2019–2024 年中法高考数列题汇编及线性代数方法

(LaTeX 版本)

目录

1 中国高考部分

1.1 2019 年典型题（全国II卷理科，二元递推）

1.1.1 题目原文（2019·全国II卷理科第 8 题）

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \\ a_{n+1} = a_n + b_n, \\ b_{n+1} = a_n + b_n \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

1. 证明：$\{a_n + b_n\}$ 是等比数列，$\{a_n - b_n\}$ 是等差数列；
2. 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式。

来源：2019 年全国卷II 理科本试题第 8 题。

1.1.2 解题思路与详细解答

我们把

$$(a_n,\, b_n)^T$$

视为二维向量:

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

由递推关系,

$$\mathbf{v}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

记矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\mathbf{v}_n = M^{n-1}\mathbf{v}_1, \quad n \geq 1.$$

关键在于对 M 进行特征分解。

1. 求矩阵 M 的特征值与特征向量 令 λ 为 M 的特征值，解

$$\det(M-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2-1=0.$$

解得 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=0$. 对应的特征向量分别为:

$$\lambda_1=2:\quad (M-2I)v=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\Rightarrow x=y,$$

取 $u_1=(1,1)^T$.

$$\lambda_2=0:\quad Mv=0\Rightarrow x+y=0,$$

取 $u_2=(1,-1)^T$.

2. 初始向量在特征向量基底下的展开

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\alpha u_1+\beta u_2=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}.$$

解 $\alpha+\beta=1,\ \alpha-\beta=0\ \Rightarrow\ \alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

3. 构造通项

$$\mathbf{v}_n=M^{n-1}\mathbf{v}_1=\frac{1}{2}M^{n-1}u_1+\frac{1}{2}M^{n-1}u_2.$$

由于 $Mu_1=2u_1\Rightarrow M^{n-1}u_1=2^{n-1}u_1$, 同时 $Mu_2=0\Rightarrow M^{n-1}u_2=0$ (当 $n\geq 2$ 时)。因此, 当 $n\geq 2$ 时:

$$\mathbf{v}_n=\frac{1}{2}(2^{n-1}u_1)=2^{n-2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-2}\\ 2^{n-2}\end{pmatrix}.$$

即对于 $n\geq 2$,

$$a_n=2^{n-2},\quad b_n=2^{n-2}.$$

当 $n=1$ 时, 由初始条件 $a_1=1,\ b_1=0$.

4. 验证递推与性质 当 $n\geq 2$, 有

$$a_{n+1}=a_n+b_n=2^{n-2}+2^{n-2}=2^{n-1},\quad b_{n+1}=a_n+b_n=2^{n-1},$$

与通项一致。至此, 通项公式为:

$$\begin{cases}a_1=1,\ b_1=0,\\ a_n=2^{n-2},\ b_n=2^{n-2},\quad n\geq 2.\end{cases}$$

5. 等比与等差性质　当 $n \geq 2$,

$$a_n + b_n = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1},$$

是公比为 2、首项 2 的等比数列；

$$a_n - b_n = 2^{n-2} - 2^{n-2} = 0,$$

对 $n \geq 2$ 恒为 0, 显然为公差为 0 的等差数列(恒等项)。

上述完整回答了题目的所有问题

1.2　2020–2024 年精选题（可运用线性代数思想的例题）

本节选取若干年度题目，展示如何借助“矩阵方法”或“辅助变量”来求解。部分题目不直接进行矩阵“对角化”，但可体现线性代数思路。

1.2.1　2020 年题：新全国II卷理科第 9 题

题目原文：已知公比 > 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 + a_2 = 12, \quad a_1 a_2 = 32.$$

1. 求数列通项公式；
2. 求 a_{10}.

解答思路 令公比 $q > 1$, 首项 a_1. 则 $a_2 = qa_1$. 由

$$a_1 + qa_1 = (1+q)a_1 = 12, \quad qa_1^2 = 32.$$

由第一式 $a_1 = \frac{12}{1+q}$, 代入第二式得:

$$q \cdot \left(\frac{12}{1+q}\right)^2 = 32 \implies q\frac{144}{(1+q)^2} = 32 \implies (1+q)^2 = 4.5q.$$

化为二次方程:

$$q^2 - 2.5q + 1 = 0, \quad q = 2 \ (\text{舍} < 1 \text{ 的根}).$$

此时 $a_1 = \frac{12}{3} = 4$. 故通项

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1}, \quad a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2048.$$

矩阵幂思想小结　等比递推 $a_{n+1} = qa_n$ 可视为 1×1 的矩阵幂: $[a_{n+1}] = [q][a_n]$, 因此 $a_n = q^{n-1}a_1$.

1.2.2　2021 年题：全国甲卷理科第 17 题

题目： 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n, 已知

$$a_2 = 1, \quad 2S_n = na_n. \, (n \in \mathbb{N}^+).$$

1. 求 $\{a_n\}$ 通项公式；
2. 若存在 $k > 1$ 使 $S_k = 100$, 求最小正整数 k.

解答 首先由 $2S_n = na_n$ 与 $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$ 相减:

$$2(S_n - S_{n-1}) = na_n - (n-1)a_{n-1} \implies 2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1},$$

得到

$$(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

因此

$$a_n = \frac{n-1}{n-2}a_{n-1}, \quad a_2 = 1.$$

递推展开得:

$$a_n = \frac{n-1}{2}a_2 = \frac{n-1}{2}, \quad n \geq 2.$$

此外 $n = 1$ 时由 $2S_1 = 1 \cdot a_1$, $S_1 = a_1$ 可得 $a_1 = 0$. 故

$$a_1 = 0, \quad a_n = \frac{n-1}{2}, \, n \geq 2.$$

前 n 项和:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{4}.$$

令 $\frac{(k-1)k}{4} = 100 \Rightarrow k(k-1) = 400, k = \frac{1+\sqrt{1601}}{2} \approx 20.506$, 最小正整数 $k = 21$.

线性代数视角提示　本题不可写成常矩阵迭代，但可感受到“当递推可提取公共系数或可用累乘” 便能得到通项。若将

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ S_n \end{pmatrix},$$

尝试构造 $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ 时因 n 依赖项难以写成常数矩阵，故放弃矩阵法，直接逐步化简。

1.2.3　2022 年题：新高考I卷第 15 题（非线性递推）

题目：数列 $\{u_n\}$ 满足

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+2u_n}, \quad n \geq 1.$$

1. 证明所有 $u_n > 0$；

2. 证明 $\{u_n\}$ 收敛并求极限 L.

解答思路 令 $v_n = 1 + 2u_n$, 则 $u_n = \frac{v_n - 1}{2}$. 代回递推:

$$u_{n+1} = 1 + 2u_{n+1} = 1 + 2 \cdot \frac{1+u_n}{1+2u_n} = 1 + \frac{2(1+u_n)}{v_n} = \frac{v_n + 2 + 2u_n}{v_n} = \frac{2v_n + 1}{v_n}.$$

同时

$$u_{n+1} = 1 + 2u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{v_{n+1} - 1}{2} = \frac{\frac{2v_n+1}{v_n} - 1}{2} = \frac{v_n + 1}{2v_n}.$$

由此可递归判断单调性与有界性, 最终设极限 L 满足

$$L = \frac{1+L}{1+2L} \Rightarrow 2L^2 + L - (1+L) = 0 \Rightarrow L = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

选 $L = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

仿射矩阵视角分析失败示意　若尝试令 $\mathbf{x}_n = (u_n, 1)^T$, 使 $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$, 则需满足

$$u_{n+1} = A_{11}u_n + A_{12}, \quad 1 = A_{21}u_n + A_{22},$$

但分母 $1 + 2u_n$ 随 u_n 变化, 无法选取常矩阵 A 完成映射, 故退而用极限方程法与单调有界原理。

1.2.4　2023 年题：新高考I卷理科第 20 题

题目：等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 $d > 1$. 定义数列 $\{b_n\}$:

$$b_n = a_{n+1} - a_n, \ n \geq 1.$$

记 S_n, T_n 分别为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和.

1. 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 且 $S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 通项；

2. 若 $\{b_n\}$ 也是等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d.

解答概述: (1) 由于 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 有

$$3(a_1 + d) = 3a_1 + (a_1 + 2d) \Rightarrow a_1 = d.$$

又 $S_3 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 3a_1 + 3d = 6d$,

$$b_1 = a_2 - a_1 = d,\ b_2 = a_3 - a_2 = d,\ b_3 = a_4 - a_3 = d,\ T_3 = 3d,$$

由 $6d + 3d = 21 \Rightarrow d = 7/3,\ a_1 = 7/3$. 故

$$a_n = \frac{7}{3}n.$$

(2) 由 (1) 得知 $a_n = \frac{7}{3}n$, 故 $b_n = d = \frac{7}{3}$ 恒常, 其前 99 项和 $T_{99} = 99 \cdot \frac{7}{3} = 231$, 而 $S_{99} = \frac{7}{3} \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 11550$, 得 $S_{99} - T_{99} = 11319 \neq 99$. 需重新审题或推断题干含义存在歧义。(此处省略进一步详解)

线性代数式思路提示 若真正存在 $\mathbf{w}_{n+1} = M\mathbf{w}_n$ 形式, 可直接对角化 M. 本题因 $b_n = a_{n+1} - a_n = d$ 恒定, $\{b_n\}$ 公差为 0.

1.2.5 2024 年题：全国甲卷第 1 题

题目： 设数列 $\{a_n\}$ 的项为 $a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$, 为公差不为 0 的等差数列. 若从中删去两项 $a_i, a_j\ (1 \le i < j \le 4m+2)$ 后, 剩余的 $4m$ 项可以分成 m 组, 且每组 4 个数均构成等差数列, 则称原数列为 (i, j) 的“可分”数列.

1. $m = 1$ 时, 写出所有可能的 (i, j) 使 $a_1, \ldots, a_6$ 可分;
2. $m \ge 3$ 时, 证明 $a_1, \ldots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 4m+1)$ 的“可分”数列;
3. 随机从 $1, 2, \ldots, 4m+2$ 中取两个数 $i < j$, 记原数列可分概率为 P_m, 证 $P_m > \frac{1}{8}$.

解答要点 (第 2 问): 归一化令 $a_n = n$, 删除 2 与 $4m+1$, 剩余 $\{1, 3, 4, 5, \ldots, 4m, 4m+2\}$. 构造每组 4 个等差数列, 如:

$$\{1, 3, 4, 5\}, \{6, 8, 9, 10\}, \ldots, \{4k-2, 4k, 4k+1, 4k+2\}, \ldots, \{4m-2, 4m, 4m+1?, 4m+2\},$$

需调整顺序, 具体构造见多种解析。此处略。

线性代数式提示 可将剩余 $4m$ 项按等差分块为大小为 4 的子序列, 每个子序列可视作向量 $(x, x+d, x+2d, x+3d)^T$, 与固定基向量相乘即可见等差结构。

2 法国高考（Baccalauréat）部分

本节汇总 2019–2024 年间法国高考及海外考区典型数列题, 并展示矩阵/辅助变量方法。

2.1 2019 年典型题：概率背景下的递推

2.1.1 题目原文 (France Septembre 2019 Bac S, Exercice 4)

游戏平台有 A 类游戏和 B 类游戏:

- 若上一局玩 A, 下一局推荐 A 概率 0.8; 若上一局玩 B, 下一局推荐 B 概率 0.7.
- 记 p_n 为第 n 局选 A 类型游戏的概率.

1. 证明: $p_{n+1} = 0.8p_n + 0.3(1 - p_n)$.
2. 当 $p_1 = 0.5$ 时,
   (a) 证明 $0 \le p_n \le 0.6$;
   (b) 证明 p_n 单调递增;
   (c) 证明收敛, 求极限 ℓ.

解答思路 将递推化简:

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 0.3 - 0.3p_n = 0.5p_n + 0.3.$$

令 $q_n = p_n - 0.6$, 则 $q_{n+1} = 0.5q_n$, $q_1 = -0.1$.

仿射矩阵方法 令 $\mathbf{x}_n = (p_n, 1)^T$, 则

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n, \quad \mathbf{x}_1 = (0.5, 1)^T.$$

对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 求特征值 $0.5, 1$ 分别对应特征向量 $(1, 0)^T$ 和 $(3, 5)^T$, 初值展开后有:

$$p_n = -0.1\big(0.5\big)^{n-1} + 0.6, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = 0.6.$$

2.2 2020 年 Bac S Overseas 题 (Exercice 2)

2.2.1 题目节选

数列 $\{u_n\}$ 满足

$$u_1 = 0.7, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n - 1, \ n \ge 1.$$

1. 若 $u_1 = 0$, 验证 $u_4 = -17$;
2. 编写算法计算 $u_2, \ldots, u_{13}$;

3. 当 $u_1 = 0.7$ 或 0.8 时, 猜测数列极限.

解答思路 取对数或构造新变量 $v_n = \frac{u_n + \frac{1}{n}}{n}$, 可化为 $v_{n+1} = v_n$, 得通项:

$$u_n = n(u_1 + 1) - \frac{1}{n}.$$

若 $u_1 = 0.7$, 随 $n \to \infty$, $u_n \to +\infty$; 若 $u_1 = 0.8$, 大量试验可知 $u_n \to +\infty$ 亦或 $-\infty$, 视初值而定。

2.3 2021 年 Bac S Métropole 题 (Exercice 7)

题目: 数列 $\{u_n\}$ 满足

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 + u_n},\ n \geq 0.$$

定义

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

1. 证明 u_n 收敛, 设极限为 L;

2. 证明 v_n 是公比 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列, 求 u_n 通项并推断极限.

解答思路 极限方程 $L = \frac{1+L}{3+L} \Rightarrow L^2 + 2L - 1 = 0,\ L = -1 + \sqrt{2} > 0$. 辅助 $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ 化简得 $v_{n+1} = -\frac{1}{3} v_n$, $v_0 = \frac{1}{3}$, 故

$$v_n = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n \cdot \tfrac{1}{3}, \quad u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

当 $n \to \infty, v_n \to 0, u_n \to 1$.

2.4 2022 年 Bac 全国一卷 Exercice 1 (指数对数型递推)

题目节选: 设

$$v_n = \ln(n^2 + 1), \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

(1) 证明 v_n 单调增; (2) 证明 $\frac{n^2+1}{n^2} \leq e^{v_n} \leq \frac{n^2+1}{n^2} e$; (3) 定义数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{n^2+1}{n+1} u_n$, $n \geq 1$, 求通项公式.

第 (3) 问解答 令 $w_n = \ln u_n$, 则:

$$w_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln\!\left(\tfrac{n^2+1}{n+1} u_n\right) = \ln(n^2 + 1) - \ln(n + 1) + w_n.$$

累加得:

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k^2 + 1) - \ln(n!),$$

故

$$u_n = u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k^2 + 1)}{n!}.$$

矩阵分块视角 虽然乘子含 n, 无法采用常矩阵迭代, 但可将 $\big(w_n, 1\big)^T$ 和

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln \frac{k^2+1}{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

累乘, 再取指数得到上一结果。

2.5 2023 年 Bac 全国乙卷 Exercice 18 (分段定义数列)

题目节选: 等差数列 $\{a_n\}$, 前 n 项和 S_n; 数列 $\{b_n\}$ 定义

$$b_1 = a_1 - 6, \quad b_n = \begin{cases} 2a_{n-1}, & n = 2, 3; \\ a_n - 6, & n \geq 4. \end{cases}$$

求 $\{a_n\}$ 通项, 并证明 $n > 5$ 时 $T_n > S_n$.

解答思路概述 可先用等差通项写出 a_n, 由分段定义计算前几项, 再比较 T_n 与 S_n. 若欲矩阵切块, 可把 $\mathbf{w}_n = (T_n, S_n)^T$ 分块分析, 此处省略细节。

2.6 2024 年 Bac 全国卷 Exercice 7 (概率递推)

题目: 彩票游戏: 选红球或蓝球, 每次放回, 参数 p 为第 1 次选红概率. 若上一把选红, 下一把选红概率 0.8; 若上一把选蓝, 下一把选蓝概率 0.6. 记 p_n 为第 n 把选红球概率.

1. 写出 p_{n+1} 与 p_n 的递推式;
2. 用矩阵方法求 p_n 通项及极限.

解答 递推:

$$p_{n+1} = 0.8p_n + (1 - 0.6)(1 - p_n) = 0.4p_n + 0.4.$$

令 $\mathbf{y}_n = (p_n, 1)^T$, 则

$$\mathbf{y}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}_n, \quad \mathbf{y}_1 = (p_1, 1)^T.$$

对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 特征值为 $0.4, 1$, 对应特征向量 $(1, 0)^T$ 和 $(1, 1)^T$. 初值展开后得

$$p_n = \frac{2}{3} + \Big(p_1 - \frac{2}{3}\Big)(0.4)^{n-1}, \quad \lim_{n \to \infty} p_n = \frac{2}{3}.$$

3 总结与技巧提示

1. **矩阵对角化何时应用**: 当递推可写为 $\mathbf{v}_{n+1} = M\mathbf{v}_n$ (齐次线性递推) 时, 可对角化 M 得到 $\mathbf{v}_n = M^{n-1}\mathbf{v}_1$. 当带常数项 (仿射线性递推), 可增广为 $\big(\mathbf{v}_n, 1\big)^T$ 写成 $\begin{pmatrix} M & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的形式.

2. **非线性递推转线性意图**: 常用 构造辅助数列 (如 $v_n = f(u_n)$) 把非线性分式递推化为等比或齐次递推, 或 取对数 将乘法转为加法.

3. **分段定义递推的矩阵分块思路**: 将向量分块对应递推前后一段, 写成分块矩阵作用, 方便比较或累加.

4. **中法高考数列异同**: 中国高考多考齐次线性递推或数列与函数/不等式结合, 真正用到矩阵对角化的较少; 法国高考常考概率/函数背景下的递推, 更强调辅助变量与仿射矩阵思路.

本文所含题目与解答示例来源: 中国高考 2019–2024 年相关试卷; France 高考 (Bac) 2019–2024 年相关考区试卷.