第9章 有限源的简单排队系统

《随机过程与排队论》

信息与软件工程学院 | 王庆先

Email：qxwang@uestc.edu.cn

- 有限源的简单排队系统
- M/M/c/m/m系统
    - 问题的引入
    - 队长——故障的机器数
    - 等待时间与逗留时间——故障机器等待维修的时间
    - 其它重要指标
- M/M/c/c/m损失制系统
    - 问题的引入
    - 队长——故障的机器数
- 有备用品的M/M/c/m+K/m系统
    - 问题的引入
    - 故障的机器数

- 顾客总体是有限的
- 输入过程是简单流
- 服务时间服从负指数分布

典型例子：机器维修模型

- **问题的叙述**

- c个工人共同看管m($m \geq c$)台机器，机器运转时会发生故障而停止生产，这时需要工人进行适当的维修，修复后立即投入运转；
- 每台机器的寿命，即连续正常运转时间ξ均服从参数$\lambda(\lambda > 0)$的负指数分布，即$P(\xi > t) = e^{-\lambda t}$，$t \geq 0$；
- m台机器各自独立运转，一旦发生故障，有空闲的工人立即对其进行修理，每个工人对每台发生故障的机器的修理时间η均服从参数为$\mu(\mu > 0)$的负指数分布；
- 如果没有空闲的工人，发生故障的机器就等待修理，直到有空闲的工人为止；
- 每台机器的运转相互独立，修理与运转相互独立，每个工人之间的修理也相互独立。

假定N(t)表示在时刻t发生故障的机器数，令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j|N(t) = i\}，\ i, j = 0,1,2,\ldots$$

则

1)$p_{i,i+1}(\Delta t)$ = P{在Δt内m-i台正常的机器有1台发生故障，而修复0台}

$$+\sum_{n=2}^{m-i} P\{\text{在}\Delta t\text{内又故障}n\text{台，而修复}n\text{-}1\text{台}\}$$

当$0\le i < c$时

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = C_{m-i}^{1}(1-e^{-\lambda\Delta t})(e^{-\lambda\Delta t})^{m-i-1}(e^{-u\Delta t})^{i}$$

$$+\sum_{n=2}^{m-i} C_{m-i}^{n}(1-e^{-\lambda\Delta t})^{n}(e^{-\lambda\Delta t})^{m-i-n}C_{i}^{n-1}(1-e^{-\mu\Delta t})^{n-1}(e^{-u\Delta t})^{i-n+1}$$

$$=(m-i)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

当$c\le i<m$时

$$p_{i,i+1}(\Delta t)=C_{m-i}^{1}(1-e^{-\lambda\Delta t})(e^{-\lambda\Delta t})^{m-i-1}(e^{-u\Delta t})^{c}$$

$$+\sum_{n=2}^{m-i}C_{m-i}^{n}(1-e^{-\lambda\Delta t})^{n}(e^{-\lambda\Delta t})^{m-i-n}C_{c}^{n-1}(1-e^{-\mu\Delta t})^{n-1}(e^{-u\Delta t})^{c-n+1}$$

$$=(m-i)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

故$p_{i,i+1}(\Delta t)=(m\text{-}i)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，$0\le i<m$

2) $p_{i,i-1}(\Delta t)$ $=$P{在Δt内又故障0台，而修复1台}

$$+\sum_{n=1}^{m-1}P\{\text{在}\Delta t\text{内又故障}n\text{台而修复}n+1\text{台}\}$$

$$=\begin{cases} i\mu\Delta t+o(\Delta t), & 1\le i<c \\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & c\le i\le m \end{cases}$$

3) 类似分析可得

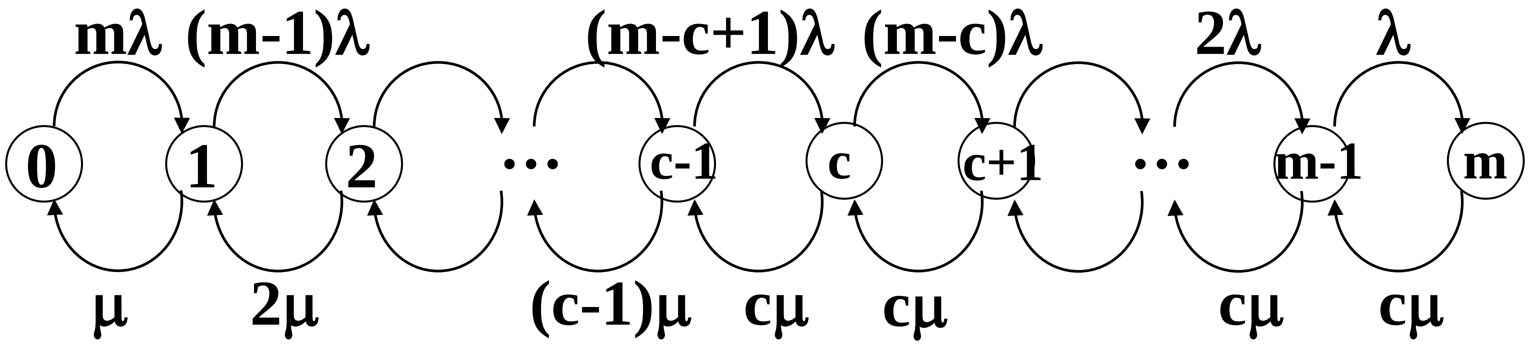
$p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t)$，　$|i\text{-}j|\ge 2$

综合上述1)2)3)得

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}(m-i)\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1; i=0,1,2,\cdots,m-1\\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1; i=1,2,\cdots,c-1\\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1; i=c,c+1,\cdots m\\ o(\Delta t), & |i-j|\geq 2\end{cases}$$

于是，{N(t)，t≥0}是有限状态空间E＝{0,1,2,...,m}上的生灭过程，而且顾客源是有限的，其参数为

$$\begin{cases}\lambda_i=(m-i)\lambda, & i=0,1,2,\cdots,m-1\\ \mu_i=\begin{cases}i\mu, & i=1,2,\cdots,c-1\\ c\mu, & i=c,c+1,\cdots,m\end{cases}\end{cases}$$


mλ
(m-1)λ
(m-c+1)λ
(m-c)λ
2λ
λ
0
1
2
···
c-1
c
c+1
···
m-1
m
μ
2μ
(c-1)μ
cμ
cμ
cμ
cμ

令$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)$，j=0,1,2,…，则{$p_j$，j=0,1,2,…}存在，且

$$p_j=\begin{cases}C_m^j\rho^j p_0, & j=0,1,2,\cdots,c-1\\ C_m^j\dfrac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots,m\end{cases}$$

其中 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$, $p_0=\left[\sum\limits_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i+\sum\limits_{i=c}^{m}C_m^i\dfrac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right]^{-1}$

$$\begin{cases}p_0=\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}=\left(\sum\limits_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i+\sum\limits_{i=c}^{m}C_m^i\dfrac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right)^{-1}\\ p_j=\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}p_0=\begin{cases}C_m^j\rho^j p_0, & j=0,1,2,\cdots,c-1\\ C_m^j\dfrac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots,m\end{cases}\end{cases}$$

特别地，当c = 1时，有

$$p_j=\frac{m!}{(m-j)!}\rho^j p_0,\quad j=1,2,\cdots,m;$$

而$p_0=\left[\sum\limits_{i=0}^{m}\dfrac{m!}{(m-i)!}\rho^i\right]^{-1}$

证明 由生灭过程的极限定理即得。■

用N和N_q分别表示在统计平衡的条件下发生故障的机器数和等待修复的机器数，则平均发生故障的机器数为

$$\overline{N} = E(N) = \sum_{j=0}^{m} jp_j$$

$$= \sum_{j=1}^{c-1} \frac{m!\rho^j}{(j-1)!(m-j)!} p_0 + \frac{m!}{c!} \sum_{j=c}^{m} \frac{j\rho^j}{(m-j)!c^{j-c}} p_0$$

平均等待修复的机器数为 $$\overline{N}_q = \sum_{j=c}^{m} (j-c)p_j$$

平均忙的维修工人数为 $$\overline{c} = \sum_{j=1}^{c-1} jp_j + c\sum_{j=c}^{m} p_j$$

3.故障机器等待维修的时间分布

假定机器是先故障先维修。

定理 令W_q表示在统计平衡下，该故障机器的等待修理时间，则分布函数$W_q(t)=P\{W_q\le t\}$为

$$W_q(t)=1-\sum_{j=c}^{m-1} p_j^{-} e^{-c\mu t}\left\{1+c\mu t+\cdots+\frac{(c\mu t)^{j-c}}{(j-c)!}\right\},\qquad t\ge 0$$

等待修理的平均时间为

$$\overline{W}_q=\sum_{j=c}^{m-1}\frac{j-c+1}{c\mu}\cdot p_j^{-}=\frac{\overline{N}_q}{\lambda(m-\overline{N})}$$

令 p_j^- 表示在统计平衡下一台机器发生故障时已有j台机器早已处于故障状态的概率，由于在j台机器发生故障的条件下，只有m-j台机器正常工作，根据负指数分布的无记忆性（马氏性）和各台机器工作的独立性，有

$$p_j^- = k(m-j)p_j, \quad j = 0,1,\cdots,m-1$$ 其中k为比例因子。

根据 $\sum_{j=0}^{m-1} p_j^- = 1$ ，可得 $k = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)p_j} = \dfrac{1}{m\sum_{j=0}^{m} p_j - \sum_{j=0}^{m} jp_j} = \dfrac{1}{m-\overline{\overline{N}}}$

于是 $p_j^- = \dfrac{m-j}{m-\overline{\overline{N}}}p_j, \quad j = 0,1,\cdots,m-1$

故

$$W_q(t) = \sum_{j=0}^{c-1} p_j^- + \sum_{j=c}^{m-1} p_j^- \int_0^t \frac{c\mu(c\mu)^{j-c}}{(j-c)!} e^{-c\mu x}dx = 1 - \sum_{j=c}^{m-1} p_j^- e^{-c\mu t}\left\{1 + c\mu t + \cdots + \frac{(c\mu t)^{j-c}}{(j-c)!}\right\}, \qquad t \ge 0$$

在所有修理工均忙的条件下，新故障的机器必须等待前面j-c+1故障机器修复后才能接受修理。由于修理时间服从负指数分布，一台机器发生故障时，各个正接受修理的机器的剩余修理时间仍服从相同参数的负指数分布。在每个修理工均忙的条件下，每个修理工的输出流是参数μ的泊松流，c个独立工作的修理工组成的输出流是参数cμ的泊松流，因此相邻修复完毕的故障机器之间的间隔时间应服从参数为cμ的j-c+1阶爱尔朗分布，于是等待修理的平均时间为

$$\overline{W}_q = \sum_{j=c}^{m-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot p_j^{-} = \frac{\overline{N}_q}{\lambda(m-\overline{N})}$$

1) 平均忙的维修工人数为 $\overline{N}_c = \sum_{j=0}^{c-1} jp_j + c\sum_{j=c}^{m} p_j$

2) 平均运行的机器数为 $\overline{N}_m = \sum_{j=0}^{m} (m-j)p_j = m - \overline{N}$

j台机器故障的概率等于m-j台机器运行的概率

3) 统计平衡下单位时间内发生故障的平均机器数为

$$\lambda_e = \lambda\sum_{j=0}^{m} (m-j)p_j = \lambda(m-\overline{N})$$

4) 统计平衡下单位时间内平均修复的机器数为

$$\lambda_\mu = \mu\left(\sum_{j=0}^{c-1} jp_j + c\sum_{j=c}^{m} p_j\right) = \mu\cdot\overline{N}_c$$

5) 统计平衡下单位时间内平均修复的机器数等于发生故障的平均数，即 $\lambda_\mu = \lambda_e$

故有 $\overline{N}_c = \dfrac{\lambda_e}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\mu}(m-\overline{N})$

- **问题的叙述**

❖ c个工人共同看管m(m≥c)台机器，机器运转时会发生故障而停止生产，这时需要工人进行适当的维修，修复后立即投入运转；

❖ 每台机器的寿命，即连续正常运转时间ξ均服从参数$\lambda(\lambda > 0)$的负指数分布，即$P(\xi > t) = e^{-\lambda t}$，$t \geq 0$；

❖ m台机器各自独立运转，一旦发生故障，有空闲的工人立即对其进行修理，每个工人对每台发生故障的机器的修理时间η均服从参数为$\mu(\mu > 0)$的负指数分布；

❖ 当c个维修工人都忙于维修故障的机器时，发生故障的机器不是等待维修，而是立刻送到其它地方去修理，或者停产大修；

❖ 每台机器的运转相互独立，修理与运转相互独立，每个工人之间的修理也相互独立。

假定N(t)表示在时刻t发生故障的机器数，令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|N(t)=i\},\quad i,j=0,1,2,\ldots$$

则类似于§6.1的分析可得

$$\begin{cases}(m-i)\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1;i=0,1,2,\cdots,c-1\end{cases}$$

1) $p_{i,i+1}(\Delta t)=$ P{在Δt内n

而修复0台} P{在

当0≤i＜c时

$$=C_{m-i}^{1}(1-e$$

$$+\sum_{n=2}^{m-i}C_{m-i}^{n}(1-e^{-\lambda\Delta t}$$

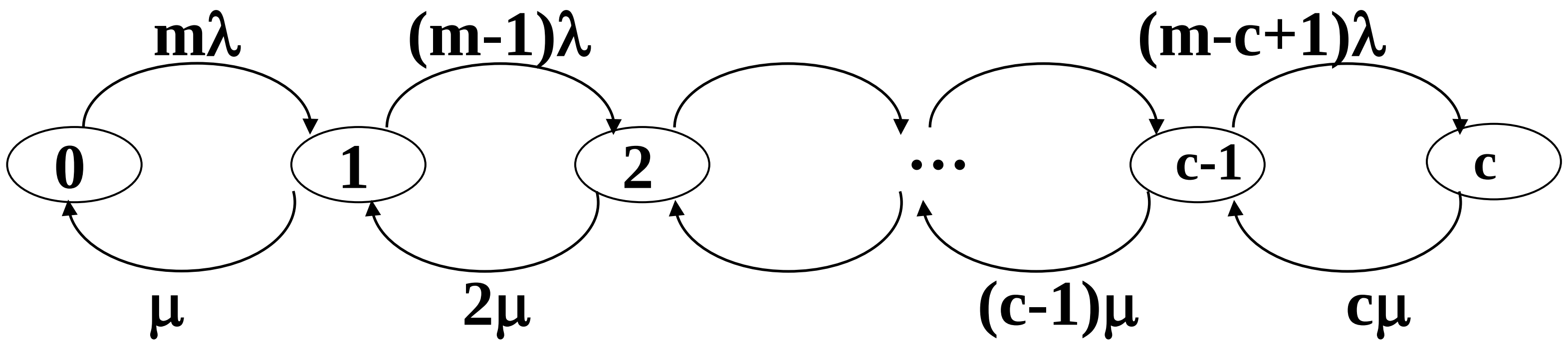
$$=(m-i)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

2) $p_{i,i-1}(\Delta t)=$ P{在Δt内又故障0台，而修复1台}

$$+\sum_{n=1}^{m-1}P\{\text{在}\Delta t\text{内又故障}n\text{台而修复}n+1\text{台}\}$$

$$=\begin{cases}i\mu\Delta t+o(\Delta t), & 1\le i<c\\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & c\le i\le m\end{cases}$$

状态转移速度图



令$p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$，j=0,1,2,...,c，则对任意 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ ，$\{p_j$， $0\le j\le c\}$存在，且

$$p_j = \frac{C_m^j \rho^j}{\sum\limits_{k=0}^{c} C_m^k \rho^k}, \qquad j = 0,1,2,\cdots,c$$

$$\begin{cases} p_0 = \left(1+\sum\limits_{j=1}^{c}\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1} = \left(\sum\limits_{i=0}^{c} C_m^i \rho^i\right)^{-1} \\ p_j = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} p_0 = C_m^j \rho^j p_0, \qquad j = 1,2,\cdots,c \end{cases}$$

证明 由生灭过程的极限定理即得。 ■

上述分布$\{p_j$，$0\le j\le c\}$称为**恩格塞特(Engset)分布**，而

$$p_c(m) = \frac{C_m^c \rho^c}{\sum\limits_{k=0}^{c} C_m^k \rho^k}$$

称为**恩格塞特损失公式**，这是损失的概率。

当m=c时，即m台机器m个维修工人，我们有

$$p_j = \frac{C_m^j \rho^j}{\sum_{k=0}^{m} C_m^k \rho^k} = \frac{C_m^j \rho^j}{(1+\rho)^m}, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, m$$

此时，平均发生故障的机器数为

$$\overline{N} = \sum_{j=0}^{m} j p_j = \frac{m\rho}{1+\rho}$$

- **问题的叙述**

- m台机器正常工作，另有K台机器备用，有c个维修工人。当运转的机器发生故障时，发生故障的机器立刻由维修工去修理，修好后转入备用；
- 处于正常运转的机器不足m台时，只好缺额生产；
- 每台机器的寿命，即连续正常运转时间ξ均服从参数$\lambda(\lambda > 0)$的负指数分布，即$P(\xi > t) = e^{-\lambda t}$，$t \geq 0$；
- m台机器各自独立运转，一旦发生故障，有空闲的工人立即对其进行修理，每个工人对每台发生故障的机器的修理时间η均服从参数为$\mu(\mu > 0)$的负指数分布；
- 每台机器的运转相互独立，修理与运转相互独立，每个工人之间的修理也相互独立。

假定N(t)表示在时刻t发生故障的机器数，令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|N(t)=i\}，\ i,j=0,1,2,\ldots$$

则类似于§6.1的分析可得

1)当c≤K，即维修工人数小于等于备用机器台数时，有

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases} m\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1;i=0,1,2,\cdots,K \\ (m-i+K)\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1;i=K+1,\cdots,m+K-1 \\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1;i=1,2,\cdots,c-1 \\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1;i=c,c+1,\cdots m+K \\ o(\Delta t), & |i-j|\geq 2 \end{cases}$$

于是，当$c \le K$时，$\{N(t), t \ge 0\}$是有限状态空间$E = \{0,1,2,\ldots,m+K\}$上的生灭过程，其参数为

$$\lambda_i = \begin{cases} m\lambda, & 0 \le i \le K \\ (m-i+K)\lambda, & K+1 \le i \le m+K-1 \end{cases};$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu,, & 1 \le i \le c-1 \\ c\mu, & c \le i \le m+K \end{cases}$$

2) 当$c>K$，即维修工人数大于备用机器台数时，有

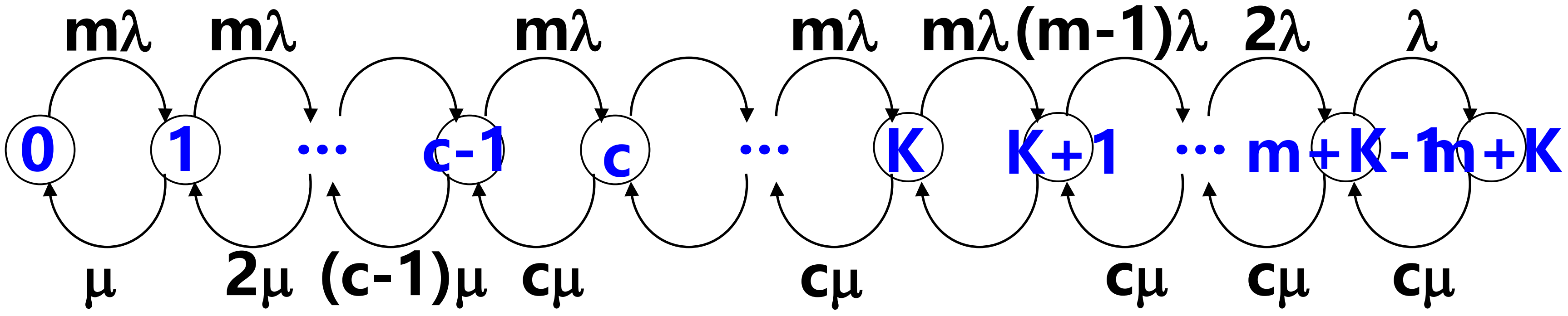
$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases} m\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1; i=0,1,2,\cdots,K-1 \\ (m-i+K)\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1; i=K,\cdots,m+K-1 \\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1; i=1,2,\cdots,c-1 \\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1; i=c,c+1,\cdots m \\ o(\Delta t), & |i-j|\geq 2 \end{cases}$$

于是，$\{N(t)，t\geq 0\}$是有限状态空间$E=\{0,1,2,\ldots,m+K\}$上的生灭过程，其参数为

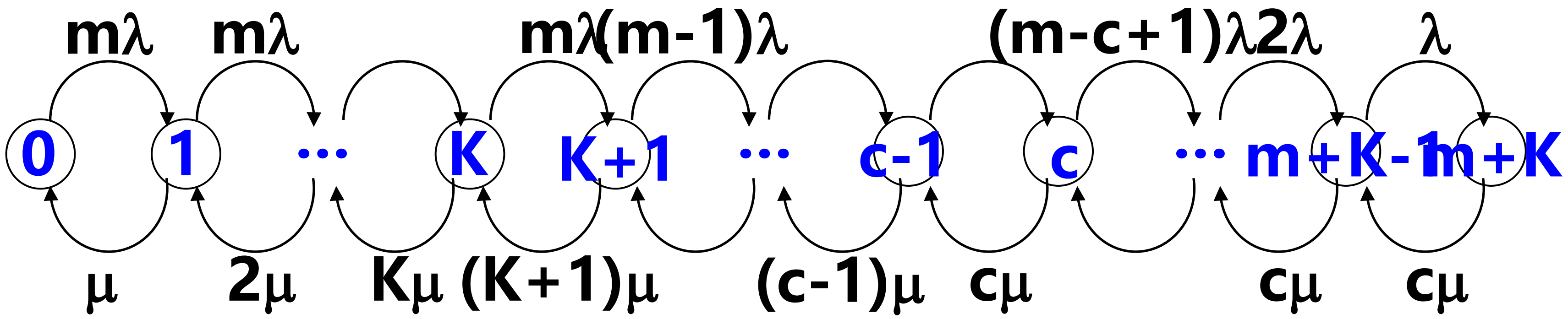
$$\lambda_i=\begin{cases} m\lambda, & 0\leq i\leq K-1 \\ (m-i+K)\lambda, & K\leq i\leq m+K-1 \end{cases};$$

$$\mu_i=\begin{cases} i\mu,, & 1\leq i\leq c-1 \\ c\mu, & c\leq i\leq m+K \end{cases}$$

◆ c≤K时


mλ mλ mλ mλ mλ (m-1)λ 2λ λ
0 1 … c-1 c … K K+1 … m+K-1 m+K
μ 2μ (c-1)μ cμ cμ cμ cμ cμ

◆ c＞K时


mλ mλ mλ (m-1)λ (m-c+1)λ 2λ λ
0 1 … K K+1 … c-1 c … m+K-1 m+K
μ 2μ Kμ (K+1)μ (c-1)μ cμ cμ cμ

当c≤K时，令$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)$，j=0,1,2,…,c，则对任意$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，{$p_j$，0≤j≤m+K}存在，且

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{c-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\frac{1}{c!}\sum_{i=c}^{K-1}\frac{m^i}{c^{i-c}}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=K}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\dfrac{m^j}{j!}\rho^j p_0, & j=1,2,\cdots,c-1\\ \dfrac{m^j}{c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots,K-\\ \dfrac{m^K\cdot m!}{(m-j+K)!\cdot c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0, & j=K,K+1,\cdots,m\end{cases}$$

证明 由生灭过程的极限定理即得。 ■

$$p_0=\left(1+\sum_{j=1}^{m+K}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{c-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\frac{1}{c!}\sum_{i=c}^{K-1}\frac{m^i}{c^{i-c}}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=K}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$$p_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}p_0=\begin{cases}\dfrac{m^j}{j!}\rho^j p_0, & j=1,2,\cdots,c-1\\ \dfrac{m^j}{c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots,K-1\\ \dfrac{m^K\cdot m!}{(m-j+K)!\cdot c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0, & j=K,K+1,\cdots,m+K\end{cases}$$

当$c>K$时，令$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)$，$j=0,1,2,\ldots,c$，则对任意$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，$\{p_j,\ 0\le j\le m+K\}$存在，且

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{K-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\sum_{i=K}^{c-1}\frac{m^K\cdot m!}{i!(m-i+K)!}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=c}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\dfrac{m^j}{j!}\rho^j p_0, & j=1,2,\cdots,K-1\\[2ex] \dfrac{m^K\cdot m!}{j!(m-j+K)!}\rho^j p_0, & j=K,K+1,\cdots,c-1\\[2ex] \dfrac{m^K\cdot m!}{(m-j+K)!\cdot c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots\end{cases}$$

$$p_0=\left(1+\sum_{j=1}^{m+K}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{K-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\sum_{i=K}^{c-1}\frac{m^K\cdot m!}{i!(m-i+K)!}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=c}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$$p_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}p_0=\begin{cases}\dfrac{m^j}{j!}\rho^j p_0, & j=1,2,\cdots,K-1\\[2ex] \dfrac{m^K\cdot m!}{j!(m-j+K)!}\rho^j p_0, & j=K,K+1,\cdots,c-1\\[2ex] \dfrac{m^K\cdot m!}{(m-j+K)!\cdot c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots,m+K\end{cases}$$

证明 由生灭过程的极限定理即得。 ■

在$c \le K$时，若c固定，当K充分大时，可近似地看成无限总体的系统，具有到达率为$m\lambda$，可用$M/M/c/\infty$型系统的有关结果作近似计算反而简单，因为当$K \to \infty$时，若$m\lambda/\mu < 1$，则可化为$M/M/c/\infty$型系统的有关结果；在当$c > K$时，若$K = 0$（即无备用机器），则可化为$M/M/c/m/m$型系统的有关结果。

某航空公司要保证正常的运营，应保证有12台发动机处于良好状态的概率不低于0.995，设每台发动机正常运转时间服从负指数分布，平均连续运转时间为3个月，有2个维修工负责其修理工作，修理时间也服从负指数分布，平均修复时间为5天，问：在满足要求的前提下，应该备用多少台发动机?

由题设知，$m=12$(台)，$c=2$(个)，$\lambda=1/3$（台/月），$\mu=6$(台/月)，$\rho=1/18$，要保证使得同时有12台发动机处于良好状态的概率不低于0.995，则等价于故障的发动机不超过备用发动机数的概率不低于0.995，于是

1) 当备用机器数$K=2$（$\le c$）时，有

$$\sum_{j=0}^{2} p_j = 0.9474 < 0.995$$

2) 当备用机器数$K=3$（$>c$）时，有

$$\sum_{j=0}^{3} p_j = 0.9968 > 0.995$$

所以，应取备用发动机台数$K=3$。

- 某系统利用2台计算机进行容错处理。如果1台计算机正常工作时间服从负指数分布，平均10天，而计算机损坏时由1名工程师维修，维修1台计算机的时间是负指数分布的，平均5天。求：2台计算机都正常运行的概率和由于计算机损坏无法运行的概率，系统中平均运行的计算机数。
- 某电视台有2部发射机，1部发射1部备用。如果1部正常工作时间服从负指数分布，平均9天，而调整维修1部机器的是负指数分布的，平均3天。求无备用机而正常运转的概率和由于停机无法发射的概率。

- 有限源的简单排队系统
- M/M/c/m/m系统
  - 问题的引入
  - 队长——故障的机器数
  - 等待时间与逗留时间——故障机器等待维修的时间
  - 其它重要指标
- M/M/c/c/m损失制系统
  - 问题的引入
  - 队长——故障的机器数
- 有备用品的M/M/c/m+K/m系统
  - 问题的引入
  - 故障的机器数

- 二阶段循环排队系统
  - 问题的引入
  - Ⅰ号台的队长
  - 车辆在Ⅰ号台的等待时间
- 一般服务的M/G/1/∞排队系统
  - 嵌入马尔可夫链

THANKS