

塞曼效应

叶耿杰 (2020302021167)
武汉大学物理科学与技术学院，湖北省武汉市 430000

0 实验目的

1. 学习观察塞曼效应的实验方法；
2. 观察 Hg 灯的 546.1nm 光谱线在外磁场作用下的塞曼分裂结果（分裂后子谱线的个数、子谱线间距、子谱线的相对强度、子谱线的偏振态）；
3. 由塞曼裂距计算电子的荷质比 e/m 。

1 实验原理

1.1 塞曼效应推导

电子在电磁场中的哈密顿量为

$$H = \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})]^2}{2m_e} + V(\boldsymbol{r}) \quad (1)$$

在原子内部磁场接近匀强 ($\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$) 且远小于原子内部场强 ($A^2 \approx 0$) 的近似下，有

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} + V(\boldsymbol{r}) + \frac{e}{2m_e} \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{B} + \frac{e}{m_e} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B} \quad (2)$$

其中 \boldsymbol{L} 为轨道角动量， \boldsymbol{S} 为自旋角动量。这样的近似是合适的，因为太强的磁场将导致帕邢-巴克效应而掩盖塞曼效应。由哈密顿量容易看出塞曼效应贡献的能级移动

$$\Delta E = \frac{eB}{2m_e} \langle L_z + 2S_z \rangle = \langle \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \rangle \quad (3)$$

由 Wigner-Eckart 定理可以证明 [1]，对总角动量 \boldsymbol{J} ，有

$$\langle L_z + 2S_z \rangle = g_{eff} \langle J_z \rangle \quad (4)$$

以下来求塞曼效应的 g 因子 g_{eff} 。由 Wigner-Eckart 定理，

$$\left\langle \alpha', jm \left| T_{m_1}^{(j_1)} \right| \alpha, j_2 m_2 \right\rangle = C_{j_1 j_2} (jm; m_1 m_2) \cdot \langle \alpha', j \left| T^{(j_1)} \right| \alpha, j_2 \rangle \quad (5)$$

其中 $T_{m_1}^{(j_1)}$ 为 j_1 阶球张量 T 的 m_1 分量， C 为 CG 系数， α 为其他量子数 l, s 。任一矢量 V 都可以重组为 1 阶球张量，即

$$V_1^{(1)} = V_x + iV_y, \quad V_{-1}^{(1)} = V_x - iV_y, \quad V_0^{(1)} = V_z \quad (6)$$

故

$$\langle ls' m' | V_z | lsjm \rangle = \begin{pmatrix} 0 & j' & j \\ 1 & m' & m \end{pmatrix} \langle ls' | V^{(1)} | lsjm \rangle \quad (7)$$

相应地将 V 替换成 \boldsymbol{J} ，可以消去 CG 系数：

$$\frac{\langle ls' m' | V_z | lsjm \rangle}{\langle ls' m' | J_z | lsjm \rangle} = \frac{\langle ls' | V^{(1)} | lsjm \rangle}{\langle ls' | J^{(1)} | lsjm \rangle} \quad (8)$$

另一方面，由 Wigner-Eckart 定理还可得到

$$\langle lsjm | \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{V} | lsjm \rangle \propto \langle lsj | V^{(1)} | lsjm \rangle \quad (9)$$

结合以上两式可得

$$\langle lsjm | V_z | lsjm \rangle = \frac{\langle lsjm | \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{V} | lsjm \rangle}{\langle lsjm | \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J} | lsjm \rangle} \langle lsjm | J_z | lsjm \rangle \quad (10)$$

代入 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}$ ，对比 (4) 式可得

$$g_{eff} = \frac{\langle lsjm | \boldsymbol{J} \cdot (\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}) | lsjm \rangle}{\langle lsjm | \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J} | lsjm \rangle} \quad (11)$$

由于 $|lsjm\rangle$ 是 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{J}, J_z$ 的共同本征态，计算得到

$$g_{eff} = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \quad (12)$$

这就是塞曼效应的 g 因子。由此得能级移动

$$\Delta E = \frac{eB}{2m_e} g_{eff} \langle J_z \rangle = \frac{eBm\hbar}{2m_e} g_{eff} = \mu_B B m g_{eff} \quad (13)$$

其中 $\mu_B = e\hbar/2m_e$ 为玻尔磁子。

实验中，使用 Hg 的 546.1nm 线，它是 $6s7s(^3S_1) \rightarrow 6s6p(^3P_2)$ 的跃迁。[2] (这表明，Hg 的最外层电子属于 L-S 耦合，否则，不能写出光谱项，也不能用如上的方式计算 g 因子。) 可见，上能级总角动量 $j = 1$ ， m_j 的可取值有 3 个，在磁场下解简并，分裂成 3 条，裂距为 $2\mu_B B$ ；下能级总角动量 $j = 2$ ，分裂成 5 条，裂距为 $\frac{3}{2}\mu_B B$ 。跃迁满足 $\Delta l = 1, \Delta j = 1$ ，此外还要求 $\Delta m = \pm 1$ ，因此，可能的跃迁共 9 种，如图所示

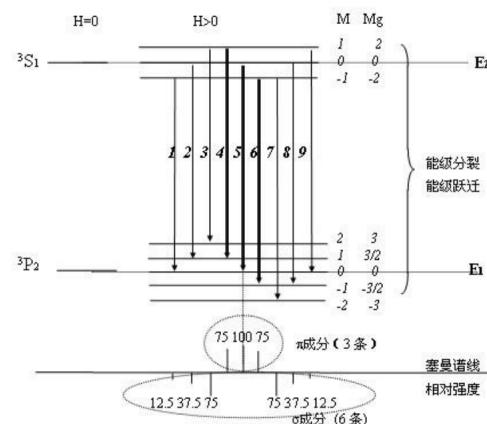


图 1: 汞原子 546.1nm 线塞曼劈裂情况

由于跃迁要保持角动量 z 分量（沿磁场方向的分

量)守恒,故当 $\Delta m = +1$ 时,发出的是面对 z 轴时看到的右旋圆偏 (σ^-) 光,光子的 $\langle S_z \rangle = -\hbar$;当 $\Delta m = -1$ 时,是面对 z 轴时看到的左旋圆偏 (σ^+) 光。这两种偏振,偏振平面在 xy 平面上,在垂直于磁场的方向看来,相当于垂直于磁场和传播方向的线偏光 (0°)。当 $\Delta m = 0$ 时,光子的 $\langle S_z \rangle = 0$,但是光子总有自旋 1,故它是偏振平面为 xz 或 yz 的圆偏光,这称为 π 光。在实验中,我们只要将出射光通过 90° 的偏振片,就可以滤去 σ 成分,只观察 π 成分的三条谱线。由式(13)可知,记分裂前能级间距 E_0 ,分裂后能级间距 E_{12} ,则

$$E_{12} - E_0 = \Delta E_2 - \Delta E_1 = (m_2 g_2 - m_1 g_1) \mu_B B \quad (14)$$

其中下标 2 指上能级,下标 1 指下能级。由于 $\Delta m = 0$,上式简化为

$$E_{12} - E_0 = \frac{m}{2} \mu_B B \quad (15)$$

其中 $m = 0, \pm 1$ 。

1.2 F-P 干涉仪和干涉圆环的计算

由几何光学的相关理论可知,F-P 干涉仪的透射强度为

$$I = \frac{I_0}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (16)$$

其中 $F = 4R/(1-R)^2$, R 为反射率, δ 为相位差

$$\delta = \frac{2\eta h \cos \theta}{\lambda} \quad (17)$$

其中 η 为折射率, h 为腔长, θ 为入射光相对主光轴的倾角。可见, I 是 δ 的周期函数,当 F 很大时, $I(\delta)$ 呈尖锐成峰的梳形,几乎只有使 $I(\delta)$ 取极大的 δ 能通过 F-P 腔。极值条件为 $\delta = 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$ 。代入得

$$2\eta h \cos \theta = k\lambda \quad (18)$$

由此可得波长差

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2\eta h}{k} (\cos \theta' - \cos \theta) \approx \frac{\eta h}{k} (-\theta'^2 + \theta^2) \quad (19)$$

设 r 为等倾干涉圆环的半径, D 为光源到光屏 (CCD 摄像机) 的距离,则由于 θ 是个小角度,有

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{r}{D} \quad (20)$$

因此同一干涉级次 k 下, 波长差与圆环半径的关系为

$$\Delta\lambda = \frac{\eta h (r_k^2 - r_{k+1}^2)}{k D^2} \quad (21)$$

为了从上式中消去 k (通常是很大、难以计数的量),由(18)式得

$$k = \frac{2\eta h}{\lambda} \left(1 - \frac{r_k^2}{2D^2} \right) \quad (22)$$

相同波长、相邻干涉级次下有

$$\frac{\eta h (-r_{k+1}^2 + r_k^2)}{D^2} = (k+1-k)\lambda = \lambda \quad (23)$$

由此再消去 D , 得到文献 [3] 中测量波长差的式子

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\eta h} \frac{r_k^2 - r_{k+1}^2}{r_k^2 - r_{k+1}^2} \quad (24)$$

实验中,通过逐渐增大励磁电流,使干涉圆环逐渐分开,很容易控制同级次的干涉圆环距离较近,而不同级次的距离较远,从而准确读出圆环的级次。

1.3 电子荷质比的计算公式

由(15)式得

$$\Delta\nu = \frac{E_{12} - E_0}{h} \implies \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \frac{\frac{m}{2} \mu_B B}{hc} = \frac{meB}{8\pi m_e c} \quad (25)$$

记 $\Delta\nu$ 总取正值,则由 $|m| = 1$ 得

$$\frac{e}{m_e} = \frac{8\pi c}{\lambda B} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} \right) \quad (26)$$

代入(24)式得

$$\frac{e}{m_e} = \frac{4\pi c}{\eta h B} \frac{|r_k^2 - r_{k+1}^2|}{r_k^2 - r_{k+1}^2} \quad (27)$$

因此在实验中,测出圆环的半径(不必考虑单位,单位统一即可)和线圈中央的磁感应强度,已知 F-P 腔长 $h = 2 \pm 0.1\text{mm}$ [2],由于实验光路的其他部分都在空气中,腔内空气折射率按 $\eta = 1$ 计,即可求电子的荷质比。

2 实验过程

实验装置如图所示

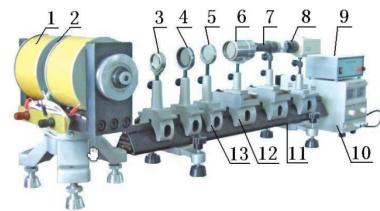


图 1 仪器结构图

1. 直流电磁铁; 2. 笔型汞灯; 3. 聚光镜组; 4. 偏振片组; 5. 1/4 波片 (中心波长 546.1nm) 组; 6. F-P 标准具组; 7. 测量望远镜组; 8. CCD 摄像机及镜头; 9. 笔型汞灯电源; 10. 直流稳定电源; 11. 导轨组; 12. 可调滑座; 13. 固定滑座。

图 2:

光从笔型汞灯发出,通过聚光镜组变化为平行光,由干涉滤光片挑出中心波长 546.1nm 的部分,射入 F-P 标准具,形成多光束干涉。干涉光束通过偏振片,由望远镜组聚焦,成像于 CCD 摄像机上,并连接电脑进行拍摄和分析。^[2]

实验时,调节光路准直后,勿轻易动干涉仪和偏振片;励磁电流置零,调节望远镜后焦使电脑屏幕上显示的干涉圆环清晰;增大励磁电流,观察到干涉圆环明显分裂后,拍摄照片进行分析;并拆下笔形汞灯,在同样的位置放入特斯拉仪,测量磁感应强度。输入磁感应强度,由分析软件算出电子的荷质比。调节不同的励磁电流,重复多次实验。

拍摄的干涉圆环如图所示

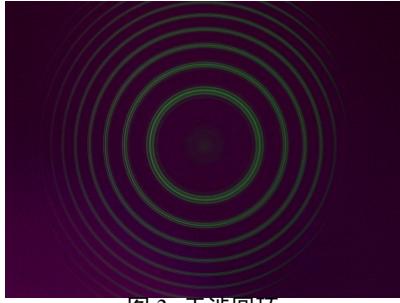


图 3: 干涉圆环

2.1 手动三点作圆

实验用软件采用人眼判断各级圆环位置，在圆环上相对均衡地选取三点，由此作出圆心和半径，并计算，如图所示

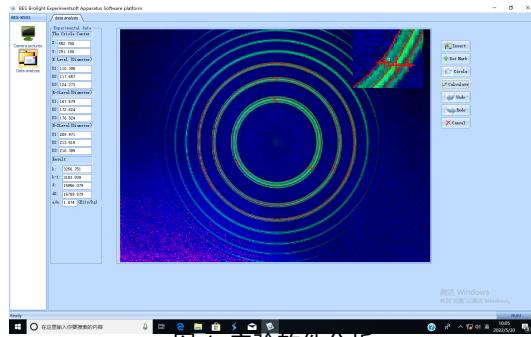


图 4: 实验软件分析

(拍摄图片经过部分预处理，详见后述)实验中发现描的点并不完全在画的圆上，未知其对计算结果有何影响。用此种方法重复 3 次试验(实验数据详见附录)，计算得 $e/m_e = 1.912 \times 10^{11} C/kg$ ，与公认值 $1.759 \times 10^{11} C/kg$ 相比，相对误差高达 8.7%。

2.2 分析整个图像

文献 [4] 指出，除了磁感应强度和腔长测量的精度以外，干涉圆环圆心的寻找是测量电子荷质比的误差的重要来源。因此，编写了这样的算法：

1. 图片预处理：调整直方图使圆环更明锐（在 Photoshop 中使用自动颜色、自动对比度）；滤去红色和蓝色成分，处理后结果见下图。
2. 找出图片中的所有亮点 (x, y, n) ，其中亮度 $n > 0$ 。
3. 假设一点 (x_0, y_0) 是圆心，对所有的亮点做变换 $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 。
4. 在分辨率 $\Delta r = 0.1 px$ 下，对所有半径 r 相等的亮点的亮度做累加，得到谱线 $n(r)$ 。计算方差

$$Var(n|x_0, y_0) = \frac{\sum_r (n(r) - \bar{n})^2}{\sum_r n(r)} \quad (28)$$

5. 重复第 3,4 步，优化： $\max_{x_0, y_0} Var(n|x_0, y_0)$ 。
6. 优化结果即为圆环的圆心。

这是基于最恰当的圆心能使谱线最明锐的假设。代码详见 <https://github.com/sanhoeko/ZeemanCV>。

预处理后的照片如图所示：

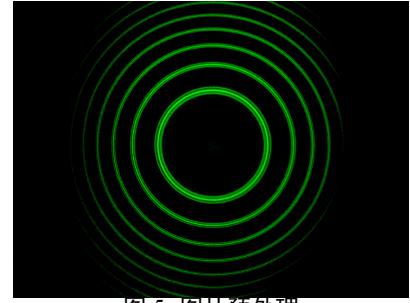


图 5: 图片预处理

最优谱线如图所示

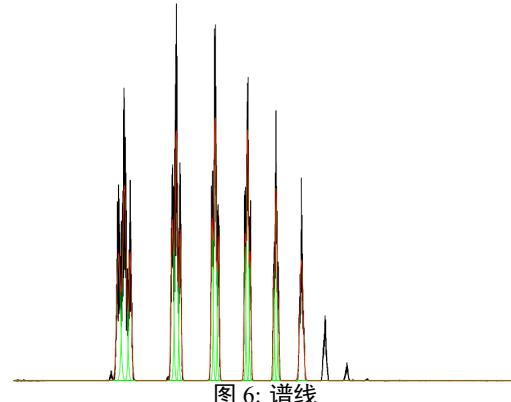


图 6: 谱线

明显可见三个峰聚集为一族。使用 Origin 软件进行峰位分析（详见附录），最后根据式 (27)，记

$$x_{ik} = \frac{1}{B_i} \frac{|r_{ik}^2 - r_{ik}^2|}{r_{ik}^2 - r_{i,k+1}^2} \quad (29)$$

其中 i 为实验次数， k 为条纹相对级次（记半径最小的中心条纹为 $k = 0$ ），计算得

$$\bar{x} = 0.0918(\text{SI}), \quad \sqrt{Var(x)} = 0.00462(\text{SI}) \quad (30)$$

忽略特斯拉仪和 F-P 腔长度的误差，得到结果

$$\frac{e}{m_e} = (1.73 \pm 0.09) \times 10^{11} C/kg \quad (31)$$

相对误差仅为 5%，且公认值落在误差允许范围内。

3 实验结果

通过测量汞灯 546.1nm 线的塞曼分裂情况，测得电子的荷质比为 $(1.73 \pm 0.09) \times 10^{11} C/kg$ ；通过比较发现，若将全图像的信息充分利用，由此求出干涉圆环最合适圆心，能大幅降低该实验的误差。

参考文献

- [1] 陈童. 量子力学新讲:7.3
- [2] 实验讲义: 塞曼效应
- [3] 南昌大学实验讲义:F-P 干涉仪测波长差
- [4] 罗剑峰, 兰勇, 康冬丽, 尹红伟. 塞曼效应实验测量电子荷质比的误差原因查找 [J]. 大学物理实验, 2011, 24(04):75-78.DOI:10.14139/j.cnki.cn22-1228.2011.04.027.

Peak Analysis

数据集: [A1.bmp]"1.bmp"!B"y"

Date: 2023/4/22

基线: 常量

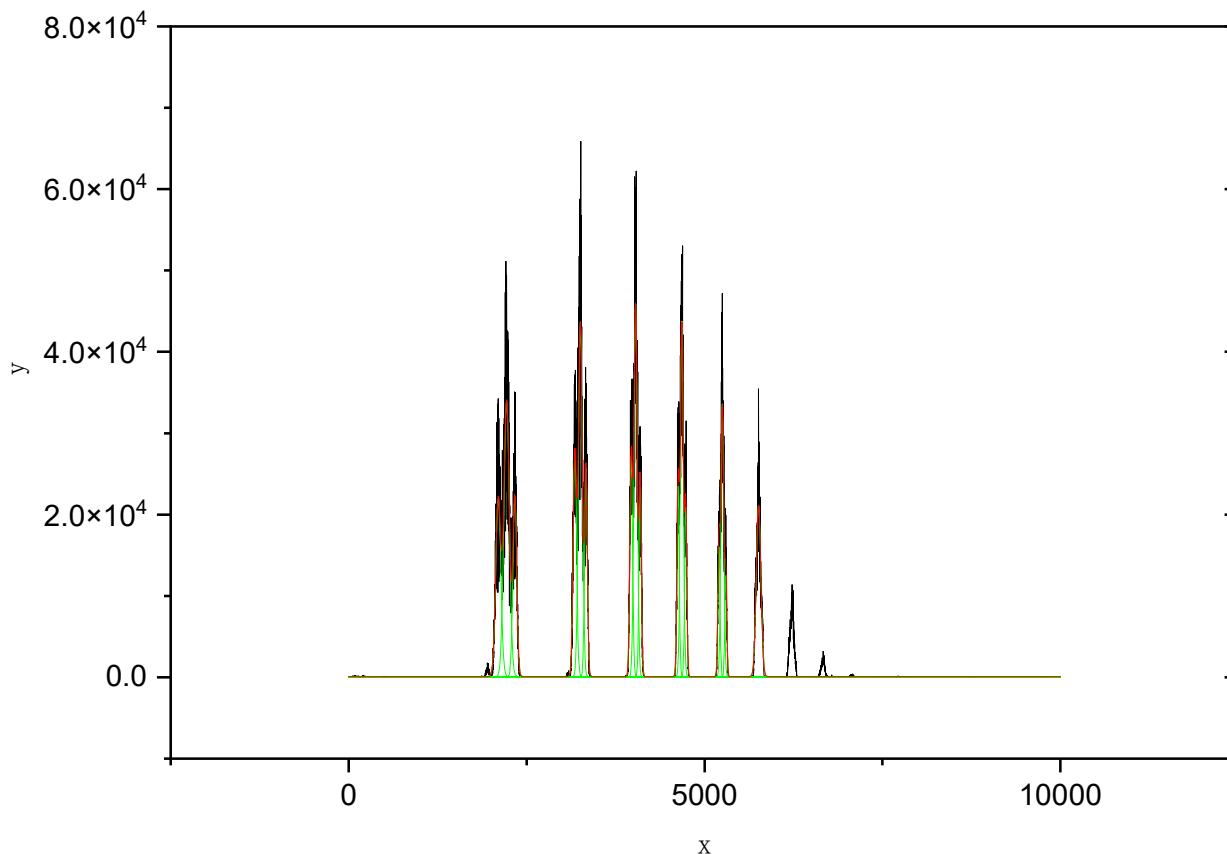
卡方 = 3.04572E+06

调整后R平方=9.50140E-01

数据点=9999

SS=3.03049E+10

自由度=9950



Fitting Results

波峰序号	峰值类型	拟合数据波峰面积	FWHM	最大高度	波峰加权平均中心	拟合数据波峰面积百分比
1	Gaussian	1952019.54175	83.62102	21929.89515	2102.33726	7.52385
2	Gaussian	3251567.34662	90.05137	33921.12561	2219.4949	12.53282
3	Gaussian	1483274.23682	63.12053	22075.91015	2334.67098	5.71712
4	Gaussian	1654100.26419	56.70313	27404.55169	3177.8905	6.37555
5	Gaussian	2972790.85337	64.08182	43581.01567	3255.63425	11.45831
6	Gaussian	1241211.81867	45.56285	25591.92852	3334.57257	4.78412
7	Gaussian	1299651.79684	45.11943	27060.21451	3970.436	5.00937
8	Gaussian	2640744.87598	54.18316	45785.70658	4032.11956	10.17847
9	Gaussian	1012748.32455	39.44113	24122.38298	4095.78178	3.90353
10	Gaussian	2294579.54214	49.37709	43656.15193	4681.29276	8.84421
11	Gaussian	1679000.36123	47.09892	33489.42404	5250.20274	6.47153
12	Gaussian	1701868.11371	75.98891	21039.8936	5759.62017	6.55967
13	Gaussian	954731.26035	38.40836	23351.96074	4628.79898	3.67991
14	Gaussian	791349.27768	35.79732	20767.56864	4735.8415	3.05017
15	Gaussian	591641.07097	34.88076	15934.57411	5202.99643	2.28042
16	Gaussian	423137.31844	32.10169	12382.87589	5299.22924	1.63094