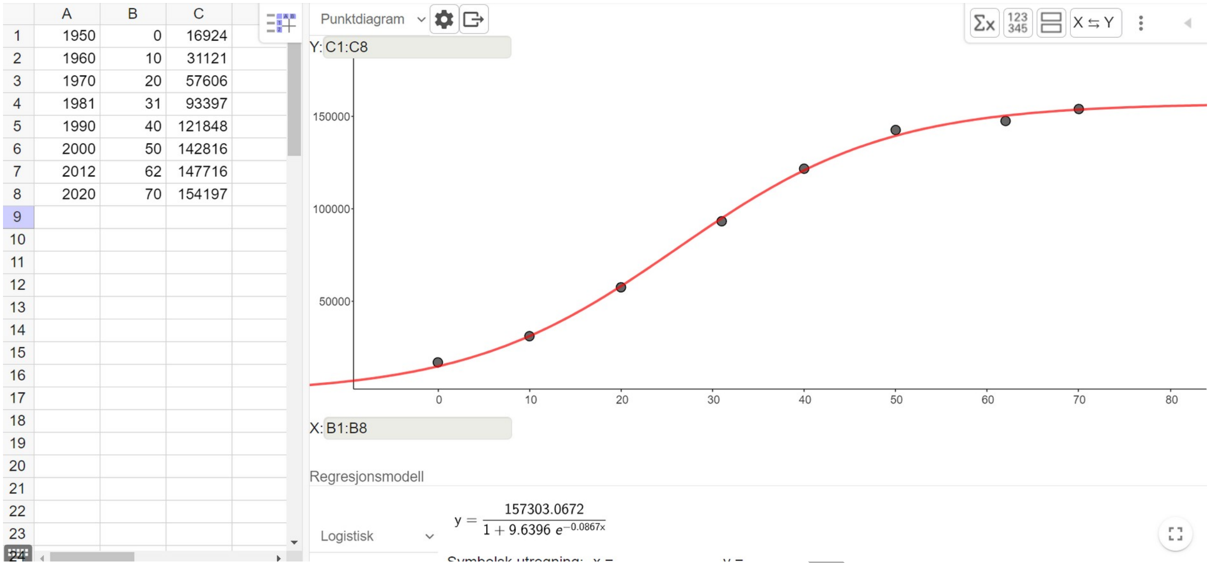
Eksamen R1 H2022 Del 2

Del 2)

Oppgave 1)



1

$$g(x) := \frac{157303}{1 + 9.6396\, e^{-0.0867x}}$$

$$\approx \quad g(x) := \frac{157303}{9.6396\, e^{-0.0867x} + 1}$$

2

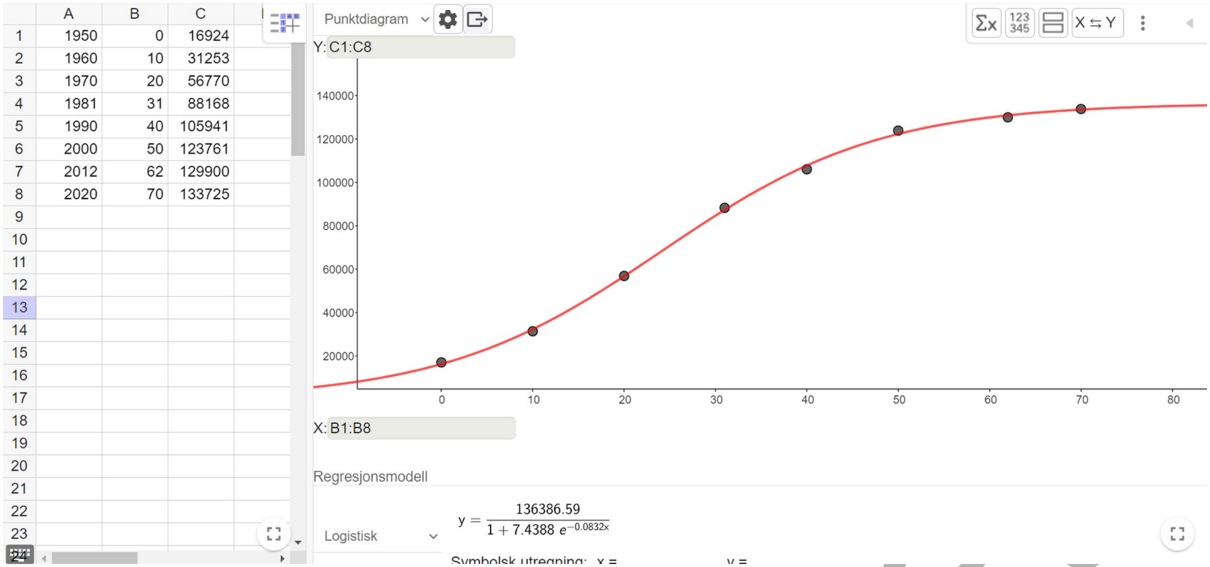
$$g''(x) = 0$$

Løs: $\left\{x = \frac{-10000}{867} \ln\left(\frac{2500}{24099}\right)\right\}$

3

$2

$$\approx \quad \{x = 26.1347\}$$



	A	B	C
1	1950	0	16924
2	1960	10	31253
3	1970	20	56770
4	1981	31	88168
5	1990	40	105941
6	2000	50	123761
7	2012	62	129900
8	2020	70	133725

a) Den logistiske modellen g gitt ved $\frac{157303}{1+9.6396 \cdot e^{-0.0867\,x}}$ beskriver Norges energiproduksjon x år etter 1950.

b) Ifølge modellen g økte produksjonen raskest i 1976.

c) Et logistisk modellen passer best med datasettet oppgitt. En passende modell som viser om vi på sikt vil være selvforsynte med elektrisk energi er gitt ved $\frac{136386}{1+7.4388 \cdot e^{-0.0832\,x}}$

Oppgave 2)

1	$Q(t) := Q_0\left(1 - e^{-2.3t}\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{Q(t) := Q_0\left(-e^{\frac{-23}{10}t} + 1\right)}$
2	$Q'(t)$ $\rightarrow\ \mathbf{\frac{23}{10} Q_0\, e^{\frac{-23}{10}t}}$

2

$$\text{Løs}\left(0.9 \cdot Q_0 = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-2.3 \cdot t}\right), t\right)$$

$$\approx \{t = 1.00112\}$$

1

$$\text{Løs}\left(Q = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-2.3 \cdot t}\right), t\right)$$

$$\rightarrow \left\{ t = \frac{-10}{23} \ln\left(\frac{-(Q - Q_0)}{Q_0}\right) \right\}$$

a) Den omvendte funksjonen til Q er gitt ved $t=-((10)/(23))\ln(((-(Q-Q_0))/(Q_0)))$

b) Det er tar omtrent 1 sekund før blitzen har fått 90% av den maksimale ladningen

Oppgave 3)

1	$l(t) := (12\,t,\ 5\,t)$
	$\rightarrow\ \mathbf{l(t) := (12\,t,\ 5\,t)}$
2	$C := (24,\ 10)$
	$\rightarrow\ \mathbf{C := (24,\ 10)}$
3	$C = l(t)$
	Løs: $\{t = 2\}$
4	$A := (0,\ 0)$
	$\rightarrow\ \mathbf{A := (0,\ 0)}$
5	$B := (9,\ 1)$
	$\rightarrow\ \mathbf{B := (9,\ 1)}$
6	$AB := \text{Vektor}(A,\ B)$
	$\rightarrow\ \mathbf{AB := \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}}$
7	$AC := \text{Vektor}(A,\ C)$
	$\rightarrow\ \mathbf{AC := \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix}}$
8	$AB\ AC = \lvert AB \rvert\ \lvert AC \rvert\ \cos(\alpha°)$
	NLøs: $\{\alpha = -16.28, \alpha = 16.28\}$

9
D := (12 t, 5 t)

$\rightarrow$ **D := (12 t, 5 t)**

10
DA := Vektor(D, A)

$$\rightarrow \quad \mathbf{DA} := \begin{pmatrix} -12\,t \\ -5\,t \end{pmatrix}$$

11
DB := Vektor(D, B)

$$\rightarrow \quad \mathbf{DB} := \begin{pmatrix} 9 - 12\,t \\ 1 - 5\,t \end{pmatrix}$$

12
DA DB = |DA| |DB| cos(120°)

$$\text{Løs:} \quad \left\{ t = 0, t = \frac{-11\sqrt{3} + 113}{169} \right\}$$

13
$$\left(12 \cdot \frac{-11\sqrt{3} + 113}{169},\; 5 \cdot \frac{-11\sqrt{3} + 113}{169}\right)$$

$\approx$ **(6.67, 2.78)**

14 $E := (12\,t,\ 5\,t)$

$\rightarrow\ \mathbf{E := (12\,t,\ 5\,t)}$

15 $EA := \text{Vektor}(E,\ A)$

$\rightarrow\ \mathbf{EA :=} \begin{pmatrix} -12\,t \\ -5\,t \end{pmatrix}$

16 $EB := \text{Vektor}(E,\ B)$

$\rightarrow\ \mathbf{EB :=} \begin{pmatrix} 9 - 12\,t \\ 1 - 5\,t \end{pmatrix}$

17 $11 = \frac{1}{2}\ |EA|\ |EB|\ \sin(\text{Vinkel}(EA,\ EB))$

Løs: $\left\{ t = \frac{2}{3} \right\}$

18 E

ByttUt, t=2/3: $\left(8,\ \frac{10}{3}\right)$

a) Vi ser at hvis vi setter $t=2$ i l får vi punktet C. (Se Rute 3)
b) $\angle BAC$ *er lik* $16.28°$ (Se Rute 8)
c) Koordinatene til punket D er $(6.67, 2.78)$(Se Rute 13)
d) De eksakte koordinatene til E er (8,10/3) (Se Rute 18)

Oppgave 5)

1 $f(x) := 1 - x^2$

$\rightarrow \mathbf{f(x) := -x^2 + 1}$

2 $P := \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$\rightarrow \mathbf{P := \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}$

3 $L(x) := \text{Tangent}(P, f(x))$

$\rightarrow \mathbf{L(x) := -x + \frac{5}{4}}$

4 $L(0)$

$\rightarrow \mathbf{\frac{5}{4}}$

5 $L(x) = 0$

Løs: $\left\{\mathbf{x = \frac{5}{4}}\right\}$

6 $A := \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$

$\approx \mathbf{A := 0.78}$

1	$f(x) := 1 - x^2$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := -x^2 + 1}$
2	$P := (a,\ f(a))$ $\rightarrow$ $\mathbf{P := (a,\ -a^2 + 1)}$
3	$T(x) := \mathrm{Tangent}(P,\ f)$ $\rightarrow$ $\mathbf{T(x) := a^2 - 2\,a\,x + 1}$
4	$T(x) = 0$ Løs: $\left\{x = \dfrac{a^2+1}{2\,a}\right\}$
5	$T(0)$ $\rightarrow$ $a^2 + 1$
6	$A(a) := \frac{1}{2}\ \mathrm{HøyreSide}(\$4,\ 1)\ \$5$ $\rightarrow$ $\mathbf{A(a) := \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(a^2+1)^2}{2\,a}}$
7	$A'(a) = 0$ Løs: $\left\{a = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}, a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

8 $A''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\rightarrow \; 2\sqrt{3}$

9 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\approx \; 0.77$

a) Arealet av trekant OAB er 0.78 når $P(1/2, 3/4)$
b) Det minste arealet trekantenOAB kan ha er 0.77.

Oppgave 6)

```
1    xa = 0
2    xb = 0
3    xc = 0
4
5    ya = 0
6    yb = 0
7    yc = 0
8
9    xOT = 1/3*(xa+xb+xc)
10   yOT = 1/3*(ya+yb+yc)
11
12   print("Tyngdepunktet er gitt ved, [",xOT,",",yOT,"]")
```

Linje 1-7: Definerer koordinatene til punktene A,B,C ved å oppgi x-koordinatene og y-koordinatene hver for seg

Linje 9-10: Bruker Tyngdepunkt formelen for x og y

Linje 12: Skriver ut koordinatene til tyngdepunktet.

Oppgave 7)

1 $f(x) := 2x + 5 + \frac{1}{x-1}$

$\rightarrow \; f(x) := 2x + 5 + \frac{1}{x-1}$

2 $\text{Løs}(f'(x) = k, x)$

$\rightarrow \; \left\{ x = \frac{k - 2 - \sqrt{-k+2}}{k-2}, x = \frac{k - 2 + \sqrt{-k+2}}{k-2} \right\}$

3 $-k + 2 > 0$

Løs: $\{k < 2\}$

4 $\text{sym} := \frac{\text{HøyreSide}(\$2, 1) + \text{HøyreSide}(\$2, 2)}{2}$

$\rightarrow \; \text{sym} := 1$

5 $|\text{HøyreSide}(\$2, 1) - \text{sym}| \stackrel{?}{=} |\text{HøyreSide}(\$2, 2) - \text{sym}|$

$\rightarrow$ **true**

1 $g(x) := a x + b + \frac{1}{x+d}$

$\rightarrow \; g(x) := a x + b + \frac{1}{d+x}$

2 $\text{Løs}(g'(x) = 4)$

$\rightarrow \; \left\{ x = \frac{-\left(\sqrt{a-4}\, d + 1\right)}{\sqrt{a-4}}, x = \frac{-(a-4)\, d + \sqrt{a-4}}{a-4} \right\}$

3 $a - 4 > 0$

Løs: $\{a > 4\}$

1
$g(x) := a\,x + b + \frac{1}{x+d}$

$\rightarrow\ \mathbf{g(x) := a\,x + b + \frac{1}{d+x}}$

2
$g'(x) = 4$

Løs: $\left\{\mathbf{x = \frac{-\left(\sqrt{a-4}\,d+1\right)}{\sqrt{a-4}}, x = \frac{-(a-4)\,d + \sqrt{a-4}}{a-4}}\right\}$

3
$a - 4 > 0$

Løs: $\{\mathbf{a > 4}\}$

4
$g'(x) = k$

ByttUt, a=3: $\mathbf{\frac{3\,d^2 + 3\,x^2 + 6\,d\,x - 1}{d^2 + x^2 + 2\,d\,x} = k}$

5
$4

Løs: $\left\{\mathbf{x = \frac{-\left(\sqrt{-k+3}\,d+1\right)}{\sqrt{-k+3}}, x = \frac{-(k-3)\,d - \sqrt{-k+3}}{k-3}}\right\}$

6
$-k + 3 > 0$

Løs: $\{\mathbf{k < 3}\}$

7
$\text{sym} := \frac{\text{HøyreSide}(\$5,\ 1) + \text{HøyreSide}(\$5,\ 2)}{2}$

$\rightarrow\ \mathbf{sym := -d}$

8	$\lvert \text{HøyreSide}(\$5,\ 1) - \text{sym} \rvert \stackrel{?}{=} \lvert \text{HøyreSide}(\$5,\ 2) - \text{sym} \rvert$ $\rightarrow$ **true**
9	$g'(-1) = g'(5)$ $\rightarrow \ \dfrac{a\,d^2 - 2\,a\,d + a - 1}{d^2 - 2\,d + 1} = \dfrac{a\,d^2 + 10\,a\,d + 25\,a - 1}{d^2 + 10\,d + 25}$
10	$g(1) = 7$ $\rightarrow \ a + b + \dfrac{1}{d+1} = 7$
11	$a = 3$ $\rightarrow \ a = 3$
12	$\{\$9,\ \$10,\ \$11\}$ Løs: $\{\{a = 3, b = 5, d = -2\}\}$

a) Likningen $f'(x) = k$ har løsninger når $k < 2$
b) Løsningen følger er symmetriske om linjen $x = 1$ for alle tilfeller av k.
c) Når $a > 4$ har $g'(x) = 4$ løsning
d) Det fins kun løsninger for $g'(x) = k$ når $k < 3$. I tillegg er løsningene symmetriske om linjen $x = -d$
e) For at $g'(-1) = g'(5) og g(1) = 7$ må $b = 5$ og $d = -2$.