МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №1-4
«Итерационный метод Якоби для полного решения задачи вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной симметричной матрицы»
Группа ФН11-51Б

Вариант 1

Студент: Авилов О.Д.

Преподаватель: Кутыркин В.А

Оценка:

Москва 2022

Задание

Используя метод Якоби, найти приближённое полное решение спектральной задачи для матрицы A, приведённой в таблицах ниже. Останов выбрать на том шаге итерации, когда максимальная по модулю внедиагональная компонента преобразованной матрицы станет меньше $\varepsilon = 0.01$. Проверить найденные приближённые собственные векторы и отвечающие им собственные значения матрицы A, проверив соответствующие приближённые равенства ($A \cdot {}^{>}\tilde{q}_i \approx \tilde{\lambda}_i \cdot {}^{>}\tilde{q}_i$ для любого $i \in \overline{1,4}$) с указанием погрешности.

$N = 1, \beta = 1 - 0,1(50 - 51) = 1,1$

$$A = A[0] = \begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Решение

1 Итерация

$a_1^4 = 3$ - максимальный по модулю внедиагональный элемент матрицы $A[0]$.
Выберем угол поворота $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Матрица поворота:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} cos\varphi & 0 & 0 & -sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sin\varphi & 0 & 0 & cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.70711 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.70711 & 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$${}^{T}Q_0 = \begin{pmatrix} 0.70711 & 0 & 0 & 0.70711 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = {}^{T}Q_0 \cdot A[0] \cdot Q_0 = \begin{pmatrix} 14 & 2.12132 & 2.12132 & 0 \\ 2.12132 & 11 & 3 & 0.70711 \\ 2.12132 & 3 & 11 & -0.7071 \\ 0 & 0.70711 & -0.7071 & 8 \end{pmatrix}$$

2 Итерация

$a_2^3 = 3$ - максимальный по модулю внедиагональный элемент матрицы $A[1]$.
Выберем угол поворота $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Матрица поворота:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.70711 & -0.7071 & 0 \\ 0 & 0.70711 & 0.70711 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
{}^TQ_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.70711 & 0.70711 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0.70711 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A[2] = {}^TQ_1 \cdot A[1] \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}
$$

3 Итерация

$a_1^2 = 3$ - максимальный по модулю внедиагональный элемент матрицы $A[2]$.
Выберем угол поворота $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Матрица поворота:

$$
Q_2 = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.70711 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0.70711 & 0.70711 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^TQ_2 = \begin{pmatrix} 0.70711 & 0.70711 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0.70711 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A[3] = {}^TQ_2 \cdot A[2] \cdot Q_2 = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}
$$

4 Итерация

$a_3^4 = 3$ - максимальный по модулю внедиагональный элемент матрицы $A[3]$.
Выберем угол поворота $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Матрица поворота:

$$
Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.70711 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0.70711 & 0.70711 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^TQ_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.70711 & 0.70711 \\ 0 & 0 & -0.7071 & 0.70711 \end{pmatrix}
$$

$$
A[4] = {}^TQ_3 \cdot A[3] \cdot Q_3 = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}
$$

После 4 итерации максимальный по модулю среди всех внедиагональных элементов оказался меньше $\varepsilon = 0.01$ На диагонали матрицы $A[4]$ стоят все собственные значения матрицы A.

$$Q[3] = Q_0 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы матрицы A - это столбцы матрицы $Q[3]$

$$A \cdot {}^{>}q_1 = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 8.5 \\ 8.5 \\ 8.5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot {}^{>}q_1$$

$$A \cdot {}^{>}q_2 = \begin{pmatrix} -5.5 \\ 5.5 \\ 5.5 \\ -5.5 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot {}^{>}q_2$$

$$A \cdot {}^{>}q_3 = \begin{pmatrix} -3.5 \\ -3.5 \\ 3.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} = \lambda_3 \cdot {}^{>}q_3$$

$$A \cdot {}^{>}q_4 = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 4.5 \\ -4.5 \\ 4.5 \end{pmatrix} = \lambda_4 \cdot {}^{>}q_4$$

Погрешность моих вычислений вышла очень малой ($\varepsilon \approx 0$).

Результаты

Таким образом, используя метод Якоби, было найдено приближённое решение спектральной задачи матрицы A. Приближённые собственные значения данной матрицы стоят на главной диагонали матрицы $A[4]$. А её собственные значения являются столбцами матрицы $Q[3]$. При проверке соответствующих приближённых равенств погрешность вышла меньшей, чем смогла выдать написанная мной программа на python, то есть практически нулевой.