第1回　ガイダンス

水曜日2講時

(10:30-12:00)

授業の目的・概要

　ディジタル信号処理は音声・画像処理，ロボット，さらに医療，地球科学，天文学など幅広分野で利用され，必要不可欠な基礎技術である．

　本講義では，信号の理解をはじめ，アナログ信号からディジタル信号への変換，信号のディジタル処理，ディジタルフィルタの基礎及びシステムの解析について解説する．

授業の計画項目

No.	項目 Topics	内容 Content
1.	ガイダンス	ディジタル信号処理及び簡単な信号を概説する.
	Guidance	To introduce digital signal processing and some simple signals.
2.	フーリエ級数展開	連続時間信号であるフーリエ級数展開について学ぶ。
	Fourier series expansion	To learn continuous Fourier series expansion.
3.	フーリエ変換	連続時間信号であるフーリエ変換について学ぶ。
	Fourier transform	To learn continuous Fourier transform.
4.	サンプリング定理	信号のディジタル化について学ぶ.
	Sampling	To learn digitizing signals.
5.	システム	信号に加工を加えるもの，つまりシステムの考え方を学ぶ.
	System	To learn system concepts on signal processing.
6.	離散フーリエ変換	離散フーリエ変換について学ぶ.
	Discrete Fourier transform	To learn discrete Fourier transform.
7.	高速フーリエ変換	離散フーリエ変換を実用的に計算する高速フーリエ変換について学ぶ.
	Fast discrete Fourier transform	To learn fast Fourier transform to calculate discrete Fourier transform practically.
8.	ラプラス変換	離ラプラス変換について学ぶ.
	Laplace transform	To learn Laplace transform.
9.	z変換	z変換について学ぶ.
	z transform	To learn z transform.
10.	時間領域でのシステム	時間領域でのシステムについて学ぶ.
	System in the time domain	To learn system in the time domain.
11.	周波数領域でのシステム	周波数領域でのシステムについて学ぶ.
	System in the frequency domain	To learn system in the frequency domain.
12.	s領域でのシステム	s領域でのシステムについて学ぶ.
	System in the s domain	To learn system in the s domain.
13.	フィルタI	フィルタに関する概念を学ぶ.
	Filter I	To learn filter concepts.
14.	フィルタII	デジタルフィルタの応用を紹介する.
	Filter II	To introduce some applications of digital filters.
15.	まとめ	学講義内容を復習する.
	Summary	To review all topics of this lecture.

受講に関する注意事項

- Moodle システムへの登録
  - アドレス：https://moodle.cis.kit.ac.jp/
  - ディジタル信号処理への登録手順：
    - 電子の学生
      - 工芸科学研究科->設計工学域->電子システム工学課程->ディジタル信号処理　電2021
    - 情報の学生
      - 工芸科学研究科->設計工学域->情報工学課程->ディジタル信号処理　情2021
  - 登録キー: DSP_2021
- 小テストと宿題の解答・提出：Moodle
- 授業に関する質問や緊急連絡事項があれば：
  - 杜　duweiwei@kit.ac.jp　情報
  - 西中　nisinaka@kit.ac.jp　電子

参考書および評価方法

- 参考資料及び参考書:
  - 参考資料:Moodleで配布する。
  - 参考書:和田成夫著:「よくわかる信号処理」(森北出版)
    三谷政昭著:「やり直しのための信号数学」(CQ出版社)

- 評価方法
  - 指定された時間内に，提出すること　70%
    - 小テスト　12回
    - 宿題　3回
  - 期末テスト　30%

その合計点が60点以上を合格とする.

目次

- 信号処理の概観
  - 信号処理の定義
  - アナログ信号とディジタル信号の変換
  - ディジタル信号処理とその目的
  - ディジタル信号処理の利点
  - ディジタル信号処理の歴史・技術的背景
- 周期信号
  - 信号の周期
  - 信号の周波数
- フーリエ級数を導く前の準備

信号の例:1次元信号

- 人が発する音声は空気の圧力の微小変化による波であり，これをマイクロホンによって電気的に記録する.

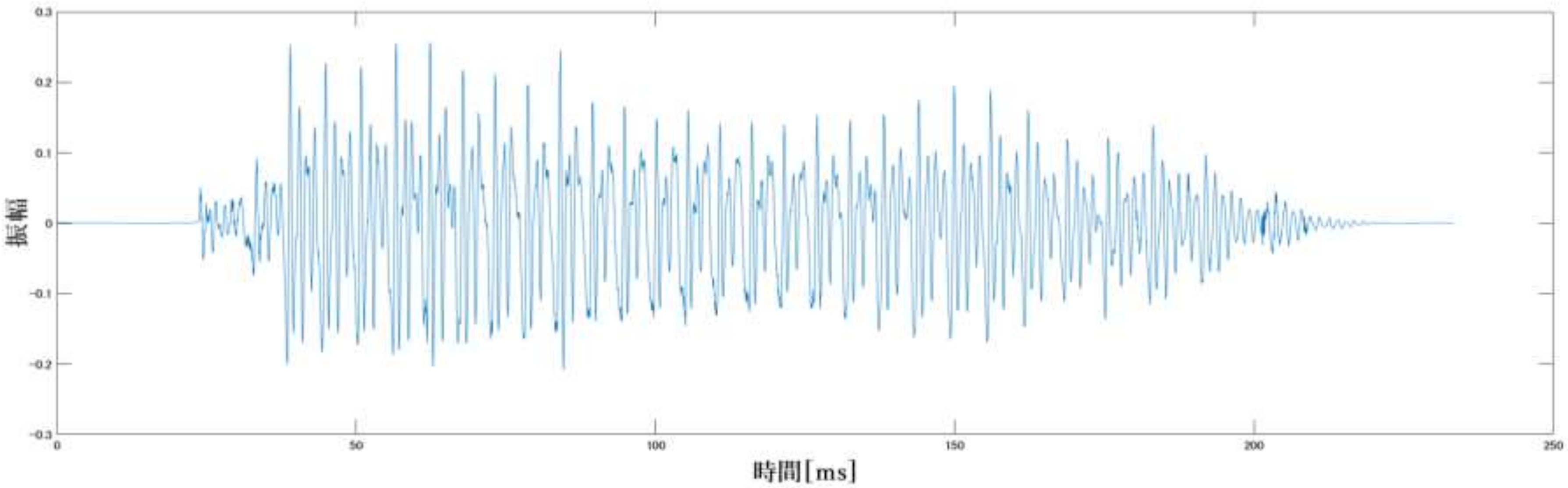


図1　音声　あ

一つの軸(時間軸)上で定義されるため，1次元信号と呼ばれる.

信号の例：2次元信号

- 写真のような電子的手段よって撮像された画像では，画像中のある位置の輝度(濃淡)は空間的に(平面上)変化する.

図2　画像

空間的に変化する信号は記述のために二つの座標軸を必要とするため，2次元信号と呼ばれる.

信号とは?

- 信号:情報を物理的に具現化したものである.
- どんな信号があるか?
  - 不規則信号:現在点以降,値がどのように変化していくのかを正確に特定できない信号
  - 確定信号:特定できる信号

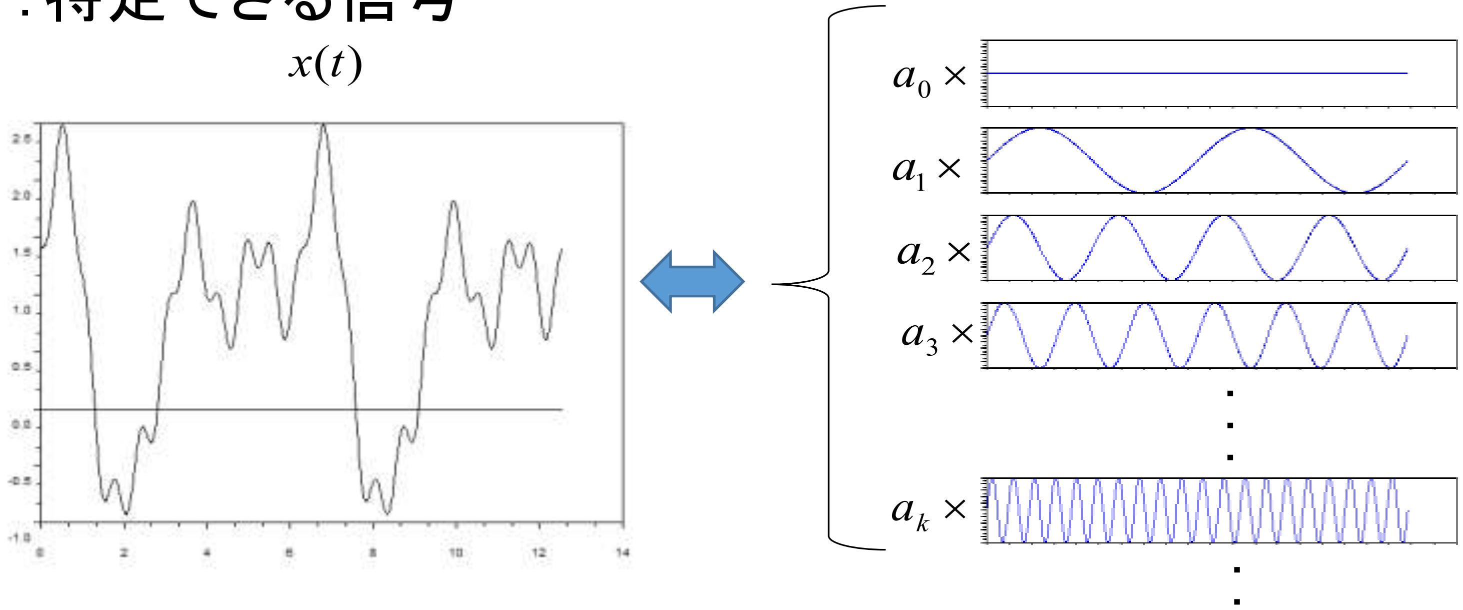


図3:不規則信号を異なる三角関数への分解

信号の分類

表　信号の分類

<table>
<tr><th>振幅値
時刻パラメータ</th><th>連続振幅</th><th>離散振幅</th></tr>
<tr><td rowspan="2">連続時間</td><td colspan="2">連続時間信号</td></tr>
<tr><td>アナログ信号</td><td>多値信号</td></tr>
<tr><td rowspan="2">離散時間</td><td colspan="2">離散時間信号</td></tr>
<tr><td>サンプル値信号</td><td>ディジタル信号</td></tr>
</table>

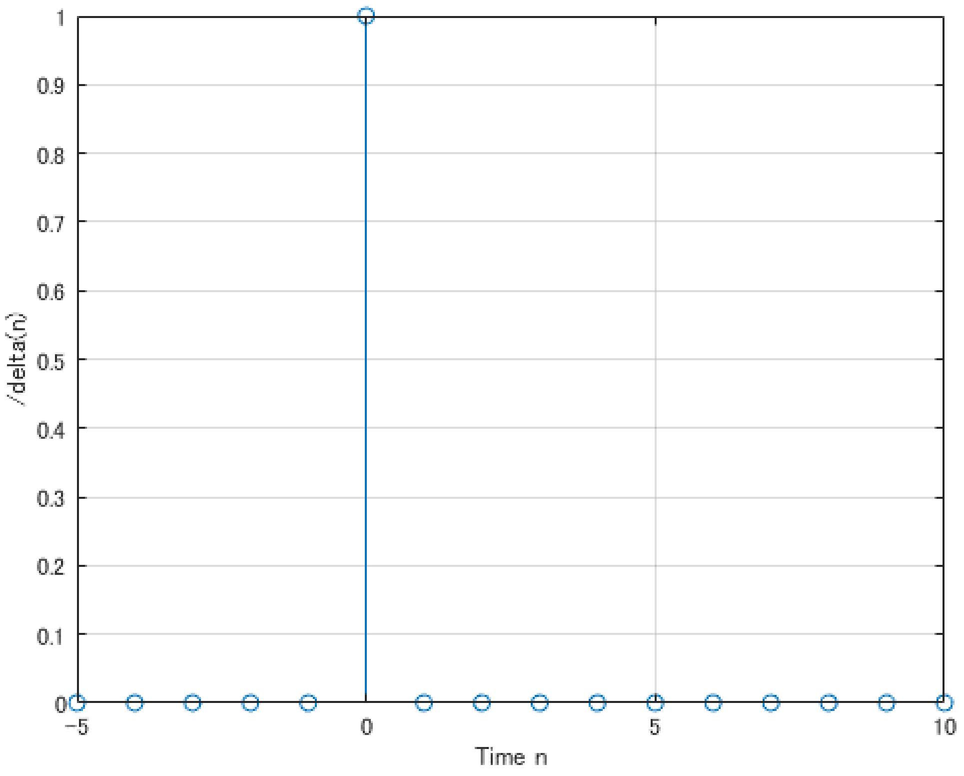
- 振幅:信号の大きさ
- 連続時間信号:連続な時間軸上で定義される信号
- アナログ信号:連続時間信号で振幅が連続的である信号
- 多値信号:振幅が離散的な信号
- 離散時間信号:離散的な時間軸上で定義される信号
- サンプル値信号:離散時間信号のなかでも振幅が連続値である信号
- ディジタル信号:振幅が離散値である信号

信号の数学的表現

アナログ信号 $x(t)$　　ディジタル信号 $x[n]$

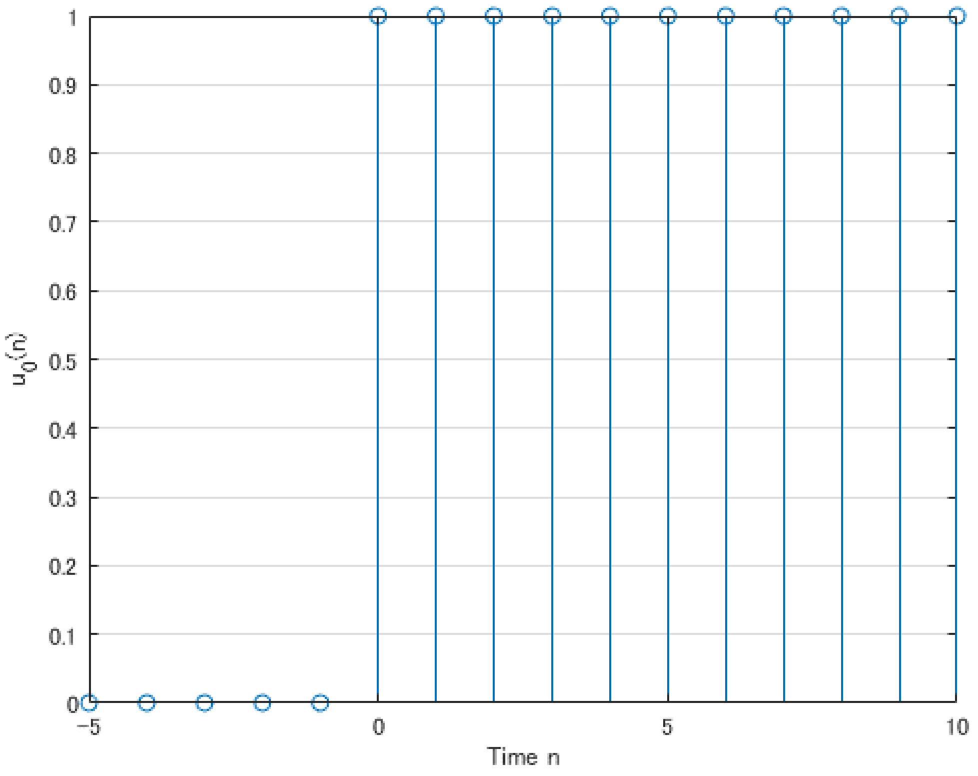
基本的な離散時間信号(1/2)

単位インパルス信号



単位インパルス$\delta[n]$

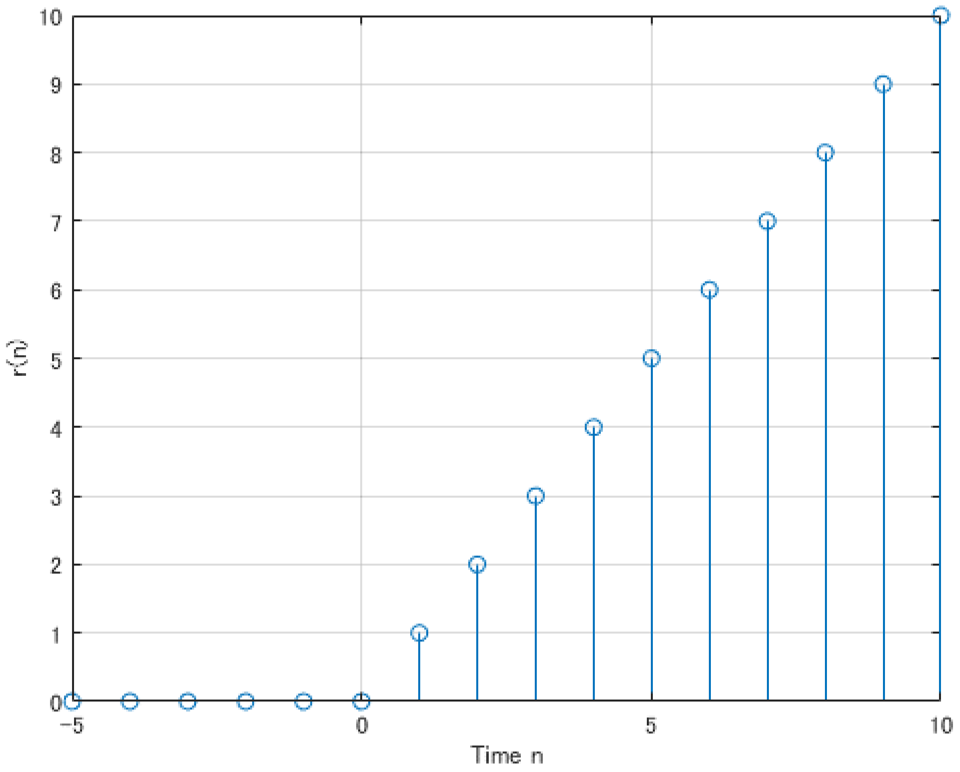
単位ステップ信号



単位ステップ$u_0[n]$

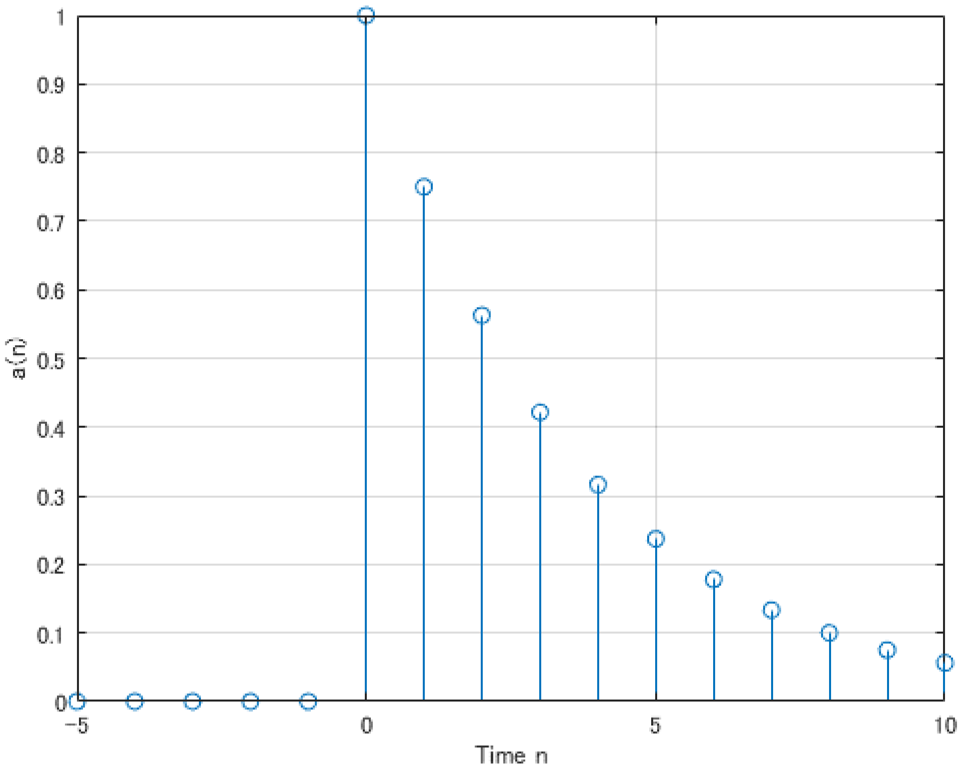
基本的な離散時間信号(2/2)

ランプ信号



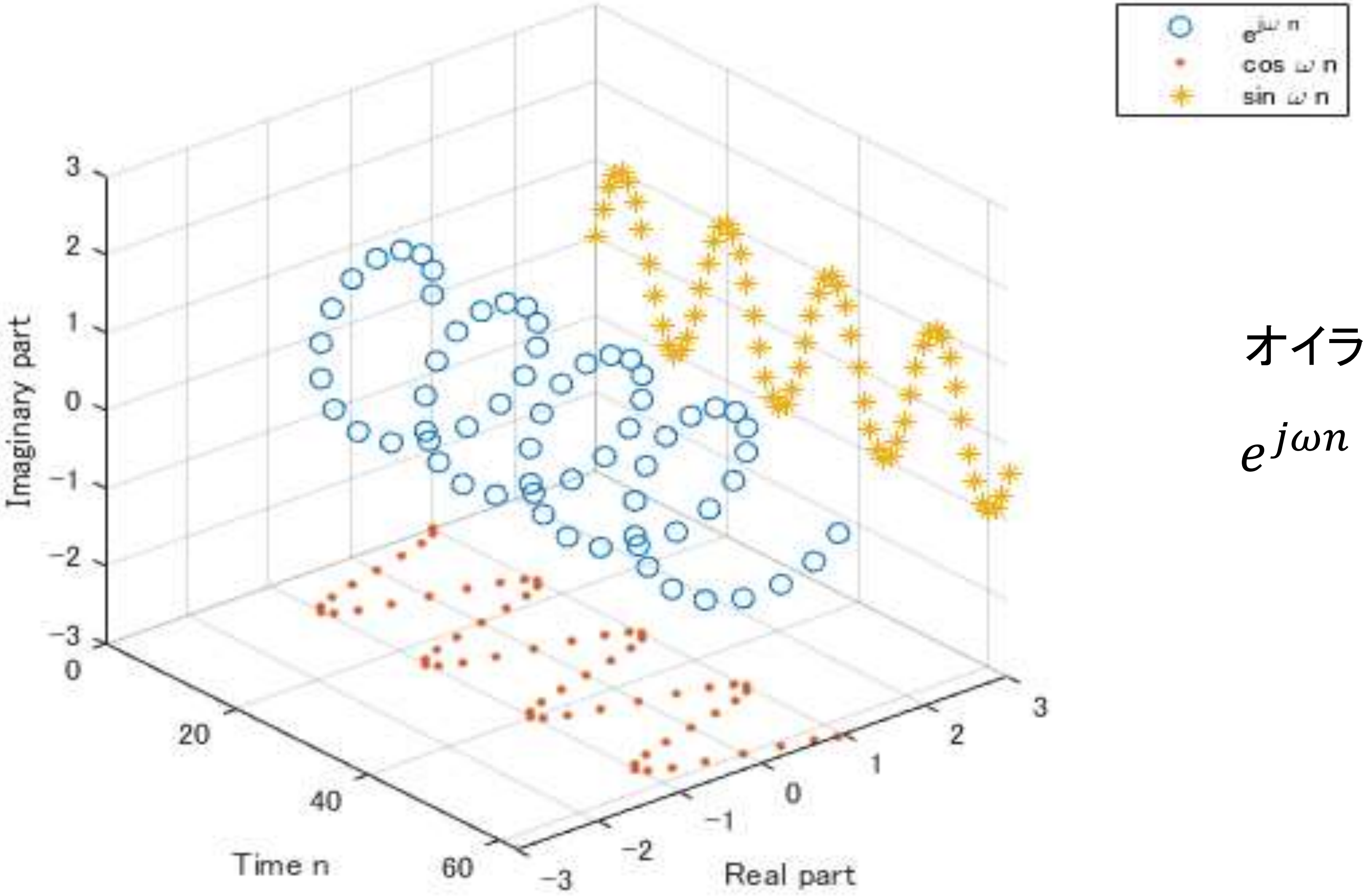
ランプ関数$r[n]$

指数関数信号



指数関数$a[n]$

周期的な離散時間信号



複素指数関数, 正弦波, 余弦波

オイラー公式:

$$e^{j\omega n} = cos\omega n + jsin\omega n$$

信号処理とは?

- 信号処理:信号を加工することであり, 処理によって目的の情報を得ることができる.
- 信号処理の対象とする信号について:
  - 信号の成分:
    - 多種多様な信号成分を含む
  - 目的:
    - 必要な成分と不必要な成分を分別したい
  - 信号の特徴:
    - どのような物理的な性質を持っているか
    - どのような成分が含まれているか

信号処理の例

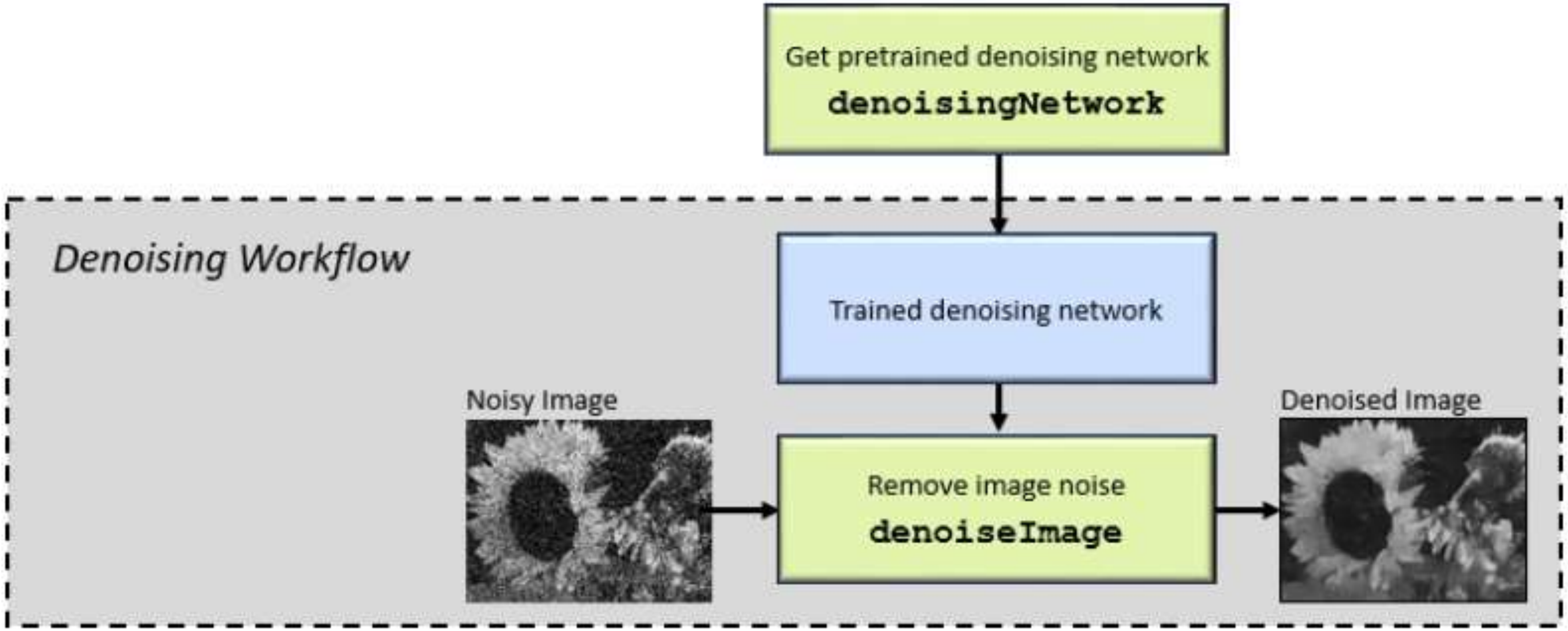
図4　ノイズ画像

信号処理の手法

図5　メディアンフィルタをかけた後の画像

AIを用いた信号処理の例

- 事前学習済みのニューラルネットワークを使って，イメージのノイズ除去



https://jp.mathworks.com/help/images/train-and-apply-denoising-neural-networks.html

アナログ信号処理とディジタル信号処理

- アナログ信号処理：
  - アナログ信号を処理する．電子回路により演算を実現．
- ディジタル信号処理：
  - 数値表現された信号の分解や演算処理を数値的に行う．
- 信号処理システム：
  - 与えられた信号に何らかの操作を加えるシステム．

システムの表現

アナログ信号　　アナログ信号

アナログ信号
処理の過程

$x(t) \longrightarrow$ アナログシステム $\longrightarrow y(t)$

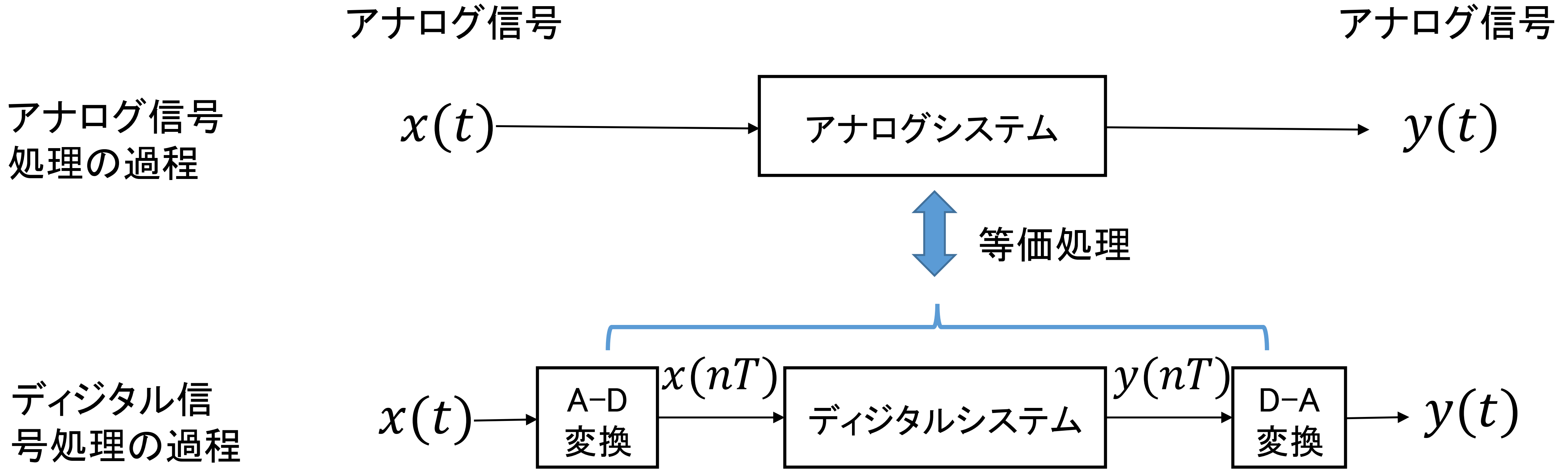
$x(t)$:入力(input)

$y(t)$:出力(output), 応答(response)

入力信号:システムに入力される信号.

出力信号:システムにより作用を受けて出力される信号, あるいはシステム応答.

等価処理



このニつシステムとも，入力信号と出力信号は同等なので，等価処理と呼ばれる．

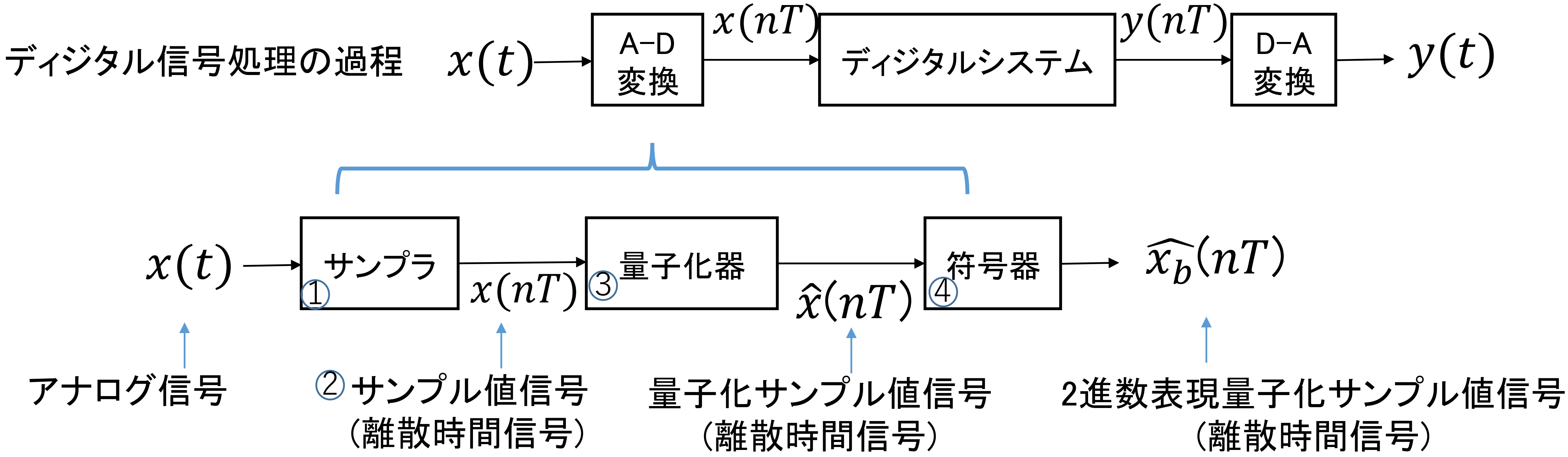
A-D変換とD-A変換

ディジタル信号
処理の過程

- A-D変換:アナログ信号(Analogy)をディジタル信号(Digital)に変換する.
- D-A変換:ディジタル信号(Digital)をアナログ信号(Analogy)に変換する.

アナログ信号をA-D変換し，ディジタル処理を行わないでそのままD-A変換すると元のアナログ信号と一致する.

A-D変換過程

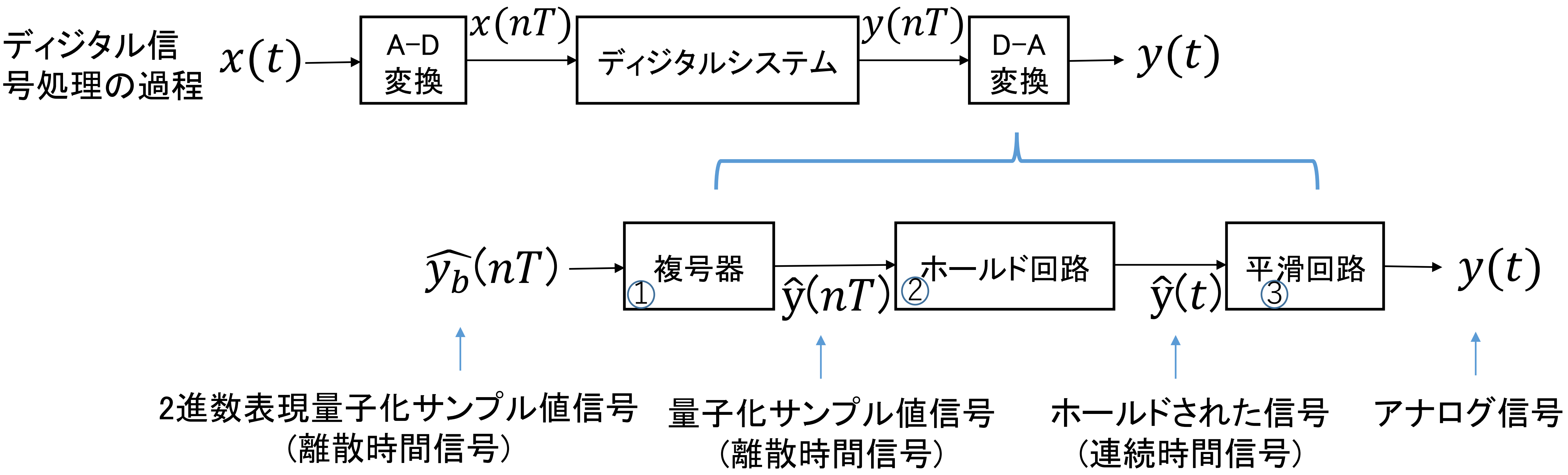

ディジタル信号処理の過程
$x(t)$
A-D
変換
$x(nT)$
ディジタルシステム
$y(nT)$
D-A
変換
$y(t)$
$x(t)$
サンプラ
①
$x(nT)$
③
量子化器
$\hat{x}(nT)$
④
符号器
$\widehat{x_b}(nT)$
アナログ信号
② サンプル値信号
（離散時間信号）
量子化サンプル値信号
（離散時間信号）
2進数表現量子化サンプル値信号
（離散時間信号）

A-D変換過程①②③④

①サンプラ:
　アナログ信号$x(t)$から時間間隔Tごとに周期的に信号値を出す.
②サンプリング:
　$x(nT), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots (n \in Z)$と表される数値列に変換する操作.
　サンプル値信号:
　アナログ信号をサンプリングことで得られる信号値と一致する数値列.
③量子器:
　このサンプル値信号の振幅値が離散化される.
④符号器:
　量子化器で定めた量子化値を2進数で表す.

　$\widehat{x_b}$(nT)=(10101010)　　　8ビット

D-A変換過程



ディジタル信号処理の過程
$x(t)$
A-D変換
$x(nT)$
ディジタルシステム
$y(nT)$
D-A変換
$y(t)$
$\widehat{y_b}(nT)$
複号器
①
$\hat{y}(nT)$
②
ホールド回路
$\hat{y}(t)$
平滑回路
③
$y(t)$
2進数表現量子化サンプル値信号（離散時間信号）
量子化サンプル値信号（離散時間信号）
ホールドされた信号（連続時間信号）
アナログ信号

D-A変換①②③

①複号器:

$\widehat{y_b}(nT)$で表されている2進数の振幅値を各時刻における実数値の量子化サンプル値信号 $\hat{y}(nT)$へ置き換える.

②ホールド回路:

サンプル値信号間の値を補い，時間的に連続な信号 $\hat{y}(t)$にする.

③平滑回路:

角張ったところを滑らかにし，元のアナログ信号$y(t)$へ変換する.

誤差ーディジタル信号処理の欠点

- A−D変換
  - 量子化器：信号値が量子化されることで誤差が生じる.
    - すべてのサンプル値は最も値の近い量子化値とする.
- D−A変換
  - ホールド：サンプル値信号間の値を維持する方法でホールドされた信号を示すことで誤差が生じる.
  - 平滑回路：例えば，低域通過フィルタを用いる処理を行った時，誤差が生じる.

ディジタル信号処理の目的

- 信号を分析する
  - 複雑な信号は，様々な周波数をもつ単純な三角関数の組み合わせて構成されたものである.
    - 例えば：フーリエ変換がこの目的のため，よく用いられる.
- 信号から雑音を取り除く
  - 観察信号には大抵雑音を含むので，この雑音を取り除きたい.
    - 例えば：フィルタリングや，フーリエ変換によって行われる.
- 信号を生成するシステムを知る
  - システム：信号を発生する物理法則や回路，アルゴリズムなどの総称.
  - システム同定：観測信号から発生するシステムの性質を決定する.
    - 複雑な信号を記述するかわりに，信号を発生するシステムに関する情報を記述する.
  - 例えば：フィルタリングによって行われる.
- 信号を合成する
  - 合成：信号を作り出す.
    - 例えば：フィルタリングによって行われる.
  - 様々な周波数の三角関数の重ね合わせとして信号を合成する.
    - 例えば：フーリエ変換

ディジタル信号処理の利点

- 精度と柔軟性
  - 精度:ディジタルフィルタの係数語長を長くすれば、高精度のフィルタ特性が得られる
    - アナログフィルタで実現できたフィルタ特性の実現
  - 柔軟性:フィルタ係数の値を変えることにより，様々特性のフィルタが簡単に実現できる.
    - ディジタルフィルタを実現するプログラムやハードウェアを変更しない
- 再現性と安定性
  - 再現性:アナログ回路の場合のような素子値のばらつきの影響が少ない
  - 安定性:アナログ素子のような温度変化と経年変化による品質の劣化が生じない
- 経済性と汎用性
  - LSI(Large Scale Integration) に集積化することで経済性の向上が図れる
  - 音声，画像，文字などの様々な信号をディジタル信号として表現することで，ディジタル信号処理を統合化できる

なぜ信号処理でこんなことを学ぶのか？

- 任意の信号は，独立（直交）した基本的な信号に分解できる
  - フーリエ級数展開，フーリエ変換，直交変換
- 独立（直交）した信号は，解析が簡単である
  - 互いに無相関である
- 任意の信号は基本信号の重ね合わせである
  - 基本的な信号の性質を理解すると，任意の信号の特徴を理解できる

ただし，

- 実際の信号は様々な条件で変化するため，測定したデータが正しくその信号を反映しているとは限らない．（ノイズの影響など）
- 測定したデータから，信号の真の特徴を推定し，必要な情報を抽出する．また，それを利用してシステムを制御する．

ディジタル信号処理の歴史･技術的背景

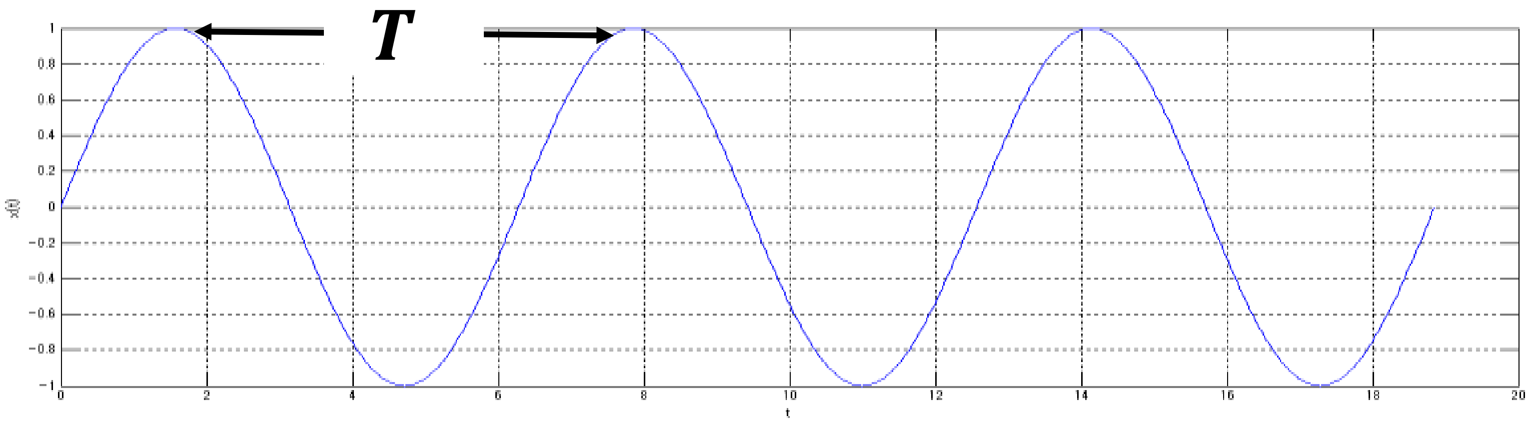
- 1600年代初めの天文学の分野で数値分析
- 19世紀初め，数学者フーリエ(J. B. J. Fourier) フーリエ解析法が発見された！
- 1963年，双1次z変換のディジタルフィルタの設計理論がガイザー(J. Kaiser)により，発表された.
- 1964年，大型コンピュータIBMシステム/360シリーズが発表された.
- 1965年，クーリーとチューキー(J. W. Cooley and J. W. Tukey)による高速フーリエ変換が発見された.
- 1971年，マイクロプロセッサが開発された.
- 1980年代はじめ，ディジタル信号処理専用のプロセッサであるディジタルシグナルプロセッサ(digital signal processor)が発表された.

信号の周期

- 周期信号

  $$x(t) = x(t+T) \qquad (1)$$

  - 変数t[s]が時間を表し，あるアナログ信号$x(t)$が式(1)を満たすとき，**周期信号**という．
  - 時間軸上でT[s]移動したとき，**元の信号と重なり**一致する．
  - 式(1)を満たす最小のT[s]($T>0$)を信号の**周期**という．



- 非周期信号
  - 周期をもたない信号
  - 非周期信号については，周期信号の一周期分を取り出した特殊なもの
- 信号の分析
  - 周期信号：フーリエ級数
  - 非周期信号：フーリエ変換

信号の周波数

- $g(t) = Acos(\omega t + \varphi)$
  - 角周波数: ω[rad/s]; 振幅 : A ; 初期位相: φ[rad]
  - $x(t) = x(t+T)$ ⇨ $Acos(\omega t + \varphi)$=$Acos(\omega(t+T) + \varphi)$=$Acos(\omega t + \varphi + \omega T)$
  - $cos\,\theta$ の周期T= 2πであり，任意 θ に対して

$$cos\,\theta = cos(\theta + 2\pi n) = cos\,\theta\, cos\, 2\pi n - sin\,\theta\, sin 2\pi n \qquad n \in Z$$

$$cos\, 2\pi n = 1,\ sin 2\pi n = 0$$

  - $\omega T = 2\pi n$

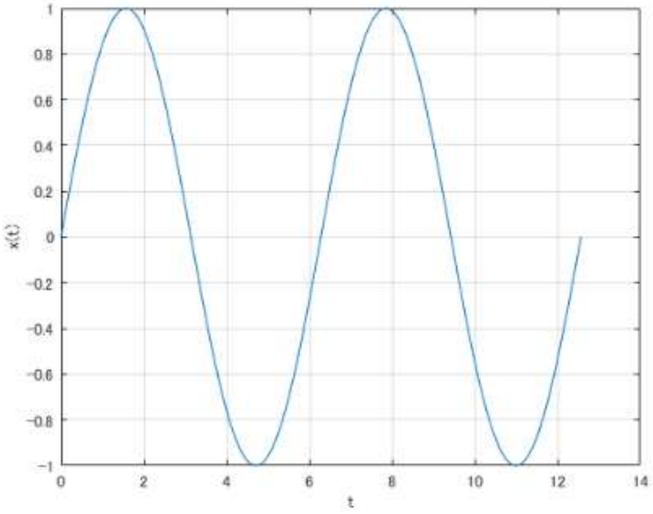
$T = \frac{2\pi n}{\omega}$　　　$T = \frac{1}{f}$　　　$n = 1$

⇩

周波数f [Hz] : $f = \frac{\omega}{2\pi}$

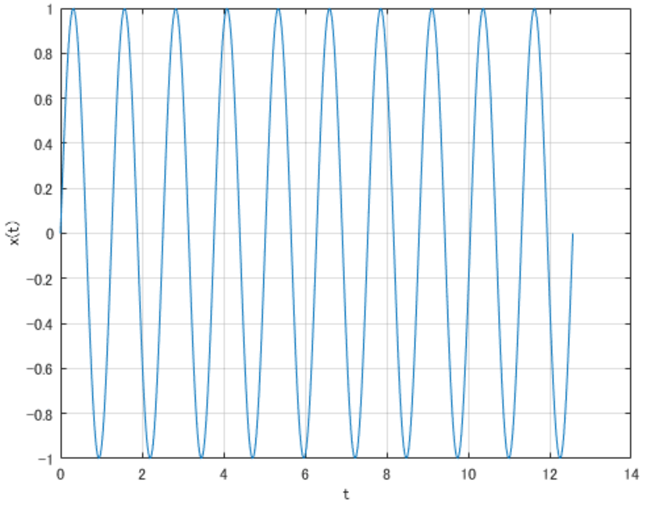
周波数の違う正弦波

低周波正弦波 sint



- 変動は少ない
- 周波数が低い
- 周期が長い
- 情報表現量は少ない

高周波正弦波 sin5t



- 変動は多い
- 周波数が高い
- 周期が短い
- 情報表現量は多い

三角関数系

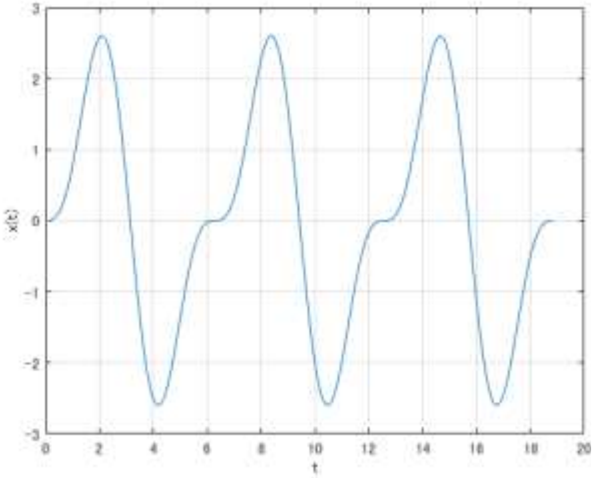
- 三角関数系：
  - 振幅，角周波数，位相の異なる三角関数の集まり.
    - 正弦関数，余弦関数，複素正弦関数
- 周期Tの信号は,
  - 短い周期をもつ三角関数系を重ね合わせて表すことができる.
    - $T/k, k = 1,2,3, \ldots$
  - 高い角周波数をもつ三角関数系を重ねあわて表せる.
    - $k\omega_0$, $k = 1,2,3, \ldots$

三角級数で表現できない関数は存在しない？

- ナポレオン時代のフランスの数学者フーリエ(J.B.J.Fourier, 1768–1830)

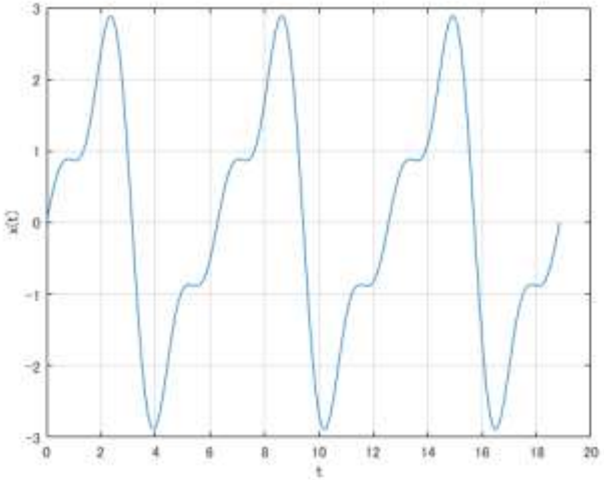
「三角級数で表現できない関数は存在しない」　やってみよう！

https://ja.wikipedia.org
wiki/ジョゼフ・フーリエ



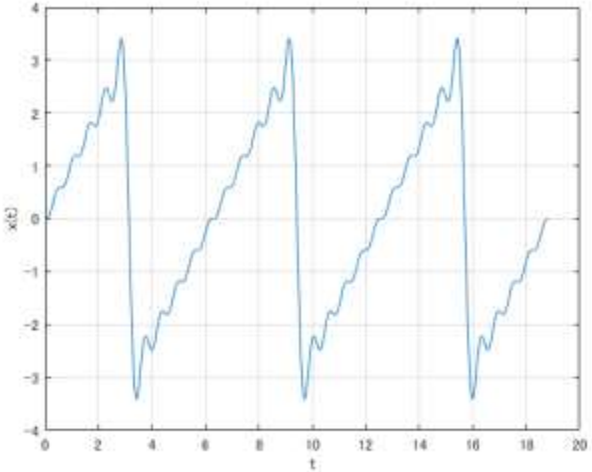
a. 簡単な三角級数

$$x(t) = 2sint - \sin 2t$$



b. 項を一つ加えてみると

$$x(t) = 2sint - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t$$



c. もっともっと項を増やす

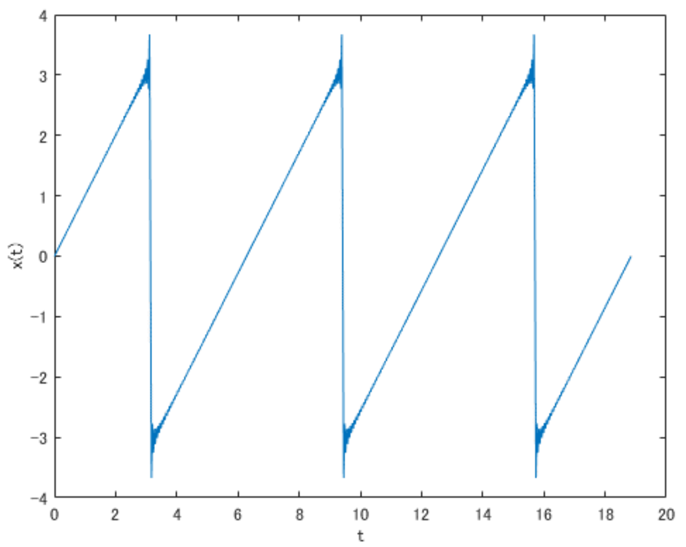
$$x(t) = 2sint - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \cdots - \frac{1}{5}\sin 10t$$

のこぎり波！

項の数$M=2$: $x(t)=2sint-\sin 2t$

項の数$M=3$: $x(t)=2sint-\sin 2t+\frac{2}{3}\sin 3t$

項の数$M=10$: $x(t)=2sint-\sin 2t+\frac{2}{3}\sin 3t-\cdots-\frac{1}{5}\sin 10t$

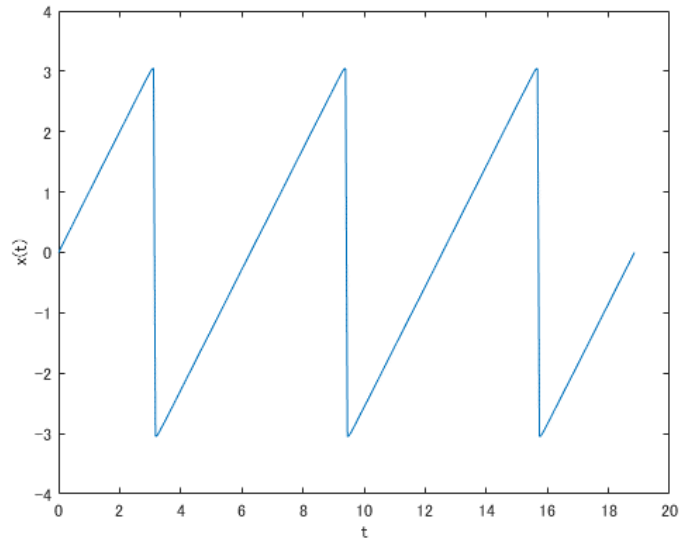


項の数、M=100

係数:$b_k=(-1)^{k+1}\frac{2}{k}$

$$x(t)=\sum_{k=1}^{M}(b_k\sin(kt))$$

b_k:角周波数kの正弦波の振幅，周波数成分の大きさ



項の数、M=1000

のこぎり波：$f(t)=t \quad (-\frac{T}{2}\leq t<\frac{T}{2})$

三角級数で表現できない関数は存在しない？

- ナポレオン時代のフランスの数学者フーリエ(J.B.J.Fourier, 1768–1830)

https://ja.wikipedia.org/wiki/ジョゼフ・フーリエ

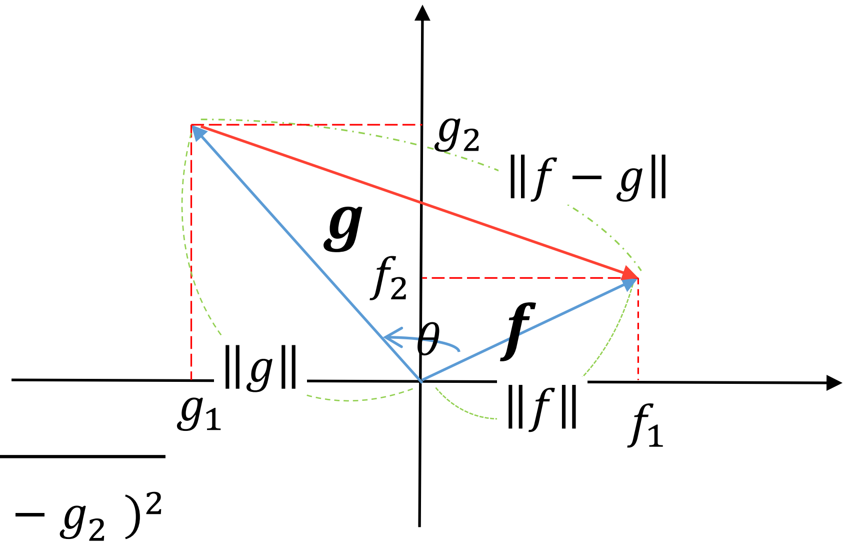
「三角級数で表現できない関数は存在しない」

下記のことを理解した上にフーリエ級数を導く

- 2次元ベクトル→N次元ベクトル→関数系
- 距離，内積
- 正規直交，相関関係

二つの2次元のベクトル信号

- 二つの2次元のベクトル信号$\boldsymbol{f}$=$(f_1\ ,f_2\ )^T$,$\boldsymbol{g}$=$(g_1\ ,g_2\ )^T$である
  - 信号の大きさ:ベクトルのノルム
  - 二つの信号の違い:ベクトル間の距離



ベクトル$\boldsymbol{f}$のノルム：$\|\boldsymbol{f}\|$=$\sqrt{f_1^2+f_2^2}$

ベクトル$\boldsymbol{g}$のノルム：$\|\boldsymbol{g}\|$=$\sqrt{g_1^2+g_2^2}$

ベクトル$\boldsymbol{f}$と$\boldsymbol{g}$の距離：$\boldsymbol{d}(\mathbf{f},\boldsymbol{g})=\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|$=$\sqrt{(f_1\ -g_1\ )^2+(f_2\ -g_2\ )^2}$

ベクトル$\boldsymbol{f}$と$\boldsymbol{g}$の余弦定理：$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|^2$=$\|\boldsymbol{f}\|^2$+$\|\boldsymbol{g}\|^2$−2$\|\boldsymbol{f}\|\|\boldsymbol{g}\|\cos\boldsymbol{\theta}=\|\boldsymbol{f}\|^2$+$\|\boldsymbol{g}\|^2$−2$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$

$2\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle=\|\boldsymbol{f}\|^2+\|\boldsymbol{g}\|^2-\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|^2$=$(f_1^2+f_2^2)+(g_1^2+g_2^2)$-$\{(f_1\ -g_1\ )^2+(f_2\ -g_2\ )^2\}$=$2(f_1g_1+f_2g_2)$

ベクトル内積と距離

- 二つの2次元のベクトル信号fとg**の内積**:

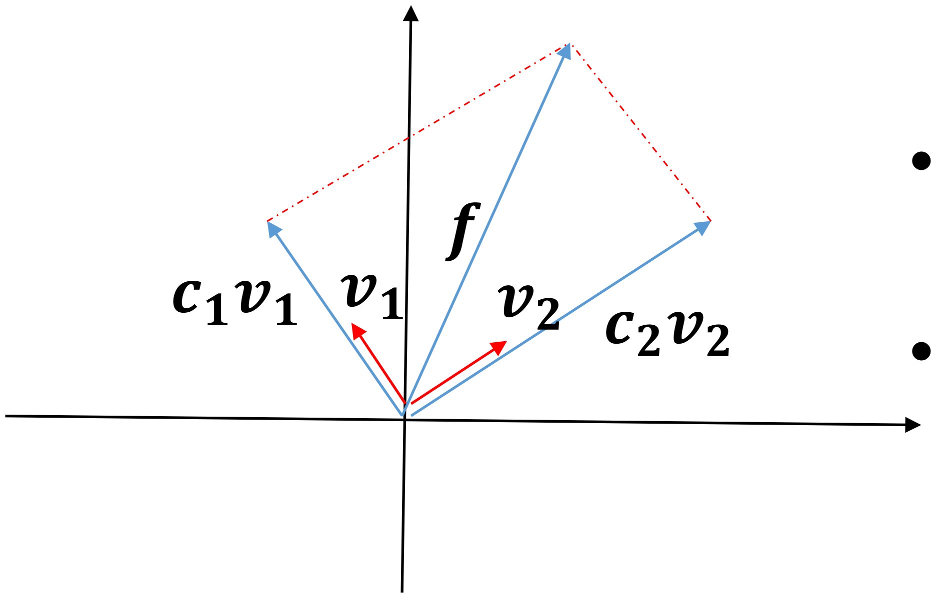
$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \|\boldsymbol{f}\| \|\boldsymbol{g}\| \cos \boldsymbol{\theta}$$

ベクトル$\boldsymbol{f}$ と$\boldsymbol{g}$の余弦定理

$$\cos \boldsymbol{\theta} = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle}{\|\boldsymbol{f}\| \|\boldsymbol{g}\|} \Rightarrow \boldsymbol{r} = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle}{\|\boldsymbol{f}\| \|\boldsymbol{g}\|} \rightarrow \boldsymbol{r} = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

- 距離が小さいほどベクトルの関係は強い
- 内積が大きいほどベクトルの関係は強い
- rを相関係数という
  - 相関係数はベクトル間の角度を表し，信号の似ている度合いを表す
  - 相関関数が大きいほど信号は似ている
  - 相関関数が0のとき，ベクトルは直交している

正規直交基底



- 正規直交基底とは，互いに直交するベクトル $\{v_1, v_2\}$ 直交基底で，$\|v_1\|=\|v_2\|=1$ の場合．
- 任意のベクトル：

$$f=c_1 v_1+c_2 v_2$$

- 係数は内積を使うこと：

$$c_1=\langle f, v_1\rangle,\ c_2=\langle f, v_2\rangle$$

↓ 証明

$$\langle v_1, v_1\rangle = \|v_1\|^2=1$$
$$\langle v_2, v_1\rangle = 0$$

→ $f=c_1 v_1+c_2 v_2$ の両辺と v_1 と内積をとることで，

$$\langle f, v_1\rangle=\langle c_1 v_1+c_2 v_2, v_1\rangle=\langle c_1 v_1, v_1\rangle+\langle c_2 v_2, v_1\rangle=c_1\langle v_1, v_1\rangle+c_2\langle v_2, v_1\rangle$$

↓

$$c_1=\langle f, v_1\rangle$$

同様に

$$c_2=\langle f, v_2\rangle$$

多次元ベクトル空間から関数空間へ

- ベクトルのノルム：2次元→ N 次元

ベクトルf ： ノルム$\|f\|=\sqrt{f_1^2+f_2^2}$ → ベクトル$\boldsymbol{f}$のノルム：$\|\boldsymbol{f}\|=\sqrt{f_1^2+f_2^2+\cdots+f_N^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{N} f_k^2}$

- 関数空間：無限次元空間

$$f(\mathrm{t})(a \leq t \leq b)\text{のノルム}\ \|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$$

- 空間$[a, b]$, 規格化した$f(t)$のノルム：

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2 dt}$$

関数の距離

- ベクトル→関数　　　　和→積分

N次元のベクトル$\boldsymbol{f}$ と$\boldsymbol{g}$の距離：$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (f_k - g_k)^2}$

$[a, b]$上の二つの関数$f(t)$と$g(t)$の距離：$d(f(t), g(t)) = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b \{f(t) - g(t)\}^2 dt}$

ベクトルの距離と同じように関数の距離が物量の類似性を測る.

関数の内積

- 二つのN次元のベクトル信号fとgの内積:

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \|\boldsymbol{f}\|\|\boldsymbol{g}\| \cos \boldsymbol{\theta} = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_N g_N = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} f_k g_k$$

- 相関係数:$\boldsymbol{r} = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle}{\|\boldsymbol{f}\|\|\boldsymbol{g}\|}$

- $[a, b]$上の二つの関数$f(t)$と$g(t)$の内積:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b-a}} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(t) g(t) dt$$

- 相関係数:$\boldsymbol{r} = \frac{\langle f(t), g(t) \rangle}{\|f(t)\|\|g(t)\|}$

関数間の相関

- 正の相関がある $r > 0$
- 相関がない $r = 0$
- 負の相関がある $r < 0$

例：$f(t) = t,\ g(t) = 1$の二つの関数は，tの区間$[-1,1]$で直交するか？

$$< t, 1 >= \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} tdt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0$$

tの区間$[-1,1]$で直交する.

クロネッカーデルタ

- N次元のベクトル空間のベクトルの集合　$\{v_k, k = 1,2, \ldots, N\}$

$$\langle v_m, v_n \rangle = \begin{cases} 0: & m \neq n \\ 1: & m = n \end{cases}$$ N次元の正規直交基底

- クロネッカーデルタ

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0: & m \neq n \\ 1: & m = n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \langle v_m, v_n \rangle = \delta_{mn}$$

正規直交関数系(1/2)

- N次元のベクトル：$\boldsymbol{f}$=$c_1\boldsymbol{v_1}$+$c_2\boldsymbol{v_2}$+⋯+$c_N\boldsymbol{v_N}$
- 係数は内積を使うこと:
  正規直交基底の性質: $\langle\boldsymbol{v_k},\boldsymbol{v_k}\rangle=\|\boldsymbol{v_k}\|^2=1$　　$\langle\boldsymbol{v_m},\boldsymbol{v_k}\rangle=0$　　$m\neq k$
  c_k=$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v_k}\rangle$ $(k=1,2,\ldots,N)$
- c_kは，$\boldsymbol{f}$の中に含まれる$\boldsymbol{v_k}$成分の大きさ.
- 多くの関数を含む集合：$\{\phi_k(t),k=0,1,2,\ldots\}$
- 区間$[a,b]$で直交した二つ関数の内積：$\langle\phi_m(t),\phi_n(t)\rangle$=$\frac{1}{b-a}\int_a^b\phi_m(t)\phi_n(t)\,dt$=0
  （m, n =0,1,2,⋯, $m\neq n$ ）この関数の族を直交関数系という
- 関数のノルムが1：$\langle\phi_m(t),\phi_m(t)\rangle$=$\|\phi_m(t)\|^2$=$\frac{1}{b-a}\int_a^b\phi_m^2(t)\,dt$=1 ⟹ 正規直交関数系

正規直交関数系(2/2)

- クロネッカーデルタを用いて書くと: $\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \delta_{mn}$
- 正規直交関数系を用いて、関数$f(t)$:

$$f(t) = c_0\phi_0(t) + c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\phi_k(t)$$

- 正規直交関数系の定義から，$m \neq k$ の組合せの内積はすべて0で，

$$c_k = \langle f(t), \phi_k(t) \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\phi_k(t)\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$