МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №2-2
«Интерполяционные кубические сплайны»
Группа ФН11-51Б

Вариант 1

Студент: Авилов О.Д.

Преподаватель: Кутыркин В.А

Оценка:

Москва 2022

Задание

На отрезке $[0,2]$ задана равномерная сетка $A = \langle \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k \rangle$, где $k = 10$, с шагом $h = 0.2 = stp(A)$ и определена функция $f(\tau) = 2sin\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\sqrt{2(58-n) + N\tau^2\sqrt{23-N}}$, где n - номер группы и N - номер студента в журнале группы. Для A-сеточной функции ${}^{>}y = \hat{A}(f) = [y_0, y_1, \ldots, y_k\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{|A|}(A)$, где $y_i = f(\tau_i)$ для $i = \overline{0,k}$, решить задачу A-интерполяции сеточной функции ${}^{>}y$ с помощью сплайна $spl_3(A; {}^{>}y)$ 3-ей степени дефекта 1. Затем сравнить в узлах равномерной сетки $B = \langle \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{2k} \rangle$ $(stp(B) = 0.1)$ отрезка $[0,2]$ значения функции $f(\tau)$ и сплайна $spl_3(A; {}^{>}y)$ и, кроме того, значения их производных, т.е. значения функций $\frac{df}{d\tau}$ и $\frac{dspl_3(A; {}^{>}y)}{d\tau}$. Результаты проиллюстрировать графически.

Решение

N = 1, n = 51

$$f(\tau) = 2sin\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\sqrt{14 + \tau^2\sqrt{22}}$$

На отрезке $[0,2]$ равномерная сетка $A = \langle \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{10} \rangle$ и соответствующая ей сеточная функция ${}^{>}y = [f(\tau_0), f(\tau_1), \ldots, f(\tau_{10})\rangle \in \underline{\mathbb{R}}^{11}(A)$ имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1.0 \\ 1.2 \\ 1.4 \\ 1.6 \\ 1.8 \\ 2.0 \end{pmatrix}, \quad {}^{>}y = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 2.32791 \\ 4.51494 \\ 6.40883 \\ 7.84304 \\ 8.64648 \\ 8.66541 \\ 7.79234 \\ 5.99512 \\ 3.3395 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Определим коэффициенты $a_i = y_{i-1}, i \in \langle 1, \ldots, k \rangle$ и $g_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i}, i \in \langle 1, \ldots, k-1 \rangle$, где $h_i = \tau_i - \tau_{i-1}, i \in \langle 1, \ldots, k \rangle$

$$a = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 2.32791 \\ 4.51494 \\ 6.40883 \\ 7.84304 \\ 8.64648 \\ 8.66541 \\ 7.79234 \\ 5.99512 \\ 3.3395 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 11.63957 \\ 10.9351 \\ 9.46949 \\ 7.17105 \\ 4.0172 \\ 0.09466 \\ -4.3653 \\ -8.9861 \\ -13.2781 \end{pmatrix}$$

Для нахождения c воспользуемся системой уравнений:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3(g_{i+1} - g_i), i \in \langle 1, \ldots, k-2 \rangle \\ c_k = 0 \end{cases}$$

Решим второе уравнение, как СЛАУ вида $Z\hat{c} = l$, где:

$$Z = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} -2.1134 \\ -4.3968 \\ -6.8953 \\ -9.4615 \\ -11.7676 \\ -13.38 \\ -13.8624 \\ -12.8759 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c} = Z^{-1}l = \begin{pmatrix} -1.7342 \\ -3.6302 \\ -5.729 \\ -7.9303 \\ -9.8574 \\ -11.4781 \\ -11.1304 \\ -13.3123 \end{pmatrix}$$

Добавим c_1 и c_k:

$$c = \begin{pmatrix} 0.0 \\ -1.7342 \\ -3.6302 \\ -5.729 \\ -7.9303 \\ -9.8574 \\ -11.4781 \\ -11.1304 \\ -13.3123 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Определим коэффициенты b_i и d_i по формулам:

$$\begin{cases} b_i = g_i = \dfrac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), i \in \langle 1, \dots, k-1 \rangle \\ b_k = b_{k-1} + h_{k-1}(c_{k-1} + c_k) \end{cases}$$

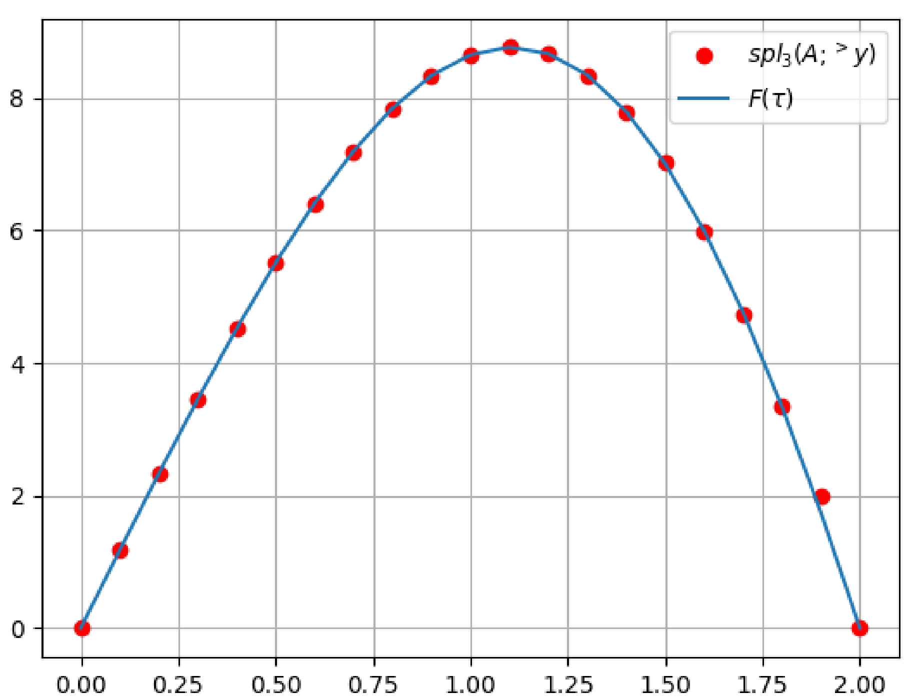
$$d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i), i \in \langle 1, \dots, k-1 \rangle$$

$$b = \begin{pmatrix} 11.75519 \\ 11.40835 \\ 10.33546 \\ 8.46361 \\ 5.73173 \\ 2.17418 \\ -2.0929 \\ -6.6146 \\ -11.5031 \\ -12.3906 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -2.8903 \\ -3.16 \\ -3.498 \\ -3.6688 \\ -3.2119 \\ -2.7011 \\ 0.57953 \\ -3.6366 \\ 22.18715 \\ -107.6718 \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем найти неизвестные коэффициенты полиномов $P_1, P_2, \dots, P_k$ сплайна $spl_3(A; {}^{>}y)$ по формуле:

$$P_i(t) = a_i + b_i(t - \tau_{i-1}) + c_i(t - \tau_{i-1})^2 + d_i(t - \tau_{i-1})^3$$

Построим графики $f(\tau)$ и $spl_3(A; {}^{>}y)$:



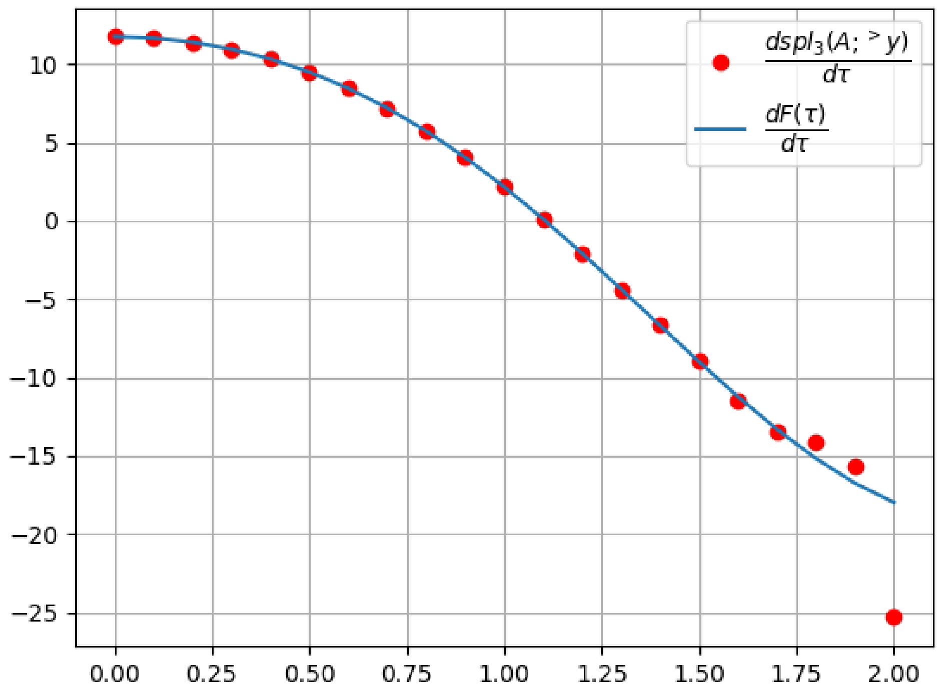
Производная функции $f(\tau)$:

$$f'(\tau) = \pi\sqrt{\sqrt{22}\tau^2 + 14}cos(\frac{\pi\tau}{2}) + \frac{2\sqrt{22}\tau sin(\frac{\pi\tau}{2})}{\sqrt{\sqrt{22}\tau^2 + 14}}$$

Коэффициенты $P_1', P_2', \ldots, P_k'$ производной сплайна $\dfrac{dspl_3(A;{}^{>}y)}{d\tau}$:

$$P_i'(\tau_i) = b_i + 2c_i(\tau_i - \tau_{i-1}) + 3d_i(\tau_i - \tau_{i-1})^2$$

Построим графики $\dfrac{df(\tau)}{d\tau}$ и $\dfrac{dspl_3(A;{}^{>}y)}{d\tau}$:



Результаты

В результате лабораторной работы была решена задача интерполяции сеточной функции с помощью сплайна 3-ей степени единичного дефекта, а также было проведено сравнение значений функции и сплайна и их производных. Получили небольшое расхождение графиков производных, что вызвано большим шагом нашей сетки A.