continuas el concepto análogo es el de función de densidad.

Función de Probabilidad

Función de Probabilidad

$g_x(x) = P(X = x)$

$$g_x(x) = \begin{cases} g_x(0) & x = 0 \\ g_x(1) & x = 1 \\ \vdots & \\ 0 & \text{dlc} \end{cases}$$

Propiedades:

- $$\sum_{R(X)} g_X(x_i) = 1$$
- $$0 \leq g_X(x_i) \leq 1 \forall i \in R(x)$$

Función de Probabilidad Acumulada

Función de Probabilidad Acumulada (FPA) $G_x(x) = P(X \leq x)$

$$G_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ g_x(0) & 0 \leq x < 1 \\ \vdots & \\ 1 & x \geq k \end{cases}$$

Variable Aleatoria Continua

Definición

Sea (Ω, B, P) un Espacio de Probabilidad. Una Variable Aleatoria Continua sobre Ω es una función:

$$
\begin{aligned}
X : & \Omega \to \mathbb{R} \\
& \omega \to \omega(x) \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Tal que, el el rango de X, $R(X)$, es un conjunto continuo.
$R(X)$ suele ser, por ejemplo, los reales ó un intervalo $[a, b]$ contenido en los reales.

Función de Densidad de Probabilidad

Definición

En la teoría de la probabilidad, la función de densidad de probabilidad, función de densidad, o, simplemente, densidad de una variable aleatoria continua describe la probabilidad relativa según la cual dicha variable aleatoria tomará determinado valor.
La probabilidad de que la variable aleatoria caiga en una región específica del espacio de posibilidades estará dada por la integral de la densidad de esta variable entre uno y otro límite de dicha región.
La función de densidad de probabilidad (FDP o PDF en inglés) es positiva a lo largo de todo su dominio y su integral sobre todo el espacio es de valor unitario.

Función de Densidad de Probabilidad

Función de Densidad de Probabilidad

Propiedades:

$f_X(x) \geq 0$

$$\int_{R(x)} f_X(x) = 1$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Función de Distribución Acumulada $F_X(x)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = P(X \leq x)$$

$$\frac{\delta}{\delta x} F_X(x) = f_X(x)$$

Valor Esperado

¿Qué es el valor esperado?

El valor que se espera obtener de un experimento estadístico se llama el valor esperado. También llamado "esperanza matemática" o "media".

Caso Discreto

Sea X una variable aleatoria discreta con rango $R(X)$. El valor esperado de la V.A. X se define por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} g_X(x_i) * x_i$$

Caso Continuo

Sea X una variable aleatoria continua con rango $R(X)$. El valor esperado de la V.A. X se define por:

$$E[X] = \int_{R(X)} f_X(x_i) * x_i dx$$

Valor Esperado

Propiedades

- $E[a] = a$
- $E[aX] = aE[X]$
- $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$
- $E[XY] = E[X]E[Y]$ sólo si X y Y son independientes.

Varianza

Definición

En teoría de probabilidad, la varianza o variancia (que suele representarse como σ^2) de una variable aleatoria es una medida de dispersión definida como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media. O en pocas palabras, es la media de los residuos al cuadrado.

$$VAR(X) = \sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

Desviación Estándar

La desviación típica o desviación estándar (denotada con el símbolo σ o s, dependiendo de la procedencia del conjunto de datos) se define como la raíz cuadrada de la varianza de la variable.

$$Desv.Est(X) = \sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Varianza

Propiedades

- $Var[a] = 0$
- $Var[aX] = a^2 Var[X]$
- $Var[X \pm Y] = Var[X] \pm Var[Y]$ Si X, Y son independientes.
- $Var[aX \pm bY + c] = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) \pm 2abCov(X, Y)$
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- Si X, Y son independientes entonces $Cov(X, Y) = 0$

Función Generadora de momentos

Definición

Sea X una variable aleatoria. La función Generatriz de Momentos está dada por:

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

Es decir,

- Caso discreto:

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \sum_{R(X)} g_x(x) \cdot e^{tx}$$

- Caso continuo:

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{R(X)} f_x(x) \cdot e^{tx} dx$$

Función Generadora de momentos

Momentos

A partir de la FGM se pueden obtener los momentos de la V.A. X, $E[x^n]$, derivando esta función n veces y evaluando la derivada en $t = 0$.

- $E[X] = \frac{\partial M_x}{\partial t}\Big|_{t=0}$
- $E[X^2] = \frac{\partial^2 M_x}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$
- $E[X^3] = \frac{\partial^3 M_x}{\partial t^3}\Big|_{t=0}$

  $\vdots$
- $E[X^n] = \frac{\partial^n M_x}{\partial t^n}\Big|_{t=0}$

La FGM es usada principalmente para calcular la media y la varianza de una variable aleatoria.