Bacanje atomske bombe (Hirošima)

Seminarski rad u okviru kursa
Osnove matematičkog modeliranja
Matematički fakultet

Jočović Mirjana, Marković Bogdan, Mijatović Sanja
mirajocovic2@gmail.com, bogdanis799@gmail.com, mijatovicsanja000@gmail.com

29. maj 2022.

Sadržaj

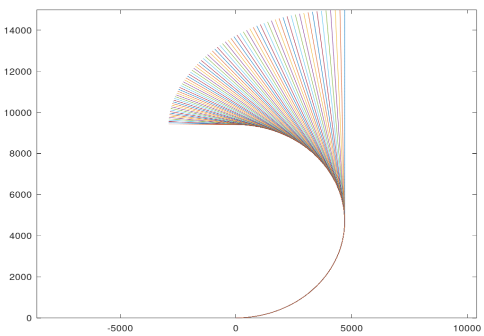
1 Opis problema

Atomska bomba na Hirošimu je bačena iz bombardera B-29 koji nije bio mnogo okretan. Zbog toga pretpostavimo da se kretao na istoj visini od 9600 metara sve vreme leta. Leteo je maksimalnom brzinom 530 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. U trenutku $t_0 = 0$ izbacio je bombu koja je posle nekog vremena eksplodirala na tlu proizvodeći udarni talas brzine 350 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Da bi se našao što dalje od cilja u trenutku kada ga sustigne udarni talas, avion može da skreće u horizontalnoj ravni maksimalnom krivom radijusa 4700 metara. Izračunaćemo koliko daleko je bombarder bio u trenutku kada ga je stigao udarni talas i koliko vremena je do tada proteklo, ako se kretao optimalnom putanjom koja maksimizuje tu daljinu.

Iz opisa problema zaključili smo da se radi o modelu kosog hica. Naš zadatak je da odredimo optimalnu putanju kojom treba da se kreće avion, kako bi maskimizovao svoju daljinu od mesta pada bombe u trenutku kada ga stigne udarni talas eksplozije bombe. Na osnovu takve putanje odredićemo trenutak kada je udarni talas sustigao avion. Za određivanje optimalne putanje treba da odredimo položaj projektila i aviona u vremenu.

Smatramo da je najbolje da avion skrene maksimalnom krivinom radijusa 4700 metara, kako bi maksimizovao svoju udaljenost od mesta pada bombe u trenutku kada ga sustigne udarni talas. Smatramo da je to najbolji način jer ukoliko bi avion nastavio da se kreće pravolinijski, u trenutku pada bombe našao bi se direktno iznad mesta pada bombe,njegova udaljenost od mesta pada bi bila mala i udarni talas bombe bi ga brzo sustigao, dok ukoliko bi skrenuo nekom blažom krivinom, tj. krivinom većeg radijusa od 4700 metara njegovo rastojaje od mesta pada bombe u trenutku njenog pada bi bilo manje nego ukoliko skrene krivinom radijusa 4700 metara, a samim tim bi ga i udarni talas ranije sustigao. Ispitaćemo koja je optimalna putanja kojom treba avion da se kreće tako što ćemo odrediti kada je najbolje da prestane da se kreće po kružnoj putanji i krene da se kreće po pravolinijskoj putanji.

Na narednoj slici prikazane su neke od mogućih putanja aviona, gledano iz ptičije perspektive, tj. prikazana je **xz** ravan. Jedna od prikazanih putanja je optimalna, a nju ćemo odrediti tako što ćemo međusobno uporediti kvalitet svih ovih putanja.

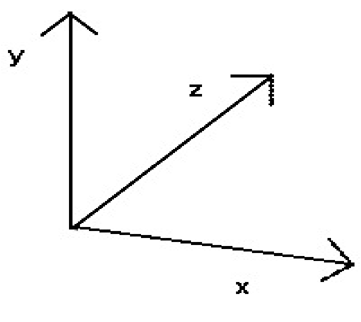


Trenutak kada avion ispušta bombu označićemo sa t_0 i to je početni trenutak, odnosno važiće $t_0 = 0$. Trenutak kada avion završava skretanje označićemo sa t_1.

2 Modeliranje

Položaj projektila u vremenu **t** označićemo sa $x_{projektila}(t)$, $y_{projektila}(t)$, $z_{projektila}(t)$. Položaj aviona zavisi od vremena **t**, i od ugla α, označićemo ga sa $x_{aviona}(t, \alpha)$, $y_{aviona}(t, \alpha)$, $z_{aviona}(t, \alpha)$. Kako bismo objasnili koji ugao predstavlja ugao α posmatrajmo ravan koja je paralelna **xz** ravni, samo se nalazi na visini od 9700 metara, tj. u **xyz** koordinatnom sistemu to je ravan u kojoj je **y** koordinata konstanta i iznosi 9700 m. U toj ravni označimo sa **X** tačku koja je centar kružnice po kojoj se avion kreće dok je u skretanju, ta tačka ima x koordinatu 0, a z koordinatu 4700 (poluprečnik kružnice po kojoj skreće avion). Potom označimo sa **B** tačku na kružnici koja ima x koordinatu 0, a z koordinatu 9400 (prečnik kružnice po kojoj skreće avion). I na kraju označimo sa **A** tačku na kružnici u kojoj avion završava sa skretanjem i počinje da se kreće pravolinijski. Ugao α je ugao koji zaklapaju vektori $\overrightarrow{XA}$ i $\overrightarrow{XB}$. Upravo za različite vrednosti ugla α se dobijaju različite putanje, kao na prethodno prikazanoj slici. Zapravo, problem svodimo na određivanje optimalnog ugla α. Za različite uglove α odredićemo udaljenost aviona od mesta pada bombe u trenutku kada ga sustigne udarn talas bombe i na osnovu toga ćemo odrediti optimalnu putanju, a samim tim i najbolje α. Za ugao α ćemo ispitivati vrednosti iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$, sa korakom **0.0001 rad** (0.0057296 stepeni) što smatramo dovoljno dobrom preciznošću. Smatramo da je jedino razumno ispitivati α iz ovog intervala, jer ukoliko je α iz intervala od $\frac{\pi}{2}$ do π avion se kreće ka oblasti eksplozije, tj. ne udaljava se od eksplozije. Ukoliko je α jednako π, u trenutku pada bombe avion će biti direktno iznad mesta pada bombe. Dok ukoliko je α veće od π avion počinje postepeno da se vraća u položaj u kojem se nalazio pre ispuštanja bombe, stoga mislimo da se ni na taj način ne udaljava od mesta eksplozije.

Pre nego što krenemo sa procesom modelovanja uvodimo naredne pretpostavke kako bi olakšali taj proces. Prva pretpostavka koju smo napravili je da je granata jedna tačka sa nekom pozitivnom masom. Ova pretpostavka je opravdana jer je gravitaciono privlačenje sfernog simetričnog tela isto kao i u slučaju kada je sva masa skoncentrisana u centru tog tela. Druga pretpostavka je da u svakom trenutku mozemo tačno izmeriti vreme, visinu i daljinu projektila i aviona. Koordinatni sistem je postavljen kao na slici



.

Treća pretpostavka je da se sve dešava u vakuumu. Četvrta pretpostavka je da je Zemlja ravna i da gravitacija deluje na dole, normalna na ravno tlo u svim tačkama. Peta pretpostavka je da jačina sile zemljine teže ne zavisi od visine. Ova pretpostavka je opravdana jer u ograničenoj oblasti zemljine površine u kojoj se nalaze projektil i avion, pravac i intenzitet zemljine teže veoma malo variraju. Šesta pretpostavka da su funkcije $x_{projektila}(t)$, $y_{projektila}(t)$, $z_{projektila}(t)$ i funkcije $x_{aviona}(t,\alpha)$, $y_{aviona}(t,\alpha)$, $z_{aviona}(t,\alpha)$ dva puta neprekidno diferencijabilne. Kako fizika implicitno prihvata ove pretpostavke definišući brzinu kao prvi izvod, ubrazanje kao drugi izvod i mi prihvatamo ovu pretpostavku, kako bi mogli da primenimo diferencijalni i integralni račun.

2.1 Modeliranje kretanja projektila

Formule za kretanje projektila izvodimo uz pomoć modela kosog hica. Početni uslovi su:

$$x_{projektila}(t_0) = x_{projektila}(0) = 0$$

$$y_{projektila}(t_0) = y_{projektila}(0) = 9600 \text{ m}$$

$$z_{projektila}(t_0) = z_{projektila}(0) = 0$$

$$x''_{projektila}(t_0) = 0$$

$$y''_{projektila}(t_0) = -g$$

$$z''_{projektila}(t_0) = 0$$

$$v_x(t_0) = 530 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 147,22 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_y(t_0) = 0$$

$$v_z(t_0) = 0$$

Proces odredjivanja $x_{projektila}(t)$ se sastoji iz narednih koraka:

Kako ne postoji ubrzanje po x osi važiće

$$x''_{projektila}(t) = 0$$

Primenom integrala dobija se sledeća jednačina:

$$\int x''_{projektila}(t) = \int 0$$

$$x'_{projektila}(t) = 0 \cdot t + c_1 = c_1$$

Na osovu početnih uslova znamo da je

$$x'_{projektila}(0) = 147,22 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x'_{projektila}(t) = c_1$$

Odakle sledi da je

$$c_1 = 147,22 \text{ m/s}$$

$$x'_{projektila}(t) = 147,22 \text{ m/s}$$

Primenom integrala dobija se sledeća jednačina:

$$\int x'_{projektila}(t) = \int 147,22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$x_{projektila}(t) = 147,22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{t} + \mathrm{c}_2$$

Na osnovu početnih uslova znamo da je

$$x_{projektila}(0) = 0$$

$$x'_{projektila}(0) = 147,22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0 + \mathrm{c}_2$$

$$c_2 = 0$$

$$x_{projektila}(t) = 147,22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{t}$$

Proces odredjivanja $y_{projektila}(t)$:

Kako je ubrzanje po y osi jednako -g

$$y''_{projektila}(t) = -g$$

Primenom integrala dobija se sledeća jednačina:

$$\int y''_{projektila}(t) = \int -g$$

$$y'_{projektila}(t) = (-g) \cdot t + c_1$$

Na osnovu početnih uslova znamo da je

$$y'_{projektila}(0) = 0$$

Odakle sledi

$$y'_{projektila}(0) = (-g) \cdot 0 + c_1$$

$$c_1 = 0.$$

$$y'_{projektila}(t) = (-g) \cdot t$$

Primenom integrala dobija se sledeća jednačina:

$$\int y'_{projektila}(t) = \int (-g) * t$$

$$y_{projektila}(t) = \frac{-g \cdot t^2}{2} + c_2$$

Na osnovu početnih uslova znamo da je

$$y_{projektila}(0) = 9600\ \mathrm{m}$$

Odakle sledi

$$y_{projektila}(0) = \frac{-g \cdot 0^2}{2} + c_2$$

$$c_2 = 9600\ \mathrm{m}$$

$$y_{projektila}(t) = \frac{-g \cdot t^2}{2} + 9600\ \mathrm{m}$$

Proces odredjivanja $z_{projektila}(t)$:

Kako ne postoji ubrzanje po z osi

$$z''_{projektila}(t) = 0$$

Primenom integrala dobija se sledeća jednačina:

$$\int z''_{projektila}(t) = \int 0$$

$$z'_{projektila}(t) = 0 \cdot t + c_1 = c_1$$

Na osonvu početnih uslova znamo da je

$$z'_{projektila}(0) = 0$$

Odakle sledi

$$z'_{projektila}(t) = c_1$$

$$c_1 = 0$$

$$z'_{projektila}(t) = 0$$

Primenom integrala dobija se sledeća jednačina:

$$\int z'_{projektila}(t) = \int 0$$

$$z_{projektila}(t) = 0 \cdot t = 0$$

$$z_{projektila}(t) = 0$$

$$(x_{projektila}(t), y_{projektila}(t), z_{projektila}(t)) = (147,22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{t}, \frac{-\mathrm{g} \cdot \mathrm{t}^2}{2} + 9600\ \mathrm{m}, 0).$$

Na osnovu izvedenih formula možemo da izvedemo formulu za određivanje trenutka pada projektila na zemlju, označićemo taj trenutak sa $t_{eksplozije}$.

Projektil će pasti na zemlju kada je

$$y_{projektila}(t_{eskplozije}) = 0$$

$$\frac{-g \cdot t^2_{eksplozije}}{2} + 9600\ \mathrm{m} = 0$$

$$g \cdot t^2_{eksplozije} = 2 \cdot 9600\ \mathrm{m}$$

$$t_{eksplozije} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 9600\ \mathrm{m}}{g}}$$

Nema smisla gledati negativna rešenja i zato je vreme eksplozije

$$t_{eksplozije} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9600\ \mathrm{m}}{g}}$$

$$t_{eksplozije} = 44.240s$$

2.2 Modeliranje kretanja aviona

Modelovanje položaja aviona u vremenu podelićemo na dva dela, prvi deo proveden u skretanju, drugi deo proveden u pravolinijskom kretanju.

2.2.1 Deo proveden u skretanju

U ovom delu kretanja aviona t pripada intervalu $[0, t_1]$. Posmatrajmo ravan, kružnicu i tačke **X**, **B** i **A** koje smo uveli i opisli na početku sekcije Modelovanje. Potom, posmatrajmo kretanje aviona po definisanoj kružnici tokom skretanja. Tokom skretanja avion se kreće po toj kružnici, u trenutku t_0 ima x koordinatu 0 i z koordinatu 0, a u trenutku t_1 završava u tački A. Označimo sa nekim **C** tu tačku u kojoj se nalazi avion tokom skretanja, tj. tačku koja se kreće po kružnici na iznad opisan način. Označimo sa θ ugao koji zaklapaju vektori $\overrightarrow{XC}$ i $\overrightarrow{XB}$. Ovako definisan ugao kreće u intervalu $[\pi, \alpha]$, tj. u trenutku t_0 θ je jednako π, a u trenutku t_1 θ je jednako α. Ugao θ smo definisali kako bismo uz pomoć parametaske jednačine kruga definisali sledeće formule:

$$x_{aviona}(t, \alpha) = r \cdot \sin(\theta)$$
$$y_{aviona}(t, \alpha) = 9600 \text{ m}$$
$$z_{aviona}(t, \alpha) = r + r \cdot \cos(\theta)$$

Uvešćemo smenu ugla θ, kako bi ove jednačine zaista zavisile od vremen a **t** i ugla α. θ je funkcija po **t** i α , važi θ pripada intervalu $[\pi, \alpha]$,važi da je $\theta(0\ , \alpha) = \pi$ i važi $\theta(t1, \alpha) = \alpha$.

Na osnovu ovoga uvodimo sledeću smenu

$$\theta(t, \alpha) = \pi - \frac{t}{t_1} \cdot (\pi - \alpha)$$

.

$$x_{aviona}(t, \alpha) = r \cdot \sin(\pi - \frac{t}{t_1} \cdot (\pi - \alpha))$$
$$y_{aviona}(t, \alpha) = 9600 \text{ m}$$
$$z_{aviona}(t, \alpha) = r + r \cdot \cos(\pi - \frac{t}{t_1} \cdot (\pi - \alpha))$$

2.2.2 Deo proveden u pravolinijskom kretanju

U ovom delu kretanja aviona **t** je veće od t_1, odnosno u trenutku t_1 avion završava skretanje i nastavlja da se kreće pravolinijski, kao što smo već naveli. Koordinate tačke u kojoj avion počinje da se kreće pravolinijski možemo da odredimo iz gore izvedenih formula koje opisuju kretanje aviona u skretanju, jer je u toj tački $t = t_1$, a $\theta = \alpha$. Tu tačku označavamo sa (x_0, y_0, z_0).
Što se pravca tog pravolinijskog kretanja tiče on se poklapa sa pravcem brzine aviona. Kako treba da odredimo kako se menjaju **x** i **z** koordinata aviona u vremenu (**y** je konstantno uvek), potrebno je da vektor brzine v razložimo na v_x i v_z komponentu. U cilju tog razdvajanja odredili smo u nekim krakterističnim tačkama u kojima može da se nadje avion koliko je v_x, a koliko je v_z. Naime, posmatrajmo trenutak kada avion prestaje da se kreće po kružnoj putanji tj.

trenutak kad je $\theta = \alpha$. Ukoliko je $\alpha = \pi$ $v_x = v$, a $v_z = 0$, ukoliko je $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $v_x = 0$, a $v_z = v$ i ukoliko je $\alpha = 0$ $v_x = -v$, a $v_z = 0$. Posmatraćemo samo komponentu v_x, jer ukoliko nam je ona poznata biće nam poznata i komponenta v_z na osnovu formule $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$. Ako detaljnije posmatramo gore navedene vrednosti komponente v_x u specifičnim tačkama uočavamo da je vrednost komponente v_x zapravo v pomnoženo sa nekim brojem iz intervala $[-1, 1]$. Zato smo primećujemo da taj broj možemo da opšemo funkcijom $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$. Proverili smo za sve specifične tačke da li se dobija ispravno rešenje i da li vrednost ove funkcije na odgovarajućim intervalima raste, odnosno opada na onaj način na koji je nama potrebno za neko fiksirano α , ispostavilo se da da. Stoga komponentu v_x predstavljamo na sledeći način

$$v_x = v \cdot \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$$

Imajući ove informacije i uz pomoć parametarske jednačine prave izvodimo sledeće formule:

$$x_{aviona}(t, \alpha) = x_0 + (t - t_1) \cdot v_x$$

$$y_{aviona}(t, \alpha) = 9600 \text{ m}$$

$$z_{aviona}(t, \alpha) = z_0 + (t - t_1) \cdot v_z$$

2.2.3 Određivanje vremena susreta udarnog talasa i aviona

Susret se dešava kada je poluprečnik udarnog talasa jednak rastojanju između aviona i mesta pada bombe. Odnosno kada je $R(t) = D(t)$, gde je $R(t)$ poluprečnik udarnog talasa u zavisnosti od vremena **t**,a $D(t)$ rastojanje aviona od mesta pada bombe u od zavisnosti od vremena **t**.

$$R(t) = v_{talasa} \cdot (t - t_{eksplozije})$$

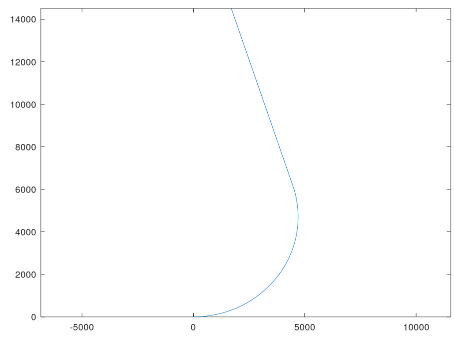
$$D(t) = \sqrt{(x_{aviona}(t) - x_{projektila})^2 + (y_{aviona}(t) - y_{projektila})^2 + (z_{aviona}(t) - z_{projektila})^2}$$

$(x_{projektila}, y_{projektila}, z_{projektila})$ je dobijena pozicija projektila na osnovu vrednosti funkcija koje predstavljaju položaj projektila u trenutku $\mathrm{t}_{eksplozije}$.

Izjednačavanjem ove dve formule izračunali smo vreme susreta $t_{susreta}$.

3 Zaključak

Na osnovu prethodno napravljenog modela i izračunavanja u MATLAB-u, zaključujemo da je optimalna putanja aviona ona putanja gde je α jednako **1.2502 rad**, odnosno **71.631183547 stepeni**, u tom slučaju je vreme koje je proteklo do sudara **83.750 sekundi**, a udaljenost aviona od mesta pada bombe **13828.53028 metara**. Na slici ispod je prikazana optimalna putanja.



3.1 Implementacija modela

U MATLAB-u smo sproveli izračunavanja koja su nam pomogla pri zaključivanju. Prethodno izvedene formule iskoristili smo u kodu.
U petlji koja za α iterira od $\frac{\pi}{2}$ do 0 sa korakom 0.0001 prvo izračunavamo koliko je t_1(trenutak završetka zaokreta). Izračunavamo koordinate tačke (x_0, y_0, z_0) u kojoj avion počinje da se kreće pravolinijski na način opisan u sekciji Modeliranje. Izračunavamo intenzitete komponenti brzine v_x i v_z za konkretno α iz tekuće iteracije. Potom definišemo nove funkcije po **t** za **x**, **y** i **z** koordinate aviona. Određujemo trenutak kada udarni talas eksplozije sustiže avion određujući nulu funkcije $D(t) - R(t)$, gde je $D(t)$ euklidsko rastojanje aviona od mesta pada bombe u trenutku **t**, a $R(t)$ poluprečnik udarnog talasa u zavisnosti od vremena **t**. To smo uradili uz pomoć funkcije **fzero**. Za dobijeno $t_{susreta}$ određujemo $D(t_{susreta})$, kako bi putanju iz tekuće iteracije uporedili sa putanjama iz drugih iteracija.
Nakon petlje određujemo za koji ugao α je rastojanje aviona od mesta pada bombe najveće u trenutku susreta sa udarnim talasom.

4 Reference

1. Milan Dražić - Matematičko modeliranje, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet